Zoologická zahrada diferenciálních rovnic

Toto je pomocný učební text, ve kterém jsou obsaženy základní pojmy, návody na řešení určitých typů rovnic a příklady. Tento text si v žádném případě nedělá nárok na matematickou korektnost, všechny věty o existenci a jednoznačnosti řešení a jejich důkazy jsou záměrně vynechány pro zvýšení srozumitelnosti textu. Všechny uvažované funkce jsou spojité na intervalech, kde jsou definovány. Dělíme-li někde celou rovnici funkcí, automaticky předpokládáme, že tato funkce je ve všech bodech zvoleného intervalu různá od nuly. Také se obávám, že by v textu mohly být ještě nějaké překlepy nebo chyby ve výpočtech.

1 Co je to obyčejná diferenciální rovnice?

Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu budeme rozumět rovnici

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \cdots, \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)) = 0, \tag{1}$$

kde F je funkce definovaná na nějaké podmnožině $\mathbf{R}^{n+1}$. Obvykle její definiční obor nezadáváme, ale chápeme ho jako množinu bodů, pro které má rovnice smysl.

Jinými slovy, diferenciální rovnice nám zadává předpis, který musí splňovat neznámá reálná funkce x jedné reálné proměnné t a její derivace do určitého řádu. Ve fyzice diferenciální rovnice obvykle vyjadřuje nějaký fyzikální zákon.

Máme-li více takových rovnic pro několik neznámých funkcí ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ...) hovoříme o *soustavě obyčejných diferenciálních rovnic.*

Řešením diferenciální rovnice rozumíme každou funkci $x(t)$ která vyhovuje této rovnici. Analogicky řešením soustavy rozumíme soubor funkcí ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ...), který vyhovuje dané soustavě. Graf řešení diferenciální rovnice nazýváme *integrální křivkou.* Soubor všech řešení dané rovnice nebo soustavy nazýváme *obecným* nebo *úplným řešením.* Rovnice s nimiž budeme pracovat obvykle mají nekonečně mnoho řešení, závislých na n libovolných konstantách (integrační konstanty), kde n je řád rovnice.

Jsou-li kromě rovnice 1 zadány navíc tzv. *počáteční podmínky* ve tvaru $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} = x_0^{(n-1)}$, hovoříme o *počáteční úloze.* U všech typů rovnic, kterými se budeme nyní zabývat

má počáteční úloha právě jedno řešení (libovolné konstanty „nastavíme“ na určitou hodnotu pomocí počátečních podmínek.)

V dalším textu se budeme zabývat pouze rovnicemi prvního řádu, tj. rovnicemi

$$F(t, x, \dot{x}) = 0,$$

soustavami lineárních rovnic prvního řádu a lineárními rovnicemi řádu druhého.

2 Diferenciální rovnice v životě

Diferenciální rovnice se objevují takřka na každém kroku. Nalezneme je všude tam, kde se něco mění v závislosti na jiných veličinách. Může to být například množství látky při chemických reakcích, populace živočichů, kurz eura, cena akcií na burze, rychlost pohybu, teplota atd. Ve fyzice a chemii jsou diferenciální rovnice schovány ve fyzikálních zákonech, v ekonomii nebo biologii se objevují v různých modelech, více či méně odpovídajících skutečnosti. Pro úvodní motivaci si uvedeme několik příkladů.

Fyzika

Druhý Newtonův zákon pro hmotný bod

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

je soustavou tří diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je časová závislost polohového vektoru $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ hmotného bodu. Integrální křivkou je trajektorie ve čtyřrozměrném časoprostoru, jejíž body odpovídají poloze hmotného bodu v různých časových okamžicích. Zadáním počáteční polohy $\vec{r}_0$ např. v čase $t_0 = 0$ a počáteční rychlosti $\vec{v}_0 = (\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0))$ získáme počáteční úlohu.

Chemie

Uvažujme chemickou reakci, při které se ze dvou látek A a B syntetizuje látka třetí. Na jeden gram výsledné látky je zapotřebí p

gramů látky A a $1-p$ gramů látky B. Předpokládejme, že smícháme množství a gramů látky A s množstvím b gramů látky B. Na počátku je hmotnost výsledné látky nulová. Rychlost chemické reakce, tj. změna hmotnosti výsledné látky s časem je rovna veličině $(a-px)(b-(1-p)x)$. Vidíme, že se zvětšujícím se množstvím výsledné látky, se bude rychlost reakce zmenšovat. Dále také závisí na tom, jaké množství výchozích látek smícháme a jak se tento poměr bude lišit od „ideálního“ poměru $\frac{p}{1-p}$. Získáme rovnici

$$\dot{x(t)} = (a - px(t))(b - (1-p)x(t)),$$

s počáteční podmínkou $x(0) = 0$.

Biologie

Uvažujme o vlkovi a zajíci. Předpokládáme-li, že zajíc má vždycky co žrát (trávy je všude dost), bude nárůst počtu zajíců uměrný jejich současnému počtu (čím více je zajíců, tím více dalších se narodí), zároveň jsou zajíci požíráni vlky a jejich úbytek je úměrný jak počtu vlků, tak počtu jich samých (čím více je zajíců, tím více jich každý vlk chytí a sežere, čím více je vlků, tím více zajíců sežerou). Co se vlků týče, ty nikdo nesežere, ale budou umírat hladem, jestliže nebude dostatek zajíců. Nárůst počtu vlků je tedy úměrný jak počtu vlků, tak počtu zajíců, kdežto úbytek je úměrný pouze počtu vlků. Získáváme tedy soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha z - \beta z \cdot v \\ \dot{v} &= -\gamma v + \delta z \cdot v. \end{aligned}$$

Konstanty α, β, γ, δ lze určit dlouhodobým pozorováním. Toto je tzv. *Lotka–Volterrova rovnice* (soustava nelineárních rovnic prvního řádu), má určitě triviální nulové řešení (všichni jsou mrtví), ale také má řešení netriviální, které si později určíme.

Ekonomie

Do tohoto textu uvítám další zajímavé příklady na diferenciální rovnice!!!

3 Obyčejné rovnice prvního řádu rozřešené vzhledem k derivaci

Jestliže lze rovnici zapsat ve tvaru

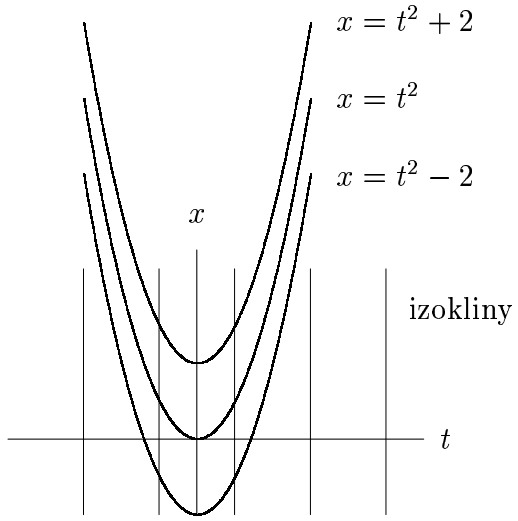
$$\dot{x}(t) = f(t, x), \tag{2}$$

pak o ní říkáme, že je *rozřešená vzhledem k derivaci.* Takovou rovnici lze poměrně snadno geometricky interpretovat. Nechť funkce $x = x(t)$ je nějaké řešení rovnice 2, pak hodnota funkce $f(t, x)$ v libovolném bodě $[t, x]$ nám udává směrnici tečny k integrální křivce (grafu funkce $x(t)$). Přiřazením $[t, x] \to f(t, x)$ získáme *směrové pole* dané diferenciální rovnice, tj. každé dvojici hodnot x a t přiřadíme číslo, jež je tangentou úhlu, který svírá tečna k integrání křivce procházející tímto bodem s osou t. Názorně si můžeme směrové pole nakreslit jako krátké úsečky a víme, že tyto úsečky budou tečnami k řešením rovnice procházejícím danými body. Množiny bodů (křivky), kde je funkce f konstantní se nazývají *izokliny.*

Příklad 1.: Nakreslíme si směrové pole, izokliny a integrální křivky rovnice

$$\dot{x} = 2t.$$

Izoklinami jsou množiny bodů t =konst., tj. přímky rovnoběžné s osou x. Řešením je každá funkce $x(t) = t^2 + c$, kde c je libovolná konstanta.



Obr.1 Směrové pole, izokliny a integrální křivky rovnice $\dot{x} = 2t$.

3.1 Rovnice se separovatelnými proměnnými a rovnice na ni převoditelné

Rovnice se separovatelnými proměnnými

Rovnice

$$\dot{x} = f(t) \cdot g(x), \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t) \cdot g(x) \tag{3}$$

je *rovnicí se separovatelnými proměnnými.* Je-li na uvažovaném intervalu funkce g různá od nuly, pak rovnici 3 můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = f(t)\mathrm{d}t,$$

následnou integrací

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\mathrm{d}t$$

a rozřešením vzhledem k x získáme hledané řešení, závislé na jedné integrační konstantě. Konstantu určíme z počáteční podmínky $x(t_0) = x_0$, je-li zadána.

Příklad 2.: Na těleso, pohybující se v tekutém prostředí, působí odporová síla o velikosti $F = C \cdot v^2$ proti směru pohybu. Předpokládáme-li, že žádné další síly již nepůsobí, získáváme diferenciální rovnici pro velikost rychlosti tělesa

$$m \cdot \dot{v} = -C \cdot v^2.$$

To je rovnice se separovatelnými proměnnými, budeme ji řešit:

$$\begin{aligned} \int m\frac{\mathrm{d}v}{v^2} &= -\int C\mathrm{d}t \\ -m\frac{1}{v} &= -C \cdot t + K \\ v &= \frac{m}{K + C \cdot t}. \end{aligned}$$

Známe-li počáteční rychlost $v(0) = v_0$, určíme integrační konstantu K:

$$v_0 = \frac{m}{K} \Rightarrow K = \frac{m}{v_0}$$

a tím dostaneme jediné řešení počáteční úlohy

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{Cv_0}{m}t}.$$

Toto řešení je sice definovávo pro libovolné $t \neq -\frac{m}{Cv_0}$, z fyzikálního hlediska má však smysl pouze pro kladné hodnoty t a přibližně odpovídá skutečnému pohybu jen v nějakém časovém intervalu (brzdná síla, kterou jsme předpokládali v zadání je pouze modelem pro velké rychlosti). Tyto skutečnosti je třeba si vždy uvědomovat, při řešení konkrétních problémů!

Příklad 3.: Nyní slibované řešení vlka a zajíce. Ze soustavy

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha z - \beta z \cdot v \\ \dot{v} &= -\gamma v + \delta z \cdot v, \end{aligned}$$

vyjádříme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} = \frac{\dot{z}}{\dot{v}} = \frac{\alpha z - \beta z v}{-\gamma v + \delta z v}.$$

Podělením čitatele i jmenovatele výrazem $z \cdot v$ je

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} = \frac{\frac{\alpha}{v} - \beta}{-\frac{\gamma}{z} + \delta}.$$

To je rovnice se separovatelnými proměnnými a její řešení získáme integrací

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z(-\frac{\gamma}{z} + \delta) &= \mathrm{d}v(\frac{\alpha}{v} - \beta) \\ \int \mathrm{d}z(-\frac{\gamma}{z} + \delta) &= \int \mathrm{d}v(\frac{\alpha}{v} - \beta) \\ -\gamma \ln z + \delta z &= \alpha \ln v - \beta v \ + C \\ z^{-\gamma} \cdot \mathrm{e}^{\delta z} &= K \cdot v^{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\beta v}. \end{aligned}$$

Konstantu K získáme tak, že zadáme počáteční počet zajíců a vlků.

Rovnice homogenní

Homogenní rovnicí nazýváme rovnici typu

$$\dot{x} = f(\frac{x}{t}). \tag{4}$$

Každou homogenní rovnici můžeme substitucí $u = \frac{x}{t}$ převést na rovnici se separovatelnými proměnnými, kterou již umíme řešit.

$$u = \frac{x}{t} \ \Rightarrow \ x = u \cdot t \ \Rightarrow \ \dot{x} = u + \dot{u} \cdot t,$$

a dosazením

$$u + \dot{u} \cdot t = f(u) \;\Rightarrow \dot{u} = \frac{f(u) - u}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

Příklad 4.: Řešme rovnici

$$(t + 2x) - t\dot{x} = 0$$

Podělením celé rovnice t získáme homogenní rovnici

$$1 + 2\frac{x}{t} = \dot{x},$$

substitucí

$$x = tu \;\Rightarrow\; \dot{x} = u + t\dot{u}$$

převedeme rovnici na tvar

$$1 + 2u = u + t\dot{u}$$

a řešíme rovnici se separovatelnými proměnnými

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{1 + 2u - u} &= \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\ln(1 + u) &= \ln t + C \\
1 + u &= Kt \\
1 + \frac{x}{t} &= Kt \\
x &= Kt^2 - t.
\end{aligned}$$

Dosazením do původní rovnice můžeme prověřit správnost výsledku.

Rovnice převoditelné na homogenní

Na homogenní rovnici dokážeme převést všechny rovnice typu

$$\dot{x} = f\left(\frac{\alpha x + \beta t + \gamma}{ax + bt + c}\right). \tag{5}$$

- Nechť $\gamma = c = 0$, pak můžeme rovnici 5 psát ve tvaru

$$\dot{x} = f\left(\frac{\alpha + \beta\frac{x}{t}}{a + b\frac{x}{t}}\right),$$

což je rovnice homogenní.

- Nechť tedy alespoň jedno z čísel γ, c je nenulové a navíc $\alpha b - a\beta \neq 0$. Pak soustava dvou lineárních rovnic pro neznámá čísla m a n

$$\begin{aligned} \alpha m + \beta n + \gamma &= 0 \\ am + bn + c &= 0 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení (proč?). Toto řešení nalezneme a zvolíme substituci

$$u = t - m, \quad v = x - n.$$

Pak zřejmě $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{\alpha(u+m) + \beta(v+n) + \gamma}{a(u+m) + b(v+n) + c}\right) = f\left(\frac{\alpha u + \beta v}{au + bv}\right).$$

Tím jsme se zbavili konstant c a γ a převedli tak rovnici na předchozí případ.

- Nechť je opět alespoň jedno z čísel γ, c nenulové a $\alpha b - a\beta = 0$. Případem, kdy $\alpha = a = 0$ nebo $\beta = b = 0$ se zabývat nemusíme, neboť pak by rovnice měla separovatelné proměnné. Buď tedy alespoň jedno z čísel α, a a alespoň jedno z čísel β, b nenulové. Předpokládejme, že $b \neq 0$ a ze vztahu $\alpha b - a\beta = 0$ vyjádříme $\alpha = \frac{a\beta}{b}$ (pokud by bylo $b = 0$, pak podle předpokladu $\beta \neq 0$ a postupovali bychom obdobně: $a = \frac{\alpha b}{\beta}$). Dosazením

$$\alpha t + \beta x + \gamma = \frac{\beta}{b}(at + bx) + \gamma,$$

$$\dot{x} = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}(at + bx) + \gamma}{at + bx + c}\right)$$

a použitím substituce $u = at + bx$ máme $\dot{u} = a + b\dot{x}$ a převedeme rovnici na tvar

$$\frac{1}{b}(\dot{u} - a) = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}u + \gamma}{u + c}\right),$$

která již má separovatelné proměnné.

Příklad 5.: Řešme rovnici

$$\dot{x} = (t + x + 2)^2.$$

Je tedy $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $a = b = c = 0$. Platí $a\beta - \alpha b = 0$. Použijeme substituci

$$t + x = u, \Rightarrow \dot{u} = 1 + \dot{x}, \Rightarrow \dot{x} = \dot{u} - 1,$$

dostáváme

$$\dot{u} - 1 = (u + 2)^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{(u + 2)^2 + 1} = \mathrm{d}t.$$

Rovnici integrujeme

$$\operatorname{arctg}(u + 2) = t + C, \Rightarrow u = \operatorname{tg}(t + C) - 2,$$

a obecné řešení je

$$x = \operatorname{tg}(t + C) - 2 - t.$$

Příklad 6.: Řešme rovnici

$$\dot{x} = \frac{t + x - 1}{t - x + 1}.$$

Vidíme, že $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$, $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $a\beta - \alpha b = 2 \neq 0$. Řešením soustavy $mx + ny - 1 = 0$, $mx - ny + 1 =$ jsou čísla $m = 0$, $n = 1$ a hledaná subsituce

$$u = t, \ v = x + 1, \Rightarrow v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \dot{x}.$$

Dosazením

$$v' = \frac{u + v}{u - v} = \frac{1 + \frac{v}{u}}{1 - \frac{v}{u}},$$

po další substituci $z = \frac{v}{u} \Rightarrow v' = z + u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}$ již řešíme rovnici se separovatelnými proměnnými

$$z + u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

3.2 Rovnice lineární

Rovnici, která má tvar

$$\dot{x} = f(t) \cdot x + g(t) \tag{6}$$

nazýváme *lineární diferenciální rovnicí prvního řádu*, je-li funkce $g(t)$ identicky nulová, pak mluvíme o rovnice *homogenní*, v opačném případě o *nehomogenní*. Řešení homogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$x = \mathrm{e}^{h(t)},$$

kde $h(t)$ je nějaká funkce proměnné t. Zderivováním získáme

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{h(t)} \cdot \dot{h}(t) = \dot{h}(t) \cdot x$$

a odtud

$$\dot{h}(t) = f(t) \;\Rightarrow\; h(t) = \int f(t)\mathrm{d}t.$$

Řešení nehomogenní rovnice můžeme najít například metodou *variace konstanty*. Nejprve určíme řešení zhomogenizované rovnice (tj. budeme řešit rovnici tak, jako kdyby funkce g bula nulová): $x_h = \mathrm{e}^{h(t)}$, $h(t) = \int f(t)\mathrm{d}t$. Řešení nehomogenní rovnice předpokládáme ve tvaru

$$x = x_h \cdot k(t) = \mathrm{e}^{h(t)} \cdot k(t).$$

Dosazením do původní nehomogenní rovnice dostaneme

$$\mathrm{e}^{h(t)} \cdot \dot{h}(t) \cdot k(t) + \mathrm{e}^{h(t)} \cdot \dot{k}(t) = \dot{h}(t) \cdot \mathrm{e}^{h(t)} \cdot k(t) + g(t)$$

a odtud

$$\dot{k}(t) \cdot \mathrm{e}^{h(t)} = g(t) \;\Rightarrow\; k(t) = \int \mathrm{e}^{-h(t)} \cdot g(t)\mathrm{d}t.$$

Příklad 7.: Řešme rovnici

$$\dot{x} = 2tx - \cos t.$$

Nejprve určíme řešení zhomogenizované rovnice

$$\dot{x} = 2tx,$$

tj.

$$x_h = \mathrm{e}^{\int 2t\mathrm{d}t} = K \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{t}^2}.$$

Řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou variace konstanty ve tvaru

$$x = K(t) \cdot \mathrm{e}^{t^2},$$

zderivováním a dosazením do původní rovnice

$$\dot{K}(t) = \cos t \;\Rightarrow\; K(t) = \sin t + C,$$

obecné řešení je

$$x = (\sin t + C)\mathrm{e}^{t^2}.$$

3.3 Rovnice Bernoulliova

Bernoulliova rovnice je rovnice tvaru

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^r, \quad r \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Podělením x^r můžeme rovnici 7 převést na tvar

$$\dot{x}x^{-r} = f(t)x^{1-r} + g(x),$$

tj.

$$\frac{1}{1-r}\frac{\mathrm{d}(x^{1-r})}{\mathrm{d}t} = f(t)x^{1-r} + g(t)$$

a substitucí $u = x^{1-r}$ získáme lineární rovnici

$$\dot{u} = (1-r)f(t)u + (1-r)g(t).$$

3.4 Rovnice exaktní

Rovnice

$$p(x,t)\mathrm{d}t + q(x,t)\mathrm{d}x = 0 \tag{8}$$

se nazývá *exaktní* jestliže levá strana této rovnice je úplným diferenciálem nějaké funkce $F = F(t,x)$ dvou proměnných t a x, tj. jestliže platí $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = p(t,x)$ a $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = q(t,x)$. Funkce F se pak nazývá *kmenová funkce*, je určena jednoznačně až na aditivní konstantu a řešení rovnice 8 je dáno implicitně vztahem

$$F(t,x) = 0.$$

Pokud platí $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}$ pak kmenová funkce vždy existuje a můžeme ji hledat.

$$F(t,x) = \int p\mathrm{d}t + f(x),$$

kde $f(x)$ je funkce pouze proměnné x, kterou určíme ze vztahu

$$q(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int p\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Příklad 8.: Nalezněte řešení rovnice

$$2t\mathrm{d}t + 2x\mathrm{d}x = 0.$$

Zřejmě $\frac{\partial 2t}{\partial x} = \frac{\partial 2x}{\partial t} = 0$ a výraz na levé straně je úplným diferenciálem.

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int 2t\mathrm{d}t + f(x) = t^2 + f(x), \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 + f'(x) = 2x \\ f(x) &= \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C, \end{aligned}$$

$$F(t,x) = t^2 + x^2 + C.$$

Řešení je dáno implicitně rovnicí

$$t^2 + x^2 + C = 0.$$

4 Rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci

4.1 Rovnice typu $x = f(t,\dot{x})$ a $t = f(x,\dot{x})$

4.2 Rovnice Clairautova

4.3 Rovnice Lagrangeova

5 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Rovnici

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \quad a,b \in \mathbf{R} \tag{9}$$

nazýváme *lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty.* Je-li funkce $f(t)$ indenticky nulová, hovoříme o *homogenní*, v opačném případě o nehomogenní rovnici. Kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

nazýváme *charakteristickou rovnicí* rovnice 9, její kořeny λ_1, λ_2 nazýváme *charakteristické kořeny.* Zabývejme se nyní řešením homogenní rovnice

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad a,b \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Rozlišujeme tři případy

- Charakteristické kořeny λ_1, λ_2 jsou navzájem různá reálná čísla. Pak obecné řešení rovnice 10 má tvar

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

- Charakteristické kořeny λ_1, λ_2 jsou komplexní čísla, navzájem komplexně sdružená, tj. $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = \alpha$ a $\mathrm{Im}\lambda_1 = -\mathrm{Im}\lambda_2 = \beta$. Pak obecné řešení rovnice 10 má tvar

$$x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

- Charakteristický kořen je dvojnásobný $\lambda_1 = \lambda_2$. Pak obecné řešení rovnice 10 má tvar

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 t \mathrm{e}^{\lambda_1 t}.$$

Ve všech třech případech představují čísla C_1 a C_2 libovolné konstanty, které můžeme určit z počátečních podmínek $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ a získat tím jednoznačné řešení.

Uvažujme nehomogenní rovnici 9, její obecné řešení je součtem obecného řešení x_h zhomogenizované rovnice (získaného předchozím postupem) a nějakého partikulárního řešení x_p původní nehomogenní rovnice. Partikulární řešení můžeme například „uhodnout“. Takové „uhodnutí“ lze snadno provést, je-li funkce $f(t)$ na pravé straně ve tvaru

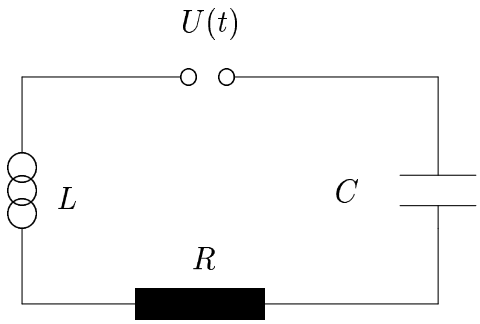
$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (P^n(t) \cos \beta t + Q^m(t) \sin \beta t), \tag{11}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a $P^n(t)$ resp. $Q^m(t)$ jsou polynomy stupně n resp. m proměnné t. Označmě s větší z čísel m, n. Partikulární řešení x_p můžeme hledat ve tvaru

$$x_p(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(a_s t^s + \ldots a_1 t + a_0) \cos \beta t + (b_s t^s + \ldots + b_1 t + b_0) \sin \beta t,$$

čísla $a_s, \ldots, a_0, b_s, \ldots, b_0$, určíme tak, že funkci x_p a její první a druhou derivaci dosadíme do levé strany rovnice 9 a porovnáme s pravou stranou.

Příklad 9.: Tlumený harmonický oscilátor s budicí silou
Uvažujme elektrický obvod, znázorněný na obrázku



Napětí na koncenzátoru je $\frac{q}{C}$, kde q je náboj a C kapacita kondenzátoru. Napětí na odporu je $R \cdot I = R\dot{q}$, kde R je odpor a $I = \dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ a konečně napětí na cívce je $L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L\ddot{q}$. Součet napětí na všech prvcích je roven budícímu napětí zdroje, které předpokládáme ve tvaru $U(t) = -U_0 \cos \omega t$. Získáváme tak nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t.$$

Poznámka: Všiměte si přesné analogie s tlumeným oscilátorem mechanickým, jehož rovnice je

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t).$$

Indukčnost odpovídá hmotnosti a výraz $\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$ je kinetickou energií, zatímco převrácená hodnota kapacity odpovídá tuhosti pružiny a výraz $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ je potenciální energie. Také řešení této rovnice bude vypadat úplně stejně.

Nejprve najdeme obecné řešení zhomogenizované rovnice

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Příslušná charakteristická rovnice

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

V případě, že $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ jsou kořeny reálné, a řešení zhomogenizované rovnice je

$$q_h(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

kořeny jsou oba záporné a náboj v obvodě klesá exponenciálně s časem. K vlastním kmitům vůbec nedojde, neboť tlumení je příliš velké.

V případě, že $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ je $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L}$ a dostáváme

$$q_h(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}}.$$

Nejzajímavější je případ, kdy $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ a kořeny jsou komplexní

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Označme $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (vztah pro vlastní frekvenci netlumeného oscilátoru známý již ze střední školy) a

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Platí $\omega_0^2 - {\omega_0'}^2 = \frac{R^2}{4L^2}$. Řešení nyní bude

$$q_h(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}}(A\cos\omega_0' t + B\sin\omega_0' t).$$

Oscilátor kmitá s vlastní frekvecí, která je díky tlumení pozměněna, amplituda náboje klesá exponenciálně s časem, takže po určité době jsou již vlastní kmity zanedbatelně malé.

Hledejme tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice, které po dostatečně dlouhé době (až budou vlastní kmity utlumeny na neměřitelnou hodnotu) bude určovat chování oscilátoru. Podle předchozího návodu, bychom měli hledat řešení ve tvaru

$$q_p(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t.$$

Pro ulehčení výpočtu přejdeme k formulaci pomocí komplexních čísel. Tak

$$\overline{q}_p(t) = \overline{Q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

dosadíme do původní rovnice a máme

$$\overline{Q}[-L\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}R\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] = \overline{U}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

a porovnáním

$$\overline{Q} = \frac{\overline{U}_0}{L(\frac{1}{LC} - \omega^2 + i\frac{R}{L}\omega)} = \frac{\overline{U}_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{R}{L}\omega)}.$$

Modul čísla $\overline{Q}$

$$|\overline{Q}| = \sqrt{\overline{Q} \cdot \overline{Q}^*} = \frac{U_0}{L\sqrt{(\omega_0 - \omega^2)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}}$$

a fáze

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{\frac{R}{L}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

hledané partikulární řešení je

$$q_p(t) = \frac{U_0}{L\sqrt{(\omega_0 - \omega^2)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}} \cos(\omega t + \theta) = Q\cos(\omega t + \theta).$$

Vidíme, že nakonec oscilátor kmitá s frekvencí budícího napětí, ale má přesně danou amplitudu Q, která kromě parametrů obvodu a amplitudy napětí U_0 závisí také na frekvenci budícího napětí. Budeme-li frekvenci budícího napětí měnit, může dojít k jevu, nazývanému *rezonance*.

Rezonance amplitudy náboje (u mechanického oscilátoru výchylky) nastane pro takovou hodnotu budící frekvence, kdy funkce

$$Q(\omega) = \frac{U_0}{L\sqrt{(\omega_0 - \omega^2)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2)}}$$

(amplituda náboje) nabýbá svého maxima, tj.

$$\frac{\mathrm{d}Q(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0.$$

Snadným výpočtem se přesvědčíme, že je to tehdy, když budící frekvence je přesně rovna vlastní frekvenci netlumeného oscilátoru ω_0.

Rezonance aplitudy proudu (u mechanického oscilátoru rychlosti) nastane pro takovou hodnotu budící frekvence, kdy funkce $\omega \cdot Q(\omega)$, která odpovídá amplitudě proudu (neboť $I = \dot{q} = -\omega Q \sin(\omega t + \theta)$) nabýbá svého maxima. Obecně rezonance proudu a náboje nenastávají pro stejnou hodnotu budící frekvence.

Princip superpozice

Všude kde je linearita, máme také princip superpozice, formulujeme ho následující větou. Zkuste si také vzpomenout, kde všude jste se již s tímto principem setkali?

Věta: Nechť $x_1(t)$, $x_2(t)$ jsou nějaká dvě řešení rovnice 10, pak také funkce $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$, kde a, b jsou libovolné konstanty je řešením rovnice 10.

Důsledek: Úplné řešení nehomogenní rovnice 9 je součtem úplného řešení rovnice zhomogenizované a nějakého partikulárního řešení rovnice původní.

6 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty se řeší podobně jako rovnice řádu druhého, charakteristická rovnice je potom také n-tého řádu a její kořeny se obtížně hledají. Tyto rovnice se ve fyzice neobjevují příliš často, nebudeme je proto nyní řešit.

7 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

Soustavou n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty rozumíme systém rovnic pro n neznámých funkcí $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ proměnné t ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^n x_n + b_1(t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= a_n^1 + \ldots + a_n^n x_n + b_n(t) \end{aligned} \tag{12}$$

Budeme používat také vektorový zápis této soustavy

$$\vec{\dot{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t).$$

Číselnou matici $A = (a_j^i)$ nazýváme maticí soustavy. Jsou-li funkce $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ identicky nulové, pak je soustava *homogenní*, v opačném případě je soustava *nehomogenní*. Naučíme se řešit homogenní soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^n x_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= a_n^1 + \ldots + a_n^n x_n \end{aligned} \tag{13}$$

Ke slovu opět přichází charakteristická matice a vlastní hodnoty.

Princip superpozice

I zde se nám objevuje princip superpozice:

Věta: Nechť systém funkcí $\vec{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ a $\vec{x}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$ jsou řešeními homogenní soustavy 13, pak také systém $\alpha\vec{x}(t) + \beta\vec{x}'(t) = (\alpha x_1(t) + \beta x_1'(t), \ldots, \alpha x_n(t) + \beta x_n'(t))$, kde α, β jsou libovolné konstanty, je řešením soustavy 13.

Důsledek: Obecné řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic je součtem obecného řešení soustavy zhomogenizované a nějakého partikulárního řešení původní nehomogenní soustavy.

Obecné řešení soustavy bude záviset na n libovolných konstantách, které můžeme určit z počátečních podmínek $x_1(t_0) = X_1$, ..., $x_n(t_0) = X_n$, (tj. $\vec{x}(t) = \vec{X}$). Nejprve určíme vlastní hodnoty matice A, tj. kořeny polynomu $\det(A - \lambda E)$. Ke každé vlastní hodnotě nalezneme právě tolik lineárně nezávislých řešení, jaká je její násobnost. Tato řešení nazýváme *fundamentální řešení příslušná vlastní hodnotě* λ. Libovolná lineární kombinace fundamentálních řešení bude podle principu superpozice opět řešením soustavy 13 a soubor všech těchto lineárních kombinacích nám dává řešení obecné. Nyní si ukážeme, jak určit příslušná fundamentální řešení.

Rozlišujeme tyto případy

- Kořen λ je jednonásobný, reálný, pak fundametnální řešení příslušné kořenu λ je
$$\vec{x}_\lambda = C\vec{u}_\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t},$$
kde $\vec{u}$ je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ, tj. $A \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u}$, C je libovolná konstanta.

- Kořen $\lambda = a + ib$ je komplexní a jednonásobný, pak také číslo $\lambda^* = a - ib$ je kořenem. Řešení příslušné těmto dvěma navzájem komplexně sdruženým kořenům je
$$\vec{x}_{\lambda,\lambda^*} = \mathrm{e}^{at}(C\vec{u}\cos bt + D\vec{v}\sin bt),$$
kde $\vec{u} + i\vec{v}$ je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ, tj. $A \cdot (\vec{u} + i\vec{v}) = \lambda(\vec{u} + i\vec{v})$, C, D jsou libovolné konstanty.

- Kořen λ je k-násobný, reálný, pak řešení hledáme ve tvaru
$$\vec{x}_\lambda = (\vec{u}_{k-1}t^{k-1} + \ldots \vec{u}_1 t + \vec{u}_0)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Neznámé vektory $\vec{u}_{k-1}, \ldots, \vec{u}_0$ určíme nejsnadněji tak, že dosadíme hledané řešení zpět do soustavy rovnic 13 a porovnáváme levé a pravé strany.

- Kořen $\lambda = a + ib$ je k-násobný, komplexní, pak také číslo $\lambda^* = a - ib$ je k-násobným kořenem a řešení příslušné těmto kořenům hledáme ve tvaru.

$$\vec{x}_\lambda = (\vec{u}_{k-1}t^{k-1} + \ldots \vec{u}_1 t + \vec{u_0})\mathrm{e}^t(C\cos bt + D\sin bt).$$

  Neznámé vektory $\vec{u}_{k-1}, \ldots, \vec{u}_0$ určíme nejsnadněji tak, že dosadíme hledané řešení zpět do soustavy rovnic 13 a porovnáváme levé a pravé strany.

U nehomogenní soustavy stačí opět uhodnout nějaké partikulární řešení. To umíme snadno v případě, že funkce $b_1(t)$, ..., $b_n(t)$ mají speciální tvar 11. Postupujeme podobně jako v případě lineární rovnice druhého řádu.

Příklad 10.: Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + z \\ \dot{y} &= y - z \\ \dot{z} &= y - z \end{aligned}$$

Charakteristický polynom

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)\lambda^2$$

má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 0$ a jednonásobný kořen $\lambda_3 = 1$. Řešení soustavy tedy hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= (D_x t + B_x)\mathrm{e}^{0t} + C_x\mathrm{e}^t, \\ y &= (D_y t + B_y)\mathrm{e}^{0t} + C_y\mathrm{e}^t, \\ z &= (D_z t + B_z)\mathrm{e}^{0t} + C_z\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

Dosadíme-li zpět do soustavy získáme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= D_x + C_x\mathrm{e}^t = (D_x t + B_x)\mathrm{e}^{0t} + C_x\mathrm{e}^t - \\ &\quad -(D_y t + B_y)\mathrm{e}^{0t} + C_y\mathrm{e}^t + (D_z t + B_z)\mathrm{e}^{0t} + C_z\mathrm{e}^t \\ \dot{y} &= D_y + C_y\mathrm{e}^t = (D_y t + B_y)\mathrm{e}^{0t} + C_y\mathrm{e}^t - (D_z t + B_z)\mathrm{e}^{0t} + C_z\mathrm{e}^t \\ \dot{z} &= D_z + C_z\mathrm{e}^t = (D_y t + B_y)\mathrm{e}^{0t} + C_y\mathrm{e}^t - (D_z t + B_z)\mathrm{e}^{0t} + C_z\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Porovnání koeficientů u e^t, e^0 a t získáme soustavu šesti rovnic o devíti neznámých

$$\begin{aligned}
D_x &= B_x - B_y + B_z, \\
D_y &= B_y - B_z, \\
D_z &= B_y - B_z, \\
0 &= D_x - D_y + D_z, \\
0 &= D_y - D_z, \\
0 &= D_y - D_z, \\
C_x &= C_x - C_y + C_z, \\
C_y &= C_y - C_z, \\
C_z &= C_y - C_z.
\end{aligned}$$

Odtud $C_y = C_z = 0$, $C_x = C$ je libovolné, $D_y = D_z = D$ je libovolné, $D_x = 0$, $B_x = D_y = D$, $B_z = B_y - D$, $B_y = B$ je libovolné. Podle očekávání nám tedy zůstanou tři volné neznámé (A, B, C) (integrační konstanty), které můžeme určit s dodatečných počátečních podmínek. Obecné řešení soustavy je

$$\begin{aligned}
x &= D + C\mathrm{e}^t, \\
y &= Dt + B, \\
z &= Dt + B - D.
\end{aligned}$$

Zpětným dosazením prověřte správnost výpočtu. Vidíme také, že jsme žádný vlastní vektor nemuseli hledat, místo složek vlastního vektoru příslušného $\lambda = 1$ jsme zvolili neznámé konstanty C_x, C_y, C_z a dosazením do soustavy nám vyšel vektor $\vec{u} = (C, 0, 0)^T$, který zřejmě splňuje $A \cdot \vec{u} = 1 \cdot \vec{u}$ a je tedy vlastní. Takto budeme většinou prakticky postupovat.

8 Co je to neobyčejná diferenciální rovnice?

Opravenka:

Strana 7, poslední řádek je vzorec

$$\dot{x} = f\left(\frac{\alpha x + \beta t + \gamma}{a x + b t + c}\right).$$

Správně má být:

$$\dot{x} = f\left(\frac{\alpha t + \beta x + \gamma}{a t + b x + c}\right).$$

Strana 13:

Hledání partikulárního řešení rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou.

Popsaným způsobem najdeme partikulární řešení pouze tehdy, jestliže číslo $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ není kořenem charakteristického polynomu zhomogenizované rovnice. V případě, že z je kořenem, a to k-násobným, je třeba hledat partikulární řešení ve stejném tvaru, ale místo čísla s musíme vzít $s + k$.

Dodatek o Wronskiánu

Uvažujme obecnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + b(t)x = f(t).$$

Rovnice s konstantními koeficienty je jejím speciálním případem. Nechť $x_1(t)$ a $x_2(t)$ jsou dvě libovolná lineárně nezávislá řešení zhomogenizované rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + b(t)x = 0.$$

Definujeme *wronskián* jako

$$W = x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2.$$

Výpočtem ověříme, že $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0$, tedy $W = konst$. Pro lineárně nezávislá řešení je $W \neq 0$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice pak vypočteme takto:

$$x_p = \frac{1}{W}\left[x_1 \int x_2 \cdot f(t)\mathrm{d}t - x_2 \int x_1 \cdot f(t)\mathrm{d}t\right].$$

Skutečnost, že x_p splňuje výše uvedenou rovnici si snadno ověříte přímým dosazením.