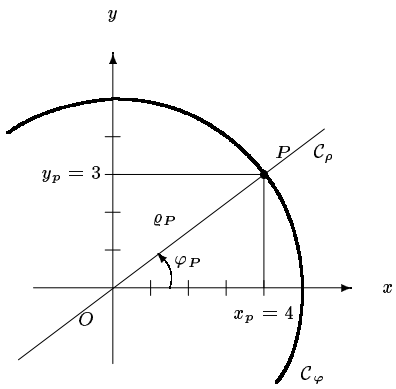
1 KŘIVOČARÉ SOUSTAVY SOUŘADNIC

1.1 Polární a válcové souřadnice

Význam *polárních souřadnic* ρ_P a φ_P (*radius a azimutální úhel*) bodu $P = [x_P\ y_P] \in \mathrm{R}^2$ je zřejmý z následujícího obrázku:



$P = [x_P\ y_P] = (4\ \ 3)$
$P = [\rho_P\ \ \varphi_P] = [5\ \ \arccos\frac{4}{5}]$
$P = \mathrm{C}_\rho \cap \mathrm{C}_\varphi$
$\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 | x = \rho_P \cos\varphi, y = \rho_P \sin\varphi, \varphi \in [0, 2\pi)\}$
$\mathrm{C}_\rho = \{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 | x = \rho \cos\varphi_P, y = \rho \sin\varphi_P, \rho \in [0, \infty)\}$

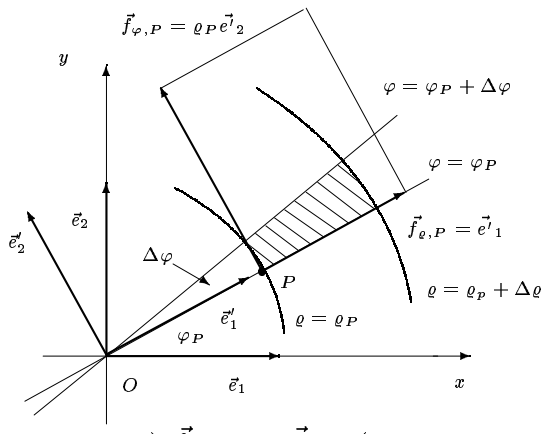
$\mathrm{C}_\varphi, \mathrm{C}_\rho$ jsou *souřadnicové křivky příslušné polárním souřadnicím.* Vztahy $x = \rho_P \cos\varphi$, $y = \rho_P \sin\varphi, \varphi \in [0\ \ 2\pi)$, resp. $x = \rho\cos\varphi_P, y = \rho\sin\varphi_P$, $\rho \in [0, \infty)$ jsou parametrickými rovnicemi kružnice C_φ (parametr φ) resp. přímky C_ρ (parametr ρ). Jejich obecné *kartézské rovnice* jsou $x^2 + y^2 = \rho_P^2$ resp. $x\mathrm{tg}\varphi_P - y = 0$, *polární rovnice* pak $\rho = \rho_P$, resp. $\varphi = \varphi_P$.
Platí (viz obrázek):

$x_P = \rho_P \cos\varphi_P \quad y_P = \rho_P \sin\varphi_P \quad$ a naopak $\quad \rho_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad \mathrm{tg}\varphi_P = \frac{y_P}{x_P}$

Nechť $X = [x\ y] \in \mathrm{R}^2$ je obecný bod roviny. Jsou-li ρ a φ jeho polární souřadnice, platí

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ \rho &\in [0, \infty) \\ \varphi &\in [0, 2\pi) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ \text{není definováno pro } x = y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Předchozí vztahy jsou převodními vzorci mezi dvojicí kartézských souřadnic $[x\ y]$ a dvojicí souřadnic polárních $[\rho\ \varphi]$ daného bodu.



$\vec{f}_{\rho,P} = \vec{e'}_1 = (\cos\varphi_P \quad \sin\varphi_P), \vec{f}_{\varphi,P} = \rho_P \vec{e'}_2 = (-\rho_P \sin\varphi_P \quad \rho_P \cos\varphi_P)$ jsou tečné vektory k souřadnicovým křivkám C_ρ a C_φ v bodě P.

Souřadnicové křivky určené polárními rovnicemi $\rho = \rho_P, \rho = \rho_P + \Delta\rho, \varphi = \varphi_P, \varphi = \varphi_P + \Delta\varphi$ vymezují v okolí bodu P tzv. *polární plošný element* o obsahu

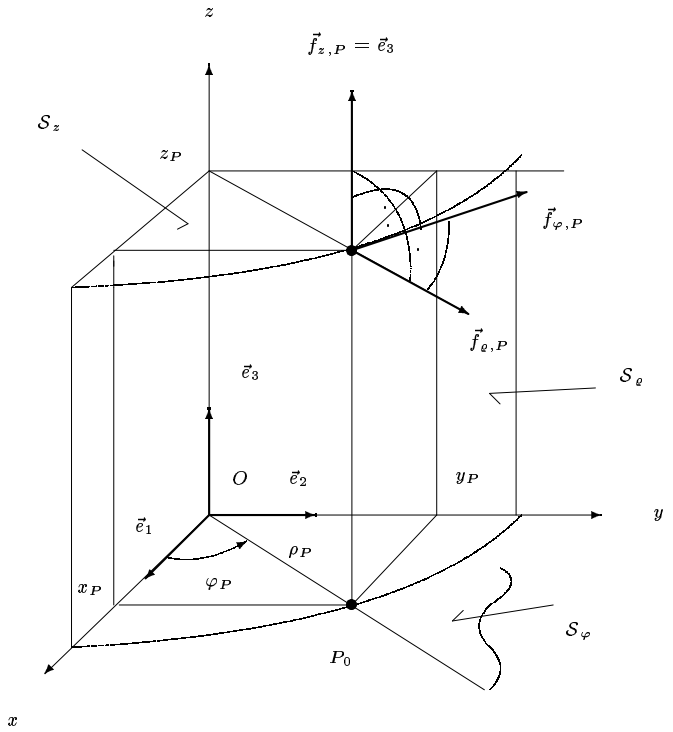
$$\Delta S_p = \frac{\pi\left(\rho_P + \Delta\rho\right)^2}{2\pi}\Delta\varphi - \frac{\pi\rho_P^2}{2\pi}\Delta\varphi \quad \text{(obsah výseče mezikruží)}\ .$$

$$\Delta S_p = \frac{\Delta\varphi}{2}\left(2\rho_P\Delta\rho + \Delta\rho^2\right) \approx \rho_P\Delta\rho\Delta\varphi\ ,$$

je-li $\Delta\rho$ velmi malé ve srovnání s ρ_P (pak totiž $\Delta\rho^2 \ll 2\rho_P\Delta\rho$ a lze tedy $\Delta\rho^2$ zanedbat). Obecně je

$$\Delta S_p \approx \rho\Delta\rho\Delta\varphi = |\vec{f}_\rho \times \vec{f}_\varphi|\Delta\rho\Delta\varphi\ .$$

Válcové (cylindrické) souřadnice bodu $P = [x_P \ y_P \ z_P] \in \mathrm{R}^3$ jsou odvozeny ze souřadnic polárních: $P = [\rho_P \ \varphi_P \ z_P]$, kde ρ_P, φ_P jsou polární souřadnice průmětu P_0 bodu P do souřadnicové roviny $z = 0$.



$P = \mathrm{S}_\rho \cap \mathrm{S}_\varphi \cap \mathrm{S}_z$, kde
$\mathrm{S}_\rho = \{[x\ y\ z] \in R^3 | x = \rho_P \cos\varphi, y = \rho_P \sin\varphi, \varphi \in [0\ 2\pi), z \in (-\infty, \infty) \text{ lib. }\}$
... válcová plocha
$\mathrm{S}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = \rho \cos\varphi_P, y = \rho \sin\varphi_P, \rho \in [0\ \infty), z \in (-\infty, \infty) \text{ lib.}\}$
... (svislá) rovina
$\mathrm{S}_z = \pi = \{[x\ \ y\ \ z] \in \mathrm{R}^3 | x \in (-\infty, \infty) \text{ lib.}, y \in (-\infty, \infty) \text{ lib.}, z = z_P\}$
... (vodorovná) rovina

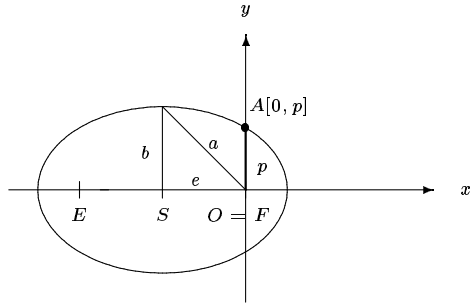
Uvedené vztahy představují parametrické rovnice *souřadnicových ploch příslušných válcovým souřadnicím.*

Poznámka: Jednodušší vyjádření ploch $\mathrm{S}_\rho, \mathrm{S}_\varphi, \mathrm{S}_z$ je spojeno přímo s válcovými souřadnicemi: $\mathrm{S}_\rho : \rho = \rho_P$, $\mathrm{S}_\varphi : \varphi = \varphi_P$, $\mathrm{S}_z : z = z_P$.

Souřadnicové plochy určené rovnicemi $z = z_P, z = z_P + \Delta z, \varphi = \varphi_P, \varphi = \varphi_P + \Delta\varphi, \rho = \rho_P, \rho = \rho_P + \Delta\rho$ vymezují v okolí bodu P tzv. *válcový (cylindrický) objemový element* o objemu $\Delta V_v = \rho_P \Delta\rho\Delta\varphi\Delta z$, obecně $\Delta V_v \approx \rho\Delta\rho\Delta\varphi\Delta z = |[\vec{f}_\rho, \vec{f}_\varphi, \vec{f}_z]|\Delta\rho\Delta\varphi\Delta z$, kde $\vec{f}_z = \vec{e}_3$ a $\vec{f}_\rho, \vec{f}_\varphi$ mají stejný význam jako v polárních souřadnicích.
Všimněte si, že $\vec{f}_\rho \perp \mathrm{S}_\rho$, $\vec{f}_\varphi \perp \mathrm{S}_\varphi$, $\vec{f}_z \perp \mathrm{S}_z$.

Aplikace: polární rovnice kuželoseček $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}$

Uvažujme o elipse E s poloosami a, b v základní orientaci, jejíž ohnisko je v počátku soustavy souřadnic $\mathrm{B} = \langle 0; x, y\rangle$ (viz obrázek).



Její kartézská rovnice má seminormální tvar

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vyjádříme ji v polárních souřadnicích, jestliže dosadíme $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Pak

$$(\rho\cos\varphi + e)^2 b^2 + \rho^2 a^2 \sin^2\varphi = a^2 b^2$$

Pro bod $A[0\ p]$ platí

$$\frac{e^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

tj.

$$e^2 b^2 + a^2 p^2 = a^2 b^2\ , \quad \text{odkud} \quad b^4 = a^2 p^2$$

Úpravou dostáváme

$$\rho^2 b^2 \cos^2\varphi + 2\rho e b^2 \cos\varphi + e^2 b^2 + \rho^2 a^2 - \rho^2 a^2 \cos^2\varphi = e^2 b^2 + a^2 p^2$$

$$\rho^2 a^2 - \left(\rho^2 e^2 \cos^2\varphi - 2\rho e a p \cos\varphi + a^2 p^2\right) = 0$$

$$\rho^2 - (\rho\epsilon\cos\varphi - p)^2 = 0\ , \quad \text{kde} \quad \epsilon = \frac{e}{a}\ ,$$

odkud

$$\rho\,(1 \pm \epsilon\cos\varphi) = \pm p$$

Prvá z možností $1+\epsilon\cos\varphi = \frac{p}{\rho}$ představuje pro $0 \le \epsilon < 1$ *polární rovnici elipsy* E se středem $S[-e\ 0]$ a osami rovnoběžnými s osami soustavy souřadnic.Polární rovnice má stejný tvar i pro kuželosečky H a P, jednotlivé případy se liší pouze možnými hodnotami číselné excentricity ϵ:

$$\frac{p}{\rho} = 1 + \epsilon\cos\varphi\ ,$$

kde $0 \le \epsilon < 1$ pro elipsu, $\epsilon = 1$ pro parabolu a $\epsilon > 1$ pro hyperbolu.

Úlohy

(1) Bod $P \in \mathrm{R}^2$ je zadán svými kartézskými souřadnicemi. Určete jeho souřadnice polární, složky vektorů $\vec{f}_\rho, \vec{f}_\varphi$ vzhledem k bázi $\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$ a vyjádřete polární plošný element v bodě P.

- $P = [x_P\ y_P] = [4\ \ 3]$
  $P = [\rho_P\ \varphi_P] = \cdots\ ,\qquad \Delta S_p \approx \cdots\ \Delta\rho\Delta\varphi,$
  $\vec{f}_{\rho,P} = \cdots\ ,\qquad \vec{f}_{\varphi,P} = \cdots$ vzhledem k $\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$.
- $P = [x_P\ y_P] = [5\ \ -12]$
  $P = [\rho_P\ \varphi_P] = \cdots\ ,\qquad \Delta S_p \approx \cdots\ \Delta\rho\Delta\varphi,$
  $\vec{f}_{\rho,P} = \cdots\ ,\qquad \vec{f}_{\varphi,P} = \cdots$ vzhledem k $\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$.

(2) Určete kartézské souřadnice bodu $P \in \mathrm{R}^2$ na základě uvedených údajů.

- $P = [\rho_P, \varphi_P] = \left[8\ \ \frac{7\pi}{6}\right]\ ,\quad P = [x_P\ y_P] = \ \cdots$
- $P = [\rho_P, \varphi_P] = \left[13\ \ \frac{5\pi}{3}\right]\ ,\quad P = [x_P\ y_P] = \ \cdots$
- $\varphi_P = \frac{11}{6}\pi\ ,\quad \Delta S_P \approx 4,5\Delta\rho\Delta\varphi\ ,\quad P = [x_P\ y_P] = \ \cdots$

(3) Zapište kartézské rovnice souřadnicových křivek C_ρ a C_φ určujících bod P v polárních souřadnicích pro každý z bodů P v úlohách (1) a (2).

- $\mathrm{C}_\rho = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}\ ,\quad \mathrm{C}_\varphi = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}$
- $\mathrm{C}_\rho = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}\ ,\quad \mathrm{C}_\varphi = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}$
- $\mathrm{C}_\rho = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}\ ,\quad \mathrm{C}_\varphi = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}$
- $\mathrm{C}_\rho = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}\ ,\quad \mathrm{C}_\varphi = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}$
- $\mathrm{C}_\rho = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}\ ,\quad \mathrm{C}_\varphi = \left\{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \right\}$

(4) V následujících příkladech doplňte chybějící údaje.

- $P = [x_P\ y_P\ z_P] = [-4\ \ \cdot\ \ 2]$, $P = [\rho_P\ \varphi_P\ z_P] = [\ \cdot\ \ \frac{5}{4}\pi\ \ \cdot\ ]$
  $\Delta V_v \approx \cdots$, $\vec{f}_{\rho,P} = \cdots$, $\vec{f}_{\varphi,P} = \cdots$,
  $\vec{f}_{z,P} = \cdots$ vzhledem k $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$.

- $P = [x_P\ y_P\ z_P] = [\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ ]$, $\Delta V_v \approx 2\sqrt{2}\Delta\rho\Delta\varphi\Delta z$,
  $\vec{f}_{\varphi,P} = \left(\sqrt{2}\ \ \cdot\ \ \cdot\right)$ vzhledem k $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$,
  $P = [\rho_P\ \varphi_P\ -2]$, $\vec{f}_{\rho,P} = \cdots$, $\vec{f}_{z,P} = \cdots$,

(5) Zapište kartézské rovnice souřadnicových ploch $\mathrm{S}_\rho, \mathrm{S}_\varphi, \mathrm{S}_z$ určujících bod P ve válcových souřadnicích pro každý z bodů úlohy (4).

- $\mathrm{S}_\rho = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$
  $\mathrm{S}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$
  $\mathrm{S}_z = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$

- $\mathrm{S}_\rho = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$
  $\mathrm{S}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$
  $\mathrm{S}_z = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$

(6) Zapište parametrické rovnice souřadnicových křivek $\mathrm{C}_\rho, \mathrm{C}_\varphi, \mathrm{C}_z$ příslušných popisu bodu P v polárních souřadnicích, tj. $P = \mathrm{C}_\rho \cap \mathrm{C}_\varphi \cap \mathrm{C}_z$, a ukažte, že vektory $\vec{f}_\rho, \vec{f}_\varphi, \vec{f}_z$ jsou tečnými vektory k těmto křivkám.

$\varphi = \varphi_P, z = z_P:$ $\mathrm{C}_\rho = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\}$,
kartézské rovnice:

$\rho = \rho_P, z = z_P:$ $\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\}$,
kartézské rovnice:

$\rho = \rho_P, \varphi = \varphi_P:$ $\mathrm{C}_z = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\}$,
kartézské rovnice:

(7) Napište kartézské rovnice souřadnicových křivek $\mathrm{C}_\rho, \mathrm{C}_\varphi, \mathrm{C}_z$ bodů P z úlohy (4).

- $\mathrm{C}_\rho = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$
  $\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$
  $\mathrm{C}_z = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$

- $\mathrm{C}_\rho = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$

  $\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$

  $\mathrm{C}_z = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad \}$

(8) Zapište polární i kartézskou rovnici elipsy, pro niž $a = 5\mathrm{cm}$, $\epsilon = 0,8$ a jejíž pravé ohnisko F leží v počátku soustavy souřadnic. Osy elipsy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic.

$e =$, $b =$, $p =$

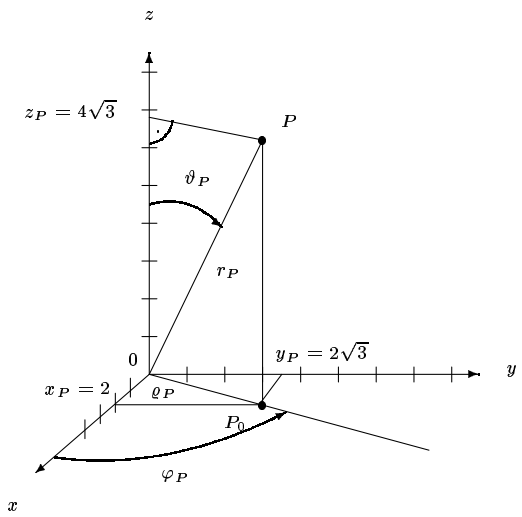
Polární rovnice: . Kartézská rovnice: .

(9) Odvoďte polární rovnici paraboly, jejíž ohnisko F leží v počátku soustavy souřadnic a jejíž osa splývá s osou x. Zapište i její kartézskou rovnici.

Polární rovnice: . Kartézská rovnice: .

1.2 Kulové souřadnice

Kulové (sférické) souřadnice r_P *(sférický poloměr)*, φ_P *(azimutární úhel)* a ϑ_P *(sférický úhel)* bodu $P = [x_P\ y_P\ z_P]$ jsou definovány následujícím obrázkem:



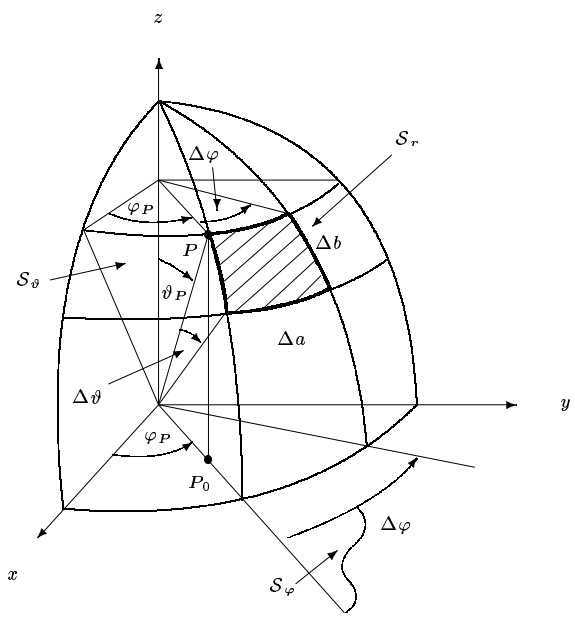
$$P = [x_P\ y_P\ z_P] = [2\ \ 2\sqrt{3}\ \ 4\sqrt{3}]$$
$$P = [r_P\ \vartheta_P\ \varphi_P] = [8\ \tfrac{\pi}{6}\ \tfrac{\pi}{3}]$$
$$\rho_P = r_P \sin\vartheta_P = 4$$
$$x_P = \rho_P \cos\varphi_P\ ,\quad y_P = \rho_P \sin\varphi_P\ ,\quad z_P = r_P \cos\vartheta_P$$

Pro obecný bod $X = [x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3$ platí převodní vztahy mezi kulovými a kartézskými souřadnicemi:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\
y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\
z &= r\cos\vartheta \\
r &\in [0,\infty) \\
\vartheta &\in [0,\pi] \\
\varphi &\in [0,2\pi)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\vartheta &= \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\varphi &= \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0,\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < 0,\ x^2+y^2 \neq 0 \\ \text{není definováno pro } x = y = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$P = \mathrm{S}_r \cap \mathrm{S}_\varphi \cap \mathrm{S}_\vartheta$, kde $\mathrm{S}_r, \mathrm{S}_\varphi, \mathrm{S}_\vartheta$ jsou *souřadnicové plochy příslušné kulovým souřadnicím*, jejichž parametrické rovnice jsou
$\mathrm{S}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = r_P\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r_P\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r_P\cos\vartheta;$
$\varphi \in [0\ 2\pi), \vartheta \in [0\ \pi]$ jsou parametry$\}$,
$\mathrm{S}_\vartheta\{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = r\cos\varphi\sin\vartheta_P,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta_P,\ z = r\cos\vartheta_P,$
$r \in [0\ \infty),\ \varphi \in [0\ 2\pi)$ jsou parametry$\}$,
$\mathrm{S}_\varphi\{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = r\cos\varphi_P\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi_P\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta,$
$r \in [0\ \infty),\ \vartheta \in [0\ \pi]$ jsou parametry$\}$.

S_r je kulová plocha se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r_P, S_φ rovina obsahující osu z a svírající s osou x úhel φ_P, S_ϑ je kuželová plocha o vrcholovém úhlu $2\vartheta_P$, jejíž osou je souřadnicová osa z.
Velmi jednoduché je vyjádření souřadnicových ploch přímo pomocí kulových souřadnic:
$\mathrm{S}_r : r = r_P\ ,\quad \mathrm{S}_\varphi : \varphi = \varphi_P\ ,\quad \mathrm{S}_\vartheta : \vartheta = \vartheta_P.$



Souřadnicové plochy určené rovnicemi $r = r_P$, $r = r_P + \Delta r$, $\varphi = \varphi_P$, $\varphi = \varphi_P + \Delta\varphi$, $\vartheta = \vartheta_P$, $\varphi = \vartheta_P + \Delta\vartheta$ vymezují v okolí bodu P tzv. *kulový (sférický) objemový element* o "podstavě" $\Delta S_s \approx \Delta a \Delta b$ (v obrázku šrafováno) a "výšce"

Δr. (Uvozovek je použito proto, že objemový element lze přibližně nahradit elementárním kvádrem jen tehdy, jsou-li změny $\Delta r, \Delta\varphi, \Delta\vartheta$ dostatečně malé.) Objem kulového elementu je pak

$$\Delta V_s \approx \Delta S_s \Delta r \approx \Delta a \Delta b \Delta r = \rho_P \Delta\varphi \cdot r_P \Delta\vartheta \Delta r = r_P^2 \sin\vartheta_P \Delta r \Delta\varphi \Delta\vartheta \ ,$$

obecně

$$\Delta V_s \approx r^2 \sin\vartheta \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi.$$

Bodem P procházejí *souřadnicové křivky* $\mathrm{C}_r, \mathrm{C}_\vartheta, \mathrm{C}_\varphi$ *příslušné kulovým souřadnicím*, jejichž parametrické rovnice mají tvar

$\mathrm{C}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = r\cos\varphi_P \sin\vartheta_P,\ y = r\sin\varphi_P \sin\vartheta_P,\ z = r\cos\vartheta_P,$
$r \in [0\ \infty)$ je parametr$\}$,
$\mathrm{C}_\vartheta = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = r_P\cos\varphi_P \sin\vartheta,\ y = r_P\sin\varphi_P \sin\vartheta,\ z = r_P\cos\vartheta,$
$\vartheta \in [0\ \pi]$ je parametr$\}$,
$\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = r_P\cos\varphi \sin\vartheta_P,\ y = r_P\sin\varphi \sin\vartheta_P,\ z = r_P\cos\vartheta_P,$
$\varphi \in [0,\ 2\pi)$ je parametr$\}$.

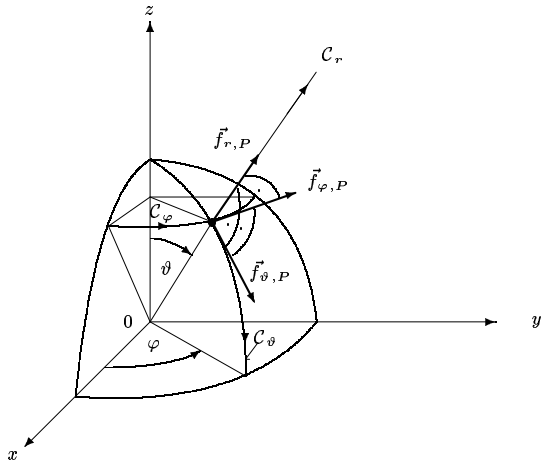
Vektory

$\vec{f}_{r,P} = (\cos\varphi_P \sin\vartheta_P \quad \sin\varphi_P \sin\vartheta_P \quad \cos\vartheta_P)$,

$\vec{f}_{\vartheta,P} = (r_P\cos\varphi_P \cos\vartheta_P \quad r_P\sin\varphi_P \cos\vartheta_P \quad -r_P\sin\vartheta_P)$,

$\vec{f}_{\varphi,P} = (-r_P\sin\varphi_P \sin\vartheta_P \quad r_P\cos\varphi_P \sin\vartheta_P \quad 0)$

jsou tečné k souřadnicovým křivkám $\mathrm{C}_r, \mathrm{C}_\vartheta, \mathrm{C}_\varphi$ v bodě P,
přičemž $[\vec{f}_{r,P}, \vec{f}_{\vartheta,P}, \vec{f}_{\varphi,P}] = r_P^2 \sin\vartheta_P$ (ověřte).
Obecně je $[\vec{f}_r, \vec{f}_\vartheta, \vec{f}_\varphi] = r^2 \sin\vartheta$, tj. $\Delta V_s \approx |[\vec{f}_r, \vec{f}_\vartheta, \vec{f}_\varphi]| \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi$.



$\mathrm{C}_r \ldots$ "paprsek", $\mathrm{C}_\vartheta \ldots$ "poledník", $\mathrm{C}_\varphi \ldots$ "rovnoběžka"

Poznámka: Nechť C je křivka v R^3 vyjádřená parametrickými rovnicemi tvaru

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, kde t je parametr. Tečný vektor

$$\vec{f}(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt} \; \frac{dy(t)}{dt} \; \frac{dz(t)}{dt} \right)_{t=t_P}$$

charakterizuje rychlost změny polohy bodu na křivce C v okolí bodu P. (Má-li parametr t význam času a $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ představuje závislost polohového vektoru hmotného bodu na čase, pak $\vec{f}(t)$ bude vektorem rychlosti.) Odtud je zřejmé, že tečné vektory k souřadnicovým křivkám $\mathrm{C}_r, \mathrm{C}_\vartheta, \mathrm{C}_\varphi$ mají tvar

$$\begin{aligned}
\vec{f}_r &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial r} \; \tfrac{\partial y}{\partial r} \; \tfrac{\partial z}{\partial r} \right) = \left(\cos\varphi \sin\vartheta \quad \sin\varphi \sin\vartheta \quad \cos\vartheta \right), \\
\vec{f}_\vartheta &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \; \tfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \; \tfrac{\partial z}{\partial \vartheta} \right) = \left(r\cos\varphi \cos\vartheta \quad r\sin\varphi \cos\vartheta \quad -r\sin\vartheta \right), \\
\vec{f}_\varphi &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial \varphi} \; \tfrac{\partial y}{\partial \varphi} \; \tfrac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = \left(-r\sin\varphi \sin\vartheta \quad r\cos\varphi \sin\vartheta \quad 0 \right).
\end{aligned}$$

Poloha bodu na křivce C_r (resp. C_ϑ, resp. C_φ) je totiž charakterizována kulovou souřadnicí r (resp. ϑ, resp. φ) jakožto parametrem, ostatní dvě kulové souřadnice φ, ϑ (resp. r, φ, resp. r, ϑ) zůstávají konstantní.

Příklad 1.

$P = [x_P \; y_P \; z_P] = [2 \; -2\sqrt{3} \; -4\sqrt{3}]$

$r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} = \sqrt{4 + 12 + 48} = 8$

$\vartheta_P = \arccos \frac{z_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$

$\varphi_P = 2\pi - \arccos \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = 2\pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{5}{3}\pi$

Souřadnicové křivky:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_r: \; & x = r\cos\varphi_P \sin\vartheta_P \;\Rightarrow\; x = \tfrac{1}{4} r \qquad \vec{f}_{r,P} = \left(\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{\sqrt{3}}{4} \quad -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
& y = r\sin\varphi_P \sin\vartheta_P \;\Rightarrow\; y = -\tfrac{\sqrt{3}}{4} r \\
& z = r\cos\vartheta_P \;\Rightarrow\; z = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} r \\
& r \in [0, \; \infty) \\
\mathrm{C}_\vartheta: \; & x = r_P \cos\varphi_P \sin\vartheta \;\Rightarrow\; x = 4\sin\vartheta \qquad \vec{f}_{\vartheta,P} = \left(-2\sqrt{3} \quad 6 \quad -4 \right) \\
& y = r_P \sin\varphi_P \sin\vartheta \;\Rightarrow\; y = -4\sqrt{3}\sin\vartheta \\
& z = r_P \cos\vartheta \;\Rightarrow\; z = 8\cos\vartheta \\
& \vartheta \in [0, \; \pi] \\
\mathrm{C}_\varphi: \; & x = r_P \cos\varphi \sin\vartheta_P \;\Rightarrow\; x = 4\cos\varphi \qquad \vec{f}_{\varphi,P} = \left(2\sqrt{3} \quad 2 \quad 0 \right) \\
& y = r_P \sin\varphi \sin\vartheta_P \;\Rightarrow\; y = 4\sin\varphi \\
& z = r_P \cos\vartheta_P \;\Rightarrow\; z = -4\sqrt{3} \\
& \varphi \in [0, \; 2\pi]
\end{aligned}$$

$\Delta V \approx r_P^2 \sin\vartheta_P \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi = 32 \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi$

$$\left|\left[\vec{f}_{r,P}, \vec{f}_{\vartheta,P}, \vec{f}_{\varphi,P}\right]\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -2\sqrt{3} & 6 & -4 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{pmatrix}\right| = 32$$

Kartézské rovnice souřadnicových křivek:

$\mathrm{C}_r:$	$x\sqrt{3}+y=0$	$\wedge$	$2y-z=0$	průsečnice dvou rovin
$\mathrm{C}_\vartheta:$	$x^2+y^2+z^2=64$	$\wedge$	$x\sqrt{3}+y=0$	průsečnice kulové plochy a roviny
$\mathrm{C}_\varphi:$	$x^2+y^2=16$	$\wedge$	$z=-4\sqrt{3}$	průsečnice válcové plochy a roviny

Souřadnicové plochy:

$\mathrm{S}_r:$	$x=r_P\cos\varphi\sin\vartheta$	$x=8\cos\varphi\sin\vartheta$	$x^2+y^2+z^2=64$
	$y=r_P\sin\varphi\sin\vartheta$	$y=8\sin\varphi\sin\vartheta$	kulová plocha
	$z=r_P\cos\vartheta$	$z=8\cos\vartheta$	
	$\varphi\in[0,2\pi), \vartheta\in[0,\pi)$		
$\mathrm{S}_\vartheta:$	$x=r\cos\varphi\sin\vartheta_P$	$x=\frac{1}{2}r\cos\varphi$	$3x^2+3y^2-z^2=0$
	$y=r\sin\varphi\sin\vartheta_P$	$y=\frac{1}{2}r\sin\varphi$	kuželová plocha
	$z=r\cos\vartheta_P$	$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}r$	
	$r\in[0,\infty], \varphi\in[0,2\pi)$		
$\mathrm{S}_\varphi:$	$x=r\cos\varphi_P\sin\vartheta$	$x=\frac{1}{2}r\sin\vartheta$	$x\sqrt{3}+y=0$
	$y=r\sin\varphi_P\sin\vartheta$	$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\vartheta$	svislá rovina
	$z=r\cos\vartheta$	$z=r\cos\vartheta$	
	$r\in[0,\infty], \vartheta\in[0,\pi]$		

$\mathrm{C}_r=\mathrm{S}_\varphi\cap\mathrm{S}_\vartheta,\ \mathrm{C}_\vartheta=\mathrm{S}_r\cap\mathrm{S}_\varphi,\ \mathrm{C}_\varphi=\mathrm{S}_r\cap\mathrm{S}_\vartheta$

Úlohy

(1) V následujících případech určete chybějící údaje:

- $P=[x_P\ y_P\ z_P]=[-\sqrt{2}\ \ \sqrt{2}\ \ 2\sqrt{3}]$
  $P=[r_P\ \vartheta_P\ \varphi_P]=\cdots$
  $\mathrm{C}_r=\{[x\ y\ z]\in\mathrm{R}^3|$
  $x=\cdots\ ,\ y=\cdots\ ,\ z=\cdots\ ,\ r\in[0,\infty)\}$
  $\mathrm{C}_\vartheta=\{[x\ y\ z]\in\mathrm{R}^3|$
  $x=\cdots\ ,\ y=\cdots\ ,\ z=\cdots\ ,\ \vartheta\in[0,\pi]\}$
  $\mathrm{C}_\varphi=\{[x\ y\ z]\in\mathrm{R}^3|$
  $x=\cdots\ ,\ y=\cdots\ ,\ z=\cdots\ ,\ \varphi\in[0,2\pi)\}$
  (parametrické rovnice]

  $\vec{f}_{r,P}=\cdots\ ,\ \vec{f}_{\vartheta,P}=\cdots\ ,\ \vec{f}_{\varphi,P}=\cdots$

$\Delta V \approx \ \cdots \ \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi$

$\mathrm{S}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$
$\mathrm{S}_\vartheta = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$
$\mathrm{S}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$
(kartézské rovnice)

- $\mathrm{S}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad x^2 + y^2 + z^2 = 25\}$
  $\mathrm{S}_\vartheta = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad x^2 + y^2 - 4z^2 = 0\}$
  $\mathrm{S}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\quad x + y = 0\}$

  $P = [x_P\ y_P\ z_P] = \ \cdots$
  $P = [r_P\ \vartheta_P\ \varphi_P] = \ \cdots$
  $\vec{f}_{r,P} = \ \cdots\ ,\ \vec{f}_{\vartheta,P} = \ \cdots\ ,\ \vec{f}_{\varphi,P} = \ \cdots$
  $\Delta V \approx \ \cdots \ \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi$

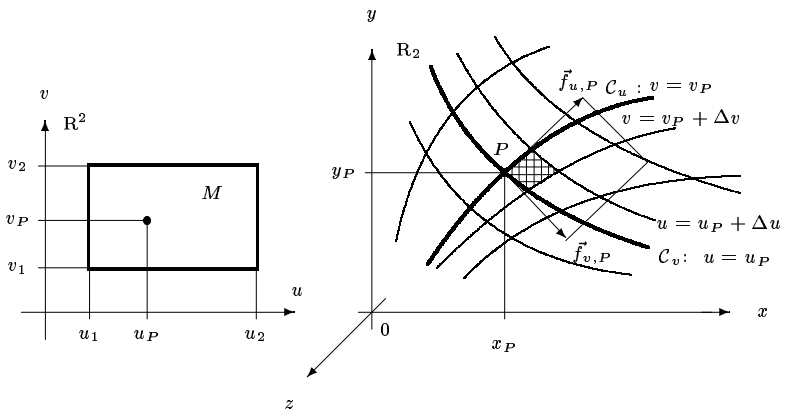
- $P = [x_P\ y_P\ z_P] = [\ -2 \quad 3 \quad \cdot\ ]$
  $P = [r_P\ \vartheta_P\ \varphi_P] = [\ 5 \quad \cdot \quad \cdot\ ]$
  $\vec{f}_{r,P} = \ \cdots\ ,\ \vec{f}_{\vartheta,P} = \ \cdots\ ,\ \vec{f}_{\varphi,P} = \ \cdots$
  $\Delta V \approx \ \cdots \ \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi$

  $\mathrm{C}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |$
  $x = \ \cdots\ ,\ y = \ \cdots\ ,\ z = \ \cdots\ ,\ r \in [0, \infty)\}$
  $\mathrm{C}_\vartheta = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |$
  $x = \ \cdots\ ,\ y = \ \cdots\ ,\ z = \ \cdots\ ,\ \vartheta \in [0, \pi]\}$
  $\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |$
  $x = \ \cdots\ ,\ y = \ \cdots\ ,\ z = \ \cdots\ ,\ \varphi \in [0, 2\pi)\}$
  (parametrické rovnice)

  $\mathrm{S}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$
  $\mathrm{S}_\vartheta = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$
  $\mathrm{S}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$
  (kartézské rovnice)

1.3 Obecné křivočaré souřadnice

Obecné křivočaré souřadnice v R^2



Bod P může být zadán buď dvojicí kartézských souřadnic $[x_P \;\; y_P]$ nebo dvojicí křivočarých souřadnic $[u_P \;\; v_P]$. Převodní vztahy mezi kartézskými a křivočarými souřadnicemi mají obecně tvar

$$x = x(u,v),\; y = y(u,v),$$

kde $x(u,v), y(u,v)$ jsou funkce dvou proměnných u, v, přičemž $x_P = x(u_P, v_P)$, $y_P = y(u_P, v_P)$.

Souřadnicové křivky procházející bodem P:

$\mathrm{C}_u = \{[x\; y] \in \mathrm{R}^2 |\; x = x(u, v_P),\; y = y(u, v_P),\; u \in [u_1, u_2]\}$

$\mathrm{C}_v = \{[x\; y] \in \mathrm{R}^2 |\; x = x(u_P, v),\; y = y(u_P, v),\; v \in [v_1, v_2]\}$

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám v bodě P:

$$\vec{f}_{u,P} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \;\; \frac{\partial y}{\partial u} \;\; 0\right)_{[u_P \;\; v_P]}, \quad \vec{f}_{v,P} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \;\; \frac{\partial y}{\partial v} \;\; 0\right)_{[u_P \;\; v_P]}$$

Plošný element v bodě P:

$\Delta S_{(u,v),P} \approx |\vec{f}_{u,P} \times \vec{f}_{v,P}| \Delta u \Delta v$

$$\vec{f}_{u,P} \times \vec{f}_{v,P} = \left(0 \;\; 0 \;\; \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right)_{[u_P, v_P]}$$

Obecně pak $\quad \Delta S_{(u,v)} \approx \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \Delta u \Delta v$

Matice $\quad D = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ se nazývá *Jacobiho maticí* zobrazení určujícího převod křivočarých souřadnic na kartézské, jejíž determinant $\det D = \mathrm{J}(u,v)$ je tzv. *jakobián.* (Aby byl vektory $\vec{f}_u, \vec{f}_v$ určen plošný element, je třeba, aby $\mathrm{J}(u,v) \neq 0$.)

Příklad 1.

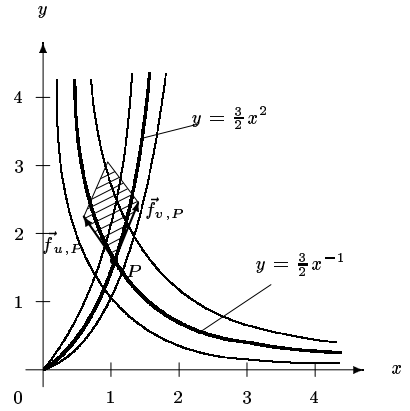
$M = [1,2] \times [1,3]$, převod souřadnic je určen vztahy $y = ux^2, y = vx^{-1}$. Pro pevně zvolenou hodnotu $u = u_P$ představuje rovnice $y = u_P x^2$ souřadnicovou křivku C_v (parabola), pro pevně zvolenou hodnotu $v = v_P$ je $y = v_P x^{-1}$ kartézskou rovnicí souřadnicové křivky C_u (hyperbola).

Převodní vztah mezi $[u\ \ v]$ a $[x\ \ y]$ získáme jednoduchou úpravou

$$x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}\ , \quad y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}$$

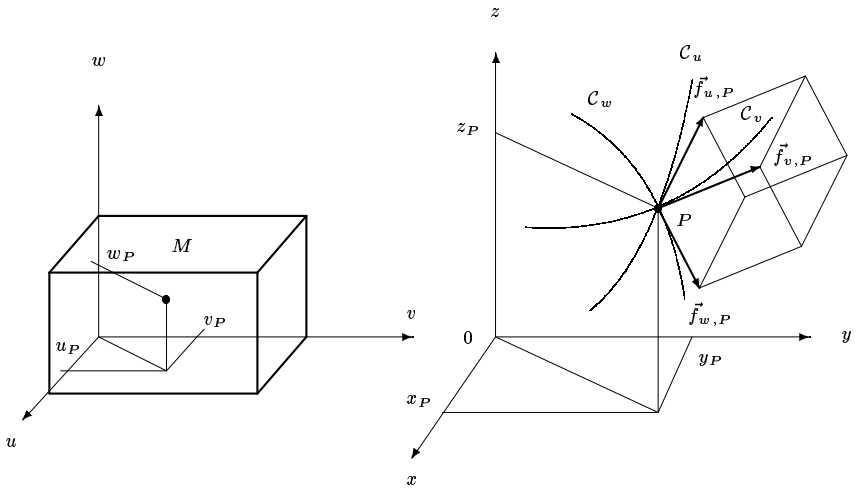
$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{J} = |\det D| = |-\frac{2}{9} u^{-1} - \frac{1}{9} u^{-1}| = \frac{1}{3} u^{-1}$
$\Delta S_{(u,v)} \approx \frac{1}{3u} \Delta u \Delta v$



$P = [x_P\ \ y_P] = [1\ \ \frac{3}{2}]$, $\mathrm{C}_u : y = \frac{3}{2} x^{-1} \Rightarrow v_P = \frac{3}{2}$, $\mathrm{C}_v : y = \frac{3}{2} x^2 \Rightarrow u_P = \frac{3}{2}$
$\Delta S_{(u,v)} \approx \frac{2}{9} \Delta u \Delta v$, $\vec{f}_{u,P} = (-\frac{2}{9}\ \ \frac{1}{3}\ \ 0)$, $\vec{f}_{v,P} = (\frac{2}{9}\ \ \frac{2}{3}\ \ 0)$
$|\vec{f}_{u,P} \times \vec{f}_{v,P}| \ldots$ plošný obsah rovnoběžníka vyznačeného šrafováním.

Obecné křivočaré souřadnice v R^3



$P = [x_P \;\; y_P \;\; z_P]$ nebo $P = [u_P \;\; v_P \;\; w_P]$, kde u_P, v_P, w_P jsou křivočaré souřadnice bodu P, vystupující v převodních vztazích tvaru

$$x = x(u,v,w)\ , \qquad y = y(u,v,w)\ , \qquad z = z(u,v,w)$$

kde x, y, z jsou funkce tří proměnných u, v, w, přičemž

$$x_P = x(u_P, v_P, w_P)\ , \qquad y_P = y(u_P, v_P, w_P)\ , \qquad z_P = z(u_P, v_P, w_P)\ .$$

Souřadnicové křivky procházející bodem P:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_u &= \left\{[x \;\; y \;\; z] \in \mathrm{R}^3 \middle| \quad x = x(u, v_P, w_P), \quad y = y(u, v_P, w_P), \quad z = z(u, v_P, w_P)\right\} \\
\mathrm{C}_v &= \left\{[x \;\; y \;\; z] \in \mathrm{R}^3 \middle| \quad x = x(u_P, v, w_P), \quad y = y(u_P, v, w_P), \quad z = z(u_P, v, w_P)\right\} \\
\mathrm{C}_w &= \left\{[x \;\; y \;\; z] \in \mathrm{R}^3 \middle| \quad x = x(u_P, v_P, w), \quad y = y(u_P, v_P, w), \quad z = z(u_P, v_P, w)\right\}
\end{aligned}$$

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám v bodě P:

$$\vec{f}_{u,P} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \;\; \frac{\partial y}{\partial u} \;\; \frac{\partial z}{\partial u}\right)_{[u_P \;\; v_P \;\; w_P]}$$
$$\vec{f}_{v,P} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \;\; \frac{\partial y}{\partial v} \;\; \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{[u_P \;\; v_P \;\; w_P]}$$
$$\vec{f}_{w,P} = \left(\frac{\partial x}{\partial w} \;\; \frac{\partial y}{\partial w} \;\; \frac{\partial z}{\partial w}\right)_{[u_P \;\; v_P \;\; w_P]}$$

Objemový element v bodě P:

$$\begin{aligned}
\Delta V_{(u,v,w),P} \quad &\approx \quad \left|\left[\vec{f}_{u,P}, \vec{f}_{v,P}, \vec{f}_{w,P}\right]\right| \Delta u \Delta v \Delta w = \\
&= \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}_{[u_P \; v_P \; w_P]} \Delta u \Delta v \Delta w
\end{aligned}$$

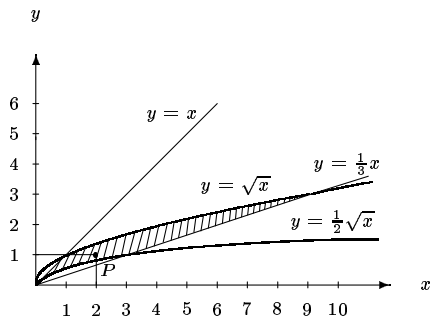
$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \ldots \textit{Jacobiho matice}$$

$\det D = \mathrm{J}(u,v,w) \ldots$ jakobián. Obecně je tedy $\Delta V_{(u,v,w)} \approx \mathrm{J}(u,v,w)\Delta u \Delta v \Delta w$.

Úlohy

(1) V následujících případech jsou zadanými křivkami vymezeny oblasti v R^2, v nichž může ležet bod P. Popište bod $P \in \mathrm{R}^2$ dvojicí vhodně zvolených křivočarých souřadnic, zapište množinu M (definiční obor) křivočarých souřadnic, najděte transformační vztahy mezi kartézskými souřadnicemi $[x \;\; y]$ a křivočarými souřadnicemi $[u \;\; v]$, určete souřadnicové křivky, jejich

tečné vektory v bodě P, obecný tvar Jacobiho matice a hodnotu jakobiánu v bodě P.

- 

  $P = [x_P \;\; y_P] = [2 \;\; 1]$, $P = [u_P \;\; v_P] = \cdots$

  $x = x(u,v) = \cdots \qquad y = y(u,v) = \cdots$

  $M = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] = \cdots$

  $\mathrm{C}_u = \{[x\; y] \in \mathrm{R}^2 |\; \cdots \}$

  $\mathrm{C}_v = \{[x\; y] \in \mathrm{R}^2 |\; \cdots \}$

  $\vec{f}_{u,P} = \cdots \;,\quad \vec{f}_{v,P} = \cdots$

  $D = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},$

  $\mathrm{J}(u,v) = \cdots \;,\quad \mathrm{J}(u_P, v_P) = \cdots$

- $y = \frac{1}{2}x^2,\; y = 2x^2,\; y = \frac{1}{3}x^{-2},\; y = 3x^{-2},\; P = [x_P \;\; y_P] = [1 \;\; 1]$.

  $P = [u_P \;\; v_P] = \cdots$

  $x = x(u,v) = \cdots \qquad y = y(u,v) = \cdots$

  $M = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] = \cdots$

  $\mathrm{C}_u = \{[x\; y] \in \mathrm{R}^2 |\; \cdots \}$

  $\mathrm{C}_v = \{[x\; y] \in \mathrm{R}^2 |\; \cdots \}$

  $\vec{f}_{u,P} = \cdots \;,\quad \vec{f}_{v,P} = \cdots$

  $D = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},$

  $\mathrm{J}(u,v) = \cdots \;,\quad \mathrm{J}(u_P, v_P) = \cdots$

- $x^2 + y^2 = 1,\; x^2 + y^2 = 4,\; y = x,\; y = 2x,\; P = [x_P \;\; y_P] = [1 \;\; \sqrt{2}]$

  $P = [u_P \;\; v_P] = \cdots$

$x = x(u,v) = \cdots \quad y = y(u,v) = \cdots$

$M = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] = \cdots$

$\mathrm{C}_u = \{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \}$

$\mathrm{C}_v = \{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 |\ \cdots\ \}$

$\vec{f}_{u,P} = \cdots\ ,\ \vec{f}_{v,P} = \cdots$

$D = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},$

$\mathrm{J}(u,v) = \cdots\ ,\quad \mathrm{J}(u_P, v_P) = \cdots$

(2) Zobecněné polární souřadnice v $\mathrm{R}^2 \rho, \varphi$ jsou definovány vztahy $x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ a, b$ jsou kladné konstanty, $\rho \in [0, \infty),\ \varphi \in [0, 2\pi)$. Určete ρ a φ jako funkce x, y. Zapište souřadnicové křivky (parametrické i kartézské rovnice), Jacobiho matici a jakobián.

$\rho = \cdots\ ,\quad \varphi = \cdots$

$\mathrm{C}_\rho = \{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 | x = \cdots\ ,\ y = \cdots\ ,\ \text{tj.}\ \cdots\ \}$

$\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y] \in \mathrm{R}^2 | x = \cdots\ ,\ y = \cdots\ ,\ \text{tj.}\ \cdots\ \}$

$D = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},\quad \mathrm{J}(\rho, \varphi) = \cdots$

(3) Zobecněné kulové souřadnice v R^3 r, φ, ϑ jsou definovány vztahy
$x = ar\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = br\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = cr\cos\vartheta$
a, b, c jsou kladné konstanty, $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi]$. Určete r, φ a ϑ jako funkce x, y, z. Zapište souřadnicové křivky (parametrické rovnice) a souřadnicové plochy (kartézské rovnice), Jacobiho matici a jakobián.

$r = \cdots\ ,$

$\varphi = \cdots\ ,$

$\vartheta = \cdots\ ,$

$\mathrm{C}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = \cdots\ ,\ y = \cdots\ ,\ z = \cdots\ \}$

$\mathrm{C}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = \cdots\ ,\ y = \cdots\ ,\ z = \cdots\ \}$

$\mathrm{C}_\vartheta = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = \cdots\ ,\ y = \cdots\ ,\ z = \cdots\ \}$

$\mathrm{S}_r = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$

$\mathrm{S}_\varphi = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$

$\mathrm{S}_\vartheta = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 |\ \cdots\ \}$

Jedná se o tyto plochy (uveďte klasifikaci podle kapitoly 7):

$\mathrm{S}_r = \cdots\ ,\ \mathrm{S}_\varphi = \cdots\ ,\ \mathrm{S}_\vartheta = \cdots$

$$D = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J}(r, \varphi, \vartheta) = \cdots$$

(4) Oblast V v R^3 je omezena plochami: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $x = 0$. Bod $P = [x_P \;\; y_P \;\; z_P] = [1 \;\; 1 \;\; 2]$ leží v oblasti V. Charakterizujte jeho polohu vhodnými křivočarými souřadnicemi u, v, w a zapište jejich definiční obor. Zapište převodní rovnice mezi kartézskými a křivočarými souřadnicemi, souřadnicové křivky (parametrické rovnice) a plochy (kartézské rovnice), Jacobiho matici a jakobián.

$$\begin{array}{lcl} x & = & \cdots \\ y & = & \cdots \\ z & = & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} u & = & \cdots \\ v & = & \cdots \\ w & = & \cdots \end{array}$$

$$M = [\;\cdot\;,\;\cdot\;] \times [\;\cdot\;,\;\cdot\;] \times [\;\cdot\;,\;\cdot\;]$$

$$\mathrm{C}_u = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = \cdots,\ y = \cdots,\ z = \cdots\}$$
$$\mathrm{C}_v = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = \cdots,\ y = \cdots,\ z = \cdots\}$$
$$\mathrm{C}_w = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | x = \cdots,\ y = \cdots,\ z = \cdots\}$$
$$\mathrm{S}_u = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | \cdots\}$$
$$\mathrm{S}_v = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | \cdots\}$$
$$\mathrm{S}_w = \{[x\ y\ z] \in \mathrm{R}^3 | \cdots\}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J}(u, v, w) = \cdots$$

1.4 Aplikace - parametrické rovnice kvadrik

V odstavci 7.2 je klasifikace kvadrik provedena na základě normálních tvarů jejich kartézských rovnic. Obrázky, obsahující síť "poledníků" a "rovnoběžek" na každé z kvadrik jsou však sestrojeny s využitím křivočarých souřadnic. Rovnoběžky a poledníky představují dvě soustavy souřadnicových křivek.

Elipsoidální plocha E : Parametry φ, ϑ - tzv. *zobecněné sférické úhly.*
$x = a\cos\varphi\sin\vartheta, y = b\sin\varphi\sin\vartheta, z = c\cos\vartheta;\ \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi]$.
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = a\cos\varphi_0\sin\vartheta, y = b\sin\varphi_0\sin\vartheta, z = c\cos\vartheta$ (svislé elipsy)
rovnoběžky:
$\vartheta = \vartheta_0; x = a\cos\varphi\sin\vartheta_0, y = b\sin\varphi\sin\vartheta_0, z = c\cos\vartheta_0$ (vodorovné elipsy)

Jednodílná hyperboloidální plocha $\mathbf{H}_1$: Parametry φ, ϑ.
$x = a\cos\varphi\cosh\vartheta, y = b\sin\varphi\cosh\vartheta, z = c\sinh\vartheta;\ \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = a\cos\varphi_0\cosh\vartheta, y = b\sin\varphi_0\cosh\vartheta, z = c\sinh\vartheta$ (svislé hyperboly)
rovnoběžky:
$\vartheta = \vartheta_0; x = a\cos\varphi\cosh\vartheta_0, y = b\sin\varphi\cosh\vartheta_0, z = c\sinh\vartheta_0$ (vodorovné elipsy)

Dvojdílná hyperboloidální plocha $\mathbf{H}_2$: Parametry φ, ϑ.
$x = a\cos\varphi\sinh\vartheta, y = b\sin\varphi\sinh\vartheta, z = \pm c\cosh\vartheta; \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = a\cos\varphi_0\sinh\vartheta, y = b\sin\varphi_0\sinh\vartheta, z = \pm c\cosh\vartheta$ (svislé hyperboly)
rovnoběžky:
$\vartheta = \vartheta_0; x = a\cos\varphi\sinh\vartheta_0, y = b\sin\varphi\sinh\vartheta_0, z = \pm c\cosh\vartheta_0$ (vodorovné elipsy)

Poznámka: Funkce $\sinh\vartheta = \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}\right)$ a $\cosh\vartheta = \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right)$ představují tzv. hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus proměnné ϑ. Číslo e je základ přirozených logaritmů $e = 2.7182....$

Kuželová plocha $\mathbf{K}$: Parametry ρ, φ - tzv. *zobecněné polární souřadnice.*
$x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi, z = \pm c\rho; \rho \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$

Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = a\rho\cos\varphi_0, y = b\rho\sin\varphi_0, z = \pm c\rho$ (povrchové přímky kužele)
rovnoběžky:
$\rho = \rho_0; x = a\rho_0\cos\varphi, y = b\rho_0\sin\varphi, z = \pm c\rho_0$ (vodorovné elipsy)

Eliptická paraboloidální plocha P_E : Parametry ρ, φ (zobecněné polární souřadnice)
$x = \sqrt{p}\rho\cos\varphi, y = \sqrt{q}\rho\sin\varphi, z = \frac{1}{2}\rho^2; \rho \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = \sqrt{p}\rho\cos\varphi_0, y = \sqrt{q}\rho\sin\varphi_0, z = \frac{1}{2}\rho^2$ (svislé paraboly)
rovnoběžky:
$\rho = \rho_0; x = \sqrt{p}\rho_0\cos\varphi, y = \sqrt{q}\rho_0\sin\varphi, z = \frac{1}{2}\rho_0^2$ (vodorovné elipsy)

Hyperbolická paraboloidální plocha P_H : Parametry ρ, φ.
$x = \sqrt{p}\rho\cosh\varphi, y = \sqrt{q}\rho\sinh\varphi, z = \frac{1}{2}\rho^2$ pro $z \geq 0$, resp.
$x = \sqrt{p}\rho\sinh\varphi, y = \sqrt{q}\rho\cosh\varphi, z = -\frac{1}{2}\rho^2$ pro $z < 0$;
$\rho \in (-\infty, \infty),\ \varphi \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = \sqrt{p}\rho\cosh\varphi_0, y = \sqrt{q}\rho\sinh\varphi_0, z = \frac{1}{2}\rho^2$, resp.
$x = \sqrt{p}\rho\sinh\varphi_0, y = \sqrt{q}\rho\cosh\varphi_0, z = -\frac{1}{2}\rho^2$ (svislé paraboly)
rovnoběžky:
$\rho = \rho_0; x = \sqrt{p}\rho_0\cosh\varphi, y = \sqrt{q}\rho_0\sinh\varphi, z = \frac{1}{2}\rho_0^2$, resp.
$x = \sqrt{p}\rho_0\sinh\varphi, y = \sqrt{q}\rho_0\cosh\varphi, z = -\frac{1}{2}\rho_0^2$ (vodorovné hyperboly)

Eliptická válcová plocha ϑ_E : Parametry φ, z.
$x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi, z = z; \varphi \in [0, 2\pi), z \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = a\cos\varphi_0, y = b\sin\varphi_0, z = z$ (povrchové přímky eliptického válce)
rovnoběžky:
$z = z_0; x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi, z = z_0$ (shodné vodorovné elipsy)

Hyperbolická válcová plocha ϑ_H : Parametry φ, z.
$x = a\cosh\varphi, y = b\sinh\varphi, z = z; \varphi \in (-\infty, \infty), z \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$\varphi = \varphi_0; x = a\cosh\varphi_0, y = b\sinh\varphi_0, z = z$ (povrchové přímky hyperbolického válce)

rovnoběžky:
$z = z_0; x = a\cosh\varphi_0, y = b\sinh\varphi_0, z = z_0$ (shodné vodorovné hyperboly)

Dvojice různoběžných rovin D_1 : Parametry t, z.

$x = at, y = bt, z = z; t \in (-\infty, \infty), z \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$t = t_0; x = at_0, y = bt_0, z = z$ (svislé přímky)
rovnoběžky:
$z = z_0; x = at, y = bt, z = z_0$ (vodorovné přímky)

Parabolická válcová plocha ϑ_P : Parametry x, z.
$x = x, y = \frac{x^2}{2p}, z = z; x \in (-\infty, \infty), z \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$x = x_0, y = \frac{x_0^2}{2p}, z = z_0$ (povrchové přímky parabolického válce)
rovnoběžky:
$x = x, y = \frac{x^2}{2p}, z = z_0$ (shodné vodorovné paraboly)

Dvojice rovnoběžných rovin D_2 : Parametry y, z.
$x = \pm a, y = y, z = z; y \in (-\infty, \infty), z \in (-\infty, \infty)$
Souřadnicové křivky:
poledníky:
$x = \pm a, y = y_0; z = z$ (svislé přímky)
rovnoběžky:
$x = \pm a, y = y, z = z_0$ (vodorovné přímky)

Dvojná rovina D_0 : viz D_2 pro $a = 0$.

Úlohy

(1) Dokažte, že parametrická vyjádření kvadrik uvedená v odst. 8.4 vedou k normálním tvarům z odst. 7.2. Důkaz proveďte přímým výpočtem levých stran normálních tvarů rovnic kvadrik.

(2) Určete poloosy poledníku a rovnoběžky elipsoidální plochy E o rovnici $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$, pro niž $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \vartheta_0 = \frac{2}{3}\pi$.

poledník	$a_p = \cdots$	$b_p = \cdots$
rovnoběžka	$a_r = \cdots$	$b_r = \cdots$

(3) Dokažte, že parametrická vyjádření poledníků a rovnoběžek, které jsou souřadnicovými křivkami na kvadrikách, vyhovují normálním tvarům kartézských rovnic kuželoseček. Úlohu řešte nejprve pro souřadnicové křivky ležící v kartézských souřadnicových rovinách resp. rovinách s nimi rovnoběžných, poté obecně užitím vhodné transformace souřadnic.

(4) Bodem $A = [5\sqrt{3} \;\; 3 \;\; -8]$ kuželové plochy o rovnici $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$ veďte souřadnicové křivky odpovídající zobecněným polárním souřadnicím $\rho_0 = 2, \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

poledník : $\cdots$

rovnoběžka : $\cdots$

(5) Souřadnicové křivky $C_1 = \{[x\ y\ z] \in R^3 |\ x = 4, y = 1, z = -3 - 2t,$ $t \in (-\infty, \infty)\}$ a $C_2 = \{[x\ y\ z] \in R^3 |\ x^2 = 16y, z = -3\}$ procházejí bodem $[4\ \ 1\ \ -3]$ kvadriky, jejíž kartézská rovnice má v soustavě souřadnic $B = \langle 0; x, y, z\rangle$ normální tvar. Zjistěte, o jakou kvadriku se jedná a zapište její kartézskou rovnici i parametrické vyjádření.

Jedná se o kvadriku $\cdots$

Normální tvar : $\cdots$

Parametrické rovnice :
; $\cdots$

Literatura

[1] Musilová J., Krupka D.: Lineární a multilineární algebra. (Skriptum MU Brno.) SPN, Praha 1989.

[2] Musilová J.: Základy užité matematiky. Algebra. (Skriptum MU Brno.) Vydavatelství MU, Brno 1995.

[3] Kvasnica J.: Matematický aparát fyziky. Academia, Praha 1989.

[4] Madelung E.: Príručka matematiky pre fyzikov. Alfa, Bratislava 1975.

[5] Svoboda K.: Analytická geometrie I. (Skriptum UJEP Brno.) SPN, Praha 1967.

[6] Svoboda K.: Geometrie kvadrik. (Skriptum UJEP Brno.) SPN, Praha 1983.

[7] Eliaš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vysšej matematiky. Časť 1. SVTL, Bratislava 1965.