Laplaceova transformace

Definice: Množina $E[0, +\infty)$ integrabilních funkcí exponenciálního řádu je množina všech spojitých funkcí $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takových, že pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$ máme, že

$$\int_0^{\infty} dx e^{-tx} f(x) dx \tag{1}$$

existuje jako reálné číslo pro každé $t \in (\alpha, +\infty)$.

Definice: Laplaceova transformace je definována jako zobrazení $\mathcal{L} : E[0, +\infty) \to \mathcal{F}(\mathbf{R})$ definována jako $\mathcal{L}(f) = F$, kde

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx \tag{2}$$

pro $t \in (\alpha, +\infty)$.
1. Spočtěte Laplaceovu transformaci následujících funkcí:

i) $f(x) = 1$

ii) $f(x) = x^n$

iii) $f(x) = e^{ax}$

iv) $f(x) = \cos(bx)$

2. Označme $n-$tou derivaci funkce $y(x)$ jako $y^{(n)}$. Dokažte, následující transformace:

i) $\mathcal{L}(y^{(1)})(t) = y(0) + t\mathcal{L}(y)(t)$

ii) $\mathcal{L}(y^{(2)})(t) = -y^{(1)}(0) + ty(0) + t^2\mathcal{L}(y)(t)$

iii) $\mathcal{L}(y^{(n)})(t) = -y^{(n-1)}(0) - ty^{(n-2)}(0) - \dots t^{n-1}y(0) + t\mathcal{L}(y)(t)$

3. Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující diferenciální rovnice:

i) $\frac{dy}{dx} + y = x \cos x$, $y(0) = 0$, $\mathcal{L}(x \cos bx) = \frac{t^2 - b^2}{(t^2 + b^2)^2}$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = 3e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

iii) $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, $y(0) = 3$

iv) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$

Domácí úkol

Xa. Spočtěte Laplaceovu transformaci následujících funkcí:

i) $f(x) = \sin bx$, $[\frac{b}{t^2+b^2}$, $t > 0]$

ii) $f(x) = xe^{ax}$, $[\frac{1}{(t-a)^2}$, $t > a]$

Xb. Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující diferenciální rovnice:

i) $y' - y = x$, $y(0) = 2$, $[y = 3e^x - x - 1]$

ii) $y'' + 4y = 3\sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $[y = \cos 2x + \frac{7}{8}\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x]$