11. Funkce dvou a více proměnných, úplný diferenciál

Diferenciál funkce jedné proměnné v bodě x^0 je dán

$$df(x) = f'(x^0)dx \ , f'(x^0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^0} \ .$$

Podobně definujeme *n-tý* diferencial dané funkce v bodě x^0 jako

$$d^n f(x^0)) = f^{(n)}(x^0)dx^n \ , dx^n = (dx)^n \ ,$$

kde $f^{(n)}(x^0)$ je *n-tá* derivace funkce $f(x)$ v bodě x^0.

1a. Vypočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí

i) $f = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \mathrm{arcsin}\frac{x}{a} - 5$

ii) $y = a\sin(bx + c)$

Diferenciál funkce více proměnných $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodě $[x_1^0, \ldots, x_n^0]$ je definován jako

$$dy = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{[x_1^0,\ldots,x_n^0]} dx_1 + \ldots \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{[x_1^0,\ldots,x_n^0]} dx_n \ .$$

Pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ definujeme diferenciál *n-tého* řádu následovně

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \frac{\partial^n z}{\partial^k x \partial^{n-k} y} dx^k dy^{n-k} \ .$$

2.Vypočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí

i) $z = x^4 y^3 + 3x^2 y$

ii) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

iii) $z = y^2e^x$

O nasledujícím výrazu $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ říkáme, že je totálním diferenciálem, jestliže platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \ .$$

3.Rozhodněte, zda daný výraz je totálním diferenciálem a v kladném případě určete danou funkci

i) $(3x^2 + 8ax + 2by^2 + 4y)dx + (4bxy + 3x + 5)dy = 0$

ii) $(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0$

Domácí úkol

11a. Vypočtěte první a druhé diferenciály následující funkcí

i) $z = x^3y^4\cos(x^2 + y^2)$

ii) $z = (x^2 + y^2)e^{x^2+y^2e^{xy}}$

11b.

i) Spočítej $\sqrt[5]{250}$ s přesností 10^{-3}, víš-li, že $3^5 = 243$,

ii) pomocí Taylorova rozvoje funkcí dvou proměnných vypočtěte $\arcsin\frac{0{,}48}{1{,}05}$.