9. Taylorova řada funkce více proměnných

Taylorova řada funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0 je definována takto:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1} \ , \tag{1}$$

kde

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \ , \xi \in (x, x_0) \tag{2}$$

1a. Víme, že funkce $f(x)$ je polynom 4-tého stupně a také známe její derivace v bodě 2:

$$f(2) = -1 \ , f^{(1)}(2) = 0 \ , f^{(2)}(2) = 2 \ , f^{(3)}(2) = -12 \ , f^{(4)}(2) = 24 \ . \tag{3}$$

Určete $f(-1)$, $f^{(1)}(-1)$, $f^{(2)}(-1)$.

2a. Spočtěte $\sin 18^0$ na čtyři desetinná místa přesně.

2b. Vypočtěte e s chybou $R^n < 10^{-3}$.

2c. Dokažte, že funkce

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} \tag{4}$$

má tvar

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \ . \tag{5}$$

Taylorova řada funkce dvou proměnných v okolí bodu $x_0\ , y_0$ je definována takto

$$f(x_0+h\ , y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{[x_0,y_0]} h + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{[x_0,y_0]} k\right] + + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{[x_0,y_0]} h^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{[x_0,y_0]} hk + + \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}\right|_{[x_0,y_0]} k^2\right] + \ldots R_{n+1}\ , \tag{6}$$

kde

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x,y)|_{[x_0+\eta_1 h\ ,y_0+\eta_2 k]}\ , \quad 0<\eta_1<1\ , 0<\eta_2<1 \tag{7}$$

3a. Aproximujte funkci $f(x,y) = \sin x \cos y$ v okolí bodu $[0,0]$ polynomem třetího stupně.

3b. Rozložte funkci $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ v okolí bodu $[2,1]$.

3c. Rozložte funkci $f(x,y) = e^y \cos x$ v okolí bodu $[0,0]$.

Domácí úkol

1. Nahraďte následující funkce v okolí bodu $x = 0$ polynomem šestého stupně:

i) $\cosh x$

ii) $\cos x$

iii) $\ln(1+x)$

2. Dokažte následující rovnici

$$\sin(x+c) = \sin c + (\cos c)x - (\sin c)\frac{x^2}{2!} + -(\cos c)\frac{x^3}{3!} + (\sin c)\frac{x^4}{4!} + \ldots . \tag{8}$$