4. Vektory, matice, skalární a vektorový součin

1. Jedna z možných definic determinantu je následující:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \det(\mathbf{A}_{(i,k)}),$$

kde $\mathbf{A}_{(i,k)}$ je matice typu $(n-1, n-1)$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ (typu (n,n)), vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce. (Determinant matice typu $(1,1)$, $\mathbf{A} = (a)$, je číslo a.)
Ukaž, že pro $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ platí

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{(j,i)})}{\det \mathbf{A}},$$

explicitně to ukaž pro matice typu $(2,2)$.

2. U následujících matic zjistěte, zda jsou regulární a v kladném případě stanovte matice inverzní. Užijte obou způsobů výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ a výsledky porovnejte.

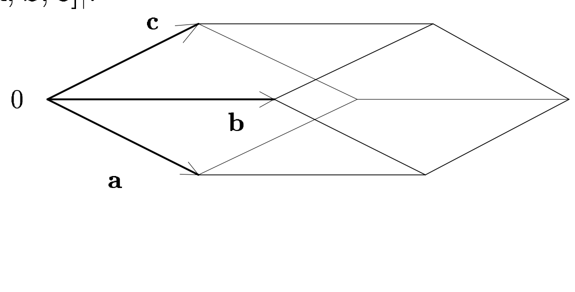
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Dokažte vztah pro smíšený součin

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \equiv \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

užitím vlastností determinantu najděte vztahy mezi smíšenými součiny těchto vektorů ve všech možných pořadích. Dále ukažte, že objem rovnoběžnostěnu o hranách $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (viz obrázek) je roven $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|$.



Domácí úkol

4.

a) Určete (oběma způsoby) inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ (pokud je regulární)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ mají v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ složky $a^1 = 1, a^2 = 1, b^1 = 1, b^2 = -1$, v bázi $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2$ složky $\overline{a}^1 = -1, \overline{a}^2 = 0, \overline{b}^1 = 1, \overline{b}^2 = 2$. Určete matici přechodu mezi bázemi a vyjádřete pruhované vektory báze jako lineární kombinaci nepruhovaných a obráceně. Mají báze stejnou orientaci?

c) Udejte podmínku, která
i) je nutná, ale není dostatečná,
ii) není nutná, ale je dostatečná,
iii) je nutná a dostatečná,
aby systém vektorů $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (\alpha, \beta, \gamma)$ byl bází $\mathbf{R}^3$.