

Počtení praktikum 1: první(b) písemka - podzim 2021

1. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \ln \sqrt{\frac{1}{x}}$
(derivovanou funkci $f'(x)$ nemusíte dále upravovat ani zjednodušovat, stačí její hrubá podoba, avšak kompletně a správně zderivovaná). (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } f'(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left[\frac{1}{\cos x} \ln \sqrt{\frac{1}{x}} + \ln \left(\operatorname{tg} x + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) \cos x - \frac{1}{2x} \right]$$

2. Vypočítejte integrál $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^6 x} dx$. Jsou něčím omezené definiční obory zadaného integrandu a výsledné primitivní funkce (bez ohledu na uvedené meze)? (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \frac{2}{5} \operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{76\sqrt{3}}{5}, \quad x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Válcová uzavřená nádoba o poloměru R a výšce H je vyplněná kapalinou, jejíž tlak p se mění podle funkce $p = 4 - r^2$, kde r je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte celkovou tlakovou sílu F , kterou kapalina působí na všechny stěny nádoby (dvě podstavy a plášť). Vyčíslete také přibližnou celkovou tlakovou sílu při největším možném poloměru nádoby, při kterém má tato úloha fyzikální smysl (zaokrouhlete $\pi \approx 3$).¹ (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } p = \pi R [8R - R^3 + 2(4 - R^2)H] \approx 48$$

4. Vektor \vec{v} má ve *standardní ortonormální* bázi \mathcal{E} v \mathbb{R}^3 složky $(2, 2, 3)$. Dále jsou definovány dvě báze, \mathcal{B} a \mathcal{B}' , kdy přechody mezi bázemi \mathcal{E} a \mathcal{B} a mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' jsou dány

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_3, & \vec{f}_1 &= -\vec{f}'_1 + 2\vec{f}'_3, \\ \vec{f}_2 &= -\vec{e}_1 - \vec{e}_2, & \vec{f}_2 &= \vec{f}'_1 + \vec{f}'_2 - \vec{f}'_3, \\ \vec{f}_3 &= 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3, & \vec{f}_3 &= -\vec{f}'_1 + \vec{f}'_3, \end{aligned}$$

kde \vec{e}_i jsou bázové vektory báze \mathcal{E} , \vec{f}_i jsou bázové vektory báze \mathcal{B} a \vec{f}'_i jsou bázové vektory báze \mathcal{B}' . Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{E} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{E} (směrovou konvenci zvolte dle vlastní preference, vyznačte ji ale do řešení) a složky vektoru \vec{v} v bázích \mathcal{B} a \mathcal{B}' . Jsou báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' ortonormální (zdůvodněte)? (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (6, -2, -3), \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-5, -2, 11), \quad \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}' \text{ nejsou ortonormální}$$

¹Veličiny jsou uváděny pouze jako velikost, nejsou uváděny příslušné jednotky.