5. Písemka

Písemka první - základní mat. metody 1

1. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{\sin 4x+\sqrt{x}}}.$$

Návod: Využijte skutečnosti, že pro libovolnou funkci je $f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)}$.

[2 body]

2. Vypočtěte následující integrály

a) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}x$

Návod: Substituce

b) $\int x \cdot \sin x \mathrm{d}x$

Návod: Per partes

c) $\int 2\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}$

Návod: Rozložte na parciální zlomky $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$.

[5 bodů]

3a. Vektory $\vec{a}, \vec{b}$ mají v bázi (e_1, e_2) složky $a^1 = 3, a^2 = 2, b^1 = 2, b^2 = 2$, v bázi $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ složky $\overline{a}^1 = 1, \overline{a}^2 = 1, \overline{b}^1 = -1, \overline{b}^2 = 1$. Určete matici přechodu mezi bázemi, vypočtěte její determinant a vyjádřete pruhované vektory báze jako lineární kombinaci nepruhovaných a obráceně.
3b. Určete inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

[3 body]

Domácí úkol

5. Pro předmět kulového tvaru platí při malých rychlostech následující vztah pro odporovou sílu:

$$F_o = 6\pi\eta r v$$

(Lze exaktně odvodit z Navier-Stokesových rovnic!) r je poloměr kuličky, v je rychlost. Ukažte, že pokud na kuličku nepůsobí žádné další síly, je pohybová rovnice diferenciální rovnicí tvaru:

$$\dot{v} = -Cv$$

Rovnici vyřešte pro nějakou konkrétní počáteční podmínku a najděte "dolet" tzn. vzdálenost, ve které se kulička s určitou počáteční rychlostí zastaví.

Působí-li navíc nějaká konstantní síla (např. pád ocelové kuličky v nádobě naplněné olejem) pohybová rovnice má tvar:

$$\dot{v} = -Cv + B$$

Rovnici vyřešte (obecně a pro určité počáteční podmínky) a nakreslete graf závislosti rychlosti na čase. (všimněte si, že postup řešení nezávisí na tom, působí-li ta konstantní síla ve směru pohybu nebo proti směru pohybu.)