8. Písemka

1. Vypočtěte tok vektorového pole $\mathbf{F} = (x, y, k = konst)$ přes plochu tvaru válce o výšce L a poloměru R.
[2.5] b. **Řešení**

Tok je součtem tří částí $I = I_1 + I_2 + I_3$ kde I_1 je tok přes dolní podstavu kterou parametrizujeme takto:

$$z = 0 \ , x = u \cos v \ , y = u \sin v \ , u \in (0, R) \ , v \in (0, 2\pi) \Rightarrow \\ \mathbf{f}_u = (\cos v, \sin v, 0) \ , \mathbf{f}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0) \ , \mathbf{n} = \mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v = (0, 0, u) \ , \tag{1}$$

Protože počítáme tok ve směru vnější normály máme:

$$I_1 = -\int dudv F_z n_z = -\int_0^{2\pi} dv \int_0^R duku = -\pi k R^2 \ . \tag{2}$$

Stejnou parametrizaci použijeme pro horní podstavu kde $z = L$ a tok je roven

$$I_2 = \pi k R^2 \tag{3}$$

Pro tok I_3 použijeme parametrizaci:

$$x = R \cos v \ , y = R \sin v \ , v \in (0, 2\pi), z = u \ , u \in (0, L) \Rightarrow \\ \mathbf{f}_v = (-R \sin v, R \cos v, 0), \mathbf{f}_u = (0, 0, 1) \ , \\ \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v = (-R \cos v \ , -R \sin v, 0) \tag{4}$$

a tedy

$$I_3 = -\int_0^{2\pi} \int_0^L dudv (F_x n_x + F_y n_y) = R^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} dudv = 2\pi R^2 L \tag{5}$$

Celkový tok je tedy roven $I = 2\pi R^2 L$

2. Vypočtěte tok vektorového pole $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ přes plochu zadanou rovnicí $R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2$ pomocí Gaussovy věty

$$\int_V \mathrm{div} \mathbf{F} dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

[2.5] b.

Řešení

Nejdříve spoǐtáme divergenci div$\mathbf{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$. Ve sférických souřadnicích je objemový element roven $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ a tedy daný tok je podle Gaussovy věty roven

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathrm{div}\mathbf{F} dV =$$
$$= 3\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} drr^4 \sin^2\theta d\theta d\phi = \frac{12\pi}{5}(R_2^5 - R_1^5) \tag{6}$$

3. Vypočtěte tok vektorového pole $\mathbf{G} = (x, -y, 1)$ přes plochu S zadanou rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$ pomocí Stokessovy věty

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

kde $\mathbf{G} = \mathrm{rot}\mathbf{F}$
[2.5] b.

Řešení

Hledané $\mathbf{F}$ je rovno

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y, x, 2xy)$$

Křivka L leží v rovině $z = 0$ a odpovídá kružnici o poloměru R, tedy parametrizace je

$$x = R\cos t\ , y = R\sin t\ , t \in (0, 2\pi)$$

tedy daný tok je roven

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$
$$= \int_L (F_x dx + F_y dy) = \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} dt(\cos^2 t + \sin^2 t) = \pi R^2 \tag{7}$$

4. Vypočtěte následující plošný integrál

$$\int_S (x^2 + y^2 + y^2) dS$$

kde plocha S je dána rovnicí $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z >= 0$. **Řešení** Zvolíme parametrizaci $x = R \sin u \cos v$, $y = R \sin u \sin v$, $z = R \cos u$, $u \in (0, \pi/2)$, $v \in (0, 2\pi)$. Poté plošný element je roven $dS = R^2 \sin u du dv$ a daný integral je roven

$$\int_S (x^2 + y^2 + y^2) dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} du dv R^4 \sin u = 2\pi R^4 \tag{8}$$

VIII. Pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ definujeme diferenciál *n-tého* řádu následovně

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{\partial^n z}{\partial^k x \partial^{n-k} y} dx^k dy^{n-k} \ .$$

Vypočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí

a) $z = x^4 y^3 + 3x^2 y$,

b) $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$,

c) $z = y^2 e^x$.

Zapište Taylorovu řadu těchto funkcí v bodě (x_0, y_0) do druhého členu včetně.