Motivační příklad

Pokusme se zjistit, jakou křivku v rovině zadává rovnice

$$5x^2 + 7y^2 - 2\sqrt{3}xy = 4$$

Rovnice, ve které se vyskytují nejvýše druhé mocniny, nemůže zadávat nic složitějšího než parabolu, hyperbolu nebo elipsu. Necvičené oko však jen z té rovnice nepozná, o jakou křivku jde. Přitom stačí pootočit souřadnice o 30°:

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x$$

a rovnice přejde na jednoduchý tvar

$$x'^2 + 2y'^2 = 1$$

z čehož je vidět, že křivkou je elipsa s poloosami o délkách 1 a $\sqrt{2}/2$.

Transformace souřadnic

Nyní ukážeme obecnou metodu hledání takové ortonormální transformace souřadnic, která převede obecnou rovnici obecné kuželosečky (elipsa, hyperbola, parabola) do hezkého tvaru. Začneme tedy s obecnou rovnicí kuželosečky:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Nejprve se zbavíme členu obsahujícího součin xy. Tento člen odpovídá za natočení hlavních os kuželosečky (významné směry) oproti použitým souřadnicím. Zbavíme se ho tedy tak, že otočíme souřadnice:

$$x' = \cos\varphi x + \sin\varphi y \qquad y' = -\sin\varphi x + \cos\varphi y$$

Inverzní transformace je

$$x = \cos\varphi x' - \sin\varphi y' \qquad y = \sin\varphi x' + \cos\varphi y'$$

V těchto nových souřadnicích dostaneme poněkud dlouhou rovnici

$$\begin{aligned}
&(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi)x'^2 + \\
&2(B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (C-A)\cos\varphi\sin\varphi)x'y' + \\
&(A\sin^2\varphi - 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\cos^2\varphi)x'^2 + \\
&(D\cos\varphi + E\sin\varphi)x' + (E\cos\varphi - D\sin\varphi)y' + F = 0
\end{aligned}$$

Chceme, aby rovnice po natočení souřadnic neobsahovala člen s $x'y'$, takže musíme řešit rovnici pro úhel natočení:

$$B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (C-A)\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

Vydělením této rovnice $\cos\varphi$ získáme kvadratickou rovnici pro $\tan\varphi$:

$$B\tan^2\varphi + (A-C)\tan\varphi - B = 0$$

Diskriminant je kladný a tak vždy existují dvě řešení. (rozmyslete si, jaký je význam druhého řešení – hledali jsme JEDNO natočení souřadnic?)

$$\tan\varphi = \frac{C - A \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2B}$$

Pokud nás nezajímá, o kolik bylo třeba souřadnice pootočit, nemusíme ani počítat hodnotu φ, stačí dosadit do vztahů

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Obecně to tu vypisovat nebudu, ale po dosazení do obecné rovnice kuželosečky dostaneme jednodušší tvar. Nejhorší máme již za sebou! (Vynechvám teď čárky u nových souřadnic.)

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Teď je situace jednoduchá. Rovnici lze přepsat do tvaru

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 + f - \frac{d^2}{4a^2} - \frac{e^2}{4c^2} = 0$$

Stačí nám tedy jen posunout počátek souřadnic do bodu $(-d/2a, -e/2c)$ neboli

$$x' = x + \frac{d}{2a} \qquad y' = y + \frac{e}{2a}$$

A dostali jsme rovnici ve tvaru

$$ax^2 + cy^2 + g = 0 \tag{1}$$

Poslední krok tohoto postupu má smysl jen tehdy, když jsou koeficienty a, c nenulové. Je-li jeden z koeficientů nulový již po otočení souřadnic, provedeme posunutí počátku jen u té souřadnice, u které to má smysl a ponecháme rovnici ve tvaru

$$px^2 + y = 0 \tag{2}$$

Rovnice (1) je buďto hyperbola, nebo elipsa (nepočítame-li možne degenerované případy), (2) je rovnicí paraboly. Klasifikaci, stejně jako geometrický popis těchto kuželoseček si provedete v přednášce.

Kvadratická forma vs. lineární zobrazení

Tady se pokusím zobecnit postup hledání vhodných souřadnic pro zápis rovnice kuželosečky tak, aby fungoval i ve více dimenzích. Provádět podobné otáčení souřadnic v 3D pro klasifikaci kvadrik by bylo příliš složité. Především bych rád vysvětlil, proč se při hraní s kuželosečkami využívá hledání vlastních hodnot a vlastních vektorů matice jakožto lineárního zobrazení. Když jsem se to kdysi učil, tak jsem sice věděl že to funguje, ale nevěděl proč. To jsem se tu pokusil vysvětlit. Začnu od konce: Proč? Protože:

1. Matice kvadratické formy se při změně báze transformuje jako $Q' = (P^{-1})^T Q P^{-1}$.
2. Matice lineárního zobrazení se při změně báze transformuje jako $A' = PAP^{-1}$
3. Pro ortogonální transformace platí $PP^T = \mathbf{Id}$ neboli $P^T = P^{-1}$. Takže při ortogonální změně báze se matice kvadratické formy transformuje jako $Q' = PQP^{-1}$.
4. Je-li matice lineárního zobrazení symetrická, pak existuje ortogonální transformace, která matici lineárního zobrazení diagonalizuje.
5. Protože můžeme matici kvadratické formy volit jako symetrickou, můžeme najít ortogonální transformaci, která formu diagonalizuje pomocí metod, kterými se hledá taková transformace pro lineární zobrazení.

Tak důvody jsou napsány, zbývá je vysvětlit. Tak nejdřív: Jak souvisí kuželosečka a kvadratická forma? Všimněte si, že obecnou rovnici kuželosečky lze napsat pomocí matice takto:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \text{lineární členy} = 0$$

Zajímají nás teď především kvadratické členy, tzn. ta část rovnice kuželosečky, která je zapsaná ve tvaru $\vec{x}^T Q \vec{x}$, kde

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zobrazení $q(\vec{x}) : V \to \mathbb{R}$ kde $q(\vec{x}) = \vec{x}^T Q \vec{x}$ se říká kvadratická forma a matice Q je její matice v příslušné bázi.

Všimněte si, že máme v určitou libovůli v tom, jakou matici použijeme. Stejnou kuželosečku bychom mohli zapsat pomocí různých matic, třeba

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} A & 2B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} A & B/2 \\ 3B/2 & C \end{pmatrix}$$

všechny dají stejnou rovnici. To, že si pro reprezentaci vybíráme právě symetrickou matici, má významné důsledky.

Hledáme takové otočení, tedy takovou transformaci souřadnic, která by převedla rovnici kuželosečky do tvaru bez smíšených členů, tedy do tvaru

$$ax'^2 + cy'^2 + \text{lineární členy} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \text{lineární členy} = 0$$

jinými slovy takovou transformaci báze, ktará by matici kvadratické formy převedla na diagonální tvar.

Transformaci souřadnic je možné reprezentovat transformační maticí působící na $\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{neboli} \qquad \vec{x}' = P\vec{x} \quad \text{a} \quad \vec{x} = P^{-1}\vec{x}'$$

A tedy v transformované bázi bude mít kvadratická forma matici $Q' = (P^{-1})^T Q P^{-1}$. To proto, že

$$\vec{x}^T Q \vec{x} = \left(\vec{x}'^T (P^{-1})^T\right) Q \left(P^{-1}\vec{x}'\right) = \vec{x}'^T \left((P^{-1})^T Q P^{-1}\right) \vec{x}' = \vec{x}'^T Q' \vec{x}'$$

Zásadní je, že hledáme **ortonormální** transformaci, tj. takovou, která zachovává směry a úhly mezi vektory. Matice takové transformace má skvělé vlastnosti:

$$P \text{ je ortonormální} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = P^T \wedge |\det P| = 1$$

Takže transformovaná matice kvadratické formy bude zapsána mnohem elegantněji jako $Q' = PQP^{-1}$. Náš problém tedy můžeme přeformulovat takto: "Hledáme matici ortonormální transformace P, která matici Q kvadratické formy transformuje podobnostní transformací na diagonální tvar."

V lineární algebře se řeší problém hledání vlastních hodnot a vlastních vektorů matice (přitom tam matice reprezentuje lineární zobrazení, nikoliv kvadratickou formu). Formulace toho problému je podobná: Lineární zobrazení $a : V \to V$ je v určité bázi zadáno maticí A. Hledáme takovou bázi, v níž bude zadané lineární zobrazení reprezentováno diagonální maticí (avšak ne vždy lze takovou bázi najít). Transformace matice lineárního zobrazení do nové báze se dělá podle vztahu $A' = PAP^{-1}$, kde P je příslušná matice přechodu. Přitom zde transformace nemusí být ortonormální! Je-li ovšem matice zobrazení symetrická, pak vždy existuje taková „diagonalizující“ matice P, která je ortonormální.