

6. Diferenciální rovnice

1. Do dna nádoby ve tvaru válce o poloměru R je vyvrtaná díra o poloměru r . Do nádoby nalejeme vodu. Určete závislost $h(t)$ výšky hladiny na čase. Taková úloha vede na diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{d}{dt}h(t) = A\sqrt{h(t)}$$

Rovnici vyřešte separací proměnných. Jaký je význam integrační konstanty? Jak vypadá partikulární řešení pro počáteční podmínku $h(t_0) = H$? Navíc můžete určit fyzikálním rozbořem hodnotu konstanty A .

2. řešte následující diferenciální rovnice:

$$\dot{x} = 2tx$$

$$\dot{y} = -2y - t + 1$$

$$t^2\dot{y} + ty + 1 = 0$$

3.řešte následující diferenciální rovnice:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = 0$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 5x = 0$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$$

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$$

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$$

Domácí úkol

6. Při vyšších rychlostech platí pro odporovou sílu Newtonův vztah (empiricky zjištěno):

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2$$

Pokud na těleso nepůsobí žádné další síly, je pohybová rovnice tvaru:

$$\dot{v} = -Qv^2$$

(odpovídající fyzikální situace je např. brždění rozjetého parníku)
Rovnici vyřešte a zjistěte "dolet" (viz. úloha 2.)

Působí-li navíc určitá konstantní síla, pak postup řešení závisí na tom, působí-li tato síla ve směru či proti směru pohybu.

- kromě odporové síly působí navíc konstantní síla proti směru pohybu. (odpovídající fyzikální situace: předmět s hustotou nižší než voda dopadá určitou počáteční rychlostí do vody. Jak hluboko se ponoří?) Pohybová rovnice je má tvar:

$$\dot{v} = -Qv^2 - R, \quad R > 0$$

Rovnici vyřešte a najděte "hloubku ponoru".

- kromě odporové síly působí navíc konstantní síla ve směru pohybu. (odpovídající fyzikální situace je např. pád parašutisty)
Pohybová rovnice má tvar:

$$\dot{v} = -Qv^2 + R, \quad R > 0$$

Rovnici vyřešte.