3. Kuželosečky a kvadriky

U vícepoložkových úloh pro odevzdání stačí vypracovat pouze dvě podotázky

1. Kuželosečky jako množiny bodů s určitou vlastností.

a) Nechť F, G jsou dva různé body v rovině. Jejich vzdálenost označme $|FG| = 2e$. Nechť a je reálné číslo takové, že $a > e$. Najděte rovnici množiny bodů X takových, že $|FX| + |GX| = 2a$ a ukažte, že je to rovnice elipsy s délkami poloos $a, \sqrt{a^2 - e^2}$. (Body F, G se nazývají ohniska elipsy, číslo e se nazývá výstřednost elipsy.)

b) Nechť F, G jsou dva různé body v rovině. Jejich vzdálenost označme $|FG| = 2e$. Nechť a je reálné číslo takové, že $a < e$. Najděte rovnici množiny bodů X takových, že $||FX| - |GX|| = 2a$ a ukažte, že je to rovnice hyperboly s délkami poloos $a, \sqrt{e^2 - a^2}$.

c) Nechť F je bod a d je přímka v rovině a $\varrho(F, d) = p$. Najděte rovnici množiny bodů X, takových, že $|FX| = \varrho(X, d)$. Symbolem $\varrho(\cdot, \cdot)$ značíme vzdálenost dvou objektů. (číslo p se nazývá parametr paraboly).

2. Ukažte, že rovnice

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

je rovnicí kuželosečky v polárních souřadnicích. Pro $\varepsilon < 1$ jde o elipsu, pro $\varepsilon = 1$ jde o parabolu a pro $\varepsilon > 1$ jde o hyperbolu. Přitom počátek souřadnic je totožný s jedním ohniskem kuželosečky. Určete parametry p, ε pomocí velikostí poloos výstřednosti. Tohoto vyjádření se využívá například v Keplerově úloze. (Počítá se dráha planety v centrálním gravitačním poli)**Hint:** Nejjednodušší je využít definice příslušné kuželosečky jako množiny bodů s určitou vlastností. viz úloha 1.

3. Mostní oblouk má tvar paraboly. Jeho délka je 48m a výška 12m. Určete parametr této paraboly.

4. Pomocí kartézských transformací souřadnic určete kanonickou rovnici kuželosečky a transformaci souřadnic, která převede rovnici do kanonického tvaru.

a) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ (hyperbola)

b) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$ (elipsa)

c) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ (hyperbola)

d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ (parabola)

5. Určete kanonickou rovnici kvadriky a transformaci souřadnic, která na tento kanonický tvar převádí.

a) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$ (dvojdílný hyperboloid)

b) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$ (elipsoid)

c) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$ (kuželová plocha)

d) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$ (jednodílný hyperboloid)

e) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$ (eliptický (rotační) paraboloid)

Domácí úkol

IIIa.
Určete rovnice tečen kuželosečky

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

které jsou rovnoběžné s přímkou $3x + 3y - 5 = 0$. Určete také souřadnice bodů dotyku.

IIIb. Bodem M veďte tečny ke kuželosečce

a) $M = (-2, 1), \quad 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$

b) $M = (0, 0), \quad xy = 0$

c) $M = (0, 0), \quad 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$

d) $M = (3, 4), \quad 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$