Řešeních rovnic pomocí Laplaceovy transformace

Přehled některých Laplaceových transformací:

- $f(x) = 1$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$
- $f(x) = x^n$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$, $t > 0$
- $f(x) = e^{ax}$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{1}{t-a}$, $t > a$
- $f(x) = xe^{ax}$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{1}{(t-a)^2}$, $a > 0$
- $f(x) = x^n e^{ax}$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{n!}{(t-a)^{n+1}}$, $t > a$
- $f(x) = \cos bx$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{t}{t^2+b^2}$, $t > 0$
- $f(x) = \sin bx$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{b}{t^2+b^2}$, $t > 0$
- $f(x) = x \cos bx$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{t^2-b^2}{(t^2+b^2)^2}$, $t > 0$
- $f(x) = x \sin bx$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{2bt}{(t^2+b^2)^2}$, $t > 0$
- $f(x) = e^{ax} \cos bx$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}$, $t > a$
- $f(x) = e^{ax} \sin bx$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{b}{(t-a)^2+b^2}$, $t > a$
- $f(x) = \cosh ax$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{t}{t^2-a^2}$, $t > a$
- $f(x) = \sinh ax$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{a}{t^2-a^2}$, $t > a$
- $f(x) = e^{ax} - e^{bx}$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{a-b}{(t-a)(t-b)}$, $t > \max(a, b)$
- $f(x) = \sin bx - bx \cos bx$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{2b^3}{(t^2+b^2)^2}$, $t > 0$

- $\mathcal{L}(y^{(1)})(t) = -y(0) + t\mathcal{L}(y)(t)$
- $\mathcal{L}(y^{(2)})(t) = -y^{(1)}(0) + ty(0) + t^2\mathcal{L}(y)(t)$
- $\mathcal{L}(y^{(n)})(t) = -y^{(n-1)}(0) - ty^{(n-2)}(0) - \dots t^{n-1}y(0) + t^n\mathcal{L}(y)(t)$

1. Pomocí předchozí tabulky najděte $y(x)$ z dané $\mathcal{L}(y)$

   i) $\mathcal{L}(y) = \frac{1}{t^{n+1}}$

   ii) $\mathcal{L}(y) = \frac{1}{t^2+a^2}$

   iii) $\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(t^2+a^2)^2}$

   iv) $\mathcal{L}(y) = \frac{1}{t^2+6t+13}$

2. Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující diferenciální rovnice:

   i) $\frac{dy}{dx} + y = x\cos x$, $y(0) = 0$, $\mathcal{L}(x\cos bx) = \frac{t^2-b^2}{(t^2+b^2)^2}$

   ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = 3e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

   iii) $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, $y(0) = 3$

   iv) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$

3. Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující diferenciální rovnice:

   i) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$

   ii) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   iii) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}\cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$

iv) $y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Domácí úkol

1.a Najděte $y(x)$ z dané $\mathcal{L}(y)$

i) $\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(t^2+a^2)^2}$,

ii) $\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(t-3)(t-4)}$

1b. Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující diferenciální rovnice:

i) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $[y = -\frac{1}{2}e^x + xe^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x]$

ii) $y''' + y'' = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $[y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 - e^{-x}]$