

10. Funkce dvou a více proměnných

1a. Vypočtete parciální derivaci $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ následujících funkcí

i) $z = x^3 y$

ii) $z = y^2 \sin x$

1b. Vypočtete intenzitu $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi$, ($E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$) jestliže potenciál Φ je roven

i) $\Phi = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

ii) $\Phi = \exp(-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

2 Vypočtete parciální derivace následujících složených funkcí

i) $z = (y \sin x)^{e^{x^2 y}}$

ii) $z = xy \sin^2 x + 2y^2 x \ln y$

3a. Divergence vektoru $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ je definována jako

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^i}$$

Rotace vektoru \mathbf{A} je vektor $\mathbf{X} = \text{rot}\mathbf{A}$ jehož složky jsou definovány

$$\mathbf{X} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}, \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right).$$

Pomocí těchto definic dokažte následující vztahy pro libovolné vektory \mathbf{A} , \mathbf{B} a spojitě funkce f, g

- i) $\text{grad}(fg) = \text{grad}(f)g + f\text{grad}(g)$
 - ii) $\text{div}(f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad}f + f\text{div}\mathbf{A}$
 - iii) $\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot}\mathbf{B}$
-

Domácí úkol

10. Dokažte následující vztahy

- i) $\text{rot grad}f = 0$
- ii) $\text{div rot}\mathbf{A} = 0$