F1711 - Matematika 1 – Přednášky

Typed by Petr Šafařík

Lineární algebra

Linea=přímka(čára, linie)

Úměra --> přímá úměra

Př.: $y=kx+q$

Lineární algebra – pracuje s teoretickým podkladem (vektory etc.) pro objekty přímé úměry.

Řešení lineárních rovnic

1.1.1.

Příklady linearity

- Geometrický

Př. 1.1

Vyjádřete přímku v **R(3)**

Zadání přímky:
- dva body
- bod a směrový vektor

Libovolný bod přímky x:

$A\vec{X} = t \cdot \vec{u}$ ... t je parametr

$X = A + t \cdot \vec{u}$

$A = [x_A; y_A; z_A];\ X = [x; y; z];$

$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$

$X = x_A + tu_1$

$Y = y_A + tu_2$

$Z = z_A + tu_3$

$$p = \{(x; y; z) \in \mathbf{R}^3 |\ X = x_A + tu_1; Y = y_A + tu_2; Z = z_A + tu_3\}$$

Př. 1.2

Vyjádření roviny v **R(3)**

Zadání roviny:
- 3body, které neleží v jedné přímce
- Přímka a bod mimo ni
- Bod a 2 nelineární vektory

$A = [x_A; y_A; z_A];\ X = [x; y; z];\ \vec{u} = (u_1; u_2; u_3); \vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$

$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$

$X = x_A + tu_1 + sv_1$

$Y = y_A + tu_2 + sv_2$

$Z = z_A + tu_3 + sv_3; t, s \in \mathbf{R}$

$$\rho = \{(x; y; z) \in \mathbf{R}^3 |\ X = x_A + tu_1 + sv_1; Y = y_A + tu_2 + sv_2; Z = z_A + tu_3 + sv_3\}$$

- Fyzikální

Př. 1.3 Ohmův zákon

Pro některé prvky v jistých teplotních rozmezích platí, že

$U = R \cdot I$

R...konstanta úměrnosti = odpor

Př. 1.4

$s = s_0 + v_0 t$ ... dráha rovnoměrného pohybu

$v = v_0 + a_\tau t$ ... rovnoměrné zrychlení a_τ ...tečné zrychlení

Př. 1.5 Rozpad jader

V daný okamžik t máme k dispozici n radioaktivních jader. Empiricky bylo zjištěno: $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$

1.1.2 Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení
Mějme n-tici neznámých veličin a celkem m podmínek (lineárních rovnic)

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Soustava lineárních rovnic pro m neznámých ($n \neq m$ nebo i $n=m$)
Řešení: uspořádaná n-tice $[x_1;\dots\dots;x_n]$ po jejímž dosazení dostáváme identitu.

Zavedení matic:
Matice: obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ =matice soustavy

m řádků
n sloupců

... matice typu m/n

Zkráceně: $A = (a_{ij})$
i... řádkový index
j...sloupcový index

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ ...sloupcová matice typu m/1[1]

Rozšířená matice soustavy B

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic
– jsou to takové úpravy, po jejichž provedení má daná (rovnice) soustava přesně totéž řešení, jako soustava původní...

- Vynásobení i-tého řádku (i-té rovnice) nenulovým číslem
- Přičtená i-tého řádku (rovnice) k libovolnému násobku j-tého (j-té rovnice).

[1] POZNÁMKA:
Násobení matic (pouze vhodné typy a v daném pořadí!!!)
Nechť $A(a_{ij})$je matice typu m/n a $C(c_{jk})$ je matice typu n/p. Součin matic $A \cdot C$ v tomto pořadí je matice $D = (d_{ik})$ typu m/p, kde $d_{ik} é \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$

Př. 1.6
Je dána soustava 3 rovnic o 5ti neznámých

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4-5x_5&=0\\ -2x_1-4x_2+2x_3+4x_4+4x_5&=-6\\ -x_1-2x_2+x_3+5x_4-x_5&=6 \end{aligned}$$

$$B=\left(A \mid \overline{B}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ekvivalentní soustava rovnic:

$$x_1+2x_2-x_3+x_4-5x_5=0$$

$$x_4-x_5=-1$$

$0=1 \Rightarrow$ soustava nemá řešení

Schodovitý tvar matice: každý následující řádek začíná větším počtem nul než předchozí.
(výška „schodu“ = 1 řádek; ale může být různá délka)

Hodnost matice: Počet nenulových řádků na schodovém tvaru.
Značíme: h(A) pro matici A, h(B) pro matici B

$h(B)\geq h(A)$ → $h(A)=h(B)-1$ ...žádné řešení

$h(B)\geq h(A)$ → $h(A)-h(B)=0 \Rightarrow h(A)=h(B)$

Věta 1.1 – Frobeniova
Soustava n lineárních rovnic o m neznámých má řešení právě tehdy, když je hodnost matice soustavy h(A) rovna hodnosti rozšířené matice soustavy h(B) $\Leftrightarrow h(A)=h(B)$

Kolik má soustava řešení?

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4-5x_5&=0\\ -2x_1-4x_2+2x_3+4x_4+4x_5&=-6\\ -x_1-2x_2+x_3+5x_4-x_5&=-6 \end{aligned}$$

$$B=\left(A \mid \overline{B}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ekvivalentní rovnice:

$1)\, x_1+2x_2-x_3+x_4-5x_5=0$

$2)\, x_4-x_5=-1$

$3)\, 0=0$

Řešení „odzadu“

Z (2) zvolíme za volnou neznámou $x_4 \Rightarrow x_5 = x_4 + 1$
Dosadíme do (1)

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5(x_4 + 1) = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_4 - 5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 5 = 0$$

Další volné neznámé $x_4; x_3; x_1$

$$2x_2 = x_3 - x_4 + 4x_4 + 5 - x_1$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(5 + 4x_4 + x_3 - x_1)$$

Řešení:

$\left[x_1; x_2 = \frac{1}{2}(5 + 4x_4 + x_3 - x_1); x_3; x_4; x_4 + 1\right]$... nekonečně mnoho

Věta 1.2
Nechť pro soustavu m-lineárních rovnic o n neznámých platí: h(A)=h(B)=h
Potom řešení soustavy rovnic obsahuje celkem *d; d*=*n*-*h* volných neznámých.

Důsledek předchozích dvou vět 1.1 a 1.2
1.) $h(A) \neq h(B)$...nemá řešení
2.) $h(A) = h(B) = h \wedge h = \mu$ ... právě jedno řešení (žádná volná neznámá)
3.) $h(A) = h(B) = h \wedge h \prec \mu$ ... nekonečně mnoho řešení (*d*=*n*-*h* volných neznámých)

M...max$\{m; n\}$
μ...min$\{m; n\}$

! Zvláštní případ:
$b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$
Homogenní soustava. Vždy platí h(A)=h(B)
Má vždy řešení!!! Přinejmenším $x_1 = x_2 = ... = x_m = 0$

Pokud $h(A) = h(B) = h \wedge h \prec \mu$; pak je pouze triviální řešení $x_1 = x_2 = ... = x_m = 0$
Pokud $h(A) = h(B) = h \wedge h \prec \mu$; pak nekonečně mnoho řešení vyjádřeno díky *d*=*n*-*h* volných neznámých.

Zadání roviny α :

$$A=[1;0;1] \qquad x=1+2s-t$$
$$\vec{u}=(2;-1;0) \longrightarrow \alpha: \; y=0-x+2t$$
$$\vec{v}=(-1;2;1) \qquad z=-1+t$$
$$X = A+s\vec{u}+t\vec{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{X}_1 = s\vec{u}_1 \\ A\vec{X}_2 = s\vec{u}_2 \end{array}\right\} A\vec{X} = A\vec{X}_1 + A\vec{X}_2 = s\vec{u}+t\vec{v}$$

$$A=[x_A;y_A;z_A];X=[x;y;z]$$
$$X\vec{A}=(x-x_A;y-y_A;z-z_A)=X-A$$

$$X = A+s\vec{u}+t\vec{u}$$

$$x=1+2s-t$$
$$y=-s+2t$$
$$\underline{z=-1+t \Rightarrow t=z+1}$$
$$x=1+2s-(z+1)$$
$$\underline{y=-s+2(z+1)}$$
$$x+2y=1+3(z+1)$$
$$\underline{\alpha: x+2y-3z-4=0}$$

Najděte společné body těchto rovin:

$$\alpha: x+2y-3z-4=0$$
$$\beta: 2x-y+z+1=0$$
$$\chi: -x+3y-4z=0$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & +4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -9 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení
Nula společných bodů

$$h(A)=2$$
$$h(B)=3$$

Směr rovnoběžný s rovinou

$$ax+by+cz+d=0$$
$$\alpha: x+2y-3z-4=0$$
$$X[1;0;3]$$
$$?\,X\in\alpha?$$
$$1+2\cdot 0-3\cdot 3-4=-12\neq 0$$
$$X\notin\alpha$$

$\mathbf{u} = (5;-1;3); \mathbf{u} \| \alpha ?$

$\mathbf{u} = (Y - X) = (u_1; u_2; u_3)$
$\mathbf{u}' = (Y' - X') = (u'_1; u'_2; u'_3)$ ... shodné

$a(x_x + x_y) + b(y_x + y_y) + c(z_x + z_y) = 0$

$\mathbf{u} : au'_1 + bu'_2 + cu'_3 = 0$

$\mathbf{u} : 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -6 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} \| \alpha ... \textit{není} \|$

$\mathbf{v} = (5;-1;1) \Rightarrow 5 - 2 - 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \| \alpha$

$\alpha : x + 2y - 3z - 4 = 0$
$\beta : 2x - y + z + 1 = 0$ $\quad\quad \mathbf{u} = (x; y; z)$
$\chi : -x + 3y - 4z = 0$

Homogenizace soustavy:

$x + 2y - 3z = 0$

$2x - y + z = 0$

$-x + 3y - 4z = 0$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(B) = 2 = h$

defekt: n-h=1 --> !PRÁVĚ JEDEN SPOLEČNÝ SMĚR!

$x + 2y - 3z = 0$

$-5y + 7z = 0$

volná neznámá : z

$y = \frac{7}{5} z$

$x + \frac{14}{5} z - 3z = 0$

$x - \frac{1}{5} z = 0$

$x = \frac{1}{5} z$

Všechna řešení:

$\left(\frac{1}{5} z; \frac{7}{5} z; z\right)$... všechny vektory rovnoběžné s rovinami $\alpha; \beta; \chi$ ... obecné řešení

Pro z=5

$\mathbf{u} = (1;7;5)$

$\alpha; \beta; \chi$ nemají žádný společný bod, podle hodnosti matice jsme určili, že mají jeden společný směr.

Vzájemná poloha 2 přímek:
Přímka je daná jako průsečnice dvou rovin

p: $\begin{matrix} \alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{matrix}$

q: $\begin{matrix} \chi : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ \delta : a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{matrix}$

4.možnosti:

	Možnost	počet řešení	# volných neznámých	Hodnosti
1.	Totožné $p \equiv q$	nekonečně mnoho	1 volná neznámá	$h(A) = h(B) = 3$
2.	Rovnoběžné $p \| q$	nemá řešení;	1spol.směr	
3.	Různoběžné	jedno řešení		$h(A) = h(B) = 2$
4.	mimoběžné	nemá řešení	0 spol.směrů	

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & -d_4 \end{array}\right)$$

Mají-li být zadány přímky, musí být $h(A) \geq 2 \wedge h(B) \geq 2$. Pro směry je $h(\overline{B}) = 0$
Žádný společný směr odpovídá triviálnímu řešení $[0;0;0] \Rightarrow h(A) = 3 \wedge h(B) = 4$
Jeden společný směr= 1 volná neznámá $\Rightarrow \begin{matrix} h(A) = 2 \\ h(B) = 3 \end{matrix}$

Algebra matic

Def.: matice typu m/n nad polem reálných nebo komplexních čísel je toto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathbf{R} \vee a_{ij} \in \mathbf{C}$

$1 \le i \le m$...řádkový index

$1 \le j \le n$...sloupcový index

$m = n$...č..čtve vá matice

M(m/n) = množina všech matic typu m/n => nosná matice

Základní operace:
Sčítání matic

$A, B \in M(m/n)$

$C = A + B$

$A = a_{ij}$

$B = b_{ij}$

$C = c_{ij}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \forall ij$

Násobení skalárem

$\chi \in \mathbf{R}(\mathbf{C}); A \in M(m/n)$

$C = \chi A$

$c_{ij} = \chi a_{ij}$

Vlastnosti:
1. $A + B = B + A$ ... komutativnost
2. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ ... asociativita
3. $\exists M(0) \; | A + 0 = 0 + A = A; \forall A$ ... nulová matice... univerzální matice
4. $ke \forall M(A) \exists M(A') | A + A' = A' + A = 0$; $A = (a_{ij}); A' = (-a_{ij}) = -A$ ...opačná matice. Pro dané A je A´ určena jednoznačně
5. $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A; \alpha, \beta \in \mathbf{R}$...*skaláry*
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
8. $-A = A \cdot (-1)$

M(m/n) s operacemi sčítání a násobení skalárem se nazývá VEKTOROVÝ PROSTOR.
6) + 7) ... linearita

Lineární závislost řádků matice
Lineární kombinace:

$$A=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$... koeficienty linerání kombinace

$\alpha a_{i1} + \beta a_{j1}$

$\alpha a_{i2} + \beta a_{j2}$

obecně:

$\alpha a_{ik} + \beta a_{jk}$ kde i,j jsou pevné, pak tato čísla tvoří lineární kombinaci i-tého a j-tého řádku.

$1 \le k \le n$

Řekneme, že řádky matice jsou lineárně závislé, jestliže kterýkoli z nich je lineární kombinací ostatních:

Př.: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$... $\begin{matrix} 3.\check{r}\acute{a}dek = 1.\check{r}\acute{a}dek + 2\cdot 2.\check{r}\acute{a}dek \\ \alpha = 1; \beta = 2 \end{matrix}$

3. řádek je lineární kombinací 1. a 2. řádku.

Každý řádek lineárně závislý na jiných řádcích snižuje hodnost matice $h(A)$ o jedno níž.

V opačném případě jsou řádky lineárně nezávislé.

Maticové násobení

A...m/n $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix}$

B=n/p $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{i1} & b_{ij} & b_{in} \\ b_{m1} & b_{mj} & b_{mn} \end{pmatrix}$

n je shodné!!!

$$C = AB; c_{ik} = a_{i1}b_{ik} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ij}b_{jk} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{3}\left(a_{ij}b_{jk}\right)$$

$\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p \end{matrix}$ ==> C...m/p

Vlastnosti

1. Neplatí komutativita $AB \ne BA$
2. Asociativita platí, ale pouze pro A..m/n; B...n/p; C...p/s=>ABC=(AB)C=A(BC)

3. A...m/n $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

Pro AE musí E být typ n/n
Pro EA musí E být typ m/m
E=jednotková matice

Shrnutí pro čtvercové matice řádu n (A...n/n):

- Platí Asociativita (AB)C=A(BC)
- Jednotka AE=EA=A
- $\exists A^{-1} \forall A \middle| A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E$

Čtvercové matice rozdělujeme na

- Regulární... existuje inverzní matice
- Singulární... neexistuje inverzní matice

Matice A typu n/n se nazývá <u>regulární</u>, jestliže k ní existuje inverzní matice.
V opačném případě je matice <u>singulární</u>.

Determinant pro matici A...n/n

1.)

$A...n/n$

$A...1/1$

$A = (a_{11})$

$\det A = a_{11}$

2.)

$A...2/2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

3.)

$A...3/3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

SARRUSOVO – PRAVIDLO

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

4.)

Permutace indexů 1,2,3,...,n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_s & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Permutace se nazývá sudá, jestliže větší číslo předchází menšímu v sudém počtu případů.

0x

2x

Jinak je lichá.

sudá... $\operatorname{sgn} = 1$

lichá... $\operatorname{sgn} = -1$

$$\det A = \sum_{\sigma \in Sn} (\operatorname{sgn} \sigma)(a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \dots a_{n\sigma n})$$

Sn... množina všech permutací n prvků

Algebraický doplněk prvku

A...n/n

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{... i-tý řádek}$$

j-tý sloupec

A_{ij} ... determinant matice řádu n-1/n-1, která vznikne z matice vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

$$\Psi_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

Výpočet determinantu rozvojem podle řádku nebo sloupce

Rozvoj podle i-tého řádku

$$A_{i-t\acute{y}} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \det A = a_{i1}\Psi_{i1} + a_{i2}\Psi_{i2} + \dots + a_{in}\Psi_{in}$$

Rozvoj podle j-tého sloupce

$$A_{j-t\acute{y}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & a_{2j} & \dots \\ \dots & a_{nj} & \dots \end{array}\right); \det A = a_{1j}\Psi_{1j} + a_{2j}\Psi_{2j} + \dots + a_{nj}\Psi_{nj}$$

Příklad:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ Rozvoj podle 3.sloupce

$$\det A = a_{13}\Psi_{13} + a_{23}\Psi_{23} + a_{33}\Psi_{33} + a_{34}\Psi_{34} =$$

$$=(4)(+1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (1)(-1)^7 \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=4\cdot 2-(-10)=8+10=18$$

Vlastnosti determinantů – elementární úpravy

1. násobení i-tého řádku číslem k, $k \neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad \det A' = k \det A$$

2. Přičtení i-tého řádku vynásobeného číslem k, $k \neq 0$ k j-tému řádku

$$A=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\det A' = (a_{i1}+ka_{i1})\Psi_{j1} + \dots + (a_{in}+ka_{in})\Psi_{jn} =$$

$$=(a_{ij}\Psi_{j1} + \dots + a_{jn}\Psi_{jn}) + k(a_{i1}\Psi_{i1} + \dots a_{in}\Psi_{jn}) =$$

$$\det A + k \det\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots \end{pmatrix}$$

$$k \det\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A' = \det A$$

Matice A...n/n je regulární právě tehdy, když její determinant je různý od nuly.

$$\det A \neq 0$$

$$\textit{if} \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$$

Normální matice $A=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Diagonální matice $A=\begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$

Horní trojúhelníková matice $A=\begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... \end{pmatrix}$

Dolní trojúhelníková matice $A=\begin{pmatrix} ... & 0 & 0 \\ ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$

Jestliže je jeden řádek lineární kombinací jiných, poté je
Pokud byl determinant 0, poté jim zůstane i po elementárních úpravách.
Pokud nebyl determinant 0, poté jim zůstane i po elementárních úpravách.

Matice je singulární právě tehdy, když její řádky (sloupce) jsou lineárně závislé.
Hodnost matice je počet lineárně nezávislých řádků.

Pokud je matice singulární, potom h<n
Pokud je matice regulární, potom h=n

Nechť je A (n/n) regulární

Výpočet inverzní matice:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & a_{ij} & ... \\ a_{m1} & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$

$\Psi_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

$(A^{-1})_{ij} = \dfrac{1}{\det A}\Psi_{ji} = \dfrac{1}{\det A}(-1)^{i+j} A_{ji}$

Matice Ψ_{ji} je adjungovaná k A

Př.:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -6$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 = 0$$

$A_{11} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad \Psi_{11} = (-1)^{1+1}(0) = 0$

$A_{12} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$ $\qquad \Psi_{12} = (-1)^{1+2}(-1) = 1$

$A_{13} = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2$ $\qquad \Psi_{13} = (-1)^{1+3}(-2) = -2$

$$A_{21} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -6 \qquad \Psi_{21} = (-1)^{2+1}(-6) = 6$$

$$A_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \Psi_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$$

$$A_{23} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Psi_{23} = (-1)^{2+3}(2) = -2$$

$$A_{31} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -6 \qquad \Psi_{31} = (-1)^{3+1}(-6) = -6$$

$$A_{32} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \qquad \Psi_{32} = (-1)^{3+2}(4) = -4$$

$$A_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Psi_{33} = (-1)^{3+3}(2) = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\Psi^T = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jiné vyjádření elementárních úprav

Vyjádřeno jako vektorové násobení

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$ ... násobení i-tého řádku reálným číslem k se dá napsat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$I_i(k)$... matice, kde jsou skoro samé nuly, jen na diagonále jsou jedničky, kromě pozice *i*, kde je reálné číslo *k*, kterým budeme násobit *i*-tý řádek...
Přičtení *p*-násobku *i*-tého řádku k *j*-tému řádku:

$$A=\begin{pmatrix} ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & a_{in} \\ a_{ji} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ 0 & P & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & ... & a_{jj} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

$I_{ji}(p)$... matice, kde jsou na diagonále jednicky a na pozici *ij* číslo *p*.

Vektory

Vektor se dá napsat jako řádková matice typu 1/n
$u=(u_1;...;u_n)$
Vektory báze:
$e_1=(1 \quad 0 \quad ... \quad 0)$
$e_2=(0 \quad 1 \quad ... \quad 0)$
$...=(... \quad ... \quad 1 \quad ...)$
$e_n=(0 \quad 0 \quad ... \quad 1)$

Vektor:
$u=u_1e_1+...+u_ne_n$
$u=(u_1 \quad ... \quad u_n)$
$v=(v_1 \quad ... \quad v_n)$
$u+v=(u_1+v_1 \quad ... \quad u_n+v_n)$
$\alpha u=(\alpha u_1 \quad ... \quad \alpha u_n)$

$(e_1 \quad ... \quad e_n)$

$\bar{e}_1=(\tau_{11} \quad .... \quad \tau_{1n})$
$\bar{e}_2=(\tau_{21} \quad ... \quad \tau_{2n})$
$\bar{e}_n=(\tau_{n1} \quad ... \quad \tau_{nn})$

$$T=\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & ... & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(u_1 \quad u_2 \quad ... \quad u_n)=(\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad ... \quad \bar{u}_n)\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & ... & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

$u_j = \left[(\overline{u})T\right]_j$

$(u) = (\overline{u})T \Big| T^{(-1)}$

$uT^{-1} = (\overline{u})TT^{-1}$

$uT^{-1} = \overline{u}$

$T^{-1} = S$

$\overline{u} = (u)T^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ A=T=matice přechodu $e \to \overline{e}$

$\overline{e}_1 = 1e_1 + 0e_2 + 3e_3$
$\overline{e}_2 = -1e_1 + 2e_2 + 1e_3$
$\overline{e}_3 = 0e_1 + 2e_2 + 1e_3$

$\overline{e}_1 = e_1 + 3e_3$
$\overline{e}_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3$
$\overline{e}_3 = 2e_2 + e_3$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$e_1 = 0\overline{e}_1 - \overline{e}_2 - \overline{e}_3$

$e_2 = -\frac{1}{6}\overline{e}_1 - \frac{\overline{e}_2}{6} + \frac{2\overline{e}_3}{3}$

$e_3 = \frac{\overline{e}_1}{3} + \frac{\overline{e}_2}{3} - \frac{\overline{e}_3}{3}$

$u = (1 \quad 3 \quad -2)_{(e_1 \quad e_2 \quad e_3)}$

$u = e_1 + 3e_2 - 2e_3 = ?\overline{e}_1 + ?\overline{e}_2 + ?\overline{e}_3$

$$u = (? \quad ? \quad ?)_{(\overline{e}_1 \quad \overline{e}_2 \quad \overline{e}_3)} = (1 \quad 3 \quad -2)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(0 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \quad -1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \quad -1 + 2 - 2\right)$$

Funkce jedné proměnné

$$\mathbf{R} \supset D_f : x \in D_f ;\ \overset{vzor}{x} \rightarrow y = \overset{obraz}{f_{(x)}} \in \mathbf{R}$$

Zobrazení = ke každému prvku A přisoudím prvky z množiny B.
Ke každé hodnotě $x \in D_f$ je přiřazena právě jedna hodnota $y = f_{(x)}$.
Způsoby zadání funkce:

1. Grafem $G_f = \{[x; y] \in \mathbf{R}^2 \mid y = f_{(x)}; x \in D_f\}$
2. Tabulkou $\begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 5 & 4{,}8 & 2 \end{array}; D_f = \{1;2;3\}$
3. Vzorcem $y = x^2; x \in \mathbf{R}$

Zadání musí obsahovat:

- předpis
- definiční obor

Příklad:
$y = \sqrt{1 - x^2}$

A) $D_f = (0;1)$

B) Při nezadání definičního oboru se bere „přirozený definiční obor“, což je maximální možný, aby funkce byla vyčíslitelná
$D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid predpisF_{(x)}\ jedefinovan\} \Rightarrow x \in [-1;1]$

Obor hodnot:
$H_f \in \mathbf{R}$
$H_f = \{y \in \mathbf{R} \mid \exists x \in D_f : f_{(x)} = y\}$

Příklad:
$x \in \mathbf{R}; f : x \rightarrow y = f_{(x)} = 1$
$H_f = \{1\}$

Operace s funkcemi:

1. Součet
   f, D_f
   g, D_g
   $h = f + g; h_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$
   $pro \forall x \in D_f \cap D_g$

2. Násobek číslem
   $k_{(x)} = \alpha f_{(x)}$
   $pro \forall x \in D_f ; D_k = D_f$

3. Součin
   $q_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$
   $pro \forall x \in D_f \cap D_g$

$$x \in D_f \subset \mathbf{R}; x \rightarrow \boxed{FUNKCE} \rightarrow f_{(x)} \in H_f \in \mathbf{R}$$

Složená funkce

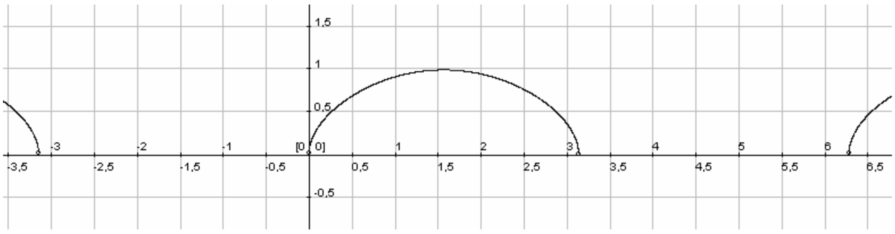
$$x \in D_f \subset \mathbf{R}; x \rightarrow \boxed{\begin{matrix} Vnit\check{r}ni \\ slo\check{z}ka \end{matrix}} \rightarrow g_{(x)} = u \rightarrow \boxed{\begin{matrix} Vn\check{e}n\check{e}j \\ slo\check{z}ka \end{matrix}} \rightarrow f_{(u)} = f\left[g_{(x)}\right] \in \mathbf{R}$$

Pouze pro $u \subset D_f \Rightarrow$ omezení původního definičního oboru

$$D_F = D_g \setminus \left\{x \in D_g \middle| g_{(x)} \notin D_f\right\}$$

Funkce $F_{(x)}$ definována na D_f předpisem $F_{(x)} = f\left[g_{(x)}\right]$ se nazývá složená funkce s vnitřní složkou *g* a vnější složkou *f*.

Příklad:



$$F_{(x)} = \sqrt{\sin x}$$
$$u = g_{(x)} = \sin x$$
$$y = f_{(x)} = \sqrt{u}$$
$$D_g = R$$
$$D_f = \mathbf{R}^+ = [0; +\infty)$$
$$D_F = \bigcup_{k \in Z} [2\pi k; (2k+1)\pi]$$

Příklad:

$$F_{(x)} = \log\left(-\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$u = g_{(x)} = -\sqrt{1-x^2}$$
$$f_{(u)} = \log u$$
$$D_g = [-1;1]$$
$$\left.\begin{matrix} H_g = [-1;0] \\ D_f = (0;+\infty) \end{matrix}\right\} D_f \cap H_g = \{\ \} \Rightarrow D_F = \{\ \}$$

Inverzní funkce

$$x \in D_f; x \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow f \rightarrow \\ \hline \leftarrow f^{-1} \leftarrow \\ \hline \end{array} y = f_{(x)} \in \mathbf{R}$$

$$f^{-1}\left[f_{(x)}\right] = x = f\left[f^{-1}_{(x)}\right]$$

Pro inverzní funkci občas musí občas dojít k omezení definičního oboru.
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ ... funkce prostá, vzájemně jednoznačná $A \subset D_f$, jestliže

$$\forall x_1; x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \middle| f_{(x1)} \neq f_{(x2)}$$

Předpokládejme, že *f*(x) je prostá na $A \subset D_f$. Označme $B = \left\{y \in \mathbf{R} \middle| y = f_{(x)}, x \in A\right\}$
Definujeme funkci $x = f^{-1} \in B \rightarrow y = f^{-1}_{(x)} \in A \Leftrightarrow f_{(y)} = x$

Periodická funkce

$f; D_f; p \in \mathbf{R}$, předpokládáme, že $(x+p) \in D_f \Leftrightarrow pro \forall x \in D_f$. Řekneme, že funkce je periodická, jestliže $f_{(x+p)} = f_{(x)} \Leftrightarrow pro \forall x \in D_f$

$y = f_{(x)} = \sin(x)$

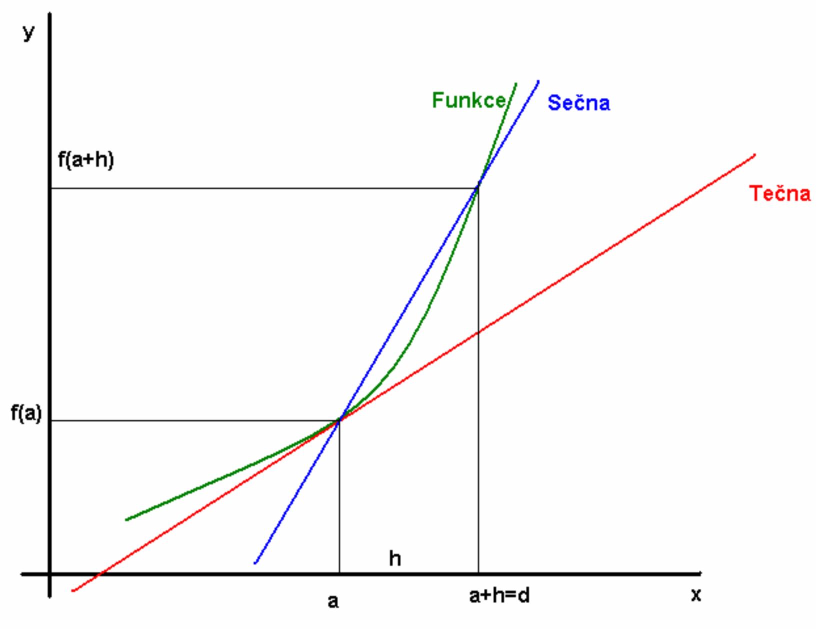
$\sin(x+p) = \sin(x) \ldots\ldots p = 2\pi$

$\cos(x) \ldots\ldots p = 2\pi$

$\tan(x); \cot(x) \ldots\ldots p = \pi$

Funkce sin (x) je prostá na intervalu $A = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ a zobrazuje A na množinu $B = [-1;1]$. Na množině $B = [-1;1]$ je definována funkce inverzní $y = \arcsin(x)$, který nabývá hodnot $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Limity



$a \in D_f$

Bod grafu: $[a; f(a)] \in \mathbf{G}$

Rovnice sečny:

$y - f_{(a)} = K(x-a)$

$$K = \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h}$$

$$K = \frac{f_{(d)} - f_{(a)}}{h}$$

Tečna... limitní přechod sečny h --> 0

Vlastní limita ve vlastním bodě

Okolí bodu
$a \in \mathbf{R}; \delta \succ 0$
(otevřené) okolí bodu a: $(a-\delta; a+\delta)$
(otevřené) ryzí okolí bodu a: $(a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$
nesymetrická okolí: $(a-\delta_1; a+\delta_2)$
Číslo $L \in \mathbf{R}$ je vlastní limitou funkce $f_{(x)}$ ve vlastním bodě $a \in \mathbf{R}$ právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon \succ 0$ existuje ryzí okolí budu *a* tak, že pro každé x z okolí bodu *a* je funkce *f(x)* definována a funkční hodnota leží v pásu $\left| f_{(x)} - L \right| \prec \varepsilon$

Při záměně pojmů „okolí“ -> „levé okolí“ : $(a-\delta; a)$ bude limita zleva
„okolí“ -> „pravé okolí“ : $(a; a+\delta)$ bude limita zprava

$L = \lim\limits_{x \to a} f_{(x)}$
limita zleva – levé okolí bodu *a*.
limita zprava – pravé okolí bodu *a*.

Platí funkce *f(x)* má v bodě *a* limitu *L* právě tehdy, když existují limity $L_L = L_P$ v bodě *a* zleva L(L) a zprava L(P) a platí $L_L = L_P = L$

Předpokládáme, že máme funkce *f(x)* a *g(x)* tak, že funkce *f(x)* má v bodě *a* limitu, stejně tak i funkce *g(x)* má v bodě *a* definovanou limitu, poté platí tato pravidla:

$$\lim_{x \to a} \left[f_{(x)} \pm g_{(x)} \right] = \lim_{x \to a} f_{(x)} \pm \lim_{x \to a} g_{(x)}$$

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} g_{(x)} = \lim_{x \to a} f_{(x)} \lim_{x \to a} g_{(x)}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_{(x)}}{\lim\limits_{x \to a} g_{(x)}}; \lim_{x \to a} g_{(x)} \neq 0$$

Př.:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x-2) = 1$$

Věta o sevření:

Předpoklady:

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = \lim_{x \to a} g_{(x)} = L$$

$$\exists O_{ryzí}(a) \to f_{(x)} \leq h_{(x)} \leq g_{(x)}$$

Potom:

$$\lim_{x \to a} h_{(x)} = L$$

Pravidla pro složenou funkci:

Předpokládejme:

1. $\lim_{x\to a} g_{(x)} = L$
2. $\lim_{u\to L} f_{(u)} = S$
3. že existuje okolí *P(a)* tak, že pro všechna *x* náležící *P(a)* nenabývá hodnoty $g_{(x)} \neq L; resp \forall x \in P(a); f_{(x)} \neq L$

Vlastní limita v nevlastním bodě:

Řekneme, že číslo *L* je limitou *f(x)* v nevlastním bodě $+\infty(-\infty)$ jestliže ke každému $\varepsilon \succ 0$ existuje *A* tak, že pro všechna $x \in (A;\infty);(x \in (-\infty;A))$ platí $\left|f_{(x)} - L\right| \prec \varepsilon$

Pravidla:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n + \ldots}{bx^n + \ldots} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^m + \ldots}{bx^n + \ldots} = 0 \Leftrightarrow m \prec n$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^m + \ldots}{bx^n + \ldots} = +\infty \Leftrightarrow m \prec n$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^m + \ldots}{bx^n + \ldots} = +\infty \Leftrightarrow m \prec n \wedge (m-n)\ldots sudé$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^m + \ldots}{bx^n + \ldots} = -\infty \Leftrightarrow m \prec n \wedge (m-n)\ldots liché$$

Nevlastní limita ve vlastním bodě

Řekneme, že funkce *f(x)* má v bodě *a* nevlastní limitu $+\infty(-\infty)$, jestliže ke každému $M \succ 0(M \prec 0)$ existuje ryzí okolí *O(a)* bodu *a* tak, že pro všechna $x \in (A;\infty);(x \in (-\infty;A))$ platí $f_{(x)} \succ M\left(f_{(x)} \prec M\right)$

Nevlastní limita v nevlastním bodě

Řekneme, že funkce *f(x)* má v nevlastním bodě $+\infty(-\infty)$ nevlastní limitu $\pm\infty$, když ke každému $M \succ 0(M \prec 0)$ existuje *A* tak, že pro všechna $x \in (A;\infty);(x \in (-\infty;A))$ platí $f_{(x)} \succ M\left(f_{(x)} \prec M\right)$.

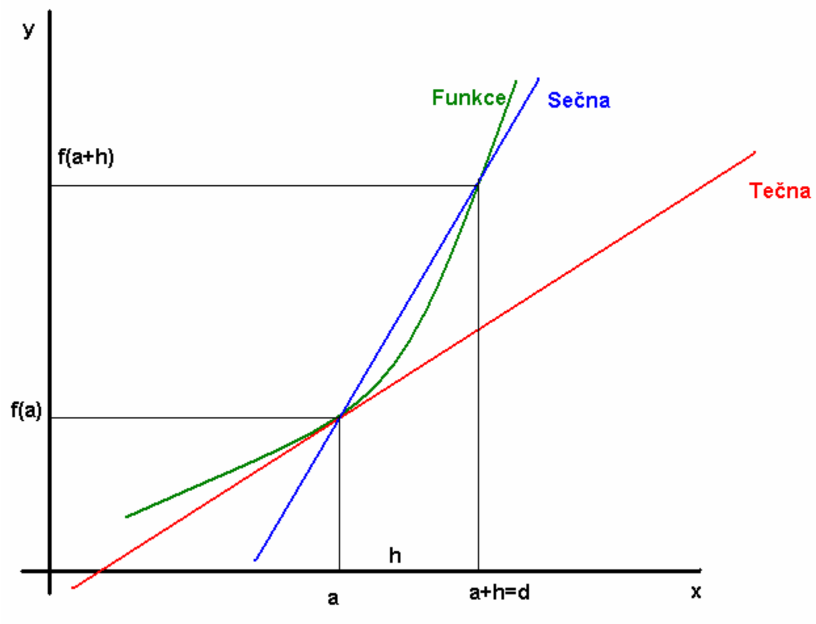
Spojitost v bodě A

Spojitá funkce: $\lim_{x\to a} f_{(x)} = f_{(a)}$

Nespojitá funkce: $\lim_{x\to a} f_{(x)} \neq f_{(a)}$

Definujeme také spojitost zleva a zprava.

Derivace



$K = \dfrac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h} = \dfrac{f_{(x)} - f_{(d)}}{h}$ ... derivace funkce *f(x)* v bode *a*. Značí se: $f'_{(x)}$

Definuje se i derivace zprava, zleva.

Pravidla pro derivování

$$\left.\begin{aligned}\left[f_{(x)} \pm g_{(x)}\right]' &= f'_{(x)} \pm g'_{(x)} \\ \left[cf_{(x)}\right]' &= cf'_{(x)}\end{aligned}\right\} linearita$$

$$\left[f_{(x)} \cdot g_{(x)}\right]' = f'_{(x)} g_{(x)} + f_{(x)} g'_{(x)}$$

$$\left[\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right]' = \frac{f'_{(x)} g_{(x)} - f_{(x)} g'_{(x)}}{g^2_{(x)}}$$

$$g_{(x)} \neq 0$$

$$g_{(okolíX)} \neq 0$$

Pravidlo pro derivování složené funkce

$$F_{(x)} = f_{[g(x)]}$$

$$g_{(x)} = u$$

Předpoklady:

$$\exists g'_{(x)}$$

$$\exists f'_{(x)}; u = g_{(x)} \Rightarrow \exists f'\left[g_{(x)}\right]$$

pak

$$F'_{(x)} = g'_{(x)} \cdot f'\left[g_{(x)}\right]$$

Pravidla pro derivování inverzní funkce

$y = f_{(x)}$ inverzní funkce: $y = f^{-1}_{(x)}$

Vypočítat x jako y, následně záměna x za y.
Předpoklad existence původní funkce v bodě x.

$$y = f^{-1}_{(x)} = F_{(x)}$$

$$F'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{F_{(h+x)} - F_{(x)}}{h}$$

$$x = a$$

$$f^{-1}_{(x)} = F_{(a)} = b$$

$$f_{(b)} = a$$

$$F'_{(a)} = \lim_{h \to 0} \frac{F_{(h+x)} - F_{(x)}}{h} = \frac{1}{\dfrac{h}{F_{(h+x)} - F_{(x)}}} = \frac{1}{\dfrac{a+h-a}{F_{(a+h)} - F_{(a)}}} = \frac{1}{\dfrac{f_{(b+k)} - f_{(b)}}{k}} =$$

$$\left| h \to 0 \Rightarrow k \to 0 \Rightarrow \frac{1}{f'_{(b)}} \right|$$

$$f^{-1}_{(a)} = \frac{1}{f'_{(b)}}$$

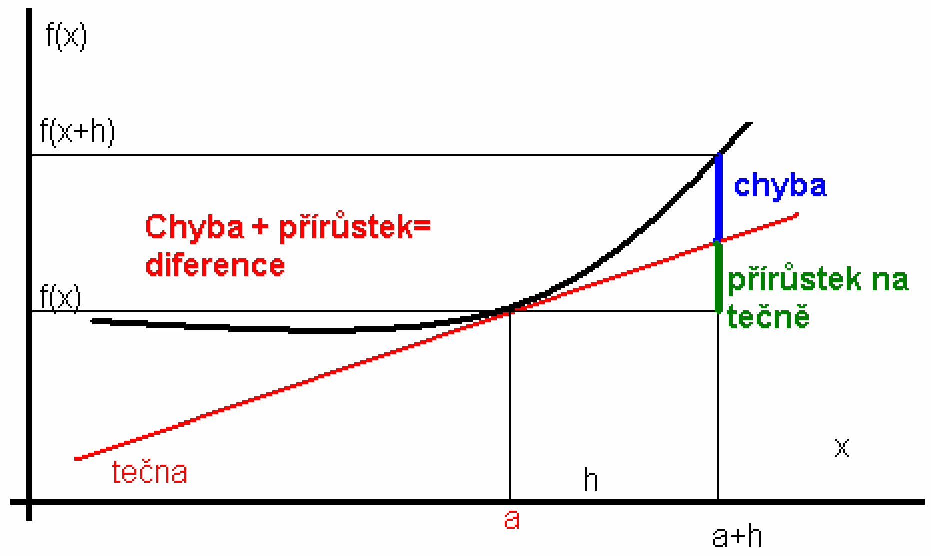
$$b = f^{-1}_{(a)}$$

$$a = f^{-1}_{(b)}$$

Př.:

$$[\arcsin(x)]'\Big|_{x=a} = \frac{1}{[\sin y]_{y=b}} = \frac{a}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(b)}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

Úplný diferenciál funkce



Předpokládáme existenci $f'_{(a)}$

$f_{(a)}$*...známé*

$f_{(a+h)}$...????

$$f_{(a+h)} = f_{(a)} + diference = f_{(a)} + h \cdot f'_{(a)} + ch_{(a,h)}$$

diference=přírůstek na tečně+chyba

přírůstek na tečně = $h \cdot \tan\alpha = hf'_{(a)}$

chyba: $ch_{(a,h)} = f_{(a+h)} - f_{(a)} - hf'_{(a)}$

$$\frac{ch_{(a,h)}}{h} = \frac{f_{(a+h)} - f_{(a)}}{h} - hf'_{(a)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ch_{(a,h)}}{h} = 0 \\ hf'_{(a)} \xrightarrow{h\to 0} 0\,line\acute{a}rn\check{e} \end{array}\right\} \Rightarrow ch_{(a,h)} \xrightarrow{h\to 0} 0\,rychleji$$

$f_{(a+h)} - f_{(a)} \doteq hf'_{(a)}$ = diferenciál funkce *f* v bodě *a* je lineární funkcí přírůstku h.

Př:

$\sqrt[3]{1,06}$

$f_{(x)} = \sqrt[3]{x}$

$a = 1$

$f_{(a)} = 1$

$f'_{(x)} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$f'_{(a)} = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1,06} \doteq 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,06 = 1,02$

Primitivní funkce (neurčitý integrál)

$$F_{(x)} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} derivace \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} ???????? \xleftarrow{\quad} \end{array} f_{(x)} = F'_{(x)}$$

Známe výsledek derivování, práme se na vstup a příp. kolik vstupů existuje.
Funkce *F(x)* se nazývá primitivní funkcí k funkci *f(x)* na intervalu *(a,b)*, jestliže platí
$F'_{(x)} = f_{(x)}\, pro \forall x \in (a,b)$

Nechť *F(x)* je primitivní funkcí k *f(x)* na *(a,b)*, pak *F(x)+C* je primitivní funkcí k *f(x)* na *(a,b)* a libovolné *C* je konstanta.

Existuje další primitivní funkce?
$G_{(x)}$... další primitivní funkce

$G'_{(x)} = f_{(x)}$

$F'_{(x)} = f_{(x)}$

$potom:$

$F'_{(x)} - G'_{(x)} = 0$

$\left[F_{(x)} - G_{(x)}\right]' = 0$

$F_{(x)} - G_{(x)} = H$

$H'_{(x)} = 0 ... konst$ ... vlastnost pouze konstant

F(x) a *G(x)* se mohly lišit maximálně konstantami

Je-li *f(x)* na *(a,b)* spojitá, pak k ní existuje primitivní funkce.

Integrační metoda Per Partes

$$\int u'_{(x)} v_{(x)} dx =$$

$$\left| \left[u_{(x)} v_{(x)}\right]' = u'_{(x)} v_{(x)} + u_{(x)} v'_{(x)} \right|$$

$$= \int \left[u_{(x)} v_{(x)}\right]' - \left[u_{(x)} v'_{(x)}\right] dx = u_{(x)} v_{(x)} - \int u_{(x)} v'_{(x)} dx$$

Substituční metoda I.

$$\int g'_{(x)} \cdot \varphi\left[g_{(x)}\right] dx = \left| \begin{array}{l} g_{(x)} = t \\ g'_{(x)} dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{g'_{(x)}} \end{array} \right| = \int \varphi[t] dt = \Phi_{(u)} = \Phi_{[g(x)]}$$

Nechť je Φ primitivní funkce k φ. Pak platí, že: $\int g'_{(x)} \cdot \varphi\left[g_{(x)}\right] dx = \Phi_{[g(x)]}$.

Substituční metoda II.

Př.:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin u \\ \dfrac{dx}{du} = \cos u \\ dx = \cos u\, du \end{array} \right| = \int \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cos(u) du = \int \cos^2(u) du = \int \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \frac{1}{2} u + \frac{\sin(2u)}{4} + C$$

$$\int f_{(x)} dx = \int f_{[g(u)]} g'_{(u)} du$$

Odvození definice přirozeného logaritmu

Hledáme primitivní funkci k funkci *f(ax+b)*.

$$\frac{1}{a}\int af_{(ax+b)}dx = \left|\begin{matrix} f_{(ax+b)} = g_{(x)} \\ g'_{(x)} = a \end{matrix}\right| \frac{1}{a}F\left[g_{(x)}\right] = \frac{1}{a}F_{(ax+b)}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ldots \begin{matrix} n \in \mathbf{Z} \\ n \neq -1 \end{matrix}$$

$$??\int x^{-1}dx$$

$\frac{1}{x}$ je na $(0;+\infty)$ spojitá --> existuje *L(x)*

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{a}L_{(x)} + konst$$

$$\int \frac{1}{ax}dx = \frac{1}{a}L_{(ax)} + konst$$

$$L_{(ax)} - L_{(x)} = C_{(a)}$$

Volba... volíme takovou funkci *L*, aby $L_{(1)} = 0$

Pokud $x = 1 \Rightarrow L_{(ax)} = L_{(a)} = C_{(a)}$

$$L_{(ax)} - L_{(x)} = L_{(a)} \Rightarrow L_{(ax)} = L_{(a)} + L_{(x)}$$

L(x) se nazývá přirozený logaritmus a značí se $\ln(x)$

Vyšetřování průběhu funkce

$$f : y = \frac{x^2}{x-2}$$

$$D_f = \mathbf{R} - \{2\}$$

$$H_f = \mathbf{R}$$

Důkaz:

$$A = \frac{x^2}{x-2}$$

$$x^2 - Ax + 2A = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 8A}}{2}$$

Diskuse: *A(A-8)*

Jaké bude znaménko pod odmocninou, resp. existuje takové A, které by nemohlo být dosazeno?

	$(-\infty;0)$	0	8	$(8;+\infty)$
A	-	0	+	+
A-8	-	-	0	+
A(A-8)	+	0	0	+

$$\lim_{x-2^+} f_{(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x-2^-} f_{(x)} = -\infty$$

Definice pojmů:
Funkce v bodě:

A. rostoucí
B. neklesající
C. klesající
D. nerostoucí
E. lokální maximum
F. lokální minimum
G. inflexní bod

Add A.:

Rostoucí

Řekneme, že funkce *f(x)* jev bodě *a* rostoucí, jestliže existuje okolí *O(a)* tak, že *f(x)* je v něm definována a platí:

$$f_{(x)} \prec f_{(a)} pro \forall x \prec a; x \in O_{(a)}$$

$$f_{(x)} \succ f_{(a)} pro \forall x \succ a; x \in O_{(a)}$$

Add B.:

Neklesající

Řekneme, že funkce *f(x)* jev bodě *a* neklesající, jestliže existuje okolí *O(a)* tak, že *f(x)* je v něm definována a platí:

$$f_{(x)} \leq f_{(a)} pro \forall x \prec a; x \in O_{(a)}$$

$$f_{(x)} \geq f_{(a)} pro \forall x \succ a; x \in O_{(a)}$$

Add C.:

Klesající

Řekneme, že funkce *f(x)* jev bodě *a* klesající, jestliže existuje okolí *O(a)* tak, že *f(x)* je v něm definována a platí:

$$f_{(x)} \succ f_{(a)} pro \forall x \prec a; x \in O_{(a)}$$

$$f_{(x)} \prec f_{(a)} pro \forall x \succ a; x \in O_{(a)}$$

Add D.:

Nerostoucí

Řekneme, že funkce *f(x)* jev bodě *a* nerostoucí, jestliže existuje okolí *O(a)* tak, že *f(x)* je v něm definována a platí:

$$f_{(x)} \geq f_{(a)} pro \forall x \prec a; x \in O_{(a)}$$

$$f_{(x)} \leq f_{(a)} pro \forall x \succ a; x \in O_{(a)}$$

Na intervalu I pro libovolné $x_1; x_2 \in I; x_1 \prec x_2$

H. rostoucí $f_{(x1)} \prec f_{(x2)}$

I. neklesající $f_{(x1)} \leq f_{(x2)}$

J. klesající $f_{(x1)} \succ f_{(x2)}$

K. nerostoucí $f_{(x1)} \geq f_{(x2)}$

Funkce *f* je na intervalu *I* (A, B, C, D) právě tehdy, když je (A, B, C, D) na každém bodě tohoto intervalu.

Předpokládáme, že existuje první derivace funkce *f*.

Add E.:

Lokální maximum

Řekneme, že funkce f má lokální maximum v bodě *a*, pokud existuje levé okolí bodu *a* tak, že *f(x)* je v $O_L(a)$ rostoucí a zároveň existuje pravé okolí bodu *a* tak, že *f(x)* je v $O_P(a)$ klesající.

Lokální maximum ostré

Lokální maximum

(*f(x)* je v *O(L)* neklesající

(*f(x)* je v *O(P)* nerostoucí

Add F.:

Lokální minimum

Řekneme, že funkce f má lokální minimum v bodě *a*, pokud existuje levé okolí bodu *a* tak, že *f(x)* je v $O_L(a)$ klesající a zároveň existuje pravé okolí bodu *a* tak, že *f(x)* je v $O_P(a)$ rostoucí.

Lokální minimum ostré

Lokální minimum

(*f(x)* je v *O(L)* neklesající

(*f(x)* je v *O(P)* nerostoucí

Add F.:

Inflexní bod

Nechť má *f(x)* derivaci v *I*, $a \in I$

f(x) je v bodě *a* rostoucí právě tehdy, když $f'_{(a)} \succ 0$

f(x) je v bodě *a* klesající právě tehdy, když $f'_{(a)} \prec 0$

v *a* je stacionární bod právě tehdy, když $f'_{(a)} = 0$

$$f_{(x)} = \frac{x^2}{x-2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

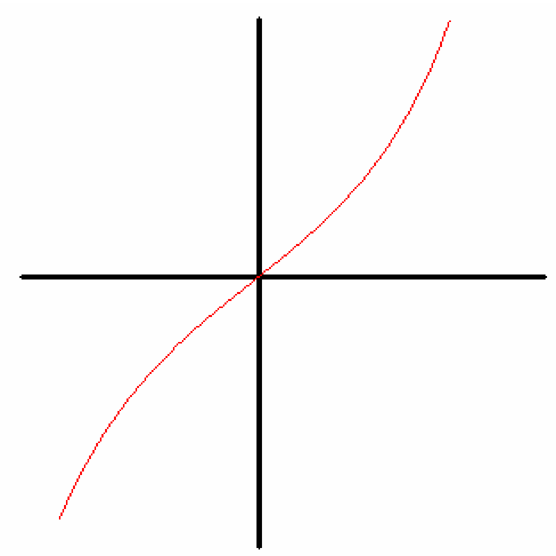
	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;\infty)$
x	-	0	+	+	+
x-4	-	-	-	0	+
x(x-4)	+	0	-	0	+

Pro x(x-4) je funkce konkávní, když $f''_{(x)} = (-)$.

Pro x(x-4) je funkce konvexní, když $f''_{(x)} = (+)$.

Tam, kde $f''_{(x)} = 0$ je inflexní bod.

Kdy jde o inflexní bod?

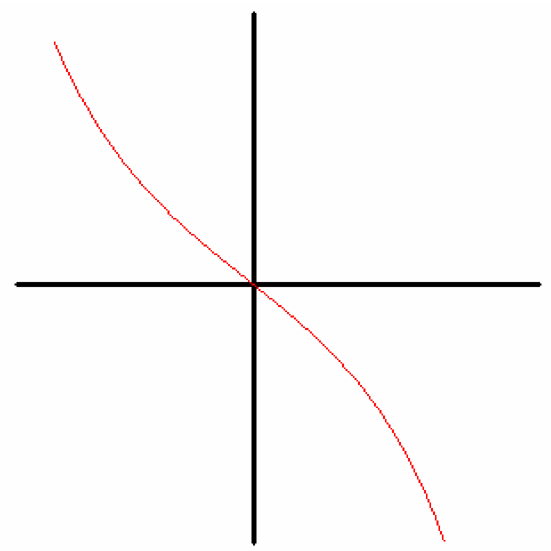


$f'_{(a)} = 0$

$f''_{(a)} = 0$

O_L … konkávní

O_P … konvexní



$f'_{(a)} = 0$

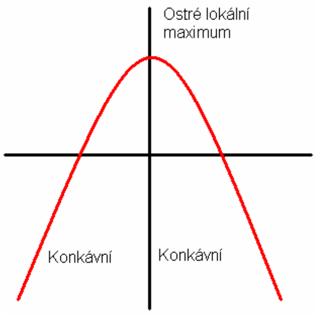
$f''_{(a)} = 0$

O_L … konvexní

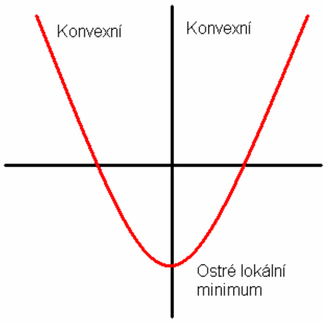
O_P … konkávní

Klasifikace stacionárních bodů

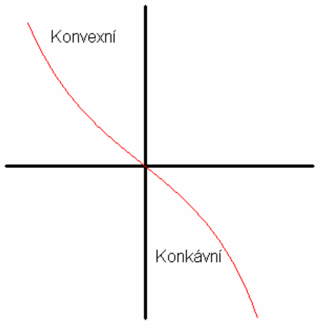
Ostré lokální maximum:



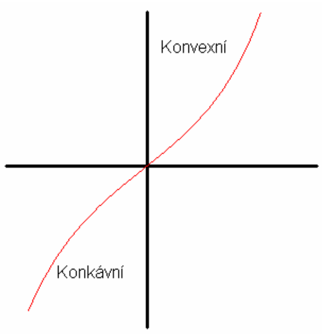
Ostré lokální minimum:



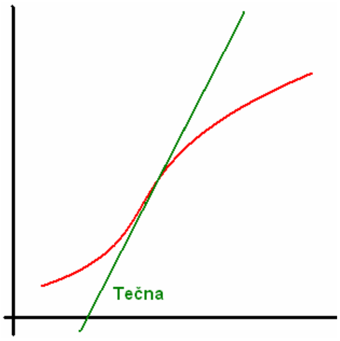
Inflexní bod:

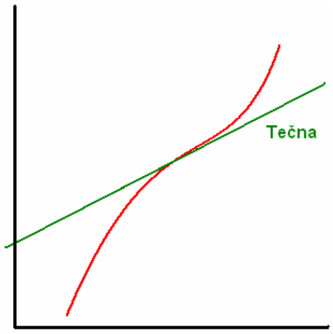


Inflexní bod:



Další typ inflexních bodů:





$$f'_{(x)} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

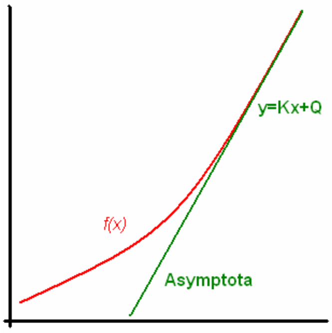
$$f''_{(x)} = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2x(x-4)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{(2x-4)(x-2) - 2x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$$f''_{(x)} \prec 0; x \in (-\infty;2) ...konkávní$$

$$f''_{(x)} \succ 0; x \in (2;\infty) ...konvexní$$

Hledání asymptoty

$$y = Kx + Q$$



Ke $\forall \varepsilon \succ 0$ existuje x_0 tak, že pro $\forall x \succ x_0\, platí: \left|f_{(x)} - (Kx+Q)\right| \prec \varepsilon$

$$f_{(x)} - Kx - Q = x\left(\frac{f_{(x)}}{x} - K\right) - \frac{Q}{x}$$

$$\frac{f_{(x)}}{x} - K \Rightarrow K = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to\infty)}} \frac{f_{(x)}}{x}$$

$$\frac{Q}{x} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to\infty)}} \frac{Q}{x} = 0$$

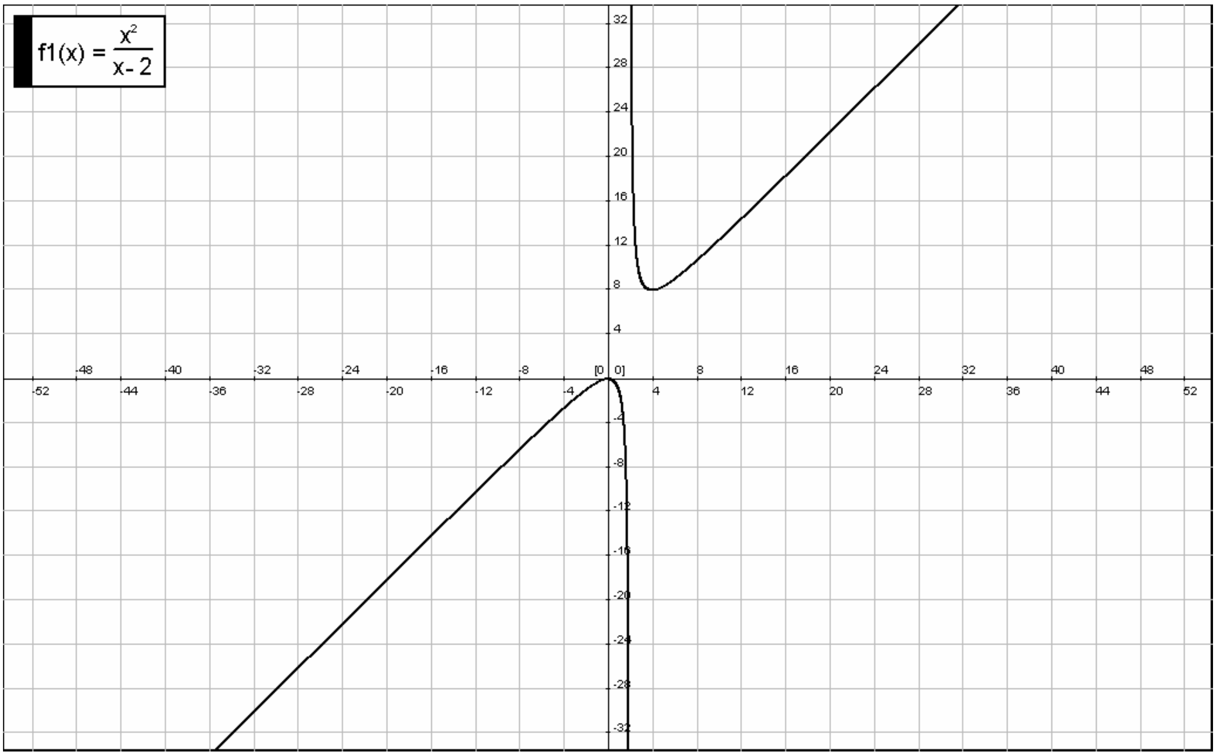
$$K=\lim_{x\to\infty}\frac{f_{(x)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-2}=1$$

$$Q=\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x)}-Kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2$$

Asymptota: $a: y=x+2$

…asymptota se směrnicí.

Graf



L`Hospitalovo Pravidlo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_{(x)}}{x} = ?$$

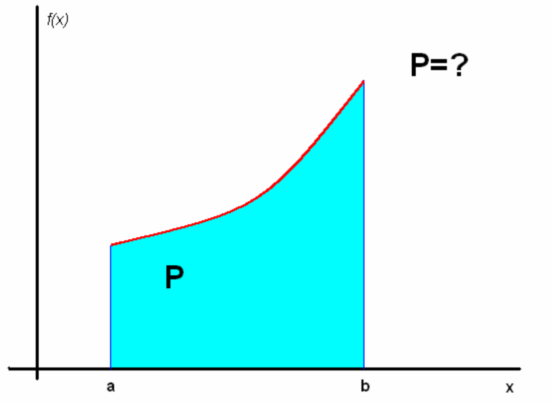
$\lim_{x\to a} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \ldots$ mohou vznikat neurčité výrazy: $T = \frac{0}{0}; T = \frac{m}{0}; T = \frac{m}{\infty}$

Předpokládáme, že funkce f a g mají derivaci a že existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}} = L$. Dále předpokládáme, že existuje $\lim_{x\to a} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = M$. Poté $M = L$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln' x}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Reimannův integrál

Předpoklad: Spojitá funkce na celém definičním oboru.

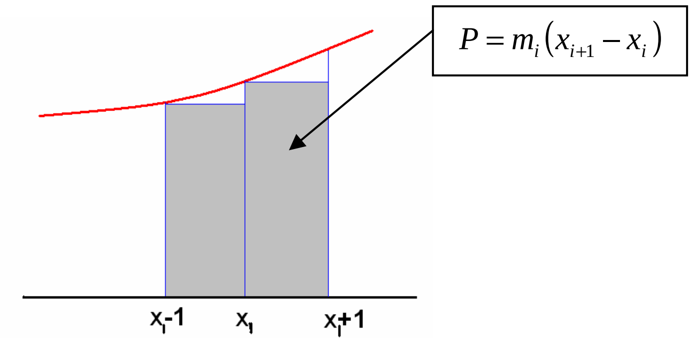


Dělení intervalu $[a;b]\ldots\{x_0;x_1;\ldots\ldots;x_n\}\ldots D$

$$x_0 = a \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots\ldots \prec x_n = b$$

D\` se nazývá zjemněním dělení D, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D\`.

Norma dělení $V_{(D)} = \max\{x_{i+1} - x_i; i \in \{0,1,\ldots..n-1\}\}$



Označíme:

$$m_i = \min\{f_{(x)} | x \in [x_i; x_{i+1}]\}$$

$$M_i = \max\{f_{(x)} | x \in [x_i; x_{i+1}]\}$$

$$\sum_0^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \le P \le \sum_0^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$\sum_0^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \ldots L(f,D) \ldots \text{dolní součet}$$

$$\sum_0^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \ldots U(f,D) \ldots \text{horní součet}$$

Nechť je D\` zjemněním D

$$L(f,D) \prec L(f,D`) \le P \le U(f,D`) \prec U(f,D)$$

Pro spojité funkce platí: $\lim\limits_{V_{(D)}\to 0} L(f,D) = \lim\limits_{V_{(D)}\to 0} U(f,D) = \int_a^b f_{(x)}dx$ … Reimannův (určitý) integrál z *f(x)* na intervalu (a,b).

Newton-Leibnizova formule

f(x) je definována na intervalu [a,b] a má na něm primitivní funkce *F(x)*. Pak platí, že:

$$\int_a^b f_{(x)}dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

Riemanův integrál

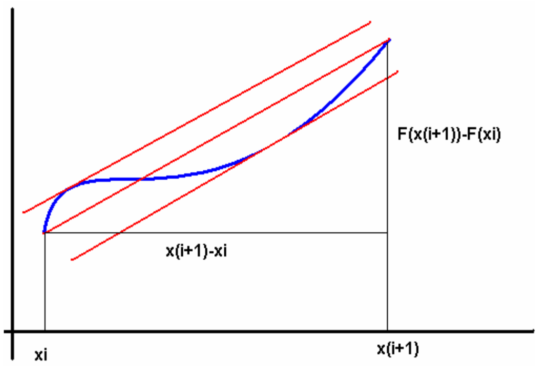
Důkaz:

Zvolíme dělení intervalu [a,b] tak, že: $x_0 = a \prec x_1 \prec x_2 \prec .... \prec x_n = b$.
F(x) spojitá funkce na intervalu [a,b].

$$F_{(a)} - F_{(b)} = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + ... + [F(x_{i+1}) - F(x_i)] + ...[F(x_1) - F(x_0)]$$

F(x) je spojitá na $[x_i; x_{i-1}]; \ pro \forall i$

Lagrangeova věta o střední hodnotě



$$\exists C_i \in (x_i; x_{i+1}) tak, že: F'_{Ci} = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \Rightarrow [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F'_{Ci}(x_{i+1} - x_i)$$

$$F_{(b)} - F_{(a)} = \sum_{i=0}^{n-1} F'_{(Ci)}(x_{i+1} - x_i)$$

$$F'_{(Ci)} = f_{Ci}$$

$$m_i \le f_{Ci} \le M_i$$

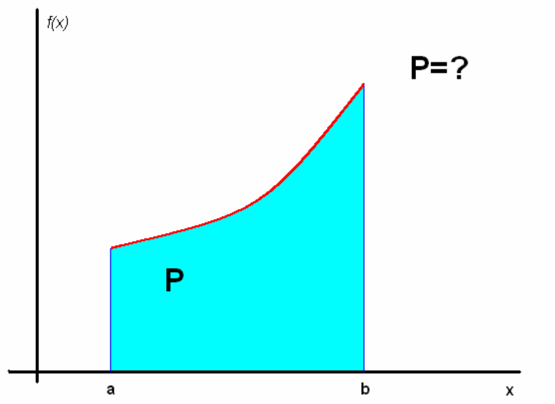
$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} f_{Ci}(x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$L(f, D) \le F_{(a)} - F_{(b)} \le U(f, D)$$

Aplikace

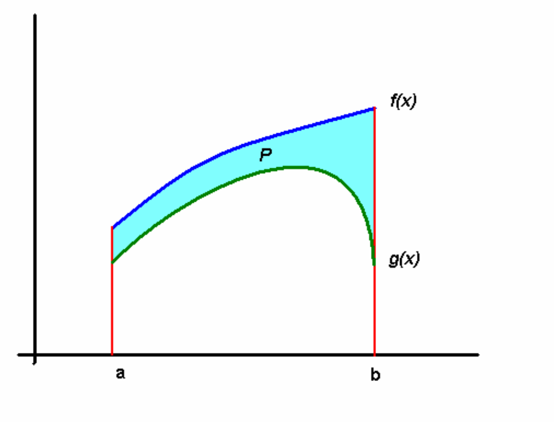
Geometrické a fyzikální charakteristiky
Plocha, hmotnost rovinného útvaru.

Plocha:



Jestli:
f(x) spojitá na [a,b]
f(x) nezáporná na [a,b], pak:

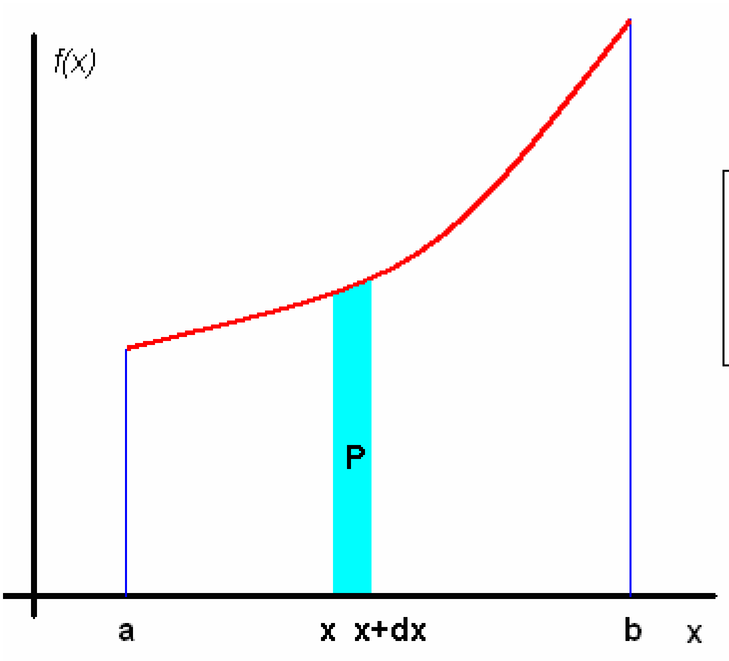
$$P = \int_a^b f_{(x)} dx$$



$$P = \int_a^b \left(f_{(x)} - g_{(x)} \right) dx$$

$$0 \le g_{(x)} \le f_{(x)} na [a,b]$$

Hmotnost

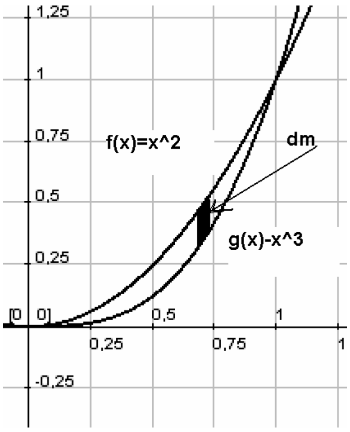


$$f_{(x)} \geq 0; na[a,b]$$
$$\sigma_{(x)} \geq 0 \ldots plošná \quad hustota$$
$$dP = f_{(x)} dx$$

na intervalu *(x,x+dx)* jsou body se stejnou hmotností

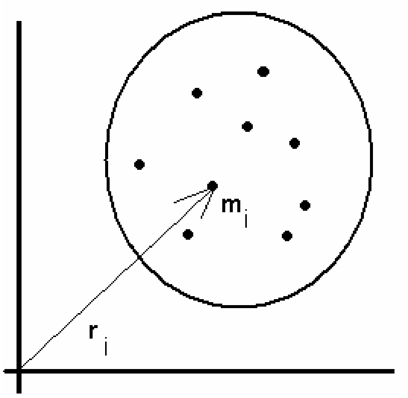
$$dm = \sigma_{(x)} f_{(x)} dx$$
$$m = \int_a^b \sigma_{(x)} f_{(x)} dx$$

Příklad:



$$\sigma_{(x)} = Kx$$
$$f_{(x)} = x^2$$
$$g_{(x)} = x^3$$
$$dm = \sigma_{(x)}\left(f_{(x)} - g_x\right)dx$$
$$m = \int_0^1 \sigma_{(x)}\left(f_{(x)} - g_{(x)}\right)dx = \int_0^1 Kx\left(x^2 - x^3\right)dx = K\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{20}K[j]$$

Poloha těžiště



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$
$$\vec{P} = \sum m_i \vec{V}_i$$

...systém bude nahrazen jedinou částicí:

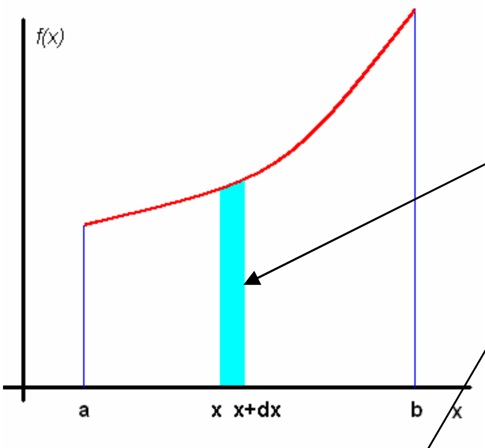
$$P_n = M_n \vec{V}_n$$
$$M_m = \sum m_i = m$$

Náhradní částici je přisouzena hybnost celé soustavy

$$\vec{V}_n = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

$$\vec{r}_n = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} + r_0$$

$$\vec{r}_T = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad \begin{matrix} \rightarrow \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ \rightarrow \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \end{matrix}$$



$$\sigma_{(x)} = konst.$$

$$\left[x; \frac{f_{(x)}}{2}\right]$$

$$x_T = \frac{1}{m}\int_a^b x\left(\sigma_{(x)} f_{(x)} dx\right)$$

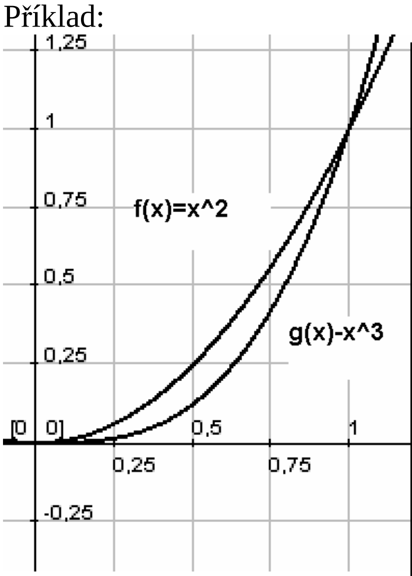
$$y_T = \frac{1}{m}\int_a^b \frac{1}{2} f_{(x)}\left(\sigma_{(x)} f_{(x)} dx\right)$$

$$\sigma_{(x)} f_{(x)} dx = dm$$

$$x_T = \frac{1}{m}\int_a^b x \sigma_{(x)} f_{(x)} dx$$

$$y_T = \frac{1}{m}\int_a^b \frac{1}{2} \sigma_{(x)} f_{(x)}^2 dx$$

Příklad:



$$x^2 = f_{(x)}$$

$$x^3 = g_{(x)}$$

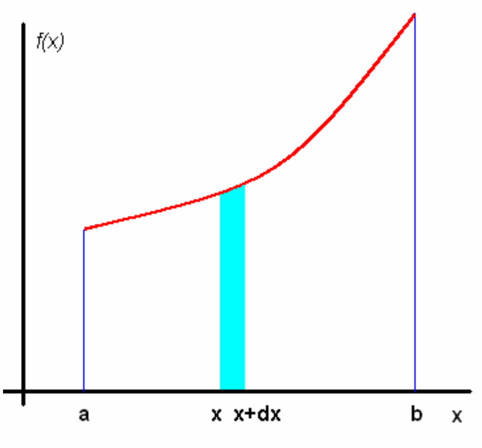
$$\sigma_{(x)} = Kx$$

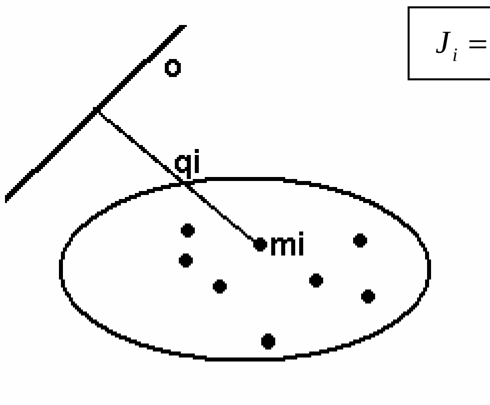
$$m = \frac{1}{20}K$$

$$x_T = \frac{1}{\frac{K}{20}}\int_0^1 x(Kx)\left(x^2 - x^3\right)dx = 20\int_0^1\left(x^4 - x^5\right)dx = 20\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

$$y_T = \frac{1}{\frac{K}{20}}\int_0^1 \frac{1}{2} Kx\left(x^2 - x^3\right)^2 dx = 10\int_0^1\left(x^3 - x^4\right)dx = 10\left[\frac{x^6}{6} - \frac{2x^7}{7} + \frac{x^8}{5}\right]_0^1 = \frac{17}{21}$$

Momenty setrvačnosti





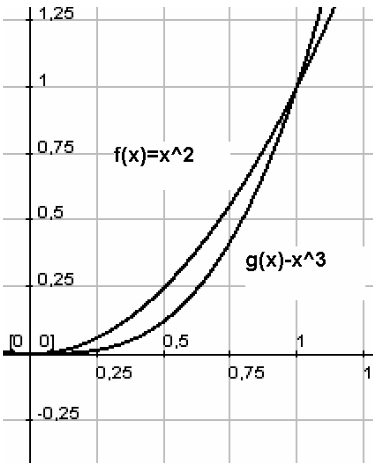
$$J_i = m_i q_i^2$$

$\sigma_{(x)} \geq 0$

$f_{(x)} \geq 0$

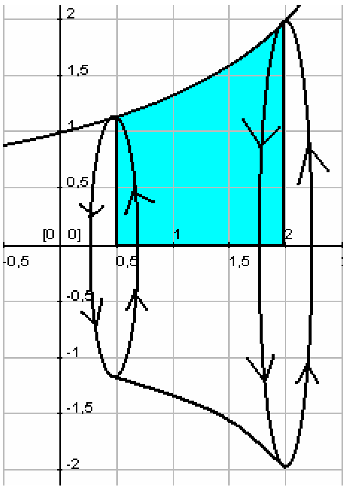
$dJ = dm x^2$

$J_y = \int_a^b x^2 \sigma_{(x)} f_{(x)} dm$



$$J_y = \int_0^1 x^2 (Kx)(x^2 - x^3) dx = K\left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^2\right]_0^1 = \frac{K}{42}$$

Objem a hmotnost rotačního tělesa

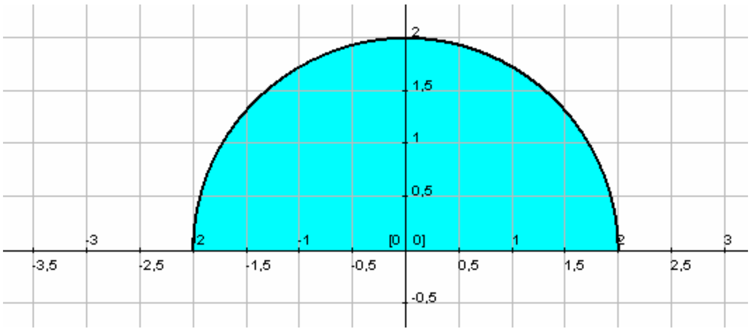


$$dV = \pi f_{(x)}^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b f_{(x)}^2 dx$$

$$m = \pi \int_a^b \rho_{(x)} f_{(x)}^2 dx$$

Př.: Odvoďte vzorec pro objem a hmotnost koule:



$$f: x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

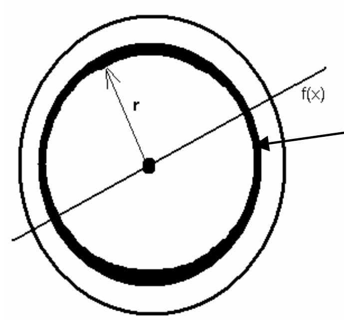
$$V = \pi\int_0^r y^2 dx$$
$$V = \pi\int_0^r (r^2 - x^2) dx$$
$$V_1 = \pi\left[\int_0^r r^2 dx - \int_0^r x^2 dx\right]$$
$$V_1 = \pi\left[r^2\int_0^r dx - \int_0^r x^2 dx\right]$$
$$V_1 = \pi\left[r^2[x]_0^r - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r\right]$$
$$V_1 = \pi\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right]$$
$$V_1 = \pi\left[\frac{2r^3}{3}\right]$$
$$V_1 = \frac{2\pi r^3}{3}$$
$$V = 2V_1$$
$$V = \frac{4\pi r^3}{3}\ j^3$$

$$m = \pi\int_a^b \rho_{(x)} f_{(x)}^2 dx$$
$$\rho_{(x)} = K$$
$$m = \pi\int_0^r K\left(r^2 - x^2\right)dx$$
$$m = K\pi\int_{-r}^r \left(r^2 - x^2\right)dx$$
$$m = K\frac{4\pi r^3}{3}[j]$$

Moment setrvačnosti rotačního tělesa

Hmotnost: $m = \pi\int_a^b \rho_{(x)} f_{(x)}^2 dx$

Moment setrvačnost vzhledem ose x: $J_x = \int_a^b dJ_x$



Ploška$=2\pi r dr$
Objem$=2\pi dr dx$
Hmotnost: $\rho_{(x)}(2\pi r dr)dx$
Moment setrvačnosti: $r^2(\rho_{(x)}2\pi r dr)dx$

$$J_x = \int_a^b dJ_x$$

$$dJ_x = \rho_{(x)}\left[\int_0^{f_x} 2\pi r^3 dr\right]dx = \rho_{(x)} 2\pi \frac{1}{4} f_{(x)}^4 dx$$

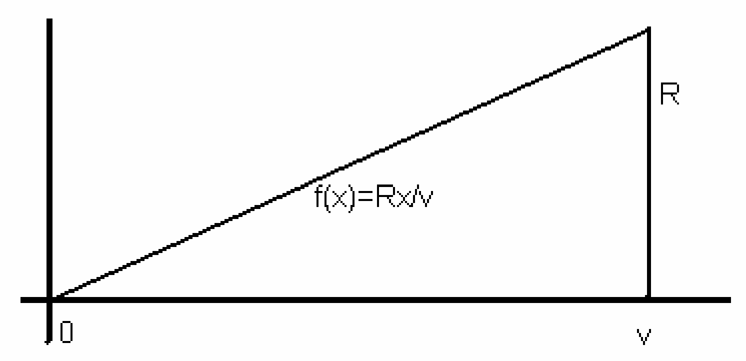
$$J_x = \frac{\pi}{2}\int_a^b \rho_{(x)} f_{(x)}^4 dx$$

Těžiště rotačního tělesa

$\rho_{(x)} \geq 0$ … rotační těleso

$T = [x_T;0;0]$

$$x_T = \frac{1}{m}\int x dm = \frac{1}{m}\int x\rho_{(x)}\pi f_{(x)}^2 dx$$

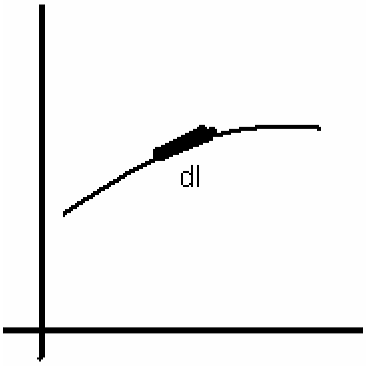


$$x_T = \frac{1}{m}\int_0^v x\rho\pi\frac{R^2x^2}{v^2}dx = \frac{\pi R^2\rho}{v^2}\frac{1}{4}v^4 = \frac{\pi R^2\rho v^4}{4m}$$

$$m = \int_0^v \rho\pi\frac{R^2x^2}{v^2}dx = \frac{\pi R^2\rho}{v^2}\frac{1}{3}v^3 = \frac{\pi R^2\rho v^3}{3}$$

$$x_T = \frac{\pi R^2\rho v^4}{4m}\frac{3}{\pi R^2\rho v^3} = \frac{3}{4}v$$

Povrch rotačního tělesa



$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\,dx$$

$$dS = 2\pi f_{(x)} dl$$

$$S = 2\pi \int_a^b f_{(x)} \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\,dx$$

Příklad: Povrch koule

$$f_{(x)} = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R\,dx = 2\pi R \cdot R = 2\pi R^2$$

Pravděpodobnost

Definice:

Jev A… počet možných případů, které mohou nastat při pokusu, při němž se může realizovat jev A… n_A
Počet případů, kdy nastane jev A… m_A

n_A … počet případů možných
m_A … počet případů příznivých

$$p_A = \frac{m_A}{n_A}$$

Diskrétní případ, kdy $n \in \mathbf{Z}$

Příklad:
32 karet; náhodně vybrané 4 karty; jaká je pravděpodobnost, že ve výběru budou 2 dámy?

n… kombinace bez opakování třídy 4 z 32 pokusů

$$n = \binom{32}{4} = \frac{32!}{4!28!}$$

Výběr 2 dam ze 4 možných: $\binom{4}{2}$

Výběr zbývající karet: $\binom{28}{2}$

Celkem: $m = \binom{4}{2}\binom{28}{2}$

Pravděpodobnost: $p = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{28}{2}}{\binom{32}{4}}$

Příklad:
32 karet; náhodně vybrané 4karty; Jaká je pravděpodobnost a)aspoň 2dámy b)nejvýše 2 dámy.
a)

$$n_A = \binom{32}{4}$$

$$m_A = \binom{4}{2}\binom{28}{2} + \binom{4}{3}\binom{28}{1} + \binom{4}{4}\binom{28}{0}$$

A… A_2 … právě dvě dámy
A_3 … právě tři dámy
A_4 … právě čtyři dámy

$$p_A = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{2} + \binom{4}{3}\binom{28}{1} + \binom{4}{4}\binom{28}{0}}{\binom{32}{4}} = p_{A2} + p_{A3} + p_{A4}$$

b)

$$n_B = \binom{32}{4}$$

$$m_B = \binom{4}{0}\binom{28}{4} + \binom{4}{1}\binom{28}{2} + \binom{4}{2}\binom{28}{2}$$

$$p_B = \frac{\binom{4}{0}\binom{28}{4} + \binom{4}{1}\binom{28}{2} + \binom{4}{2}\binom{28}{2}}{\binom{32}{4}} = p_{B0} + p_{B1} + p_{B2}$$

Sčítání pravděpodobností

Jevy A_1, A_2 s pravděpodobnostmi p_{A1}, p_{A2}

M_1… množina všech případů, kdy nastane jev A_1

M_2… množina všech případů, kdy nastane jev A_2

Slučitelné jevy:

Jevy A_1, …, A_k a pravděpodobnosti jevů jsou $p_{A1}, p_{A2}, ..., p_{Ak}$

Jev A… Nastane A_1 nebo A_2 nebo…nebo A_k s p(A)= $p_{A1}, p_{A2}, ..., p_{Ak}$ pouze tehdy, jsou-li A_2, $A_1, \ldots, A_k$ po dvou neslučitelné!!!

$M_1 \cap M_2 = \{\ \}$.

Množina prvků $M_1 \cup M_2$ je množina případů, kdy nastane jev A_1 nebo A_2

m_{A1}… počet prvků množiny M_1

m_{A2}… počet prvků množiny M_2

m_A… počet prvků množiny $M_1 \cup M_2 = m_{A1} + m_{A2}$

$$p_A = \frac{m_A}{n_A} = \frac{m_{A1}}{n_A} + \frac{m_{A2}}{n_A} = p_{A1} + p_{A2}$$

Neslučitelné jevy

$M_1 \cap M_2 \neq \{\ \}$

m_A… počet prvků množiny $M_1 \cup M_2 = m_{A1} + m_{A2}$ - počet prvků $M_1 \cap M_2$

$$p_A = \frac{m_A}{n_A} \neq p_{A1} + p_{A2}$$

Nezávislé jevy

Příklad:

1 kostka; 1 mince; Jaká je pravděpodobnost, že padne na kostce šestka a na minci hlava.

A… na kostce padne 6… p(A)
B… na minci padne hlava… p(B)
C… nastane *A* a zároveň *B*.

$n_C = 12$

$m_C = 1$

$p_C = \frac{1}{12}$

$p_C = p_A \cdot p_B$ … platí pouze pro <u>nezávislé</u> jevy.

Příklad:
A…A… p(A)
B…nonA… p(B)

p(nastane A nebo B)= 1

p(nastane A a zároveň B) = 0 $\neq p_A \cdot p_B = p_A(1 - p_b) \neq 0$
jev jistý… *p(A)* = 1
jev nemožný… *p(B)* = 0

Náhodná veličina s diskrétním rozdělením

X… nabývá hodnot $x_1;...;x_k$ s pravděpodobností $p_1;...;p_k$
Příklad:
X… počet ok, který padne při jednom hodu jednou kostkou.

$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	$x_6 = 6$
$p_1 = \frac{1}{6}$	$p_2 = \frac{1}{6}$	$p_3 = \frac{1}{6}$	$p_4 = \frac{1}{6}$	$p_5 = \frac{1}{6}$	$p_6 = \frac{1}{6}$

Čteme: X je rovno X=1 s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, X=2 s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, X=3…

$\{(x_j, p_j); j = 1,...k\}$… rozdělení náhodné veličiny s diskrétním rozdělením.

Náhodná veličina… jakákoli veličina, která vzniká na základě měření fyzikální veličiny:
N… počet měření
x(1)… naměřeno *n(1)* krát
x(2)… naměřeno *n(2)* krát
……
x(k)… naměřeno *n(k)* krát
Celkem $\sum_i n_i = N$

$p_{x1} = \frac{n_1}{N}$

...

$p_{xk} = \frac{n_k}{N}$

Pokud $n \to \infty$ nastane „ustalování“ pravděpodobnosti

Střední hodnota

zastupuje celý soubor $\{(x_j, p_j); j = 1,...k\}$

$\langle x \rangle =$ vážený průměr: $\dfrac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{N} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k = \sum_{j=1}^{k} x_j p_j$

Odchylka od střední hodnoty:

$\Delta_1 = x_1 - \langle x \rangle$

$\Delta_2 = x_2 - \langle x \rangle$

...

$\Delta_k = x_k - \langle x \rangle$

$\Delta = \{(\Delta_j; p_j)\}$

$$\langle \Delta \rangle = \sum_{j=1}^{k} \Delta_j p_j = \sum (x_j - \langle x \rangle) p_j = \sum x_j p_j - \langle x \rangle \sum p_j = 0$$

$\sum x_j p_j = \langle x \rangle$

$\sum p_j = 1$

$y = f_{(x)}$

$x = \{(x_j; p_j); j = 1,2...k\}$

$y = \{(f_{(xj)}; p_j); j = 1,2,...,k\}$

$\langle y \rangle = \sum f(x_j) p_j$

$\Sigma = \Delta^2 ... rozptyl$

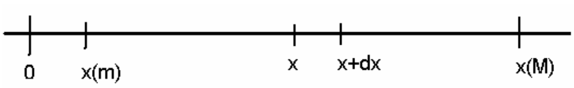
$$D_x = \langle \Delta^2 \rangle = \sum_{j=1}^{k} (x_j - \langle x \rangle)^2 p_j = \sum x_j^2 p_j - 2\langle x \rangle \sum x_j p_j + \langle x \rangle^2 \sum p_j = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \Rightarrow \langle x^2 \rangle \neq \langle x \rangle^2$$

$x = \langle x \rangle \pm \sqrt{D_x}$

Náhodná veličina se spojitým rozdělením

X… nabývá hodnot v intervalu $[x_m; x_M]$

lze zobecnit na více intervalů



Pravděpodobnost → hustota pravděpodobnosti

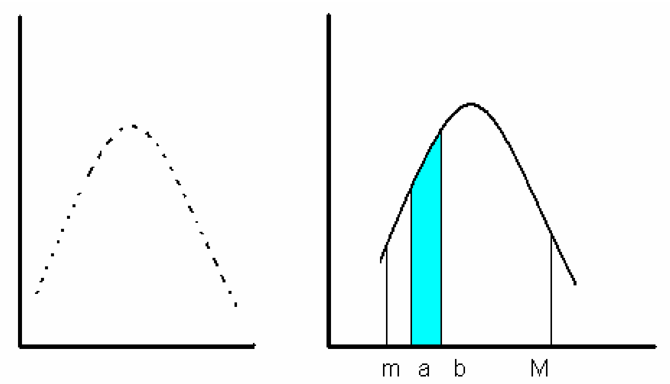
Δp_x … pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny X leží v intervalu $[x; x + \Delta x]$

$\dfrac{\Delta p_x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta p_{(x)}}{\Delta x} = w_{(x)}$ … hustota pravděpodobnosti

… rozdělovací funkce tohoto spojitého rozdělení

Rozdělení náhodné veličiny se spojitým rozdělením je zadáno funkcí $w_{(x)}$ na $[x_m; x_M]$.

$P_{[a,b]} = \int_a^b w_{(x)} dx$



Distribuční funkce

$$F_{(x)} = \int_m^x w_{(x)} dx$$

Střední hodnota

$$\int_m^M x w_{(x)} dx$$

$$\langle x \rangle = \sum x_j p_j \to \left| \begin{array}{c} \sum \to \int \\ x_j \to x \\ p_j \to dp \end{array} \right| \to$$

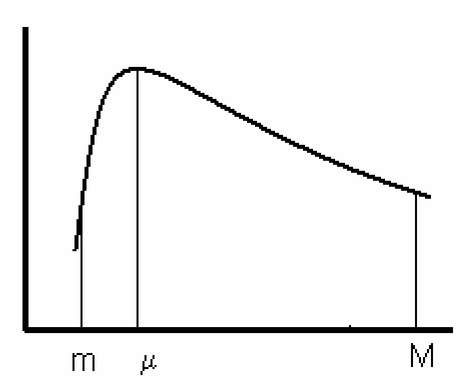
$$\Sigma = \Delta^2$$

$$\Delta = x - \langle x \rangle$$

$$\Sigma = \left(x - \langle x \rangle \right)^2$$

$$D_x = \langle \Sigma \rangle = \int_m^M \left(x - \langle x \rangle \right)^2 w_x dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Medián



$$\boxed{\begin{array}{l} \sum x_j p_j \to \int_m^M x w_{(x)} dx \\ P_{[m,\mu]} = \int_m^\mu w_x dx \\ P_{[\mu;M]} = 1 - F_{(\mu)} \end{array}}$$

Je-li $P_{[m,\mu]} = P_{[\mu;M]} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F_{(\mu)} = \frac{1}{2} \ldots$ μ = Medián