

**DON'T
PANIC!**

**Státnice z astronomie
&
astrofyziky v kostce**
(drobně doplněné o přípravu ke státní doktorské zkoušce)

Verze 1.2, květen 2007

by **Mgr. TOMík**

Úvod

Tento kompilát jsem sepsal během své přípravy ke státní zkoušce z astronomie a astrofyziky na MFF UK v roce 2005. Je rozdělen do několika částí, a to tak, jak to odpovídalo požadavkům (jež jsou u každé části/kapitoly uvedeny) ke státní zkoušce v daném roce.

Některé části textu jsem psal sám (dle poznámek z přednášek apod.), u většiny jsem však použil systém „OCR + následná (zpravidla velmi mírná) úprava textu“. Některé části jsou proto doslova a do písmene převzaty z nejrůznějších jiných astronomických a astrofyzikálních příruček, knih, script a učebních textů, jejichž autorům se tímto omlouvám za použití celých myriád jejich myšlenek bez jejich vědomí a přesných citací. Na konci každé kapitoly je však alespoň uvedeno, odkud jsem čerpal.

Tento text dávám v pln sice veřejně, avšak naprosto volně a zdarma ke stažení z internetu. Pokud se tedy tento text někdy dostane k někomu, komu by části připomínaly jeho vlastní text, je to docela dobře možné, a já se ještě jednou omlouvám. Jak už jsem zmínil, je to především KOMPILÁT, nad kterým jsem ovšem strávil 2 měsíce času, a o kterém si myslím, že není úplně nejhorší, a proto bych byl nerad, aby posloužil pouze pro mě a jednorázově. Snad tedy poslouží dalším zájemcům o astronomii a astrofyziku, a především dalším generacím studentů na MFF UK.

3.1.2007, Mgr. TOMÍK

P.S.: Je třeba dodělat kapitolu o Sluneční soustavě (morfologie, planety, malá tělesa a podobné „nesmysly“) a exoplanetách ... A samozřejmě části Relativita a Nebeská mechanika ...

Obsah

I	Obecná fyzika	11
1	Klasická a kvantová mechanika	15
1.1	<u>Klasická mechanika</u>	16
	Základní kinematické veličiny	16
	Newtonovy pohybové zákony	16
	Další mechanické veličiny	17
	Soustava hmotných bodů a tuhé těleso	18
	Harmonický oscilátor	18
	Lagrangeovy rovnice, D'Alembertův princip	20
	Hamiltonovy kanonické rovnice	21
	Hamiltonův variační princip	22
	Souvislost kvantové a klasické mechaniky	23
1.2	<u>Kontinuum</u>	25
	Rovnice kontinuity	26
	Pohybová rovnice ideální tekutiny	26
	Vlny v kontinuu	27
	Síly objemové/plošné, podm. rovnováhy. Tenzor napětí a Hookův zákon	28
1.3	<u>Kvantová mechanika</u>	30
	Experimentální základy kvantové hypotézy	30
	Relace neurčitosti	32
	Formalismus kvantové teorie	32
	Aplikace kvantové mechaniky – LHO, vodík ...	35
	Literatura a zdroje	51
2	Elektromagnetické pole, STR	52
2.1	<u>Elektrické a magnetické pole – základní vztahy</u>	53
	Intenzita el.pole	53
	Indukce mag. pole	54
	Indukce elektrického pole	54
	Intenzita magnetického pole	55
2.2	<u>Maxwellovy rovnice</u>	56
	Řešení Maxwellových rovnic – potenciály a vlnová rve	57
	Elektrostatika	58
	Stacionární pole	59
	Kvazistacionární pole	59
	Nestacionární pole	60
2.3	<u>STR</u>	61
	Postuláty STR	61
	Lorentzova transformace	61
	Základní důsledky Lorentzovy transformace	63
	Relativistická kinematika a dynamika	64
	Lorentzova transformace a Maxwellovy rovnice	65
	Doplňky	66
	Literatura a zdroje	69

3	Jaderná a subjaderná fyzika	70
3.1	<u>Atomové jádro</u>	71
	Vazbové síly, vazebná energie jádra	71
	Modely jádra	72
	Jaderné reakce, radioaktivita	73
3.2	<u>Interakce</u>	76
3.3	<u>Elementární částice, jejich klasifikace</u>	78
	Leptony a zákony zachování mikrosvěta	78
	Kvarkový model	79
	Literatura a zdroje	81
4	Termodynamika a statistická fyzika	82
4.1	<u>Termodynamika a molekulová fyzika</u>	83
	Hlavní věty termodynamiky	84
	Stavová rovnice, ideální plyn	85
	Základy molekulové fyziky, kinetické teorie	86
	Poznámka o transportních jevech	87
4.2	<u>Statistická fyzika</u>	89
	Makrostavy a mikrostavy, třídy systémů	89
	Rozdělení	89
	Statistická interpretace I. a II. věty termodynamické	93
	Poznámky k jednotlivým rozdělením	93
	Klasická statistika a její aplikace – Liouvilleův a ekvipartiční teorém	95
	Úvod k nerovnovážné statistice, Boltzmannova rce	100
	Literatura a zdroje	101
(H)	různé doplňky a „výkřiky do tmy“ ...	102
II	Astronomie	105
5	Astrometrická pozorování	107
5.1	<u>Souřadnicové systémy</u>	108
	Transformace souřadnic	110
	Sférická trigonometrie	111
5.2	<u>Vlivy působící na souřadnice, jejich redukce</u>	113
	Vlastní pohyb	113
	Aberace	114
	Trigonometrické paralaxy	114
	Refrakce	116
	Precese	117
	Nutace	118
	Pohyb pólů	119
5.3	<u>Čas v astronomii</u>	120
	Typy časů	120
	Změny v rotaci Země	121
	Kalendář	121
	Juliánské datum	121
	Epochy	122
5.4	<u>Problém dvou těles</u>	123
	Moment hybnosti	124
	Hledání pohybových rovnic se souřadnicemi r a v	125
	Pohyb po elipse	127
	Keplerova úloha	128
	Keplerova rovnice diferenciálně	129
	Pohyb po parabole a hyperbole	130
	Keplerovy elementy dráhy	130
	Počítání efemerid v problému dvou těles	131
5.5	<u>Metody určování drah – elementů ve Sluneční soustavě</u>	133
	Laplaceova metoda	133

Elementy ze tří pozorování	134
5.6 <u>Zatmění a zákryty</u>	138
Literatura a zdroje	139
6 <u>Observační výsledky; přístroje</u>	140
6.1 <u>Optické systémy, dalekohledy; Interferometrie</u>	141
Vady optických soustav	142
Dalekohledy dneška	144
Interferometrie	144
6.2 <u>Fotometrie</u>	146
Standardní barevné systémy	147
Redukce fotometrických měření jasnosti hvězd	148
Určování fyzikálních vlastností hvězd z fotometrických veličin	151
Fotometrie – přístroje	153
6.3 <u>Spektroskopie</u>	155
Spektroskopie – přístroje	158
Spektrální klasifikace	161
6.4 <u>Metody hledání periodicity v astronomických datech</u>	163
Obecné zákonitosti a problémy při hledání period	164
6.5 <u>Kosmické záření, neutrina a gravitační vlny</u>	167
6.6 <u>Rádio a další obory, jejich přístroje, družice</u>	169
6.7 <u>Vesmírné vzdálenosti</u>	171
6.8 <u>Vesmírné hmotnosti</u>	175
Literatura a zdroje	177
7 <u>Sluneční soustava</u>	178
(H)různé doplňky a „výkřiky do tmy“	179
III <u>Astrofyzika, hvězdy, galaxie</u>	183
8 <u>Záření, hvězdné atmosféry</u>	187
8.1 <u>Základy teorie záření</u>	188
Základní veličiny	189
Záření absolutně černého tělesa	191
Efektivní teplota hvězdy	193
8.2 <u>Hvězdné atmosféry - základní úvahy a rovnice</u>	194
LTE vs. non-LTE	195
Rovnice přenosu záření	196
8.3 <u>Spektrální čáry</u>	202
Základy kvantové teorie rozšíření spektrální čáry	202
Celkové rozšíření spektrální čáry	205
Redistribuční funkce	208
2-level atom	214
8.4 <u>Modelování atmosfér</u>	219
Literatura a zdroje	223
9 <u>Stavba a vývoj hvězd</u>	224
9.1 <u>HRD ve fyzikálních souvislostech</u>	225
Excitace, Boltzmannova rovnice	225
Ionizace, Sahova rovnice	225
Excitace a ionizace vodíku, vztah ke spektrální klasifikaci	225
HRD	227
9.2 <u>Nitro hvězd – Úvod, obecné fyzikální zákonitosti</u>	228
Stavová rovnice	229
9.3 <u>Základní rovnice stavby hvězd</u>	233
Rovnice zachování hmoty	233
Pohybová rovnice a její limitní případ: rovnice hydrostatické rovnováhy	233
Rovnice tepelné rovnováhy	233

	Rovnice přenosu energie	238
	Matematická struktura rovnic hvězdného nitra, okrajové podmínky, Henye	244
9.4	Jednoduché modely a odhady	248
	Laneova-Emdenova diferenciální rovnice, polytropní modely hvězd	249
9.5	Vývoj osamocené hvězdy	252
	Odlišnosti hvězdného vývoje v závislosti na hmotě hvězdy	257
	Jak srovnávat teorii hvězdného vývoje s pozorováním?	259
9.6	Poznámka o hvězdném větru a ztrátě hmoty	260
9.7	Poznámka o rotaci hvězd	261
	Rocheův model	261
	Vliv rotace na hvězdný vývoj	262
9.8	Typy pozorovaných hvězd a jejich vývojová stadia	264
	Horké hvězdy spektrálního typu O a Wolfovy-Rayetovy hvězdy	264
	Hvězdy spektrálního typu B	264
	Hvězdy spektrálního typu A a F	265
	G,K,M hvězdy + proměnné hvězdy	266
	Hvězdy v pozdních vývojových stadiích	269
	Literatura a zdroje	272
10	Dvojhvězdy	273
10.1	Pojem dvojhvězdy, klasifikace	274
	Klasifikace dle metody pozorování	274
	Klasifikace dle dynamické stability	276
	Klasifikace „živočichopisná“	276
10.2	Určování kvantitativních vlastností dvojhvězd	278
	O – C diagramy a změna oběžných period dvojhvězd	278
	Určování elementů spektroskopických dvojhvězd	279
	Určování elementů zákrytových dvojhvězd	280
	Periodické změny oběžné periody	282
	Neperiodické změny periody	283
	Určování elementů visuálních dvojhvězd	283
10.3	Vývoj dvojhvězd	285
	Výpočty ve stadiu výměny hmoty	285
	Některé výsledky modelování	287
10.4	Dodatky	290
	Dvojhvězdy v posledním tažení	290
	Dodatek o vzniku dvojhvězd	291
	Dvojhvězdy s komplikacemi	291
	Literatura a zdroje	293
11	Galaxie a mezihvězdná látka	294
11.1	Fyzika mezihvězdné látky	295
	Vztah mezihvězdné látky a hvězd, rozložení v prostoru	295
	Mezihvězdný prach – extinkce	296
	Mezihvězdný plyn – H I, H II, molekuly	301
	Dodatky – viriál, relaxační čas, fce ohřevu/ochlazování	310
	Literatura a zdroje	312
11.2	Galaktická a extragalaktická astronomie	313
	Morfologie Galaxie	315
	Dynamika Galaxie	321
	Vývoj hvězd a mezihvězdné látky v Galaxii	329
	Cizí galaxie	332
	Dodatek o soustavách galaxií, rozložení galaxií v prostoru	333
	Dodatek o nukleosyntéze	334
	Literatura a zdroje	337

12 Slunce	338
12.1 <u>Slunce – základní charakteristika</u>	339
12.2 <u>Sluneční magnetismus</u>	342
12.3 <u>Erupce – „Standardní model sluneční erupce“</u>	344
Klasifikace erupcí	346
CME	346
Elektromagnetické záření erupce	347
12.4 <u>Helioseismologie</u>	349
Literatura a zdroje	354

IV Kosmická elektrodynamika **355**

13 Kosmická elektrodynamika	357
13.1 <u>Plazma - úvodní průřezový článek</u>	358
13.2 <u>Plazma - základy</u>	364
13.3 <u>Driftový popis</u>	367
Homogenní elektrické a magnetické pole	367
Nehomogenní \vec{B} pole (bez \vec{E})	371
Další driftы – nehomogenní \vec{E} , \vec{B} homogenní	375
Další driftы – časově proměnné \vec{E}	376
Dodatky	376
13.4 <u>Dodatek k pohybu nabitě částice – netepelné záření</u>	377
Synchrotron	377
Comptonův rozptyl	378
13.5 <u>Přístupy k plazmatu</u>	381
Kinetický popis	381
Magnetohydrodynamický (MHD) přístup	382
13.6 <u>Vlny v plazmatu</u>	388
Plazmová frekvence	389
Elektronové plazmové vlny	391
Iontozvukové vlny	392
Elektrostatické elektronové oscilace kolmé na \vec{B}	393
Elektrostatické iontové vlny kolmé na \vec{B} a dolní hybridní frekvence	394
Elektromagnetické vlny s $\vec{B}_0 = 0$	396
Elektromagnetické vlny kolmé na \vec{B}	398
Elektromagnetické vlny rovnoběžné s \vec{B}	399
Hydromagnetické vlny	401
Magnetozvukové vlny	403
Shrnutí	405
13.7 <u>Difúze, odpor a stabilita plazmatu</u>	406
Rozpad plazmatu difúzí	407
Stacionární stav	409
Rekombinace	409
Difúze napříč magnetickým polem	409
Srážky v plně ionizovaném plazmatu	411
Difúze v plně ionizovaném plazmatu	413
Rovnováha a stabilita	417
Nestability	419
Literatura a zdroje	425

Část I

Obecná fyzika

Požadavky

Klasická a kvantová mechanika: Porovnání popisu systému v klasické a kvantové mechanice, popis stavu. Kauzalita a měření. Formalismus teoretické mechaniky a kvantové mechaniky – pohybové rovnice, Hamiltonův-Jacobiho formalismus, operátory fyzikálních veličin, zákony zachování. Variační principy. Fyzikální efekty, které nelze vysvětlit klasicky. Rotace těles, setrvačníky – příklady z vesmírného prostředí. Základy mechaniky kontinua, Navierova-Stokesova rovnice.

Kvantování fyzikálních veličin: Operátory fyzikálních veličin, diskrétní a spojitě spektrum. Hladiny energie v atomech, molekulách a pevných látkách. Moment hybnosti a jeho kvantování, orbitální a spinový moment hybnosti, skládání momentů hybnosti. Jemná a hyperjemná struktura hladin. Magnetický moment a jeho interakce s vnějším polem. Klasický a kvantově mechanický lineární harmonický oscilátor. Kvantování spinu. Pauliho princip. Interakce spinu s vnějším polem.

Elektromagnetické pole: Maxwellovy rovnice. Lorentzova transformace. Semiklasický a kvantový popis elektromagnetického pole, fotony. Interakce atomu se zářením. Absorpce a emise, Einsteinovy koeficienty. Přirozená šířka spektrální čáry.

Jaderná a subjaderná fyzika: Stavba atomového jádra. Klasifikace mikročástic. Slabá a silná interakce. Jaderné reakce.

Termodynamika a statistická fyzika: Stavové veličiny, zákony termodynamiky, entropie. Statistická interpretace termodynamiky. Kanonické rozdělení. Fermiony a bozony. Matice hustoty. Stavové rovnice. Termodynamika záření, záření absolutně černého tělesa.

Otázky

- Popis systému v klasické a kvantové mechanice, popis stavu, kauzalita a měření.
- Pohybové rovnice, Hamiltonův-Jacobiho formalismus.
- Variační principy v teoretické mechanice. Zákony zachování.
- Základní rovnice mechaniky kontinua.
- Operátory fyzikálních veličin v kvantové mechanice. Relace neurčitosti.
- Klasický a kvantově mechanický lineární oscilátor.
- Vlnová funkce, Schrödingerova rovnice, diskrétní a spojitě spektrum kvantování.
- Moment hybnosti a jeho kvantování, skládání momentů hybnosti. Jemná a hyperjemná struktura hladin.
- Atom vodíku - moment hybnosti a jeho kvantování, energie hladin, orbitální a spinový moment hybnosti, magnetický moment.
- Maxwellovy rovnice.
- Lorentzova transformace, aberace a Dopplerův jev.
- Interakce atomu se zářením, Einsteinovy koeficienty. ¹
- Stavba atomového jádra.
- Klasifikace mikročástic.
- Silná a slabá interakce, jaderné reakce.
- Entropie v zákonech termodynamiky.
- Souvislost klasické termodynamiky a statistické fyziky. Matice hustoty.
- Boltzmannova rovnice a Liouvilleův teorém.
- Klasické částice, fermiony a bosony. Rozdělení Boltzmannovo, rozdělení Fermi-Diracovo a Bose-Einsteinovo. Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí.

¹ !!!Zpracováno v sekci Astrofyzika – záření, hvězdné atmosféry!!!

-
- Základní pojmy teorie záření – intenzita tok, tlak a hustota záření (monochromatické, střední, integrální).¹
 - Termodynamika záření – Planckův zákon a s ním související zákony Rayleighův-Jeansův, Wienův, Wienův zákon posuvu a Stefanův-Boltzmannův.¹
 - Netepelné záření. Pohyb elektronu v magnetickém poli, cyklotronové a synchrotronové záření. Comptonův jev.²

² !!!Zpracováno v sekci Kosmická elektrodynamika!!!

Kapitola 1

Klasická a kvantová mechanika

Klasická a kvantová mechanika: Porovnání popisu systému v klasické a kvantové mechanice, popis stavu. Kauzalita a měření. Formalismus teoretické mechaniky a kvantové mechaniky – pohybové rovnice, Hamiltonův-Jacobiho formalismus, operátory fyzikálních veličin, zákony zachování. Variační principy. Fyzikální efekty, které nelze vysvětlit klasicky. Rotace těles, setrvačníky – příklady z vesmírného prostředí. Základy mechaniky kontinua, Navierova-Stokesova rovnice.

Kvantování fyzikálních veličin: Operátory fyzikálních veličin, diskrétní a spojitě spektrum. Hladiny energie v atomech, molekulách a pevných látkách. Moment hybnosti a jeho kvantování, orbitální a spinový moment hybnosti, skládání momentů hybnosti. Jemná a hyperjemná struktura hladin. Magnetický moment a jeho interakce s vnějším polem. Klasický a kvantově mechanický lineární harmonický oscilátor. Kvantování spinu. Pauliho princip. Interakce spinu s vnějším polem.

- Popis systému v klasické a kvantové mechanice, popis stavu, kauzalita a měření.
- Pohybové rovnice, Hamiltonův-Jakobiho formalismus.
- Variační principy v teoretické mechanice. Zákony zachování.
- Základní rovnice mechaniky kontinua.
- Operátory fyzikálních veličin v kvantové mechanice. Relace neurčitosti.
- Klasický a kvantově mechanický lineární oscilátor.
- Vlnová funkce, Schrödingerova rovnice, diskrétní a spojitě spektrum kvantování.
- Moment hybnosti a jeho kvantování, skládání momentů hybnosti. Jemná a hyperjemná struktura hladin.
- Atom vodíku - moment hybnosti a jeho kvantování, energie hladin, orbitální a spinový moment hybnosti, magnetický moment.

1.1 Klasická mechanika

§ Základní kinematické veličiny

Kinematika se zabývá popisem pohybu. Důležitým pojmem je **hmotný bod** - idealizace, kdy se libovolné těleso nahrazuje bodem (často pohybem těžiště) s danou hmotností. Základním kinematickým pojmem je **trajektorie**. Je to spojitá vektorová funkce času $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Trajektorii obvykle zadáváme parametricky, její délku nazýváme dráha. Pohyb částice (tj. změnu polohy v čase) charakterizujeme **rychlostí**:

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)}{t_1 - t_2} \quad (\text{průměrnou}),$$

$$\vec{v} = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \vec{v}_p = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)}{t_1 - t_2} \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (\text{okamžitou}).$$

Pokud je velikost rychlosti konstantní, pohyb nazýváme **rovnoměrný**, jinak **nerovnoměrný**. **Přímočarý** pohyb je charakterizován tím, že pohyb probíhá podél konstantně směřujícího vektoru. Nepřímočarý pohyb je **křivočarý**. Při pohybu se mění jednak velikost a jednak směr pohybu:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Vektor $\vec{\omega} = d\varphi/dt$ nazýváme **úhlová rychlost**.

Změna rychlosti se popisuje **zrychlením**:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n,$$

kteřé má **tečnou** a **normálovou** (dostředivou) složku, $a_t = dv/dt$ resp. $a_n = v^2/R = \omega^2 R$, viz kruhový pohyb. Tečné zrychlení tedy charakterizuje změnu velikosti rychlosti s časem, normálové souvisí se zakřivením dráhy. Pohyb charakterizovaný konstantním zrychlením nazýváme **rovnoměrně zrychlený**. Analogicky k úhlové rychlosti se zavádí i úhlové zrychlení $\vec{\epsilon} = d\vec{\omega}/dt$.

§ Newtonovy pohybové zákony

Dynamika zkoumá příčiny pohybu; základem klasické teorie jsou **Newtonovy pohybové zákony**.

1. NZ, setrvačnosti: *Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není nuceno vnějšími vlivy (působením jiného tělesa) tento svůj stav změnit.* Pokud tedy najdeme těleso, na které nepůsobí žádné vnější vlivy, můžeme s ním spojit speciální **inerciální** soustavu souřadnou (tj. dané těleso je vůči ní v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém). Ostatní soustavy jsou **neinerciální**. První Newtonův zákon nám tedy v podstatě definuje inerciální vztahnou soustavu, ve které je vysloven zákon číslo 2.

2. NZ, síly, zavádíme sílu a hmotnost: *Síla působící na těleso je úměrná součinu jeho hmoty a zrychlení, které mu tato síla uděluje.*

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Pokud známe silové působení na vyšetřované těleso, můžeme pomocí **pohybové rovnice** určit jeho trajektorii:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

3.NZ, akce a reakce: *Každá akce vyvolává reakci stejné velikosti a opačného směru.* Existují různé druhy sil působících v inerciální vztažné soustavě: např. **tíhová síla** $\vec{F} = m\vec{g}$ nebo **dostředivá** $F = m\omega^2 R$ mířící do středu kruhu. Pokud provádíme popis v neinerciální soustavě, lze použít druhý Newtonův zákon, ale k silám je nutno přičíst nefyzikální síly (tzv. zdánlivé), které kompenzují vliv zrychleného pohybu neinerciální soustavy. Nejznámějšími příklady těchto sil (mají původ v otáčení se neinerciální soustavy vůči inerciální) jsou **odstředivá síla** (která má stejnou velikost jako síla dostředivá, míří od osy a působí pouze na body mimo osu otáčení) nebo síla **Coriolisova** $\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$, působící pouze na tělesa, která se vůči neinerciální soustavě pohybují rychlostí \vec{v}' , jejíž směr není shodný se směrem osy otáčení. Tyto efekty lze zjistit například měřením gravitačního zrychlení v různých zeměpisných šířkách (měřené gravitační zrychlení je vektorovým součtem tíhového a odstředivého, na pólu je největší a na rovníku nejmenší); opačný smysl rotace vířivých větrů – cyklonů – na severní a jižní polokouli lze naopak vysvětlit Coriolisovou silou (Země je neinerciální vz.s.) ...

§ Další mechanické veličiny

K vystižení celkového působení síly na hmotný bod používáme veličinu zvanou **práce**:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{resp.} \quad W = \int \vec{F} d\vec{s},$$

rychlost konání práce charakterizuje **výkon**

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Každému bodu v prostoru je možno přiřadit určité silové působení, čímž charakterizujeme pole. Pole dělíme na **konzervativní** ($\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$) a **nekonzervativní** ($\oint \vec{F} d\vec{s} \neq 0$). V konzervativním poli nezávisí vykonaná práce na tvaru dráhy (závisí pouze na počátečním a koncovém bodu dráhy) a můžeme zavést **potenciální energii** U , která charakterizuje práci vykonanou při pohybu mezi dvěma body:

$$\vec{F} = -\nabla U.$$

Matematicky je tedy konzervativní pole charakterizováno rovnicí $\nabla \times \vec{F} = 0$. U nekonzervativního pole (jako je například pole třecí síly nebo valivého odporu) potenciál zavést nelze. Kromě potenciální energie se zavádí i **pohybová/kinetická energie**

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Součet kinetické a potenciální energie, tzv. mechanická energie, se zachovává. Dále je možno zavést intenzitu silového pole, jež značí sílu působící na hmotný bod o jednotkové hmotě a potenciál, což je potenciální energie hmotného bodu o jednotkové hmotě.

Mechanické účinky pohybuujícího se tělesa charakterizuje **hybnost**

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Newton formuloval svůj druhý zákon v obecnějším tvaru pomocí hybnosti:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Pokud na soustavu nepůsobí vnější síly, platí zákon zachování hybnosti. Pokud tento vztah použijeme pro soustavu volných částic, na levou stranu dáme součet vnějších působících sil a na pravou stranu součet hybností, dostaneme **I. větu impulzovou**.¹

Pro popis otáčivého pohybu je vhodný **moment síly**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

a **moment hybnosti**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Tyto dvě veličiny jsou vázány vztahem analogickým ke druhému Newtonovu zákonu:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Analogicky, pro soustavu volných hmotných bodů se součtem vnějších momentů síly na levé straně a součtem momentů hybnosti na pravé se jedná o **II. větu impulzovou**; při použití na soustavu bez vnějších sil zjistíme, že moment hybnosti se zachovává.²

§ Soustava hmotných bodů a tuhé těleso

Poloha soustavy N hmotných bodů resp. tuhého tělesa je určena hmotným středem neboli těžištěm:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}.$$

Pokud všechny body tělesa konají pohyb se stejným vektorem rychlosti, jedná se o **translaci**, jinak o **rotaci**. Pro popis rotace tuhého tělesa nebo soustavy hmotných bodů se analogicky k hmotnosti zavádí **moment setrvačnosti** (obecně je to tenzor)

$$J = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = \int_V R^2 \rho dV,$$

potom platí

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad E_k = \frac{J\omega^2}{2}, \quad \vec{M} = J\vec{\epsilon}$$

§ Harmonický oscilátor

Uvažujme pohyb způsobený silou $\vec{F} = -kx$.³ Musíme tedy řešit pohybovou rovnici

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

¹ Věta o hybnosti soustavy, $d\vec{P}/dt = \vec{F}_E$, kde $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ je celková hybnost soustavy a $\vec{F}_E = \sum_i \vec{F}_i$ je výslednice vnějších sil působících na soustavu

² tj. $d\vec{L}/dt = \vec{M}_E$, podmínkou je, že moment hybnosti i moment síly je počítán vzhledem k témuž bodu

³ tj. máme hmotný bod vázaný na přímkou, na něž působí síla, která míří k jednomu bodu přímky a jejíž velikost roste úměrně se vzdáleností od tohoto bodu ...

Řešením této rovnice jsou harmonické funkce

$$x = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + x_0, \quad \text{kde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dostáváme harmonický pohyb s vlastní úhlovou frekvencí ω_0 .⁴

Přidáme-li navíc odporovou sílu úměrnou rychlosti (tj. $\vec{F} = -h\dot{x} = -h\vec{v}$), dostaneme rovnici s tlumícím členem

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde } 2\delta = h/m$$

Vyřešením charakteristické rovnice⁵ dostaneme (pro $\delta \neq \omega_0$)

$$x = C_1 e^{(-\delta+D)t} + C_2 e^{(-\delta-D)t}, \quad \text{kde } D = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Charakter pohybu závisí na vztahu mezi δ a ω_0 .

Pro $\delta > \omega_0$ dostáváme **aperiodický pohyb**. Obě exponenciály jsou klesající, okamžitá výchylka i rychlost pohybu klesá k nule.

Pro $\delta < \omega_0$ se jedná o **tlumený harmonický kmit**. V argumentu exponenciály dostaneme komplexní číslo:

$$x = e^{-\delta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\delta t} (D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t)) \rightarrow$$

$$x = C e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi), \quad \text{kde } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Oscilátor kmitá s úhlovou frekvencí ω ; amplituda výchylky se ale exponenciálně zmenšuje. Okamžitá výchylka a rychlost se blíží k nule v nekonečnu, bod projde nekonečněkrát rovnovážnou polohou.

Speciální případ **mezního aperiodického pohybu** pro $\delta = \omega_0$ je popsán rovnicí

$$x = e^{-\delta t} (C_1 + C_2 t).$$

Bod zaujme rovnovážnou polohu pouze jednou pro $t = -C_1/C_2$.

Působí-li na tlumený harmonický oscilátor navíc harmonická vynucující síla⁶, musíme k řešení přičíst člen úměrný $\sin(\Omega t + \phi)$ (konstanta ϕ je dána z rovnice). Po určitém čase vymizí člen s klesající exponenciálou a zůstane pouze člen úměrný sinu (tzv. ustálený stav). Pro frekvenci vynucující síly rovnou $\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta}$ nastává **rezonance**⁷ – amplituda je maximální (roste nade všechny meze, tj. přestává platit daný model).

Pro skládání kmitů platí **princip superpozice** – dva podněty při společném působení vyvolávají reakci rovnou součtu reakcí, jaké by podněty dávaly při samostatném působení ...

⁴ $(\omega_0 t + \varphi)$ je fáze, φ fázová konstanta, C amplituda a x_0 je počáteční poloha bodu (obvykle 0). Pohyb je periodický, po čase se celý opakuje, viz též vztahy $f = 1/T$, $T = 2\pi/\omega$, $\omega = 2\pi f$. Řešení lze též psát ve tvaru $x = C_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \dots$

⁵ $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \rightarrow D_0 = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) \rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm D$

⁶ $F_H = S \sin(\Omega t)$

⁷ obecně malá budící veličina způsobí velkou odezvu ...

§ Lagrangeovy rovnice, D'Alembertův princip

Pohyb hmotného bodu za působení vazbových⁸ sil \vec{R} , tj. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}$, popisují **Lagrangeovy rovnice I. druhu**

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \text{grad}\varphi \quad \text{resp.} \quad m_i\ddot{x}_i = F + \sum_{k=1}^v \lambda_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{resp.} \quad \varphi_k(x_i, t) = 0$$

(pro i hmotných bodů a v vazeb, vazby jsou vyjádřeny druhými rovnicemi)

V pohybové rovnici $\vec{F} = m\vec{a}$ můžeme sílu $\vec{F}_s = -m\vec{a}$ klasifikovat jako **setrvačnou sílu**, která přísluší danému zrychlenému pohybu. Můžeme tak formulovat **d'Alembertův princip**: *Síly mechanické soustavy jsou v rovnováze, přičteme-li k silám vtištěným (včetně reaktivních) síly setrvačné.* Matematicky můžeme tento princip formulovat pro soustavu N hmotných bodů pomocí virtuálních posunutí δx_i (virtuální posunutí jsou nekonečně malá posunutí, která jsou v každém okamžiku v souladu s vazbami), soustava se tedy vyvíjí tak, že:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i = 0.$$

Speciálními případy d'Alembertova principu jsou:

- Newtonovy pohybové zákony $m_i\ddot{x}_i - F_i = 0$, nejsou vazby
 - princip virtuálních prací $\sum_i F_i\delta x_i = 0$, není pohyb, podmínka rovnováhy, statika
- V případě konzervativních sil přejde podmínka rovnováhy na tvar

$$\sum_i -\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\delta x_i = 0 \rightarrow \delta U = 0.$$

Systém je tedy v rovnováze, pokud má potenciál extrém.

D'Alembertův princip je ekvivalentní Lagrangeovým rovnicím I. druhu.

Pro efektivnější popis systému je vhodné zavést **zobecněné souřadnice** q_i (libovolné parametry jednoznačně určující konfiguraci systému) v **konfiguračním prostoru** (= formální prostor všech zobecněných souřadnic daného problému).⁹ V popisu systému chápeme zobecněné souřadnice q_i a zobecněné rychlosti \dot{q}_i za nezávislé. Vyjdeme-li z d'Alembertova principu, dostaneme **Lagrangeovy rovnice II. druhu**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j,$$

kde x_i jsou kartézské souřadnice a Q_j je tzv. **zobecněná síla**, jedná se o n pohybových rovnic, n ODR 2. řádu. Vše se odvíjí od skalární funkce – kinetické energie.

Pokud se jedná o konzervativní sílu, můžeme pro popis systému zavést lagrangián

$$L = E_k - U.$$

⁸ síly je možno rozdělit na vtištěné – „pocitivé“ (např. $\vec{F} = m\vec{g}$) – a vazbové, které jsou dány reakcí nejrůznějších „podložek“ „závěsů“ . . .

⁹ nepopisuje fyzikální stav systému, neobsahuje informace o rychlostech! Bodem konfiguračního prostoru prochází nekonečně mnoho trajektorií.

Lagrangeovy rovnice se pak dají napsat ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Jejich řešení je dáno jednoznačně $2n$ počátečními podmínkami (viz Newtonův princip determinovanosti = pohyb soustavy je jednoznačně určen počátečními souřadnicemi a rychlostmi.)

Lagrangeův formalismus dává nápovědu pro hledání přesných řešení pohybových rovnic pomocí tzv. **integrálů pohybu** = fce tvaru $f(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)$, která nabývá stále stejné hodnoty v každém okamžiku t a pro každé $q_j(t)$ řeší pohybové rovnice (tj. pro libovolné počáteční podmínky). Protože pokud $df/dt = 0$ pokud L nezávisí na některé zobecněné souřadnici, q_i je tzv. cyklická, pak je výraz $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ integrálem pohybu \rightarrow pokud L nezávisí explicitně na čase, pak výraz

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - L$$

(tzv. „zobecněná energie/Jakobiho integrál“) je integrálem pohybu. Tj. pokud jsou síly konzervativní a vazby holonomní (nezávislé na rychlosti) a skleronomní (nezávislé na čase), pak $h = E_k + U = E_t = konst.$ Podstata zákonů zachování, a to za jakých podmínek jsou splněny teoreticky objasňuje **teorém E. Noetherové**: *S každou symetrií v přírodě souvisí nějaká zachovávaná fyzikální veličina. Tato veličina je danou symetrií definována a zachovává se jen dokud výchozí symetrie platí.*

Vidíme tedy, že základní zákony zachování v mechanice jsou přímým důsledkem vlastností prostoru a času kolem nás. Je-li prostor homogenní (stejný ve všech svých bodech), zachovává se hybnost; je-li prostor isotropní (stejný ve všech směrech), zachovává se moment hybnosti; je-li prostor neměnný v čase, zachovává se energie.

§ Hamiltonovy kanonické rovnice

Další možný způsob popisu systému je pomocí Hamiltonova formalismu. Konfigurační prostor se nahrazuje **fázovým prostorem**, což je opět formální prostor (dim $2n$), který je tvořen zobecněnými souřadnicemi a kanonicky sdruženými **zobecněnými hybnostmi**¹⁰

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Bod ve fázovém prostoru plně určuje stav systému, tj. časový vývoj (bodem fázového prostoru prochází v daném okamžiku právě jedna trajektorie). Přechod od proměnných q, \dot{q}, t k proměnným q, p, t se nazývá **Legendrova duální transformace**. Systém je pak popsán **hamiltoniánem** – energií přepsanou do proměnných t, q_j, p_j – funkcí ve fázovém prostoru

$$H(q_j, p_j, t) \equiv \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q_i, p_i, t) - L.$$

Pohybové rovnice pak budou vyjádřeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j.$$

¹⁰ např. zobecněná hybnost k úhlové proměnné se obvykle nazývá moment hybnosti ...

Získáváme tak $2n$ ODR 1. řádu. Tyto rovnice je možné napsat pomocí tzv. **Poissonových závorek** (obdoba komutátorů v kvantové mechanice)

$$\{f, g\} \equiv \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right),$$

s vlastnostmi

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\}, \\ \{f + g, h\} &= \{f, h\} + \{g, h\}, \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g, \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0. \end{aligned}$$

Tvar HKR tedy je

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}.$$

Pozn. – volná částice: $H = p^2/2m$; harmonický oscilátor: $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$. Hamiltonián se používá například v kvantové mechanice a statistické fyzice (partiční funkce). (Neboť Poissonovy závorky z matematického hlediska představují Lieovu algebru. Vlastnosti Lieovy algebry jsou určeny nezávisle na objektech, které ji tvoří. Proto je možné tuto strukturu snadno přenést do kvantové mechaniky.)

§ Hamiltonův variační princip

Hamiltonův princip patří mezi tzv. integrální principy¹¹, nezávisí na volbě souřadnic a představuje univerzální formu vyjádření zákonů pohybu ve fyzice.

Pohyb soustavy v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ se děje tak, že

$$\delta S = 0,$$

kde funkcionál S je tzv. **akce/akční funkcionál**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt.$$

Rozměr je Js. **Zobecněná potenciální energie** a **zobecněná kinetická energie** v lagrangiánu jsou obecně závislé na zobecněných souřadnicích, rychlostech a čase.

Odůvodnění HVP: Lagrangeovy rovnice II. druhu odpovídají Eulerovým rovnicím variačního počtu

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0,$$

¹¹ *Principy mechaniky* jsou obecné principy z nichž lze odvodit pohybové rovnice soustavy nebo podmínky její rovnováhy. Každý z těchto principů stanovuje jistou obecnou dynamickou podmínku podle níž lze určit, jakým způsobem se realizuje skutečný pohyb/stav tělesa/mech. soustavy. \exists principy *diferenciální*, vztahují se na určitý okamžik. Na základě těchto principů se porovnává okamž. stav mech. soustavy v jediném libovolně zvoleném okamžiku s blízkým stavem, který vznikne jejím virtuálním posunutím, přičemž oba stavy jsou uvažovány v témže okamžiku. Např. D'Alembert. *Integrální* principy mechaniky stanovují, že mechanická soustava se za daných sil pohybuje tak, že integrál určité skalární funkce určený pro libovolně zvolený časový interval při dané poloze všech bodů soustavy v okamžicích $t_{poč}$ a t_{kon} nabývá stacionární, obvykle minimální, hodnoty. Jde při tom o porovnání pohybu po skutečné dráze a po ostatních možných/virtuálních drahách mezi počáteční a koncovou polohou ve zvoleném časovém intervalu, které vzniknou variováním skutečné dráhy. Skutečný pohyb je ten, pro který je variace integrálu příslušné funkce nulová.

jež jsou nutnou podm. stacionarity/extremály funkcionálu $I = \int_a^b F(x, y_j(x), y'_j(x))dx$. δS je izochronní variace = nevariuje se čas.

Slovně bychom mohli HVP formulovat takto: *Pohyb mechanické soustavy v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ probíhá tak, že pro skutečnou dráhu nabývá akce extrémní hodnoty. Ze všech možných drah se realizuje ta, která je nějakým způsobem nejvýhodnější; hlediskem výhodnosti je právě to, pro kterou dráhu je akce extrémní/minimální.*

V akčním funkcionálu jsou obsaženy veškeré požadované informace o uvažovaném problému, tj. pohybové rovnice, počáteční a okrajové podmínky, apod.

Akční funkcionál můžeme také získat z **Hamiltonovy-Jacobiho rovnice**

$$H(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Tj. nalezneme hamiltonián, provedením formální substituce $p_j = \partial S / \partial q_j$ sestavíme HJ rovnici, tuto rovnici vyřešíme.

K tomu \exists několik triků: pokud $H \neq H(t) \rightarrow S(q_j, t) = S_0(q_j) - E.t$, kde E je konstanta (zobecněná energie). Nebo pokud q_c je cyklická, pak $S(q_j, t) = \alpha_c q_c + S_c(q_1, \dots, q_{c-1}, q_{c+1}, \dots, q_n, t) \dots$ Nebo separací proměnných $S(q_j, t) = S_1(q_1, t) + \dots + S_n(q_n, t)$.

Řešení je tvaru $S(q_j, \alpha_j, t)$ a obsahuje $n+1$ netriviálních intergračních konstant α_j . Derivací akčního funkcionálu podle těchto netriviálních integračních konstant potom dostaneme n rovnic $\partial S / \partial \alpha_i = \beta_i$ (β_i jsou libovolné konstanty), tj. implicitní rovnice pro hledané řešení, pro trajektorie $q_j(\alpha_i, \beta_i, t)$.

HJ teorie/rovnice vychází z tzv. **kanonických transformací** = transformace souřadnic ($Q_j = Q_j(q_i, p_i, t)$, $P_j = P_j(q_i, p_i, t)$; Q, P jsou nové a q, p staré souřadnice), které zachovávají tvar HKR. Objem fázového prostoru je invariantní vůči kanon. transf. Pro kanonické transformace existují čtyři (tj. pro různé vzájemné kombinace q, p, Q, P [kombinují v sobě vždy n starých a n nových proměnných]) generující funkce (jež jsou navzájem spojeny Legendreovou duální transformací), HJ teorie je aplikací první z nich, tj. transformace s generující funkcí $F_1(q_j, Q_j, t)$, podmínky kanoničnosti $\partial F_1 / \partial q_i = p_i$ a $\partial F_1 / \partial Q_i = -P_i$, nový ham. bude mít tvar $H'(Q_j, P_j, t) = H(q_j, p_j, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$. Pak platí HKR i v nových souřadnicích a impulsech. Trik spočívá v použití takové generující funkce $F_1 = S(q_j, Q_j, t)$, aby $H' = 0$. Pak $Q_j = \alpha_j = konst.$, $P_j = -\beta_j = konst.$. Odtud $\partial S(q_j, \alpha_j, t) / \partial \alpha_i = \beta_i$ a inverzí dostáváme $q_j(\alpha_i, \beta_i, t)$ a též HJR $H(q_j, p_j, t) + \partial S / \partial t = 0$.^{12,13}

§ Souvislost kvantové a klasické mechaniky

Schrödingerova rovnice (viz dále):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Operátor hamiltoniánu:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$$

¹²Analogií HJ teorie je Fermatův princip v optice, který požaduje, aby se světlo šířilo tak, že se z místa A do místa B dostane za nejkratší možnou dobu.

¹³Poissonovy závorky jsou invariantní vůči kanonickým transformacím, $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi$$

Řešení hledáme ve tvaru

$$\psi(x, y, z, t) = e^{iS(x, y, z, t)/\hbar}.$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta S$$

Zavedeme $\vec{p} = \text{grad } S$, tj. $p_x = \partial S / \partial x$, $p_y = \partial S / \partial y$, $p_z = \partial S / \partial z$, a tedy:

$$H(\vec{r}, \vec{p} = \text{grad } S, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta S.$$

Pokud tedy máme makroskopické těleso (tj. $m \gg \hbar$), bude na pravé straně 0. V takovéto limitě dostáváme klasickou HJ rovnici!!!

1.2 Kontinuum

Pro popis kapalin, plynů a pro vyšetřování mechanických dějů, při kterých se mění vzájemná vzdálenost bodů pevné látky, je vhodné zavést představu kontinua (spojitého prostředí). Kontinuum lze popisovat **Lagrangeovým popisem**, kdy sledujeme, jak se původní oblast po určité době deformuje, tj. sledujeme pohyb částic, které se v čase $t = 0$ nacházejí v místech o souřadnicích x_i . Souřadnice částic v čase t označíme $y_j = y_j(x_i, t)$. Souřadnice x_i tak vymezují/pojmenovávají částice, jejichž pohyb sledujeme. Křivce popsané předcházející rovnicí říkáme trajektorie. Nebo je možno použít **Eulerův popis**, kdy měříme okamžitou rychlost každé částice, která „kolem nás“ proudí, tj. částice, která se v okamžiku t nachází v místě y_j má rychlost $v_i = v_i(y_j, t)$. Takovéto rovnice udávají rozložení rychlostí v celé vyšetřované oblasti. Samozřejmě platí předpoklad, že rychlosti částic v sousedních místech nejsou příliš rozdílné, tj. fce $v_i(y_j, t)$ jsou jednoznačné a spojitě i se svými parciálními derivacemi dle souřadnic. Pak pro každý okamžik lze kontinuem proložit křivky, jejichž tečny v každém bodě mají směr rychlosti $v_i =$ proudnice.¹⁴

Pozn. – Rychlosti částice pro L. popis je přirozeně

$$v_j = \frac{dy_j}{dt} = \frac{dy_j(x_i, t)}{dt} = v_j(x_i, t).$$

Takto určenou rychlost měří pozorovatelé, kteří sledují „individuální částici“, rychlost danou E. popisem měří pozorovatelé stojící v pevném místě prostoru a měřící rychlost té „částice“, která je právě mjí. Při E. popisu tak představuje rychlost vektorové pole v prostoru.

Zrychlení a_i „individuální částice“ v E. popisu určíme tak, že veličiny y_j bereme jako fce času určené rovnicemi pro L. popis, tj. (viz též část Kosmická elektrodynamika, pojem konvektivní derivace!!!)

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial t} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad \text{resp.} \quad \vec{a} = (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Pozn. o „tekutém objemu“ – Necht množina „částic“ v $t = 0$ vyplňuje oblast Ω^0 . Objem této oblasti bude $\Delta V^0 = \int_{\Omega^0} d^3x^0$. V čase t pak tyto „částice“ zaplní oblast $\Omega(t)$, na kterou transformace $y_j = y_j(x_i, t)$ zobrazí oblast Ω^0 . Její objem bude

$$\Delta V(t) = \int_{\Omega(t)} d^3x = \int_{\Omega^0} |J| d^3x^0,$$

kde $|J|$ je Jakobián dané transformace. Pak

$$\frac{d}{dt} \Delta V(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega^0} |J| d^3x^0 \right) = \int_{\Omega^0} \frac{d|J|}{dt} d^3x^0. \quad (*)$$

Prvky transformační matice dostaneme při rozvití $y_j = y_j(x_i, t)$ do Taylorovy řady:

$$x_i = x_i^0 + v_i(x_k^0)t + \frac{1}{2}a_i(x_k^0)t^2 + \dots \rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial x_k^0} = \delta_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k^0}t + \dots,$$

takže determinant transformační matice/Jakobián bude

$$J = 1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0}t + \dots$$

Dosazením do (*), použitím věty o střední hodnotě a pro $t \rightarrow 0$ dostaneme:

$$\frac{d}{dt} \Delta V(t) = \int_{\Omega^0} \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0} d^3x^0 = \text{div } \vec{v} \int_{\Omega^0} d^3x^0 = \text{div } \vec{v} \Delta V^0.$$

V lim $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dt} \Delta V = \text{div } \vec{v} \Delta V. \quad (**)$$

¹⁴ Obecně jsou trajektorie a proudnice různé křivky, pouze pokud rychlosti nezávisí na čase, tak oba druhy křivek splývají = stacionární/ustálený pohyb kontinua.

§ Rovnice kontinuity

Proudění tekutiny určeno PDR, které jsou důsledkem ZZ hmotnosti a 1. věty impulsové. Tj. hmotnost tekutého objemu $M = \rho\Delta V$ musí být zachována, $dM/dt = 0$. S využitím rovnice (***) dostáváme $0 = dM/dt = d(\rho\Delta V)/dt = (d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \vec{v})\Delta V$. Toto musí platit pro libovolně malý objem, tj. v každém bodě platí

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Toto je **rovnice kontinuity** vyjadřující ZZ hmoty!

§ Pohybová rovnice ideální tekutiny

Hybnost tekutého objemu je $\vec{P} = M\vec{v}$. Odtud

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dM}{dt} \vec{v} + M \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \Delta V.$$

Změna hybnosti je dle 1. impulsové věty rovna výslednici sil na tekutý objem. Její i-tou složku lze napsat jako $(\partial\tau_{ij}/\partial x_j + F_i)\Delta V$, kde 1. člen odpovídá silám plošným na hranici objemu, 2. představuje hustotu objemových sil. Tedy

$$\frac{dP_i}{dt} = \left(\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) \Delta V = \rho \frac{dv_i}{dt} \Delta V.$$

Odtud lze dostat pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i.$$

Aby rovnice kontinuity a pohybová rce určovaly ρ a \vec{v} jako neznámé, musíme dále znát vztah τ_{ij} a v_i . U tzv. **Newtonovské tekutiny** (dynamická viskozita η je konstantní¹⁵) se předpokládá lineární vztah

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Pokud $\lambda = 0 = \eta$ mluvíme o *dokonalé tekutině*, tj. chybí smyková napětí, plošné síly se uplatňují jen jako izotropní tlak. Pohybová rovnice má tvar

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{G}$$

(zavedli jsme hustotu síly, tj. $G_i = F_i/\rho$). Toto je **Eulerova rovnice = pohybová rovnice ideální tekutiny**. Tu lze identicky přepsat na tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{G}.$$

¹⁵ Viskozita je vlastnost reálné tekutiny, která způsobuje vznik nenulového smykového napětí mezi dvěma sousedními vrstvami tekutiny pohybujícími se různou rychlostí; charakterizujeme dynamickou viskozitou $\eta(\partial v_1/\partial x_2) = \eta 2D_{12} = \sigma_{12}$ nebo kinematickou viskozitou $\nu = \eta/\rho$. σ_{12} je smykové napětí působící mezi vrstvami proudící tekutiny, D_{12} jsou složky tenzoru rychlosti deformace. Předpokládá se laminární proudění, tj. jednotlivé vrstvy proudí vedle sebe, aniž se promíchávají.

Dále předpokládáme barotropní tekutinu, tj. $\rho = \rho(p)$. Navíc za předpokladu, že proudění dokonalé tekutiny je nevířivé ($\text{rot } \vec{v} = 0$) existuje skalární fce Φ , tzv. potenciál rychlosti, taková, že $\vec{v} = \text{grad } \Phi$. Pokud i objemová síla má potenciál, $\vec{G} = -\text{grad } U$, a pokud zavedeme tlakovou fci P vztahem $\text{grad } P = \rho^{-1} \text{grad } p$, dostaneme Bernoulliho rci pro nestacionární nevířivé proudění dokonalé tekutiny

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + U \right) = 0 \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + U \right) = K(t).$$

Tj. určili jsme první integrál pohybové rovnice („zákon zachování mechanické energie“).

U reálných tekutin nemůžeme předpokládat, že napětí má pouze charakter tlaku. Tekutina je *vazká*, λ a η jsou nenulové. Pokud je ale tekutina nestlačitelná, tak členy s λ vymizí (neboť $\rho = \text{konst.}$ a dle rce kontinuity $\text{div } \vec{v} = \partial v_k / \partial x_k = 0$). Ze stejného důvodu bude nulový i člen $\partial^2 v_j / \partial x_j \partial x_i$, a tedy

$$\begin{aligned} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{v_i}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) + F_i \right), \\ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{v_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\eta}{\rho}}_{\nu} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + F_i, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{G}. \end{aligned}$$

Toto je **Navièrrova-Stokesova rovnice** pro nestlačitelnou vazkou tekutinu. Pro vazkou tekutinu platí okrajová podmínka $\vec{v} = 0$ na hranici – proudění je kromě triviálních případů vířivé a nelze tedy zavést rychlostní pole.

Pozn. – Proudění při kterém nedochází k míšení tekutiny mezi jednotlivými vrstvami jsou laminární proudění. Pokud rychlost \vec{v} kolísá s časem a vznikají víry (chaotické fluktuace rychlosti, hustoty a tlaku), hovoříme o turbulentním proudění. Zda nastane (v trubici) laminární nebo turbulentní proudění lze stanovit dle Reynoldsova čísla $Re = av/\nu$, kde a je poloměr trubice, v je rychlost proudění. Pokud toto je menší než kritická hodnota (nejčastěji mezi 1000 až 2000), nastává laminární, jinak turbulentní proudění. N.-V. rce lze přepsat do bezrozměrného tvaru, zde se právě vyskytuje Re a také $F = \text{Fraudeovo číslo}$. Pokud měníme parametry tekutiny (viskozita atd.) pak stejným hodnotám Re a F odpovídají řešení geometricky podobná, důležité např. pro testování na zmenšených modelech atd.

§ Vlny v kontiniu

Tak jako periodickou změnu v čase nazýváme kmity, periodickou změnu v prostoru nazýváme vlny. Tekutina v rovnovážném stavu má hustotu $\rho_0 = \text{konst.}$ Pokud existují malé poruchy $\rho = \rho_0 + \rho_1$, pak tyto vyvolávají změny pole rychlosti v tom smyslu, že $v_j (\partial v_i / \partial x_j) \ll \frac{\partial v_i}{\partial t}$. Dále předpokládáme, že objemové síly \vec{G} vymizí. Eulerova rce bude mít tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \doteq -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p, \quad (E)$$

rce kontinuity nabude tvaru

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} \doteq 0. \quad (K)$$

Tlak rozvineme do Taylora kolem ρ_0 , tj.

$$p(\rho) = p(\rho_0 + \rho_1) = p(\rho_0) + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} \rho_1 + \dots$$

Rozvoj dosadíme do (E) a aplikujeme div, (K) parciálně zderivujeme dle času a dosadíme z (E) do (K). Dostaneme

$$\Delta\rho_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = 0 \quad c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \Big|_{\rho_0},$$

tj. porucha hustoty ρ_1 vyhovuje **vlňové rovnici**. V kontinuu se tedy může šířit rozruch ve formě vlnění (existují 2 příčné a 1 podélná vlna). V příčném vlnění kmitají jednotlivé body kolmo na směr, ve kterém vlnění postupuje (příkladem jsou kruhy na vodní hladině), v podélném vlnění kmitají ve směru, ve kterém vlnění postupuje (příkladem je zvuk). V kapalinách a plynech se šíří pouze podélné vlnění. Kromě výše popsaného postupného vlnění existuje i vlnění stojaté, kdy se prostorem nešíří energie.

§ Síly objemové/plošné, podm. rovnováhy. Tenzor napětí a Hookův zákon

Síly objemové jsou rozloženy s určitou objemovou hustotou, např. gravitace. **Síly plošné** jsou charakterizovány účinkem na plošku určité orientace. Je-li orientace plošky určena jednotkovým vektorem vnější normály \vec{v} , pak na plošku působí síla $T^{(n)}$ o složkách $T_i^{(n)} = \tau_{ij}n_j$, kde τ_{ij} jsou složky tenzoru napětí.

Napětí je veličina charakterizující stav kontinua vyvolaný silami, které na něj působí v různých bodech. Vektor napětí \vec{T} působící na rovinnou plochu S s jednotkovým vektorem \vec{n} ve směru orientované normály, je zaveden jako podíl síly \vec{F} působící na tuto plochu a obsahu této plochy. Podle orientace \vec{n} a \vec{T} rozlišujeme napětí na čistý tah, čistý smyk, čistý tlak, obecné tahové napětí a obecné tlakové napětí (první složka vektoru je čistě tahová/tlaková, další dvě složky jsou smykové a popisují smyk rovnoběžný s osou y a z). Úplný popis napětí v daném bodě kontinua dává vektor napětí \vec{T}_n působící na libovolně orientovanou plochu procházející daným bodem. Stačí znát napětí na plochách kolmých k osám x_1, x_2, x_3 kartézské s.s. Složky τ_{ij} vektorů napětí $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ působících na plochách kolmých k odpovídajícím osám x_1, x_2, x_3 , pro něž platí

$$\vec{T}_1 = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$$

$$\vec{T}_2 = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})$$

$$\vec{T}_3 = (\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})$$

tvoří tenzor napětí. Tj. stav napětí v každém bodě kontinua je popsán symetrickým tenzorem napětí τ_{ij} . Složky tenzoru odpovídají složkám vektorů napětíových sil působících na plochách proložených daným bodem kolmo ke směru kartézských os souřadných. Vektory \vec{T}_i nejsou navzájem zcela nezávislé, jejich složky musí splňovat $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, tj. tenzor je symetrický.

Deformace je veličina charakterizující změnu vzdálenosti částic kontinua. Pokud se částice posune z polohy X do polohy Y , dostaneme vektor posunutí $u_i = y_i - x_i$, kde $i = 1, 2, 3$. Deformaci pak určujeme ze změny vektoru posunutí v sousedních bodech. Bod o x_i se posune do bodu $y_i = x_i + u_i$, jeho soused o $x_i + dx_i$ do bodu $y_i + dy_i$, kde $d\vec{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, $d\vec{y} = (dy_1, dy_2, dy_3)$, $d\vec{z} = (dz_1, dz_2, dz_3)$. Za míru deformace pak považujeme rozdíl čtverců délek vzájemně si odpovídajících vektorů $d\vec{x}$ a $d\vec{y}$, tj. veličinu

$$|d\vec{y}|^2 - |d\vec{x}|^2 = dy_i dy_i - dx_i dx_i.$$

Deformaci v okolí bodu X pak zcela určují bezrozměrné veličiny

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \quad k, l = 1, 2, 3$$

neboť umožňují určit ji pro libovolně zvolený směr $d\vec{x}$. Tyto koeficienty tvoří složky symetrického tenzoru 2. řádu, **tenzoru velkých deformací**. Často je člen $(\partial u_j / \partial x_k)(\partial u_j / \partial x_l)$ malý, pak stačí k popisu **tenzor malých deformací**

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

U tenzoru velkých deformací je nutné rozlišovat, jestli je vyjádřen vůči deformovanému nebo nedeformovanému stavu; u tenzoru malých deformací můžeme v dobrém přiblížení předpokládat, že oba tyto tenzory (tj. $\varepsilon_{ij}(x_i)$ a $\varepsilon_{ij}(y_j)$) jsou stejné.

Vztahem mezi napětím a deformací (a rychlostí deformace) v různých látkách se zabývá reologie. Látka, jejíž chování lze v dobrém přiblížení vystihnout přímou úměrou mezi napětím a deformací se

označuje jako hookovská látka – matematicky se vystihne **Hookovým zákonem**. Obecný H.z. lze vyjádřit lineárními vztahy

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

kde C_{ijkl} je tenzor 4. řádu, jeho složky jsou elastické koeficienty (celkem 81), vystihuje materiálové chování obecně anizotropní látky. K popisu elastické hookovské izotropní látky stačí 2 koeficienty, např. modul pružnosti v tahu a ve smyku. Elementární H.z. pro tahovou deformaci vzorku tedy je $\sigma = Ee$, kde e je relativní prodloužení $(l - l_0)/l_0$, σ je normálové napětí F/S a E je modul pružnosti v tahu.

1.3 Kvantová mechanika

§ Experimentální základy kvantové hypotézy

V běžné praxi od sebe můžeme jednoduše rozeznat částice (chovají se podle zákonů částicové mechaniky, mají hmotnost) a vlny (za vhodných okolností můžeme pozorovat interferenci nebo difrakci). V některých experimentech však částice vykazují vlnové vlastnosti a naopak.

Pokud světlo s dostatečně vysokým kmitočtem dopadne na povrch kovu, jsou z něj emitovány elektrony – **fotoelektrický jev**. Pozoruhodné při tomto jevu je, že energetické rozdělení emitovaných elektronů nezávisí na intenzitě dopadajícího světla. Silný paprsek téže frekvence produkuje více elektronů, ale střední energie elektronu je tatáž. Na druhé straně, energie emitovaných elektronů závisí na frekvenci použitého světla. Při frekvencích nižších než jistá kritická frekvence se žádné elektrony neemitují.

Nad touto prahovou frekvencí se emitují elektrony s energií od nuly do jisté maximální energie, která s frekvencí roste lineárně (ν_0 je prahová frekvence):

$$E_{k,max} = h(\nu - \nu_0). \quad (*)$$

Mezi další efekty, kde se projevují částicové vlastnosti vln, patří **Comptonův jev**.¹⁶ Studujeme-li rozptyl monoenergetického (rentgenového) elektromagnetického vlnění na fóliích z různých látek, zjišťujeme, že v rozptýleném svazku se objevují dva výrazné peaky – kromě původní vlnové délky záření λ to bude peak s větší vlnovou délkou $\lambda' > \lambda$. Dle klasické teorie by druhý peak neměl být – „dopadne-li vlna, dojde k rozkmitání elektronu, ten pak jako dipólek vyzařuje na stejné frekvenci“. Posunutí vlnových délek nezávisí na původní vlnové délce ani na druhu látky. Na druhu látky závisí pouze podíl intenzit svazku rozptýleného s původní a větší vlnovou délkou. S rostoucím protonovým číslem Z hodnota tohoto podílu klesá.

Kromě částicových vlastností světla můžeme pozorovat i **interferenci a difrakci částic**. Realizujeme-li např. typický interferenční experiment s dvojštěrbinou za použití svazku elektronů, dostaneme na stínítku interferenční obrazec. A to i v případě, že elektrony do dvojštěrbiny pouštíme po jednom, tedy elektron interferuje sám se sebou. Tento efekt je mnohem lépe pochopitelný, pokud si elektron představíme jako vlnu.

Základ kvantové teorie položil Max Planck, který se snažil vysvětlit vlastnosti záření emitovaného horkými tělesy, AČT. Správnou formuli našel srovnáváním různých funkcí s experimentálními výsledky, později pak toto odvodil teoreticky, ale pouze za předpokladu, že záření je emitováno nespojitě po malých dávkách energie, **kvantech**, později nazvaných **fotony**. Každému fotonu přiřazujeme energii

$$E = \hbar\omega = h\nu,$$

kde platí $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js ... redukovaná Planckova konstanta.

Planckovu myšlenku zobecnil Einstein a podařilo se mu tak vysvětlit fotoelektrický jev – elmag. záření se při fotoefektu chová jako částice; na povrchu kovu dochází ke srážce fotonu s elektronem, aby ho foton vyrazil, musí mít větší energii než je vazbová energie elektronu v kovu ... , tj. $\hbar\omega = W_{výstupní} + m_e v^2/2$, což je ekvivalentní rovnici (*).

¹⁶ = vzájemné působení mezi elektronem a rentgenovým nebo gama-fotonem, při němž foton předá část své energie elektronu; foton má po setkání nižší frekvenci a elektron vyšší energii ...

Foton je částice s nulovou klidovou hmotností, ve vakuu se pohybuje vždy rychlostí c . Je mu přiřazena hybnost

$$p = mc = \frac{E}{c^2}c = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Comptonův jev můžeme vysvětlit za předpokladu, že při interakci světla s hmotou předávají fotony kromě energie také hybnost (opět po diskretních kvantech). Změnu vlnové délky tedy vysvětlíme, pokud relativisticky vyšetříme srážku fotonu např. s elektronem, přičemž dopadající foton předá část své energie elektronu (θ je úhel rozptylu):

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta), \quad \text{kde } \lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{m_e c}$$

Konstanta λ_C se nazývá **Comptonova vlnová délka** (elektronu = 0,0024 nm). Foton tedy dopadne na volný elektron v klidu, předá mu E i $p \rightarrow$ směr fotonu se změní a elektron se začne pohybovat (získal jistou kinetickou energii), energie se musí zachovávat, tudíž energie rozptýleného fotonu bude menší než energie dopadajícího fotonu, rozptýlené fotony budou mít menší ν a tedy větší λ .

Einsteinovo vysvětlení fotoefektu říká, že vlny se za určitých okolností projevují jako částice. Další důležitou myšlenku prosazoval Louis **de Broglie** – můžeme-li vlně přisoudit částicové vlastnosti, můžeme naopak částicím přisoudit vlastnosti vlnové, jako je například vlnová délka. Vlnovou délku fotonu můžeme vyjádřit pomocí jeho hybnosti, hybnost částice je $p = mv$. Zavedeme tedy vlnovou délku částice jako

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}.$$

Hmotnost m je dána relativisticky. Zavedeme-li vlnovou délku připsanou částici, můžeme dále zavést i vlnový vektor $k = 2\pi/\lambda$ (popisuje změnu fáze vlnění v prostoru), kruhovou frekvenci $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ (popisuje změnu fáze vlnění v čase), apod.

De Broglieho myšlenku následně Schrödinger zobecnil na pohyb částice v silovém poli, a našel rovnici, kterou vlna popisující částici splňuje – **Schrödingerovu rovnici**.

Ve světelné vlně se v prostoru a v čase mění periodicky elektromagnetické pole, ve zvukové vlně tlak; proměnná veličina charakterizující de Broglieho vlny je **vlnová funkce**, ψ . Fyzikální význam má pouze kvadrát její absolutní hodnoty – hustota pravděpodobnosti experimentálního nalezení částice popsané vlnovou funkcí v daném čase na daném místě.

Pro vysvětlení částicových vlastností vln a vlnových vlastností částic se tedy zavádí představa korpuskulárně vlnového dualizmu: každá entita je zároveň částicí a zároveň vlnou, to, jak se projeví, záleží na našem měření. Zajímáme-li se o vlnové aspekty daného jevu, můžeme je demonstrovat, obdobně můžeme demonstrovat i částicové vlastnosti téhož jevu, ale nemůžeme oba aspekty demonstrovat najednou. Vlnová a kvantová teorie světla se vzájemně doplňují.

Další záhadou jež vyžaduje kvantové vysvětlení je existence atomu.

Myšlenka, že hmota má v mikroskopickém měřítku strukturu, pochází už z antického období (Demokritos). Konzistentní teorie byla vyvinuta ve 20. století.

Po objevu elektronu vyslovil Thompson domněnku, že atom je homogenní kladně nabitá koule, v níž jsou ponořeny elektrony. Tato teorie byla vyvrácena Rutherfordovým pokusem (ostřelováním tenké zlaté fólie částicemi alfa). Zjistilo se, že některé částice se rozptylují o velký úhel. Naměřený účinný průřez odpovídal rozptylu lehkých částic alfa na těžké, a tedy v podstatě nehybné bodové částici – musí tedy existovat těžká kladně nabitá část atomu = jádro. Klasickou fyzikou tento výsledek nešel vysvětlit; kdyby se elektron pohyboval po zakřivené dráze kolem jádra, musel by vyzařovat, ztrácet energii, přibližovat se

k jádru a spadnout do něj. Tuto nesrovnalost dovedl částečně vysvětlit až Bohrov model atomu odvozený na základě pozorování atomových spekter. Jeho nevýhodou bylo, že dovedl vysvětlit pouze nejjednodušší atom vodíku. Bohr vycházel z předpokladu, že atom má diskrétní stacionární stavy o energiích E_n , tj. elektrony obíhají jen po stacionárních drahách, na těchto stacionárních drahách nezáří, naopak při přechodu mezi nimi vysílají záření $E_{vyšší} - E_{nižší} = h\nu$. Bohrov postup samozřejmě není kvantově mechanický (je to spíše konstatování experimentálních faktů) vede však ke stejnému výsledku. Jeho hlavním přínosem bylo postulování kvantování fyzikálních veličin. Současná kvantová teorie je schopná vysvětlit i složitější atomy.

§ Relace neurčitosti

Skutečnost, že pohybující se těleso je nutno považovat za klubko složené z de Broglieho vln, napovídá, že existuje jistá hranice přesnosti, se kterou lze měřit jeho částicové vlastnosti. Můžeme přesněji určit buď jeho polohu, nebo jeho vlnovou délku (hybnost). Mezi minimální neurčitostmi při měření polohy a hybnosti platí vztah

$$\Delta x_k \Delta p_k \geq \frac{\hbar}{2}$$

zvaný **relace neurčitosti**. Čím přesněji určíme polohu, tím méně přesně určíme jeho hybnost a opačně. Tato neurčitost je důsledkem vlnové povahy pohybujících se objektů, ne nedostatkem měřících přístrojů.¹⁷ Ostatní přístrojové a statistické neurčitosti tento součin jen zvětšují. V souvislosti kvantové mechaniky se relace neurčitosti dají odvodit jako vztah mezi dvěma navzájem nekomutujícími¹⁸ veličinami (platí pro střední kvadratické odchylky). Podobný vztah jako mezi neurčitostmi polohy a hybnosti platí i mezi neurčitostmi energie a času, tj. jde o speciální případ obecně platných relací neurčitosti mezi dvěma veličinami, které nekomutují $\Delta F^2 \Delta G^2 \geq \langle \hat{M} \rangle / 4$, tj. $[\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{M} \neq 0$, viz dále.¹⁹

§ Formalismus kvantové teorie

Formální stavbu kvantové mechaniky je možno shrnout do několika postulátů.

• **Vlnová funkce:** *Veškeré informace o stavu částice jsou obsaženy ve vlnové funkci $\psi(\vec{r}, t)$.* Absolutní hodnota této fce v kvadrátu udává hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v místě \vec{r} , tedy $w(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^* \psi$. Vlnová funkce je tedy obecně komplexní funkce závislá na čase a na souřadnicích, jejichž počet je roven počtu stupňů volnosti soustavy.

Vlnová funkce má být:

- jednoznačná
- konečná (většinou se požaduje kvadratická integrabilita)²⁰
- spojitá
- při konečných změnách potenciálu má mít spojitě derivace.

Pokud se vlnové funkce liší pouze o násobení (komplexní) konstantou, odpovídají témuž

¹⁷ Mějme vlnové klubko de Broglieho vln: šířka takového klubka je mírou neurčitosti polohy částice, kterou reprezentuje; avšak čím užší je vlnové klubko, tím větší je nepřesnost určení vlnové délky a dle $\lambda = h/p$ i hybnosti

¹⁸ komutátor: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, operátory komutují pokud je jejich komutátor roven 0

¹⁹ Odvození viz např. Kulhánek, Kvantová mechanika, str. 88

²⁰ Jsou-li $\psi_1(x)$ a $\psi_2(x)$ dvě vlnové funkce popisující dva stavy fyzikálního systému, pak také $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ představuje možný stav fyzikálního systému \rightarrow vln. fce tvoří lineární prostor kvadraticky integrabilních funkcí, \mathcal{L}^2

stavu. Vlnová funkce je pouze pomocný pojem; její fyzikální význam spočívá v tom, že její kvadrát je úměrný pravděpodobnosti nalezení částice v daném místě prostoru.

Aby byl kvadrát vlnové funkce roven pravděpodobnosti, je třeba vlnovou funkci normovat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 d^3r = 1.$$

Kvantová teorie je tedy teorie nelokální: pro popis experimentu je důležitá celá jeho geometrie, nedostáváme předpověď typu „částice dopadne na místo určené polohovým vektorem \vec{r} “, ale pouze pravděpodobnosti „částice dopadne na místo určené polohovým vektorem \vec{r} s pravděpodobností danou kvadrátem vlnové funkce“.

• **Měřitelné veličiny a hermitovské operátory** V kvantové teorii jsou veličiny charakterizovány lineárními operátory, speciálně měřitelným veličinám odpovídají lineární hermitovské operátory, tedy operátory \hat{F} splňující podmínku

$$\int \psi^* \hat{F} \varphi d\tau = \int \varphi \hat{F}^* \psi^* d\tau,$$

kde ψ a φ jsou funkce závislé na proměnných, na něž působí operátor \hat{F} . Každé měřitelné fyzikální veličině je tedy přiřazen lineární hermitovský operátor, jehož vlastní funkce tvoří úplný systém.

Jediné hodnoty dané fyzikální veličiny, které můžeme naměřit, jsou vlastní čísla operátoru této veličině přiřazeného (tzv. spektrum). Při měření přechází systém do stavu popsaného vlastní funkcí ψ příslušející změřené hodnotě. Podmínka na hermiticitu operátorů přiřazených měřitelným veličinám nám zaručuje reálné naměřené hodnoty (hermitovské operátory mají reálná vlastní čísla). Pokud je systém v okamžiku měření popsán vlnovou funkcí ψ , bude výsledkem velkého množství měření kvantově mechanická střední hodnota

$$\bar{F} = \langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} \psi \rangle \equiv \int \psi^* \hat{F} \psi d\tau.$$

($\langle | \rangle$) značí skalární součin v \mathcal{L}^2 : $(\psi, \varphi) = \int \psi^*(\vec{x}, t) \varphi(\vec{x}, t) d\vec{x}$)

Spektrum operátoru \hat{F} splývá s množinou hodnot, které lze v principu naměřit; je-li spektrum diskrétní \rightarrow hodnoty fyz. veličiny F budou kvantovány.

Vzhledem k tomu, že libovolnou funkci lze napsat jako lineární kombinaci vlastních funkcí ψ_i (vlastní funkce hermitovského operátoru tvoří úplný ortogonální systém)

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i$$

lze střední hodnotu měřeného operátoru napsat ve tvaru

$$\langle \hat{F} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 F_i.$$

F_i jsou tzv. vlastní čísla, koeficienty $|c_i|^2$ lze tedy interpretovat jako pravděpodobnosti naměření hodnoty F_i . Tedy je-li systém popsán vlnovou fci ψ , pak pravděpodobnost P_i , že při měření veličiny F nalezneme hodnotu F_i , je rovna $P_i = |\langle f_i | \psi \rangle|^2$, kde f_i je vlastní fce operátoru \hat{F} .

Měření fyzikální veličiny F s výsledkem F_i převádí systém do stavu ψ' , který je vlastním vektorem operátoru \hat{F} příslušejícím k vlastnímu číslu F_i (jenž se realizovalo při měření).

Dvěma základními operátory (v souřadnicové reprezentaci) jsou operátory polohy, tj.

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}\psi = x\psi$$

a (kanonicky sdružené) hybnosti

$$\hat{p}_x \rightarrow \hat{p}_x\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi \quad \text{resp.} \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla$$

Chceme-li vyjádřit jinou veličinu, najdeme pro ni klasický výraz vyjádřený pomocí r a p a v tomto výrazu nahradíme souřadnici a impuls příslušným operátorem, např. pro kinetickou energii $E_k = p^2/2m$ tak dostáváme:

$$\hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

Pokud chceme změřit dvě různé veličiny \hat{F} a \hat{G} popisující tentýž stav systému, je nutné, aby navzájem komutovaly, tj. aby bylo splněno

$$[\hat{F}, \hat{G}]\psi \equiv (\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})\psi = 0$$

pro každou funkci ψ (komutující operátory mají společný systém vlastních čísel). Například nelze změřit najednou souřadnici a impuls v témž směru (např. ve směru x), protože

$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}.$$

Odtud vychází relace neurčitosti.²¹

• **Schrödingerova rovnice:** Základní rovnice kvantové mechaniky je Schrödingerova rovnice (SR)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi,$$

kde \hat{H} je operátor hamiltoniánu systému. Pokud hamiltonián nezávisí explicitně na čase, je shodný s operátorem energie

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{U}(\vec{r}),$$

kde první člen zastupuje kinetickou energii a druhý člen energii potenciální.

Pokud hamiltonián nezávisí explicitně na čase t , pak můžeme hledat řešení SR ve tvaru $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\varphi(t)$, tj. lze separovat proměnné. Dosazením do SR (nazýváme ji též časová SR) zjistíme, že vlnová funkce ψ musí splňovat tzv. **nečasovou SR**

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

kde E je separační konstanta s významem energie, vlastní čísla operátoru \hat{H} splývají s možnými energiemi částice, $\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$. Druhá rovnice získaná separací udává časový vývoj, řešení má tvar

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}.$$

Celkově tak dostaneme partikulární řešení

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}$$

²¹ Podrobněji měření viz např. Kulhánek str. 83

popisující stacionární stav SR (střední hodnoty fyzikálních veličin jsou v tomto stavu stacionární). Dostaneme spektrum E_n a vlastní funkce ψ_n . Obecné řešení (tzv. vlnové klubko) je dáno superpozicí stacionárních stavů

$$\Psi(x, t) = \sum_n C_n \Psi_n(x, t) = \sum_n |c_n|^2 \psi_n e^{-iE_n t/\hbar},$$

koefficienty c_n jsou dány počátečními podmínkami.

§ Aplikace kvantové mechaniky – LHO, vodík ...

Zpravidla řešíme úlohu nalézt spektrum operátoru energie – tj. hodnoty, které je možno na systému naměřit. Lze formulovat např. takto:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

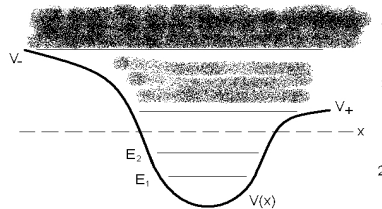
$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} + V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

přičemž platí komutační relace $[\hat{x}_k, \hat{x}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0$, $[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar \delta_{kl}$. Hledáme tedy vlastní hodnoty operátoru energie/Hamiltonova operátoru. Rovnice pro vlastní hodnoty Hamiltonova operátoru je Schrödingerova rovnice. Základní operátory, ze kterých je složen Hamiltonův operátor, podléhají komutačním relacím.

Řešení Schr. rce pro konkrétní potenciál V tedy poskytne spektrum operátoru energie $\{E_n\}$ jakožto množinu možných měřitelných hodnot energie!

Řešení Schr. rce lze nalézt pro každou hodnotu energie. Ne vždy je však toto řešení z prostoru $\mathcal{L}^2(R^3)$. Je proto vždy třeba vybrat z možných řešení jen ta, která jsou integrovatelná s kvadrátem, tj. donekonečna ubývají dostatečně rychle, aby zajistila integrovatelnost.

Existuje jednoduchý způsob, jak odhadnout typ spektra pro daný potenciál. Pokud se může v klasické mechanice částice vzdálit do nekonečna, je spektrum operátoru energie spojité. Nemůže-li se ani v jednom směru vzdálit do nekonečna je spektrum tohoto operátoru diskrétní.²² Vlastnosti řešení tedy závisí na asymptotickém chování veličiny $E - V(x)$. Předpokládejme, že pro $x \rightarrow \pm\infty$ se blíží potenciální energie monotónně k jisté $\lim V_+$ resp. V_- .

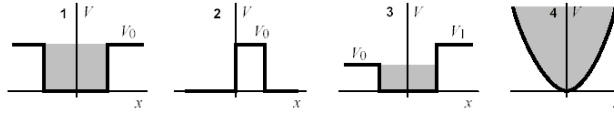


1) Energie $E > V_- \geq V_+$. Schr. rce má spojité spektrum a každé vlastní číslo je $2 \times$ degenerované. Vlastní fce $\psi(x)$ pro velká x oscilují, ale zůstávají omezené. Např. vlná částice.

²² Platí *omezovací princip* = prostorové omezení de B. vlny vede ke kvantování, tj. k povolení jen vybraných diskrétních stavů s diskrétními hodnotami energie. Analogie KM – na nekonečné struně lze vytvořit postupnou vlnu libovolné délky/frekvence, na konečné lze vytvořit pouze stojaté vlny, jež budou mít pouze jisté diskrétní frekvence.

2) Energie $E < V_+ \leq V_-$. V konečném či nekonečném počtu existují izolovaná a jednoduchá vlastní čísla $E_1 < E_2 < E_3 \dots$. Příslušné vlastní fce exponenciálně klesají pro velká $|x|$, aspoň jako $\psi(x) \sim e^{+k-x}$ pro $x \rightarrow -\infty$ resp. $\psi(x) \sim e^{-k+x}$ pro $x \rightarrow +\infty$, kde $k_{\pm} \leq \sqrt{2m/\hbar^2 \sqrt{V_{\pm} - E}}$: kvadraticky integrabilní = vázané stavy. Ostatní řešení divergují, jsou fyzikálně nepřijatelná. Je-li navíc $V(x) = 0$ pro $|x| > x_0$ (potenciál s konečným poloměrem), existuje pouze konečný počet hladin. Např. LHO.

3) Energie $V_+ < E < V_-$. Spektrum je spojitě, ale nedegenerované. Vlnové fce jsou exponenciálně tlumené pro $x \rightarrow -\infty$ a oscilují pro $x \rightarrow +\infty$.



1D potenciály: $x \in (-\infty, +\infty)$

1. *Symetrická pravoúhlá jáma*. Diskrétní spektrum pro $E < V_0$, spojitě pro $E > V_0$. Pro nekonečnou jámu ($V_0 \rightarrow \infty$) je spektrum jen diskrétní.
2. *Bariéra*. Spojité spektrum.
3. *Nesymetrická pravoúhlá jáma*. Diskrétní spektrum pro $E < V_0$, spojitě pro $E > V_0$.
4. *Harmonický oscilátor*. Diskrétní spektrum.

• Volná částice

Pro názornost přepíšeme Schr. rci. do x representace:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right] \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad (*)$$

Je-li $V(x) = 0$, pak (*) popisuje volnou částici, tj. máme Hamiltonián pro volný elektron, který obsahuje pouze kinetickou energii $mv^2/2$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad \text{resp.} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x).$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \left(\frac{p}{\hbar} \right)^2 \psi(x) = 0$$

Použitím de Broglieova vztahu $p = \hbar k$, kde k je vlnčet resp. v QM vlnové číslo dostaneme

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0$$

$$\psi'' + k^2 \psi = 0$$

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

$$\lambda = \pm ik$$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Hledáme-li tedy řešení ve tvaru $\psi = e^{ikx}$, zjistíme, že

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Protože $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$, lze separovat proměnné, časová část řešení je $\varphi = e^{-iEt/\hbar}$. Dohromady

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-iEt/\hbar}.$$

Pomocí $E = \hbar\omega$ máme

$$\Psi(x, t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\omega t},$$

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}.$$

Fce tohoto tvaru představuje postupnou vlnu, 1. člen je vlna postupující kladným směrem, 2. člen vlna postupující směrem záporným. Převedeme na pohyb v kladném směru ($B = 0$ a $A = C$), tj.

$$\psi = Ce^{ikx},$$

což lze zpětně přepsat a výsledek bude

$$\Psi(x, t) = Ce^{ikx} e^{-i\omega t} = Ce^{i(kx - \omega t)}$$

$$\Psi(x, t) = Ce^{i(px/\hbar - Et/\hbar)} = Ce^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \quad \text{partikulární řešení}$$

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp C(p) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \quad \text{obecné (dané superpozicí)}$$

Vzhledem k tomu, že na vlnovou funkci nebyly kladeny žádné dodatečné podmínky, je spektrum spojitě. Protože platí $|\Psi(x, t)|^2 = |e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}|^2 = (e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)})(e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)})^* = (e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)})(e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}) = e^0 = 1$, jsou všechna místa v prostoru stejně pravděpodobná a vlnová funkce je „zcela delokalizovaná“ v x -prostoru.

• Elektron v potenciálové jámě, tunelování

Uvažujeme-li elektron v pravouhlé potenciálové jámě, bude mít hamiltonián tvar

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x), \quad \text{kde } \hat{U} = 0 \text{ pro } -a/2 \leq x \leq a/2 \text{ resp. } \hat{U} = U_0 \text{ jinde}$$

Je tedy nutné řešit rovnici

$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} + k^2\psi_I = 0 \quad \text{pro } -a/2 \leq x \leq a/2$$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} - \alpha^2\psi_{II} = 0 \quad \text{jinde,}$$

kde bylo použito značení $k^2 = 2mE/\hbar^2$ a $\alpha^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2$. Pokud počítáme energii ode dna potenciálové jámy, jsou všechny energie kladné, k je tedy reálné číslo. Vzhledem k tomu, že vyšetřujeme elektron v potenciálové jámě, jsou všechny energie menší než U_0 , a i koeficient α je reálný.

Dále požadujeme, aby vlnová funkce v nekonečnu byla nulová, proto je v oblasti II brána do úvahy pouze klesající exponenciála $\psi_{II} = Ae^{-\alpha|x|}$ a vzhledem k symetrii hamiltoniánu vzhledem k operaci inverze (tj. záměně $x \rightarrow -x$) má vlnová funkce v oblasti I tvar sinu nebo kosinu $\psi_I^{(+)} = B \cos(kx)$ resp. $\psi_I^{(-)} = C \sin(kx)$. Dalším požadavkem na vlnovou funkci je hladkost, je tedy třeba napsat podmínky pro spojitost funkcí a jejich prvních derivací v bodě $a/2$. Dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých A a B resp. A a C . Ve výsledné vlnové funkci potřebujeme jeden volný parametr, abychom ji mohli normovat – chceme tedy najít takové řešení, kdy se determinant soustavy rovná nule. Odtud dostaneme podmínku pro k (a tedy i „dovolené energie“):

$$ka = (2n - 1)\pi - 2\arcsin \frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}} \quad \text{pro cosinové fce}$$

$$ka = 2n\pi - 2\arcsin \frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}} \quad \text{pro sinové fce}$$

Řešením těchto transcendentních rovnic jsou k_n z intervalu $(0; \sqrt{2mU_0}/\hbar)$, přičemž vždy existuje alespoň jedna energetická hladina. Diskrétní energetické hladiny jsou pak dány vztahem

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}.$$

Speciálně pro případ nekonečné potenciálové jámy se transcendentní rovnice pro k_n zjednoduší a pro dovolené energie resp. vlnové funkce platí

$$E_n^{(\infty)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

$$\psi_{\infty}^{(+)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi n}{a} x \quad \text{resp.} \quad \psi_{\infty}^{(-)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

(Řešení nekonečné potenciálové jámy lze dostat i z analogie se stojatou strunou – de Broglieova vlna v $x = 0$ a $x = a$ uzly. Celková energie elektronu pohybujícího se ve středu jámy, kde $E_p = 0$, je $E_k = p^2/2m$. De Broglieova λ jde tedy vyjádřit $\lambda = h/p = h/\sqrt{smE} \rightarrow a = n\lambda/2 \rightarrow E_n = (h^2/8ma^2)n^2$.) Číslo n určuje kvantový stav elektronu a nazývá se kvantové číslo. Pro $n = 1$ máme stav základní (pro $n = 0$ elektron v jámě není, vázané systémy nemohou existovat ve stavu s nulovou energií, mají vždy určitou min. energii, energii základního stavu), další jsou excitované. Hodnota $\sqrt{a/2}$ je normovací konstanta – hustota pravděpodobnosti je $\psi_n^2(x) = A^2 \sin^2((n\pi/2)x)$, protože elektron v jámě být musí, platí $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x) dx = 1 = A^2 \int_0^L \sin^2((n\pi/L)x) dx$, odtud vyjde A .

Hlavním rozdílem mezi klasickou a kvantovou mechanikou je nenulová (i když exponenciálně klesající) pravděpodobnost výskytu mimo potenciálovou jámu (tedy v oblasti II). Tedy i částice, která má nižší energii, než je vrchol potenciálové jámy, se může „protunelovat“ z jámy ven.

Studujeme-li analogický případ potenciálového valu a částice, která má menší energii než je výška valu U_0 , dostaneme též jistou pravděpodobnost, že částice valem projde, tzv. **tunelový jev**. Uvnitř valu klesá pravděpodobnost exponenciálně, za valem existuje nenulová pravděpodobnost výskytu. Pravděpodobnost, že dopadající elektron projde bariérou určuje koeficient průchodu $T \approx e^{-2\kappa L}$, kde $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$. Tunelování vysvětluje např. α -rozpad.

• LHO

LHO je částice kmitající podél osy x kolem rovnovážné polohy pod vlivem síly přímo úměrné výchylce $F = -k(x - a)$, $k > 0$.²³

Úlohu vyřešíme v rámci klasické Schrödingerovy vlnové mechaniky. Za Hilbertův prostor zvolíme prostor $\mathcal{L}^2(R)$, volba operátorů hybnosti a souřadnice povede na diferenciální rovnici v jedné dimenzi. Řešení této rovnice se provádí rozvojem do nekonečných řad, které je třeba oříznout tak, aby řešení bylo z prostoru $\mathcal{L}^2(R)$, tj. integrovatelné s kvadrátem. Odsud získáme spektrum operátoru energie. Též je možno provádět řešení bez volby reprezentace – nevolí se konkrétní podoba Hilbertova prostoru. Řešení se hledá jen z formulace úlohy. Při tomto přístupu se zavádí kreační a anihilační operátory, které svým působením posouvají energetické hladiny o jednu výše či níže.

Kvantové řešení (v x -reprezentaci):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Odpovídající bezčasová (jelikož $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$) Schr. rce:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right\} \psi(x) = E\psi(x),$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{\frac{m\omega}{\hbar} dx^2} - \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \psi + \frac{2E}{\hbar\omega} \psi = 0.$$

Následuje substituce v nezávisle proměnné, tj. $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x$, dostaneme

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2\psi(\xi) + \lambda\psi(\xi) = 0, \quad \lambda = 2E/\hbar\omega.$$

Pro velká ξ lze zanedbat poslední člen, tj. dále nalezneme řešení zjednodušené rce:

$$\text{pro } \xi \rightarrow \pm\infty : \quad \frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2\psi(\xi) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(\xi) = e^{\pm\xi^2/2}.$$

²³ Klasické řešení $x = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$, $\omega = \sqrt{k/m}$, amplituda x_0 a fáze α dány počátečními podmínkami

Kladné z nalezených řešení evidentně není z prostoru $\mathcal{L}^2(R)$, integrál z kvadrátu přes celý prostor by byl nekonečný. Vlnová funkce se tedy pro velká ξ musí chovat jako $e^{-\xi^2/2}$, řešení tedy hledáme ve tvaru

$$\psi(\xi) = u(\xi)e^{-\xi^2/2}.$$

Dosadíme do Schr. rce (derivace se samozřejmě míní dle nové prom. ξ):

$$u'' - 2\xi u' + (\lambda - 1)u = 0 \quad (\diamond).$$

Řešení hledáme ve tvaru mocninné řady

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k,$$

derivace tedy jsou

$$u'(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k C_k \xi^{k-1} \quad \text{a} \quad u''(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k \xi^{k-2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k \xi^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} 2k C_k \xi^{k-1} + (\lambda - 1) \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k = 0.$$

Přeindexujeme, aby mocniny ξ byly stejné

$$\sum_{l=-2}^{\infty} (l+1)(l+2) C_{l+2} \xi^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2l C_l \xi^l + (\lambda - 1) \sum_{l=0}^{\infty} C_l \xi^l = 0.$$

První dva členy u 1. výrazu jsou rovny nule, posuneme tedy hranici na $l = 0$

$$\sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(l+2) C_{l+2} - (2l+1-\lambda) C_l] \xi^l = 0.$$

Protože závorka musí být rovna 0, plyne

$$C_{l+2} = \frac{2l+1-\lambda}{(l+1)(l+2)} C_l.$$

Máme tedy rekurentní vzorec, známe-li C_0 a C_1 máme i zbytek, C_0 a C_1 jsou integrační konstanty řešení dif. rce (\diamond), z C_0 plyne sudá a z C_1 lichá část řady. Nalezené řešení je ve tvaru nekonečné mocninné řady. Řeší sice původní rovnici, ale není z prostoru $\mathcal{L}^2(R)$. Aby bylo řešení z $\mathcal{L}^2(R)$ (integrovatelné s kvadrátem), musí být řada konečná, tj. polynomiální. Prakticky to znamená, že koeficienty řady musí být od určitého $l = n$ nulové. V rekurentní relaci bude čítec pro toto $l = n$ nulový a veškeré odvozené koeficienty C_l s $l \geq n$ nulové. Vidíme, že nebude možné takto oříznout současně sudé i liché členy řady. Proto jsou možná jen sudá řešení nebo jen lichá řešení představující sudý nebo lichý polynom stupně n . Podmínka oříznutí (nulovost čítece) je $2n+1-\lambda = 0$ a plyne z ní po vyjádření λ spektrum energie harmonického oscilátoru:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

Sama Schrodingerova rovnice má řešení pro každou hodnotu energie. Tato řešení ale nejsou integrovatelná s kvadrátem, až výběr integrovatelných funkcí (oříznutí řady) vede k diskrétnímu spektru operátoru energie (jen pro některé vybrané hodnoty energie ubývá řešení v $\pm\infty$ dostatečně rychle, aby bylo integrovatelné s kvadrátem).

Základní hladina energie $E_0 = \hbar\omega/2$ je nenulová! I při nulové absolutní teplotě není harmonický oscilátor v klidu a vykonává tzv. nulové kmity (například oscilace krystalové mříže). Při absolutní nule se hmota nachází ve stavu s nejnižší možnou energií, nikoli však v klidu.

Spektrum operátoru energie je ekvidistantní, rozdíl dvou libovolných sousedních energetických hladin je $\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$. To je právě známý Planckův vztah z počátku století. Energie jakýchkoli kmitů se nemůže měnit spojitě, ale po skocích (energetických kvantech).

Polynomiální řešení pro funkci u se nazývají **Hermitovy polynomy** a označujeme je $H_n(\xi)$. Pro dané n nejprve určíme bezrozměrné vlastní číslo λ_n

$$\lambda_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega} = \frac{2(n+1/2)\hbar\omega}{\hbar\omega} = 2n+1$$

a z rekurentní formule určíme pomocí C_0 nebo C_1 (podle toho zda jde o sudý či lichý polynom) ostatní koeficienty rozvoje. Pro $C_0 = C_1 = 1$ se nalezené polynomy nazývají Hermitovy. Prvních několik Hermitových polynomů vychází:

$$H_0(\xi) = C_0, \quad H_1(\xi) = C_1\xi, \quad H_2(\xi) = C_0(1 - 2\xi^2), \quad H_3(\xi) = C_1(\xi - 2/3\xi^3) \dots$$

Stupeň polynomu n udává počet nulových bodů polynomu (počet průsečíků s osou ξ).

Každou ψ tedy tvoří mnohočlen H_n sudého nebo lichého stupně v ξ , exponenciální faktor $e^{-\xi^2/2}$ a numerický koeficient určený z normovací podmínky $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 d\xi = 1$. Obecný výraz je tak dán jako

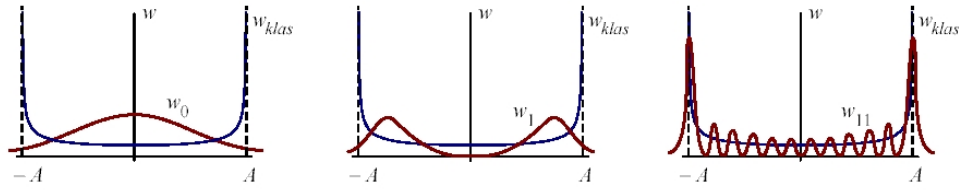
$$\psi_n = \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{1/4} (2^n n!)^{-1/2} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

Hustota pravděpodobnosti, že částice kmitající s energií E_n (oscilátor ve stavu $|n\rangle$) se nachází v poloze x (resp. bezrozměrné poloze ξ), je dána výrazem $w_n = \psi_n^* \psi_n$. Pro několik prvních stavů je vykreslena na obrázku. Pravděpodobnost má oscilující charakter a existuje malá nenulová pravděpodobnost výskytu oscilátoru i za klasickými body obratu. Tento obraz nastává pro systémy s nízkou teplotou a je zcela odlišný od klasického řešení. Pro velké energie (vysoká n) by se měla křivka blížit klasické pravděpodobnosti výskytu oscilátoru. Vidíme však, že oscilace jsou sice velmi husté, ale existuje značné množství bodů, ve kterých je kvantová pravděpodobnost nulová. Nic takového však u makroskopických systémů neměříme. Proč? Je to dáno rozlišovací schopností makroskopických přístrojů. Žádný přístroj nebude měřit polohu s takovou přesností, aby registroval jednotlivá minima pravděpodobnosti u vysokých energetických stavů. Přístroj ve skutečnosti určuje polohu s konečnou přesností, do které se vejde řada minim a registruje jen střední hodnotu hustoty pravděpodobnosti. A tou je právě klasická křivka.

Pozn.- Řešení bez volby reprezentace, anihilační a kreační operátory

Hamiltonův operátor nejprve přepíšeme do bezrozměrného tvaru:

$$\hat{H}(\hat{X}, \hat{P}) = \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{X}^2 + \frac{\hat{P}^2}{2m} \quad \rightarrow \quad \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \frac{m\omega}{2\hbar} \hat{X}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega} \hat{P}^2.$$



(Převedení do bezrozměrného tvaru není nutné, veškeré další úvahy by bylo možné provádět i s rozměrovým hamiltoniánem a všechny následující vztahy by se lišily o konstantu $\hbar\omega$, kterou jsme hamiltonián vydělili. Ovšem vztahy získané z bezrozměrného hamiltoniánu jsou poněkud názornější.)

Pro komutující čísla je možné součet kvadrátů „odmocnit“ pomocí vztahu $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$. U nekomutujících objektů není situace tak jednoduchá. Zaveďme operátory:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{X} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{P},$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{X} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{P}.$$

Oba tyto operátory jsou pro kvantovou teorii velmi důležité. Nazývají se anihilační a kreační operátory (smysl tohoto názvu uvidíme za chvíli). Kreační a anihilační operátory, jako jedny z mála v kvantové teorii, nejsou hermitovské a nepůsobí tedy v obou částech skalárního součinu stejně. Platí pro ně některé důležité relace, například:

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \hat{a} \hat{a}^+ - \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^+ + \hat{a}) \quad (3)$$

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a}) \quad (4)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a} \quad (5)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^+] = +\hbar\omega \hat{a}^+ \quad (6)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{1} \quad (7)$$

Relace (1) a (2) jsou zobecněním relace $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ pro nekomutující objekty a představují formální odmocnění hamiltoniánu. Kreační a anihilační operátory jsou lineární kombinací operátoru souřadnice a operátoru hybnosti. Proto je možné naopak operátor souřadnice a hybnosti vyjádřit jako lineární kombinaci kreačních a anihilačních operátorů – viz relace (3) a (4). Známe-li kreační a anihilační operátor, můžeme z relací (1) až (4) zpětně zrekonstruovat hamiltonián, operátor souřadnice a operátor hybnosti. Komutační relace (5) až (7) vyjadřují základní vlastnosti kreačních a anihilačních operátorů: relace (5) znamená, že anihilační operátor posouvá stavy systému o energetickou hladinu $\hbar\omega$ dolů a relace (6) znamená, že kreační operátor posouvá stav o energetickou hladinu $\hbar\omega$ vzhůru. Relace (7) je potom vzájemnou relací mezi anihilačním a kreačním operátorem.

Věta: Nechť $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. Potom $\hat{a}^+|n\rangle \sim |n+1\rangle$.

Důkaz:

$$\hat{H}\hat{a}^+|n\rangle = (6) = (\hat{a}^+\hat{H} + \hbar\omega\hat{a}^+)|n\rangle = (\hat{a}^+E_n + \hbar\omega\hat{a}^+)|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^+|n\rangle \quad \rightarrow$$

$$\hat{H}\hat{a}^+|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^+|n\rangle \quad \rightarrow$$

$$\hat{a}^+|n\rangle \sim |n+1\rangle$$

Zcela analogicky můžeme z relace (5) ukázat, že pro anihilační operátor platí $\hat{a}|n\rangle \sim |n-1\rangle$. Zavedeme-li normovací konstanty (požadujeme, aby všechny stavy byly normovány k jedné, tj. ortonormální bázi z

vlastních vektorů operátoru energie), můžeme posouvání v energetickém spektru prováděné kreačním a anihilačním operátorem jednoduše zapsat jako

$$\hat{a}^+|n\rangle = \alpha_n^+|n+1\rangle \quad \hat{a}|n\rangle = \alpha_n^-|n-1\rangle.$$

resp. po určení normovacích konstant

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Nalezení spektra – Hamiltonův operátor je součtem kvadrátů dvou Hermitových operátorů a je proto pozitivně definitní, tj. jeho vlastní čísla jsou nezáporná. Kreační a anihilační operátory posouvají ve spektru energie o konstantní hodnotu (energetické kvantum). Musí tedy existovat stav s nejnižší možnou energií, která je nezáporná. Tento stav nazýváme základní stav a označujeme ho $|0\rangle$. Zapůsobíme-li na základní stav anihilačním operátorem, musíme dostat nulový vektor (není již co anihilovat, jsme v základním stavu s nejnižší možnou energií). Pro základní stav tedy platí $\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle$ a $\hat{a}|0\rangle = 0$. Nalezneme kvadrát velikosti poslední relace (skalární součin prvku se sebou samým):

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{a}^+\hat{a}|0\rangle &\rightarrow (1) \rightarrow \langle 0|\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{\hat{1}}{2}|0\rangle \rightarrow \\ \frac{1}{\hbar\omega}\langle 0|\hat{H}|0\rangle - \frac{1}{2}\langle 0|\hat{1}|0\rangle &= 0 \rightarrow \left(\frac{E_0}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\langle 0|0\rangle \rightarrow \\ \frac{E_0}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} &= 0 \rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

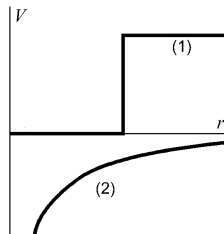
Známe-li hodnotu základního energetického stavu, můžeme další hodnoty energií získat působením kreačního operátoru, ten posouvá v energii o konstantu $\hbar\omega$, je tedy jasné

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Spektrum harmonického oscilátoru jsme získali jen z vlastností Hamiltonova operátoru, resp. jen z formulace úlohy LHO. Kreační a anihilační operátory, se kterými jsme se zde poprvé setkali, mají značný význam v kvantové teorii pole, kde pomocí podobných operátorů kreujeme a anihilujeme jednotlivé částice přítomné v systému. Zde u harmonického oscilátoru jen kreujeme či anihilujeme energetické kvantum a tím se dostáváme o jednu hladinu výše nebo níže.

• Sféricky symetrický potenciál – moment hybnosti, vodík...

Sféricky symetrickým (centrálním) nazýváme potenciál, který závisí jen na vzdálenosti od určitého centrálního bodu. Pro popis pohybu těles ve sféricky symetrickém potenciálu je velmi výhodný sférický souřadnicový systém. Mezi nejznámější sférické potenciály patří sférická jáma (1) a Coulombův potenciál (2). Sférická jáma přibližně odpovídá potenciálu, který pociťuje neutron zachycený v atomovém jádře. Jaderné síly na hranici jámy ($r = a$) jsou značné, v jiných oblastech naopak velmi slabé. Coulombův potenciál $V(r) = qQ/4\pi\epsilon_0 r = -\alpha/r$ se uplatní například ve vodíkovém atomu, kdy osamocенý elektron podléhá působení jediného protonu v atomovém jádře.



V klasické mechanice bude systém popsán Lagrangeovou funkcí, zobecněnými hybnostmi a energií a Hamiltonovou funkcí ve sférickém souřadnicovém systému takto:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r),$$

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r),$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r).$$

Zobecněné hybnosti odpovídající úhlovým proměnným jsou komponenty momentu hybnosti. Druhá část Hamiltonovy funkce odpovídá rotačním stupňům volnosti a lze ji zaplat pomocí vektoru momentu hybnosti \vec{L} vzhledem k ose z , od které je odvozen sférický souřadnicový systém.

Jednotlivé komponenty momentu hybnosti nejsou současně měřitelné a nekomutují spolu. Současně ale můžeme měřit kvadrát momentu hybnosti a libovolnou z jeho komponent.²⁴ U sféricky symetrického problému budeme preferovat třetí osu a třetí komponentu. Osa z má preferované postavení při budování sférického souřadnicového systému, ve skutečnosti je však lhostejné, kterou z komponent momentu hybnosti zvolíme do úplné množiny pozorovatelných. Je-li v systému přítomno vnější magnetické pole, volíme zpravidla souřadnicový systém tak, aby třetí osa mířila ve směru tohoto pole, osa z je potom současně směrem vnějšího magnetického pole.

Je-li systém sféricky symetrický, potom s operátory \hat{L}^2 a \hat{L}_3 ještě komutuje Hamiltonův operátor \hat{H} . Víme totiž, že zobecněné souřadnice nekomutují jedině se svými zobecněnými hybnostmi. V komutátoru $[\hat{L}^2, \hat{L}_3]$ mohou tedy být jedině nenulové členy s úhlovou částí Hamiltoniánu, tou je ale právě násobek \hat{L}^2 . Operátor sám se sebou komutuje, takže výsledek může být jedině nulový. Podobně komutátor $[\hat{L}_3, \hat{H}]$ může mít jedině nenulové části s úhlovou částí Hamiltoniánu, tj. $\sim [\hat{L}_3, \hat{L}^2]$. Tento komutátor je ale opět nulový podle $[\hat{L}^2, \hat{L}_k] = 0$. Nalezli jsme tak trojici nezávislých komutujících operátorů, která tvoří úplnou množinu pozorovatelných u nerelativistického sféricky symetrického

²⁴ Vyjdeme ze základních komutačních relací pro hybnost a souřadnici, komutační relaci mezi první a druhou komponentou momentu hybnosti lze odvodit zdlouhavým (ale přímočarým) výpočtem:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = [\hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_3\hat{p}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_3] = \text{dle pravidel Lieovy algebry} = i\hbar(\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1) = i\hbar\hat{L}_3$$

Hledanou komutační relaci postupně dle pravidel rozmělnujeme až na elementární relace mezi souřadnicemi a hybnostmi. Analogickým postupujeme pro ostatní komponenty momentu hybnosti. Není to ale nutné, stačí je získat cyklickou záměnou souřadnicových os. Kompletní komutační relace pro moment hybnosti potom jsou:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar\hat{L}_3, \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar\hat{L}_1, \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar\hat{L}_2$$

Výsledkem je, že současně není možné změřit žádné dvě komponenty momentu hybnosti. Měření každé komponenty ovlivní měření kterékoli jiné komponenty.

Zavedme operátor kvadrátu velikosti momentu hybnosti $\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$. Stejným postupem jako dříve dopočteme komutační relace kvadrátu momentu s jednotlivými komponentami. Po výpočtu dostaneme: $[\hat{L}^2, \hat{L}_k] = 0$, kde $k = 1, 2, 3$. Není tedy možné současně změřit dvě různé komponenty momentu hybnosti. Vždy je ale možné změřit kvadrát velikosti momentu hybnosti a jednu z jeho libovolných komponent. Ze zatím provedených úvah je zřejmé, že současně můžeme měřit dynamické proměnné $\{x, y, z\}$ nebo $\{p_x, p_y, p_z\}$ nebo $\{L_2, L_3\}$. V případě sféricky symetrického potenciálu je s poslední množinou kompatibilní ještě energie. Jde o základní tři úplné množiny pozorovatelných (ÚMP = maximální nezávislá množina vzájemně kompatibilních dynamických proměnných, jakákoli další dynamická proměnná už s nimi není kompatibilní; řekneme, že známe stav systému, známe-li výsledek měření některé ÚMP, stavem tedy nazveme jen to, co lze ve skutečnosti současně změřit) pro nerelativistickou částici. V případě, že dynamické proměnné spolu současně měřit nelze, se musíme ptát, jak moc naruší akt měření jedné proměnné akt měření proměnné druhé. Na tuto otázku odpovídají Heisenbergovy relace neurčitosti ...

problému (v relativistické úloze k těmto proměnným ještě přibude spin):

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_3] = [\hat{L}^2, \hat{H}] = [\hat{L}_3, \hat{H}] = 0.$$

U soustavy nezávislých vzájemně komutujících operátorů je možné hledat společné vlastní vektory ke všem operátorům. U sféricky symetrického problému budeme tedy řešit soustavu tří rovnic (označme ji (♡)) pro vlastní vektory

$$\begin{aligned} \hat{H}|\nu, l, m\rangle &= E_\nu|\nu, l, m\rangle, \\ \hat{L}^2|\nu, l, m\rangle &= \lambda_l|\nu, l, m\rangle, \\ \hat{L}_3|\nu, l, m\rangle &= \mu_m|\nu, l, m\rangle. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

Index ν čísluje energetické stavy, index l stavy kvadrátu momentu hybnosti a index m stavy projekce momentu hybnosti do libovolné osy (zvolili jsme třetí). Vlastní čísla jsme označili E , λ , μ . Tuto soustavu je třeba řešit současně. Co by se stalo, kdybychom například řešili jen rovnici pro energii? Nalezená vlastní čísla E by samozřejmě byla v pořádku, ale ke každému vlastnímu číslu (každé hodnotě energie) by existovalo více nezávislých vlastních vektorů (ve skutečnosti se od sebe liší čísla l a m , to ale nevíme, protože řešíme jen první rovnici). Tomuto typu spektra říkáme **degenerované spektrum**. Znamená to jen to, že k danému vlastnímu číslu existuje více vlastních vektorů. Odlišili bychom je od sebe až pomocí dalších operátorů, které komutují s operátorem, jehož spektrum právě hledáme.

Dále se budeme zabývat momentem hybnosti, tj. druhou a třetí rovnicí. Řešení pro moment hybnosti je stejné pro všechny průběhy potenciální energie. Řešení pro energii (energetické spektrum) již samozřejmě závisí na průběhu potenciální energie. Navíc řešení pro energii závisí na číslech l a m . To je logické: moment hybnosti souvisí s rotačními stavy systému a ty k energii přispívají. Vidíme to konec konců i v hamiltoniánu, kde je právě rotační část energie vyjádřena přes kvadrát momentu hybnosti.

Moment hybnosti: základními vztahy jsou:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_1, \hat{L}_2] &= i\hbar\hat{L}_3 + \text{cykl. zám.}, \\ [\hat{L}^2, \hat{L}_3] &= 0. \end{aligned}$$

Zavedme tzv. *posuvné operátory* $\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$, analogické kreačním a anihilačním operátorům u LHO. Budou nás totiž posouvat ve spektru momentu hybnosti. Platí vztahy (lze odvodit z def. pos. operátorů a komut. relac. mom. hybnosti):

$$\hat{L}_1 = (\hat{L}_+ + \hat{L}_-)/2 \quad (1)$$

$$\hat{L}_2 = (\hat{L}_+ - \hat{L}_-)/2i \quad (2)$$

$$\hat{L}_\pm^\dagger = \hat{L}_\mp \quad (3)$$

$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 + \hbar\hat{L}_3 \quad (4)$$

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 - \hbar\hat{L}_3 \quad (5)$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_3 \quad (6)$$

$$[\hat{L}_3, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm \quad (7)$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0 \quad (8)$$

Známe-li posuvné operátory, můžeme z relací (1), (2) a (6) zrekonstruovat celý moment hybnosti. Úlohu, kterou budeme nyní řešit, lze zformulovat takto:

$$\hat{L}^2|\lambda, \mu\rangle = \lambda|\lambda, \mu\rangle,$$

$$\hat{L}_3|\lambda, \mu\rangle = \mu|\lambda, \mu\rangle.$$

Abychom mohli spektrum momentu hybnosti odvodit standardním způsobem, musíme mít ještě dvě tvrzení:

1) Posuvné operátory posouvají vlastní vektory ve třetí komponentě momentu hybnosti o Planckovu konstantu, tj.

$$\hat{L}_\pm|\lambda, \mu\rangle \sim |\lambda, \mu \pm \hbar\rangle$$

Ve spektru operátoru \hat{L}^2 nedělají posuvné operátory nic. \hat{L}_\pm tedy mění jen hodnotu projekce momentu hybnosti do zvolené osy.

2) Při daném λ je spektrum operátoru \hat{L}_3 omezené, tj. existuje μ_{min} a μ_{max} .

Řešení:

Podobně jako u harmonického oscilátoru zapůsobíme posuvným operátorem na první (resp. poslední stav). Výsledek působení musí být nulový, protože další stav již neexistuje:

$$\hat{L}_+|\lambda, \mu_{max}\rangle = 0 \quad \hat{L}_-|\lambda, \mu_{min}\rangle = 0$$

vytvoříme kvadrát normy těchto vektorů:

$$\langle \lambda, \mu_{max} | \hat{L}_- \hat{L}_+ | \lambda, \mu_{max} \rangle = 0 \quad \langle \lambda, \mu_{min} | \hat{L}_+ \hat{L}_- | \lambda, \mu_{min} \rangle = 0$$

Součiny operátorů vyjádříme z (4) a (5):

$$\langle \lambda, \mu_{max} | \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 - \hbar \hat{L}_3 | \lambda, \mu_{max} \rangle = 0 \quad \langle \lambda, \mu_{min} | \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 + \hbar \hat{L}_3 | \lambda, \mu_{min} \rangle = 0$$

Po zapůsobení operátorů máme:

$$(\lambda - \mu_{max}^2 - \mu_{max}\hbar) \|\lambda, \mu_{max}\|^2 = 0 \quad (\lambda - \mu_{min}^2 + \mu_{min}\hbar) \|\lambda, \mu_{min}\|^2 = 0$$

vynulováním koeficientů u obou relací dostáváme:

$$\lambda = \mu_{max}^2 + \mu_{max}\hbar \quad \lambda = \mu_{min}^2 - \mu_{min}\hbar$$

neboli

$$\lambda = \mu_{max}(\mu_{max} + \hbar) \quad \lambda = \mu_{min}(\mu_{min} - \hbar) \quad (*)$$

Posuvné operátory posouvají ve spektru třetí komponenty momentu hybnosti o Planckovu konstantu, proto musí také současně platit:

$$\mu = \mu_{min}, \quad \mu_{min} + \hbar, \quad \mu_{min} + 2\hbar, \quad \dots, \quad \mu_{max} - \hbar, \quad \mu_{max}$$

zavedme bezrozměrné číslo $m = \mu/\hbar$. Potom

$$m = m_{min}, \quad m_{min} + 1, \quad m_{min} + 2, \quad \dots, \quad m_{max} - 1, \quad m_{max}$$

Označme $m_{max} = l$. Z relací (*) snadno zjistíme, že $m_{min} = -l$. Číslo m tedy může nabývat celkem $2l + 1$ různých hodnot z množiny $m \in \{-l, -l + 1, -l + 2, \dots, l - 1, l\}$. Počet hodnot $2l + 1$ musí být nezáporné celé číslo a proto samo číslo l může nabývat jen poločíselných hodnot $l \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$. Vlastní číslo $\lambda = \mu_{max}(\mu_{max} + \hbar) = l\hbar(l\hbar + \hbar) = \hbar^2 l(l + 1)$.

Závěr: Výsledek celého odvození můžeme zformulovat takto:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2|l, m\rangle &= l(l + 1)\hbar^2|l, m\rangle, \quad l \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}; \\ \hat{L}_3|l, m\rangle &= m\hbar|l, m\rangle, \quad m \in \{-l, -l + 1, -l + 2, \dots, l - 1, l\}; \\ \hat{L}_\pm|l, m\rangle &\sim |l, m \pm 1\rangle. \end{aligned}$$

Poznámky k řešení: (důležitější než samo řešení!!!)

Číslo l čísluje velikost momentu hybnosti a nazývá se vedlejší kvantové číslo (hlavní kvantové číslo čísluje energii). Číslo m čísluje projekci momentu hybnosti do libovolné osy. Vzhledem k tomu, že nabitá rotující částice má nenulový magnetický moment, a toto číslo bylo poprvé zavedeno pro elektron v atomárním obalu vodíku, nazývá se magnetické kvantové číslo.

Možné hodnoty velikosti momentu hybnosti a jeho projekce do třetí osy jsou:

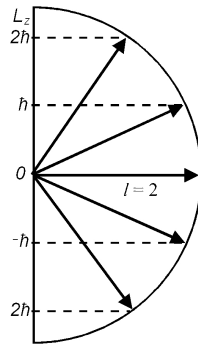
$$|L| = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$L_3 = m\hbar, \quad m = -l, -l+1, \dots, l.$$

Poločíselné hodnoty, které jsme odvodili pro číslo l jsou skutečně také možné. Realizují se u spinu, jehož operátor má stejnou komutační strukturu jako moment hybnosti. (V Schrödingerovské x reprezentaci tyto hodnoty nedostaneme. Volba reprezentace zde znamená ztrátu části řešení.)

Z výsledku odvozených vztahů plyne skutečný význam Planckovy konstanty. Jedná se o **elementární kvantum momentu hybnosti**. Při měření momentu hybnosti budeme vždy měřit projekci momentu do určité osy, dané měřicím zařízením. Tato projekce je vždy násobkem Planckovy konstanty.

Vidíme, že stavy s konkrétním vedlejším kvantovým číslem l jsou degenerovány, tj. existuje více vlastních vektorů $|l, m\rangle$, které přísluší stejnému kvantovému číslu l . Tyto vektory se od sebe liší kvantovým číslem m a jejich počet je $2l+1$ (tzv. stupeň degenerace, který označujeme #).



Historicky byly označovány kvantové stavy velikosti momentu hybnosti elektronu v obalu atomu vodíku písmeny s, p, d, f podle následující tabulky:

$l = 0$	s	$m = 0$	$\# = 1$
$l = 1$	p	$m = -1, 0, 1$	$\# = 3$
$l = 2$	d	$m = -2, -1, 0, 1, 2$	$\# = 5$
$l = 3$	f	$m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$	$\# = 7$

Řešení v x reprezentaci, vodík, kulové funkce

V x reprezentaci budeme problém sférického potenciálu řešit ve sférických souřadnicích (jsou nejbližší symetrii potenciální energie). Je třeba řešit soustavu rovnic (\heartsuit), která bude mít nyní tvar:

$$\hat{H}\psi(r, \varphi, \theta) = E_\nu\psi(r, \varphi, \theta)$$

$$\hat{L}^2\psi(r, \varphi, \theta) = \lambda_l\psi(r, \varphi, \theta)$$

$$\hat{L}_3\psi(r, \varphi, \theta) = \mu_m\psi(r, \varphi, \theta)$$

Operátory zapsané ve sférických souřadnicích mají tvar:

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}_r^2}{2m} + \frac{\vec{L}^2}{2I} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r - \frac{\hbar^2}{2mr^2}\Delta_{\theta\varphi} + V(r),$$

$$\begin{aligned}\hat{L}^2 &= -\hbar^2 \Delta_{\theta\varphi}, \\ \hat{L}_3 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}, \\ \Delta &= \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}, \\ \Delta_r &= \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r, \\ \Delta_{\theta\varphi} &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

Kinetická energie v Hamiltonově operátoru vede v Schrödingerově rovnici na člen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \right).$$

V kartézských souřadnicích se Laplaceův operátor štěpí na součet druhých derivací podle jednotlivých os, tomu odpovídá rozklad kinetické energie na složky T_x , T_y a T_z . Ve sférických souřadnicích se Laplaceův operátor dělí na radiální a úhlovou část, tomu odpovídá rozklad kinetické energie na radiální a úhlovou část. Právě úhlová část kinetické energie je rotační energie spojená s momentem hybnosti a proto kvadrátu momentu hybnosti odpovídá úhlová část Laplaceova operátoru.

Hledané řešení $\psi(r, \varphi, \theta)$ samozřejmě závisí na kvantových číslech ν , l , m . Řešení budeme hledat v separovaném tvaru

$$\psi(r, \varphi, \theta) = f(r)g(\varphi)h(\theta).$$

Nejdříve řešme poslední z rovnic (♡):

$$\begin{aligned}-i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} f(r)g(\varphi)h(\theta) &= \mu_m f(r)g(\varphi)h(\theta) \\ -i\hbar \frac{dg}{d\varphi} = \mu_m g &\quad \rightarrow \quad g(\varphi) = ce^{i\frac{\mu_m}{\hbar}\varphi}.\end{aligned}$$

Nalezené řešení musí být periodické v úhlu φ , tj.

$$g(0) = g(2\pi) \quad \rightarrow \quad \mu_m = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

V x reprezentaci jsme opět odvodili kvantování projekce momentu hybnosti. Projekce momentu hybnosti může nabývat jen celistvých násobků Planckovy konstanty. Poločíselná řešení nelze v x reprezentaci nalézt. Přechodem ke konkrétní reprezentaci přicházíme o část řešení. Hledané řešení má nyní tvar:

$$\psi(r, \varphi, \theta) = f(r) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} h(\theta), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Konstantu c jsme zvolili tak, aby nalezené řešení bylo normováno k jedné.

Jako další krok dosadíme toto řešení do druhé rovnice (♡), tj.

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] e^{im\varphi} h(\theta) = \lambda_l e^{im\varphi} h(\theta) \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dh}{d\theta} \right) + \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\lambda_l}{\hbar^2} \right) h = 0.$$

Výsledkem je obyčejná diferenciální rovnice pro funkci $h(\theta)$, jejímž výsledkem jsou polynomiální funkce v $\cos \theta$ a $\sin \theta$, které se nazývají přidružené **Legendreovy polynomy** $P_{lm}(\cos \theta)$ a jsou definované vztahem

$$P_{lm}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad |m| \leq l, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Pro $m = 0$ se tyto polynomy nazývají Legendreovy polynomy. Příslušné vlastní číslo je

$$\lambda_l = l(l+1)\hbar^2.$$

Celá úhlová část řešení se nazývá **kulová funkce**²⁵ a označuje se

$$Y_{lm}(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_{lm}(\cos \theta)$$

Celkové řešení druhých dvou rovnic soustavy (♡) tedy je:

$$\psi(r, \varphi, \theta) = f(r) Y_{lm}(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(r) e^{im\varphi} P_{lm}(\cos \theta),$$

$$\lambda_l = l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_m = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \dots; \quad |m| \leq l$$

Odvozené kvantování momentu hybnosti je až na absenci poločíselných hodnot shodné se vztahy odvozenými bez volby reprezentace. Pro radiální funkci $f(r)$ lze řešení získat z první rovnice (♡). Toto řešení závisí na tvaru potenciální energie...

Nyní zbývá řešit první z rovnic (♡) – rovnici pro energii. Tato rovnice nám poskytne energetické spektrum a radiální část celého řešení $\psi(r, \varphi, \theta)$. Jak energetické spektrum, tak radiální část mohou záviset na kvantových číslech l a m z předchozího řešení a budou závislé na konkrétním tvaru potenciální energie $V(r)$. V poslední rovnici (♡) známe působení rotační části kinetické energie Hamiltonova operátoru na celkovou vlnovou funkci. To je dáno působením kvadrátu momentu hybnosti podle druhé z rovnic (♡). Známe již i vlastní číslo λ_l . Po zapůsobení rotační části zkrátíme úhlové části $g(\varphi)$ a $h(\theta)$ na obou stranách rovnice a získáme rovnici pro radiální část řešení:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] f_{\nu l}(r) = E f_{\nu l}(r).$$

Povšimněte si, že v rovnici vystupuje vedlejší kvantové číslo l a energetické spektrum proto nezávisí jen na radiálním čísle ν , které čísluje energii. Řešení této rovnice se provádí standardními metodami (rozvoj do řady, hledání asymptotického chování, oříznutí nekonečné řady), výsledkem jsou tzv. přidružené Laguerovy polynomy násobené exponenciálou. Pro Coulombický potenciál vychází energetické spektrum

$$V(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\alpha}{r} \quad \rightarrow \quad E_{\nu l} = -\frac{\alpha^2 m}{2\hbar^2 (\nu + l + 1)^2} = -\frac{\alpha^2 m}{2\hbar^2 n^2}.$$

²⁵

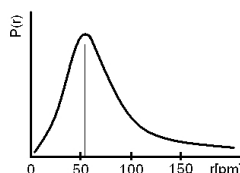
$$Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta, \quad Y_{1,-1} = \sqrt{3} \pi e^{-i\varphi} \sin \theta, \quad \dots$$

Hlavní kvantové číslo n číslující stavy energie jsme zavedli vztahem $n = \nu + l + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $l = 0, 1, \dots, n - 1$. Stupeň degenerace bude

$$\#_n = \sum_l 2l + 1 = \sum_{\nu=0}^{n-1} 2(n - \nu - 1) + 1 = n^2.$$

Jde-li o vodík, může mít každý elektron ještě dva spinové stupně volnosti $m_s = \pm 1/2$ a celkový počet stavů v jedné energetické slupce je proto $2n^2$. Tyto stavy se liší hodnotou kvantových čísel l, m, m_s . Spin však přirozeně vyplývá až v relativistické teorii.

Pozn. – Normovaná ψ v základním stavu atomu vodíku získaná řešením Schr. rce $\psi(r) = e^{-r/a}/\sqrt{\pi a^3}$, kde $a = h^3 \epsilon_0 / \pi m e^2$ je Bohrov poloměr (≈ 53 pm), používá se jako jednotka v mikrosvětě. Též je to vzdálenost, ve které se elektron v základním stavu nachází s největší pravděpodobností (viz pravděpodobnost, že se e^- nachází ve vzdálenosti $(r, r + dr)$ od jádra, tj. v objemovém elementu $dV = (4\pi r^2)dr$, radiální hustota je $P(r)dr = \psi^2 dV = 4e^{-2r/a} r^2 dr / a^3 \rightarrow P(r) = 4r^2 e^{-2r/a} / a^3$).



Vodík empiricky: konec 19. století – vlnové délky přítomné v atomových spektrech se řadí do skupin = spektrální série, 1. objevil Balmer – viditelné spektrum vodíku, čára s nejdelší vlnovou délkou = H_α , s klesající vlnovou délkou je rozložení čar stále hustší a jejich intenzita slábne až k tzv. *hraně série*, za kterou již nejsou žádné další jednotlivé čáry, ale jen slabé spojité spektrum. Postupem času objeveny další série – Lymanova (UV), Paschenova (IR), Brackettova (IR), Pfundova (IR) ... byl objeven empirický vzorec pro vlnové délky z každé série

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{na^2} - \frac{1}{z^2} \right), \quad (*)$$

kde $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ je Rydbergova konstanta. Pro Balmera je $na = 2$, $z = 3, 4, 5 \dots$, pro Lymana je $na = 1$, $z = 2, 3, 4 \dots$

Přeskočí-li elektron z excitovaného stavu do stavu nižšího, vyzáří úbytek energie jako jediný foton, $E_z - E_{na} = h\nu$. Pokud sem dosadíme výsledek pro energetické spektrum vodíku E_n , lze po úpravách získat

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\epsilon_0 ch^3} \left(\frac{1}{na^2} - \frac{1}{z^2} \right),$$

což souhlasí s experimentálním vztahem, tj. záření obsahuje jen určité vlnové délky, tyto vytvářejí posloupnosti podle kvantových čísel hladin z které na kterou e^- skáče. Základní hladina vodíku je $-13,6 \text{ eV}$.

Jemná struktura spektrální čáry = rozštěpení spektrální čáry na blízké složky odpovídající rozštěpení energetických hladin e^- v důsledku spin-orbitální interakce (interakce mezi orbitálními a spinovými magnetickými momenty elektronů v atomu), ve výrazech pro jemnou strukturu a obecně v základních rovnicích popisujících elmag. interakci vystupuje tzv. konstanta jemné struktury $\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137$.

Hyperjemná struktura spektrální čáry = rozštěpení spektrální čáry na velmi blízké složky odpovídající rozštěpení energetických hladin elektronů v důsledku hyperjemné interakce, tj. interakce mezi magnetickými momenty elektronů a magnetickým momentem jádra.

Tj. v důsledku existence spinů elektronů a protonů není základní stav atomu vodíku ve skutečnosti jediným stavem s přesně určenou hodnotou energie – spiny nesou zodpovědnost za hyperjemnou strukturu energetických hladin, všechny hladiny jsou rozštěpeny na několik hladin ležících těsně vedle sebe. Elektron může mít spin orientovaný buď nahoru nebo dolů, to platí i pro proton; pro každý dynamický stav atomu proto existují 4 možné spinové konfigurace; všechny 4 nemají přesně tutéž energii, jejich energie jsou nepatrně posunuty proti hodnotě, kterou bychom očekávali bez spinů (posuny hladin řádově o desetimilióntiny eV, rozdíl 1. a 2. hladiny cca 10 eV) → existence každého dynamického stavu se rozštěpí na soustavu několika velmi blízkých energetických hladin = *hyperjemné rozlišení*, jež je způsobeno vzájemnou interakcí mezi magnetickými momenty elektronu a protonu, viz čára 1420 MHz

Literatura a zdroje

- Petr Kulháněk, TF1: Teoretická mechanika, Studijní text pro doktorské studium, FEL ČVUT, Praha 2001
- Petr Kulháněk, TF2: Kvantová teorie, Studijní text pro doktorské studium, FEL ČVUT, Praha 2001
- Antonín Havránek: Klasická mechanika I - II, skriptum, Karolinum, Praha 2002-3
- J. W. Leech, Klasická mechanika, Praha, SNTL, 1970
- Klíma J., Velický B.: Kvantová mechanika I. Skriptum MFF UK, Praha 1990
- D.Halliday, R.Resnick, J.Walker: Fyzika, Vutium, Brno 2000
- Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz, Prometheus, 1999
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Teoretická mechanika, Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc. & Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc. , 2000
- ... výpisky k souborce od Káti Kůsově ...

Kapitola 2

Elektromagnetické pole, STR

Elektromagnetické pole: Maxwellovy rovnice. Lorentzova transformace. Semiklasický a kvantový popis elektromagnetického pole, fotony. Interakce atomu se zářením. Absorpce a emise, Einsteinovy koeficienty. Přirozená šířka spektrální čáry.

- Maxwellovy rovnice.
- Lorentzova transformace, aberace a Dopplerův jev.

2.1 Elektrické a magnetické pole – základní vztahy

§ Intenzita elektrického pole

Pro popis silového působení mezi nabitými tělesy je vhodné zavést abstrakci bodového náboje (analogii hmotného bodu v mechanice). Mezi dvěma bodovými nepohybujícími se náboji působí síla daná vztahem

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

zvaným **Coulombův zákon**, permitivita vakua $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$. **Intenzita elektrického pole** charakterizuje pole vyvolané nábojem

$$q = \int_V \rho(\vec{r}) dV,$$

kde $\rho(\vec{r})$ je hustota náboje. Uvažujeme-li soustavu N bodových nábojů ve vakuu, můžeme jejich silové působení na náboj q napsat ve tvaru

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

kde

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

je intenzita (elektrostatického) pole. Jednotkou je N/C resp. V/m. Pro spojitě rozložený náboj analogicky

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d^3r'.$$

K získání názorné představy o průběhu pole používáme siločáry (křivky, v jejichž každém bodě má vektor intenzity směr tečny). Siločáry vždy vystupují z kladných nábojů a vstupují do záporných; nemůžou se protínat.

Pro tok vektoru intenzity uzavřenou plochou můžeme formulovat **Gaussův zákon elektrostatiky**: *Celkový tok intenzity elektrostatického pole soustavy bodových nábojů libovolnou uzavřenou plochou je roven celkovému náboji uzavřenému uvnitř této plochy dělenému konstantou permitivity.* Tedy

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \overbrace{\vec{n} dS}^{d\vec{s}} = \frac{q_c}{\epsilon_0}, \quad \text{resp.} \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

v integrálním resp. diferenciálním tvaru.

Potenciál elektrického pole $\varphi(\vec{r})$ je možno zavést vztahem

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r}).$$

Tato definice je možná díky obecné vlastnosti, nevírovosti, elektrického pole – vyjadřuje rovnice

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \text{resp.} \quad \nabla \times \vec{E} = 0.$$

Elektrické pole je tedy potenciální.

Při průchodu plochou nespojitosti zůstávají spojitě pouze tečné složky vektoru intenzity elektrického pole. Normálové složky se mění skokově; skok je úměrný náboji na ploše nespojitosti: $\mathcal{E}_{1t} - \mathcal{E}_{2t} = 0$, $\mathcal{E}_{1n} - \mathcal{E}_{2n} = \sigma/\epsilon_0$.

§ Indukce magnetického pole

Pokud se bodový náboj pohybuje rychlostí v v blízkosti vodičů s proudem nebo v blízkosti zmagetovaných těles, pak celková síla působící na náboj je dána **Lorentzovým vzorcem**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Tento vztah zavádí **magnetickou indukci** \vec{B} , veličinu charakterizující magnetické pole. Jednotkou je Tesla = N/Am. Je-li elektrické pole nulové a budeme-li místo jediného zkušební náboje uvažovat působení na libovolný proud popsáný proudovou hustotou $\vec{j}(\vec{r})$, dostaneme pro hustotu síly vzorec

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}.$$

Pro libovolné magnetické pole platí **Ampérův zákon** pro cirkulaci magnetické indukce: *křivkový integrál magnetické indukce počítaný přes libovolnou uzavřenou křivku je vždy roven proudu, který protéká plochou ohraničenou touto křivkou, násobenému permeabilitou*

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \text{resp.} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Magnetické pole tedy obecně není konzervativní/potenciální.

Na druhou stranu tok¹ magnetického pole (jednotka Weber, Wb = Js/C = Vs) uzavřenou plochou je vždy nulový:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \text{resp.} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Pro obecné rozložení proudové hustoty lze magnetickou indukci určit podle **Biotova-Savartova zákona**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r',$$

který je ekvivalentní Ampérovu vzorci.

Normálové složky vektoru magnetické indukce zůstávají při průchodu plochou nespojitosti spojitě. Tečné složky se mění skokově; skok je úměrný hustotě proudu tekoucího na ploše nespojitosti: $\mathcal{B}_{1n} - \mathcal{B}_{2n} = 0$, $\mathcal{B}_{1t} - \mathcal{B}_{2t} = \mu_0 j_s$.

§ Indukce elektrického pole

Pro vyšetřování vlastností pole v přítomnosti dielektrika zavádíme **elektrickou indukci**

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}).$$

Vektor polarizace \vec{P} popisuje elektrické vlastnosti dielektrika; je zadán rozložením nábojů vázaných v dielektriku

$$q_p = -\nabla \cdot \vec{P}.$$

Potom můžeme Gaussův zákon elektrostatického pole v dielektriku napsat pouze pomocí volných nábojů (ρ je hustota volných nábojů)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \text{resp.} \quad \nabla \times \vec{E} = 0.$$

Při průchodu plochou nespojitosti je vektor elektrické indukce nespojitý; nespojitost je dána plošnou hustotou volných nábojů $\mathcal{D}_{1n} - \mathcal{D}_{2n} = \sigma$.

¹ Obecně tok nějaké veličiny X je $\int \vec{X} \cdot d\vec{S}$

§ Intenzita magnetického pole

Magnetické vlastnosti látek určují tzv. vázané proudy popsané **magnetizací** [A/m]

$$\vec{j}_v(\vec{r}) = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}.$$

Magnetické pole v látkovém prostředí potom popisujeme vektorem **intenzity magnetického pole**

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}} + \mu_0 \vec{\mathcal{M}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{P}}_m,$$

kde $\vec{\mathcal{P}}_m$ je **magnetická polarizace**, [Wb/m²]. Potom můžeme Ampérův zákon v látkovém prostředí napsat pomocí volných proudů

$$\oint_l \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{resp.} \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{j}$$

a nespojitost tečných složek při průchodu plochou nespojitosti je dána pouze hustotou volných plošných proudů $\vec{\mathcal{H}}_{1t} - \vec{\mathcal{H}}_{2t} = \vec{j}_s$.

2.2 Maxwellovy rovnice

Klasickou teorii elektrických, magnetických a optických jevů dovršuje Maxwellova teorie. Základem Maxwellovy teorie jsou **Maxwellovy rovnice**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned}$$

nebo v integrálním tvaru

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} &= 0 & \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} &= I \end{aligned}$$

Slovně je lze formulovat takto:

- zdrojem elektrické indukce jsou volné náboje, výraz platnosti Gaussovy věty pro obecné elektrické pole
- neexistují volné magnetické náboje, výraz uzavřenosti magnetických indukčních čar pro obecné magnetické pole
- elektrické pole je tam, kde se s časem mění vektor magnetické indukce, formulace obecného zákona elmag indukce
- vírové magnetické pole je tam, kde se s časem mění vektor elektrická indukce a pohybuje se náboj

Maxwellovy rovnice jsou soustavou parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu, obsahují 12 neznámých (MR je celkem 8 – 2 skalární a 2 vektorové + navíc máme ještě materiálové vztahy a hraniční podmínky).

Pozn o zákonech zachování. – Zákony zachování lze napsat ve tvaru

$$\frac{dX}{dt} + I = P, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial x}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i} = p.$$

První člen popisuje časovou změnu dané veličiny, druhý tok a třetí jiné vnější vlivy, ztráty, apod. Z MR můžeme pro pole odvodit **zákon zachování energie** ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{e}_{vn} - \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}}{\sigma}, \quad \text{kde } u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}).$$

První člen popisuje časovou změnu hustoty energie, druhý energetický tok pomocí Poyntingova vektoru $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Pravá strana obsahuje vtištěnou (elektromotorickou) sílu a ztráty dané Jouleovým teplem.

Dalším důležitým zákonem zachování je **zákon zachování náboje**, který vyjadřuje rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Zákon zachování hybnosti napíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T} = -\vec{f},$$

kde první člen vyjadřuje hustotu hybnosti elektromagnetického pole $\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}$, druhý člen je symetrický tenzor toku hybnosti elektromagnetického pole $\mathbf{T} = -\vec{D}\vec{E} - \vec{B}\vec{H} + \mathbf{I}u$. Na levé straně pak je hustota síly $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$.

§ Řešení Maxwellových rovnic – potenciály a vlnová rce

Z MR vyplývá, že \vec{B} je „rotací něčeho“, tj. že vektorové pole \vec{B} je solenoidální, proto můžeme zavést vektorový potenciál

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Když dosadíme do MR (konkrétně do Faradayova zákona $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$), zjistíme, že je vhodné zavést navíc skalární potenciál ²

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Vyřešili jsme tedy dvě Maxwellovy rce (1. série, rce bez zdrojů; jsou tedy splněny identicky) a zjistili jsme, že k popisu elektromagnetických polí \vec{E} a \vec{B} potřebujeme čtyři potenciálové fce – skalární potenciál φ a vektorový potenciál \vec{A} .

Dané rce jsou invariantní vůči tzv. kalibrační transformaci, tj. pole \vec{E} a \vec{B} se nezmění pokud měníme \vec{A} a φ současně³ podle pravidel

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi.$$

Druhá série Maxw. rovnic pak dává do souvislosti potenciály a zdroje. Pro třetí Maxw. rci můžeme psát

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t) &= \rho/\varepsilon_0, \\ -\Delta\varphi - \partial(\nabla \cdot \vec{A})/\partial t &= \rho/\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Čtvrtou pak můžeme přepsat na

$$\begin{aligned} c^2\nabla \times \vec{B} - \partial\vec{E}/\partial t &= \vec{j}/\varepsilon_0, \\ c^2\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \partial(-\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t)/\partial t &= \vec{j}/\varepsilon_0, \end{aligned}$$

kde první člen pomocí vektorové identity

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

upravíme na

$$-c^2\Delta\vec{A} + c^2\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \partial\nabla\varphi/\partial t + \partial^2\vec{A}/\partial t^2 = \vec{j}/\varepsilon_0.$$

Nyní využijeme možnosti libovolné volby divergence \vec{A} , tj. chceme z těchto dvou rovnic separovat \vec{A} a φ a dát rovnicím jednotnou formu. Uděláme to tak, že vezmeme

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

² Neboť

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\partial(\nabla \times \vec{A})/\partial t, \\ \nabla \times (\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t) &= 0, \end{aligned}$$

a tedy $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$ je vektor, jehož rotace je rovna nule \rightarrow tento vektor je „gradientem něčeho“. Z elektrostatiky víme, že i samotné \vec{E} je „gradientem čehosi“, konkrétně $-\varphi$ (minus je věcí dohody), udělejme tedy to samé s $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$; používáme ten samý symbol, neboť v elektrostatickém případě člen $\partial\vec{A}/\partial t$ vymizí a dostaneme tedy $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

³ Pokud bychom měnili \vec{A} pouze samostatně dle vztahu $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$, tak se \vec{E} obecně změní.

čemuž se říká Lorentzova kalibrační podmínka (volba $\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}$ se nazývá kalibrace). Vidíme tedy, že prostřední dva členy v poslední rci se zruší, tj.

$$\Delta \vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2},$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Získali jsme tedy nový druh rovnic pro potenciály $\vec{\mathcal{A}}$ a φ , jež však mají stejný tvar pro všechny 4 naše fce $\varphi, \mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z$, jejich vyřešením pak z definičních vztahů pro potenciály můžeme dostat $\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{\mathcal{B}}$. Tato forma elektromagnetických zákonů je naprosto rovnocenná Maxw. rovnicím, často se však s ní lépe pracuje, neboť jde o tvar vlnové rce. Vidíme také, že v oblastech, kde nejsou náboje a proudy, není řešením těchto rovnic nevyhnutelně nulové $\vec{\mathcal{A}}$ a φ . Existují tak řešení, v nichž se určitý soubor $\vec{\mathcal{A}}$ a φ mění s časem, ale vždy se pohybuje dále rychlostí c – vidíme, že jde o elektromagnetické vlny.⁴

§ **Elektrostatika**

Nejjednodušší pole je pole statické, kde jsou všechny úplné časové derivace nulové (náboj nekoná pohyb). MR mají tvar

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= 0 & \nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Statické magnetické pole tedy neexistuje (vzniká pohybem náboje).

Základní úlohou elektrostatiky je spočítat elektrické pole těles, u kterých známe rozložení náboje. K tomu můžeme použít Gaussův zákon (vlastně první z MR) nebo vztah pro intenzitu elektrického pole.

Při použití elektrostatického potenciálu

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \varphi$$

dostaneme z MR **Poissonovu rovnici**

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

která se při nulové objemové hustotě náboje redukuje na **Laplaceovu rovnici**

$$\Delta \varphi = 0.$$

Představují tak vlastně podmínky, kterým musí potenciál elektrostatického pole vyhovovat.

⁴ Ve vakuu samozřejmě splňují vlnovou rci i pole $\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{\mathcal{B}}$; stačí např. použít operátor rotace na rci pro $\vec{\mathcal{A}}$ – protože je Laplace skalární operátor, můžeme ho prohodit s rotací, podobně i s časovou derivací, čímž přímo dostaneme

$$\Delta \vec{\mathcal{B}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{B}}}{\partial t^2} = 0.$$

Analogicky použitím vztahu $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \varphi - \partial \vec{\mathcal{A}} / \partial t$ dostaneme

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0.$$

§ Stacionární pole

Ve stacionárním stavu nezávisí žádná makroskopická veličina explicitně na čase (parciální derivace jsou tedy nulové). MR mají tvar

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= 0 & \nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= \vec{j}(\vec{r})\end{aligned}$$

Elektrické a magnetické pole jsou oddělené. Ve stacionárním elektrickém poli zůstává v platnosti Gaussův zákon. Pro pohyb náboje je vhodné zavést veličinu **elektrický proud**

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \int \vec{j} d\vec{S}.$$

Schopnost látky vést elektrický proud charakterizuje **vodivost**. Kromě proudu se zavádí pojem **napětí** jako rozdíl potenciálu mezi dvěma body $U_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B)$.

Proud musí vyhovovat **rovnici kontinuity**, která je vyjádřením ZZNáb

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad \text{resp.} \quad \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Ve vodiči vyjadřuje závislost proudu a napětí **Ohmův zákon**

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{resp.} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E},$$

kde σ je měrná vodivost. V tomto přiblížení se studují obvody ve stacionárním stavu.

V teorii stacionárního magnetického pole můžeme použít Ampérův resp. Biotův-Savartův zákon pro výpočet magnetického pole.

§ Kvazistacionární pole

V kvazistacionárním přiblížení připouštíme závislost na čase a zároveň klademe podmínku

$$\vec{j} \gg \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}.$$

MR můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) &= \rho & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Elektrické a magnetické pole je svázáno a vzniká **elektromagnetické pole**. Každá časová změna magnetického pole vyvolá vznik pole elektrického. Do teorie kvazistacionárního přiblížení patří **elektromagnetická indukce**. Bylo experimentálně zjištěno, že smyčkou umístěnou v magnetickém poli začne v určitých případech protékat proud. Tyto případy jsou:

- smyčka se začne vhodným způsobem pohybovat
- vhodným způsobem se začnou pohybovat zdroje magnetického pole
- smyčka i zdroje jsou v klidu, ale mění se magnetické pole uvnitř smyčky

Vznik indukovaného elektromotorického napětí tedy určuje změna celkového magnetického toku procházejícího plochou smyčky

$$U_F(t) = -\frac{d\Psi}{dt},$$

(tzv. **Faradayův zákon elektromagnetické indukce**). Směr indukovaného proudu určuje **Lenzovo pravidlo**: *Směr indukovaného proudu ve smyčce je takový, že vzniklé magnetické pole působí proti změně toku odpovědné za vznik indukovaného proudu* (tj. znaménko minus v rovnici). Zavedeme-li veličinu **vlastní indukčnost**, která charakterizuje schopnost vodiče vytvářet magnetické pole, vztahem

$$\Psi = LI,$$

dostaneme podle zákona elektromagnetické indukce

$$U_F = -L \frac{dI}{dt}.$$

V kvazistacionárním přiblížení se vyšetřují střídavé obvody s cívkou, kondenzátorem a odporem.

§ Nestacionární pole

Nejobecnější případ elektromagnetického pole je pole nestacionární. MR platí v nejobecnějším tvaru

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) & \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \vec{j}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

V nestacionárních polích musíme používat zobecněný Ampérův zákon s celkovou nestacionární hustotou proudu (tj. první člen v následující řci popisuje výslednou hustotu kondukčního [přemísťování volných nositelů náboje v látkovém prostředí] i konvekčního [volný pohyb nositelů náboje v prázdném prostoru] proudu, třetí má význam hustoty posuvného proudu v dielektrikách [pohyb nábojů v dielektriku při změně jeho polarizace, tj. časové změny vázaných nábojů])

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Kromě volného a polarizačního proudu musíme tedy zavést **Maxwellův proud**, který není spojen s pohybem nábojů (žádný pohyb skutečných nábojů nepopisuje), ale s časovou změnou elektrického pole (existuje tedy všude [i ve vakuu], kde dochází k časovým změnám $\vec{E} \neq 0$, tj. typicky existence elektromagnetických vln = magnetické pole ve vakuu vzniká pouze v důsledku změn pole elektrického a je tedy buzeno pouze Maxwellovým proudem).

2.3 STR

§ Postuláty STR

STR je teorií prostoru a času, OTR je teorií pohybu a gravitace.

Nerelativistická mechanika je formulována vzhledem k inerciálnímu vztažnému systému. S jedním inerciálním systémem jich však zavádíme nekonečně mnoho a nerelativistická mechanika nám neposkytuje prostředky k určení „primárního“ nepohyblivého inerciálního vztažného systému.

Einsteinovo řešení tohoto rozporu spočívá v tom, že není principiálně možné žádným fyzikálním pokusem rozhodnout, který ze dvou inerciálních vztažných systémů, které se vůči sobě pohybují, je v klidu a který v pohybu. Tyto úvahy formuloval jako **speciální princip relativity**: *všechny inerciální systémy jsou rovnocenné pro formulaci všech fyzikálních zákonů tj. všechny fyzikální zákony lze vyjádřit rovnicemi, jež mají stejný tvar ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem konstantní rychlostí.*

Druhým principem, na kterém je postavena STR je **princip konstantní rychlosti světla** (Einstein vycházel z experimentálních výsledků, zvláště z Michelsonova-Morleyho pokusu): *světelné signály se šíří v prázdném prostoru přímočaře, se stejnou konstantní rychlostí c ve všech časech, ve všech směrech a ve všech inerciálních systémech.*⁵

§ Lorentzova transformace

Pokud požadujeme, aby platily dva základní principy STR, bude vztah mezi dvěma systémy popsány parametry $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$ a (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) dán **Lorentzovou transformací**. Ve speciálním případě, kdy osy x^1 a x'^1 splývají a systémy se vůči sobě pohybují rychlostí v pouze ve směru této osy, mluvíme o speciální Lorentzově transformaci, kterou můžeme napsat ve tvaru

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

kde se používá značení

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Pokud jsou rychlosti tak malé, že můžeme zanedbat veličiny řádu β , přechází Lorentzova transformace v nerelativistickou transformaci **Galileovu**

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

+ *Odvození*: Vycházíme z toho, že musí být dodržena zásada rovnosti všech inerciálních systémů, tj. abychom konečným hodnotám jednoho systému přiřadili konečné hodnoty druhého systému, musí být transformace lineární. Dále bereme v úvahu zřejmou

⁵ Skutečnost, že se světlo ve vakuu šíří ve všech in. sys. všemi směry stejnou rychlostí, plyne vlastně již ze speciálního principu relativity a z Maxwellových rovnic – z nich vyplývá, že se elmag záření šíří ve vakuu všemi směry stejnou rychlostí c ; rce pak jako všechny fyzikální zákony, musí platit ve všech in. sys., musí tedy ve všech in. sys. platit i jejich důsledky.

rovnost všech směrů kolmých na směr pohybu systémů \rightarrow musí tedy platit $y' = y$, $z' = z$. Napišme tedy výchozí lineární transformaci

$$x' = c_{11}x + c_{10}t, \quad t' = c_{01}x + c_{00}t.$$

Počátek O' se vůči S pohybuje rychlostí $v \rightarrow$ pro $x' = 0$ je $x = vt$, tedy

$$0 = c_{11}vt + c_{10}t, \quad \rightarrow \quad c_{10} = -vc_{11}.$$

c_{11} si prozíravě označíme γ a tedy $x' = \gamma(x - vt)$; z rovnosti systémů též plyne, že inverzní transformace se projeví jen změnou znaménka u v , tj. $x = \gamma(x' + vt')$. Dále dle principu konstantní rychlosti světla platí, že vyšleme-li v okamžiku $O=O'$ světelný signál ve směru x , x' je jeho rychlost vůči S i S' rovna c , tj. $x = ct$, $x' = ct'$. Po dosazení tak máme

$$ct' = \gamma t(c - v), \quad ct = \gamma t'(c + v),$$

vzájemně vynásobíme

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2),$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Pro určení c_{01} a c_{00} z $x' = \gamma(x - ct)$ a $x = \gamma(x' + ct')$ vyloučíme x' , po přímočarém výpočtu vyjde

$$t' = \gamma(t - vx/c^2).$$

Vidíme tedy, že Lorentzova transformace transformuje netriviálně i časovou souřadnici, tj. čas ztrácí svůj absolutní význam, který měl v klasické mechanice; prostor a čas tak jsou relativní, absolutní je pouze jejich spojení – prostoročas; v relativistické teorii tak není invariantní vzdálenost mezi dvěma body $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, ale zachovává se **prostoročasový interval** nebo též čtyřinterval ⁶

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2,$$

$$(ds)^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Též můžeme psát

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta), \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\eta_{\alpha\beta}$ je tzv. **Minkowského tenzor**.⁷

Vztah $x'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha$ může vyjadřovat nejen speciální Lorentzovu transformaci, ale libovolnou Lorentzovu transformaci. Lorentzova transformace ovšem musí zachovávat čtyřinterval, což klade omezení na její matici Λ^μ_α , neboť pro přírůstky souřadnic máme

$$\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \Delta x^\alpha, \quad (*)$$

⁶ „Fyzikálním důvodem je princip konstantní rychlosti světla neboť prostoročasový interval vlastně popisuje šíření kulové vlny vyšlé z koincidujících počátků $O = O'$ v čase $t = t' = 0$.“

⁷ Má dva spodní indexy, je to tedy tenzor kovariantní – spodní indexy = **kovariantní**, horní indexy jsou tzv. **kontravariantní**.

odkud

$$(\Delta s')^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x'^{\mu} \Delta x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Delta x^{\alpha} \Delta x^{\beta}.$$

Aby bylo $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$, musí zřejmě být a stačí

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta},$$

což je právě nutná a postačující podmínka pro to, aby šlo o Lorentzovu transformaci.

Diferencováním dostaneme vztah analogický k (*), tj.

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} dx^{\alpha}.$$

Ovšem x'^{μ} je funkcí čtyř proměnných $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ a jeho diferenciál proto lze vyjádřit též ve tvaru

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha},$$

odtud

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}.$$

Skalár je invariantem Lorentzovy transformace; kontravariantní čtyřvektor se transformuje stejně jako přírůstky souřadnic, tj. dle vztahu

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha};$$

kovariantní čtyřvektor se transformuje pomocí inverzní Lorentzovy matice, tj. dle vztahu

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha};$$

čtyřtenzory se pak transformují způsobem odpovídajícím poloze indexů, tj. např.

$$T'^{\mu\nu}_{\rho} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \cdot \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}} T^{\alpha\beta}_{\gamma}.$$

Kromě kovariantního lze zavést i kontravariantní Minkowského čtyřtenzor jako matici inverzní k $\eta_{\alpha\beta}$ pomocí vztahu $\eta^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}$, přičemž $\eta^{\alpha\beta}$ má složky stejné jako $\eta_{\alpha\beta}$. Pomocí kovariantního Minkowského tenzoru pak můžeme snižovat indexy libovolného tenzoru, např. $A_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} A^{\beta}$; analogicky pomocí kontravariantního Mink. tenz. lze indexy zase zvyšovat.

§ Základní důsledky Lorentzovy transformace

Měříme-li délku nějakého předmětu, který se vůči nám pohybuje, zjistíme, že se nám jeví kratší, než kdyby byl v klidu ⁸:

$$l = l_0 / \gamma.$$

⁸ Tj. mám tuhou tyč ve směru x, x' . Délka v S' je $l' = x'_2 - x'_1$. Délka v S je $x_2 - x_1$. Zajímá mne tedy rozdíl souřadnic obou konců tyče za podmínky, že jak hodiny v místě x_1 , tak hodiny v místě x_2 udávají stejný čas $t_1 = t_2 = t$, pak

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Dochází k tzv. **kontrakci délek**. Dalším jevem plynoucím z Lorentzovy transformace je **dilatace času** – nejrychleji jdou hodiny, které jsou vůči pozorovateli v relativním klidu⁹

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0.$$

Relativistický vzorec pro **skládání rychlostí**¹⁰ má tvar

$$u = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}}.$$

Jedním z důsledků Lorentzovy transformace je i **relativita současnosti** – snadno se přesvědčíme¹¹, že dvě „současné“ události, které nejsou soumírné se v STR neodehrávají ve stejný čas. Současnost není absolutní pojem.

§ Relativistická kinematika a dynamika

Vzhledem k tomu, že časové intervaly jsou relativní, zavádí se interval **vlastního času** (tj. času měřeného ideálními hodinami pohybujícími se s částicí) pomocí prostoročasového intervalu

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2.$$

Vlastní čas je čas udávaný hodinami v systému, vůči kterému je dané těleso v klidu.

Pohybový stav v STR určujeme pomocí **čtyřrychlosti**

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{u}),$$

(jejíž derivací dle vlastního času samozřejmě dostaneme čtyřzrychlení $a^\mu = du^\mu/d\tau$) resp. **čtyřhybností**

$$p^\mu = m_0 u^\mu,$$

jejíž složky tedy jsou

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Vidíme tedy, že v STR je hmotnost tělesa závislá na jeho pohybovém stavu

$$m = \gamma m_0,$$

pohybující se těleso je těžší. Pomocí vztahu $E = mc^2$ můžeme čtyřhybnost přepsat jako $p^\mu = (E/c, \vec{p})$. Pokud použijeme pohybovou rovnici analogickou nerelativistické teorii, dostaneme **čtyřsílu**

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu) = \gamma(c \frac{dm}{dt}, \vec{F}).$$

⁹ Odvození analogické předchozímu, tentokrát mne zajímá interval za podmínky, že $x'_1 = x'_2 = x$

¹⁰ Odvození

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}} = \dots$$

¹¹ Tedy

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - (v/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

odtud přímo vidíme, že jsou-li události v S současné $t_2 = t_1$, ale nejsou soumírné ($x_2 \neq x_1$), nebudou současné ani v S'.

Snad nejznámější vztah, který Einstein dostal z postulátů STR je **ekvivalence hmoty a energie**

$$E = mc^2 = E_k + m_0c^2 = E_k + E_0.$$

Těleso má tedy energii, i když je v klidu; proto se tato energie nazývá klidová energie. Znamená to, že kromě jiných forem energie, jako je potenciální, kinetická, elektromagnetická, apod., se energie může projevovat i ve formě hmoty. Hmota a energie tedy jsou dva projevy jedné entity. Platí jediný zákon zachování hmoty-energie; hmota může zanikat, pokud při tomto procesu vzniká dostatečné množství energie. Často je pro relativistickou energii užitečně použít vztah

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2.$$

§ Lorentzova transformace a Maxwellovy rovnice

Z Galileovy transformace vyplývá, že se nemění zrychlení (je to druhá derivace souřadnic podle času), nemění se vzdálenost $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ částic a dají se vektorově skládat rychlosti. Tomu ale neodpovídají vlastnosti elektromagnetických vln (šíří se konstantní rychlostí c nezávisle na rychlosti zdroje). Elektromagnetické pole (MR) je lorentzovsky invariantní, ale nikoliv galileovsky. Nerelativistická teorie je limitním případem relativistické pro malé rychlosti, nerelativistickou mechaniku je tedy třeba při vysokých rychlostech „opravit“. Pokud teorii elektromagnetického pole formulujeme pomocí MR, je tato rovnou relativistická.

Zavedme čtyřrozměrný analog Laplaceova operátoru, tj. skalární součin čtyřgradientu¹² se sebou samým, dostaneme d'Alembertův operátor

$$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square^2,$$

pak můžeme rce pro elmag potenciály zapsat ve tvaru

$$\square^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square^2 \vec{\mathcal{A}} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}.$$

Veličiny na pravých stranách rovnic jsou ρ, j_x, j_y, j_z , dělené konstantou ε_0 , jež je univerzální ve všech souř. sous., proto se veličiny $\rho/\varepsilon_0, j_x/\varepsilon_0, j_y/\varepsilon_0, j_z/\varepsilon_0$ transformují jako čtyřvektor. D'Alembert se nemění při změně souřadnicové soustavy, proto se i veličiny $\varphi, \mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z$ musí transformovat jako čtyřvektor, tj.

$$\mathcal{A}_\mu = (\varphi, \vec{\mathcal{A}}),$$

to co nazýváme skalární a vektorový potenciál, jsou ve skutečnosti různé aspekty téže fyzikální veličiny. \mathcal{A}_μ nazýváme **čtyřpotenciál** a j_μ **čtyřproud**. Celkem tedy získáme

$$\square^2 \mathcal{A}_\mu = \frac{j_\mu}{\varepsilon_0},$$

kde fyzikální význam těchto rovnic je stejný jako význam Maxwellových rovnic, navíc z tohoto tvaru je vidět invariance elektrodynamiky vůči Lorentzově transformaci. Spolu se

¹²

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

zákonem zachování náboje $\nabla_\mu j^\mu = j^{\mu, \mu} = 0$ dává základní zákon elektromagnetického pole.

Tenzor elektromagnetického pole = antisymetrický tenzor druhého řádu $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, jehož 6 nezávislých složek je definováno pomocí $\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{\mathcal{B}}$, popisuje elektromagnetické pole

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{E}_1/c & -\mathcal{E}_2/c & -\mathcal{E}_3/c \\ \mathcal{E}_1/c & 0 & \mathcal{B}_3 & -\mathcal{B}_2 \\ \mathcal{E}_2/c & -\mathcal{B}_3 & 0 & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{E}_3/c & \mathcal{B}_2 & -\mathcal{B}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathcal{F}'_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu},$$

tj. elmag pole je absolutní, el a mag zvlášť jsou relativní.

Pomocí tenzoru elmag pole můžeme též zapsat Maxw. rce – druhá série bude

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}_{, \beta} = \mu_0 j^\alpha,$$

první pak

$$\mathcal{F}_{[\alpha\beta, \gamma]cycl.} = 0,$$

kde $\mathcal{F}_{[\alpha\beta, \gamma]cycl.}$ značí $\mathcal{F}_{\alpha\beta, \gamma} + \mathcal{F}_{\beta\gamma, \alpha} + \mathcal{F}_{\gamma\alpha, \beta}$, čárka samozřejmě označuje parciální derivaci $\mathcal{F}_{\alpha\beta, \gamma} = \partial \mathcal{F}_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma$.

Nebo můžeme zapsat např. pohybovou rci pro částici v elmag poli

$$F_{Lor.}^\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu) = q \mathcal{F}_\nu^\mu u^\nu.$$

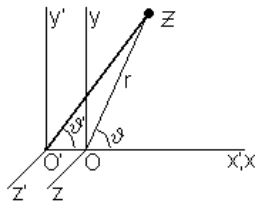
§ Doplňky & (h)různé ...

Interval časové povahy, časupodobný = interval mezi dvěma událostmi A, B, pro něž lze nalézt inerciální vztažnou soustavu, ve které budou tyto události souměstné; $s_{AB} < 0$.

Interval prostorové povahy, prostorupodobný = interval mezi dvěma událostmi A, B, pro něž lze nalézt takovou inerciální vztažnou soustavu, ve které budou tyto události současné. Mezi takovými událostmi nemůže existovat příčinná spojitost; platí $s_{AB} > 0$.

• Relativistický výklad aberace stálic

Aberace stálic = odklonění světelného paprsku vznikající skládáním rychlosti světla s rychlostí pozorovatele. Předpokládejme, že ze zdroje světla Z dorazí paprsek do počátku



O klidového systému S právě v čase $t = 0$. Označíme-li r vzdálenost $|OZ|$ a ϑ úhel, který svírá tento paprsek s osou x , přičemž pro jednoduchost budeme předpokládat, že

uvažovaný paprsek leží v rovině xy , pak pro parametry x, y, z, t , které určují místo a čas vyslání světla, máme

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = 0, \quad t = -r/c.$$

Jsou-li x', y', z', t' odpovídající parametry v systému S' , z Lorentzovy transformace pro x' a y' plyne

$$x' = \frac{r \cos \vartheta + vr/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' (= y) = r \sin \vartheta.$$

Z obrázku je vidět, že $\operatorname{tg} \vartheta' = y'/x'$, takže z předcházejících vztahů dostáváme

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sin \vartheta \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \vartheta + v/c},$$

což již je vzorec pro aberaci stálic. Je-li $\vartheta = \pi/2$ a položíme-li $\vartheta' = \pi/2 - \varepsilon$, redukuje se vzorec na „klasický“

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \doteq \frac{v}{c} = 20,47''.$$

• Dopplerův jev

Základem je transformace časového intervalu/periody záření; příčinou je dilatace času

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\text{perioda v } xyzt}{\text{perioda v } x'y'z't'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

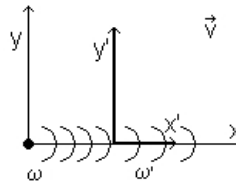
pokud záření letí podél osy x .

V případě šikmého dopadu pod úhlem ϑ budeme mít

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

radiální rychlost je $v_r = v \cos \vartheta$ a tedy pro $v \ll c$ dostaneme klasický

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda} = \frac{v_r}{c}.$$



Podélný Dopplerův jev je relativistický Dopplerův jev zjišťovaný pozorovatelem v místě, jímž prochází vektorová přímka rychlosti vzájemného pohybu zdroje a pozorovatele. Výsledek měření bude

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}},$$

kde horní znaménka platí při vzájemném vzdalování zdroje a pozorovatele.

Odvození též

$$k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} k^{\nu},$$

$$k'^0 = \Lambda^0_0 k^0 + \Lambda^0_1 k^1 = \gamma \frac{\omega}{c} \mp \frac{v}{c} \gamma \underbrace{k^x}_{\omega/c} = \gamma \frac{\omega}{c} (1 \mp v/c),$$

tj.

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 \mp v/c}{1 \pm v/c}}.$$

Příčný Dopplerův jev je relativistický Dopplerův jev pozorovaný ve směru kolmém na rychlost zdroje; je přímým důsledkem dilatace času. Je-li ν_0 frekvence zdroje, který je vzhledem k pozorovateli v klidu, pak pohybuje-li se zdroj vzhledem k pozorovateli rychlostí v kolmou na směr pozorování, naměří pozorovatel

$$\nu = \nu_0 \gamma^{-1}.$$

Analogicky předchozímu, jen prohozeny souřadnice x a y , tj. bereme

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \pm\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mp\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj.

$$k'^0 = \Lambda^0_0 k^0 + \Lambda^0_2 \underbrace{k^2}_{k_y=0},$$

$$\omega' = \gamma \omega.$$

Literatura a zdroje

- Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky, Fragment, Praha 2000
- Sedlák B., Štoll I.: Elektrina a magnetismus, Academia, Univerzita Karlova, Praha 1993
- Sedlák B. Bakule R.: Elektrina a magnetismus, Scripta SPN, Praha 1973
- D.Halliday, R.Resnick, J.Walker: Fyzika, Vutium, Brno 2000
- Leoš Dvořák, Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru, Praha, SPN, 1984
- Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz, Prometheus, 1999
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Teorie relativity, Doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.
- ... výpisky k souborce od Káti Kúsově ...

Kapitola 3

Jaderná a subjaderná fyzika

Jaderná a subjaderná fyzika: Stavba atomového jádra. Klasifikace mikročástic. Slabá a silná interakce. Jaderné reakce.

- Stavba atomového jádra.
- Klasifikace mikročástic.
- Silná a slabá interakce, jaderné reakce.

3.1 Atomové jádro

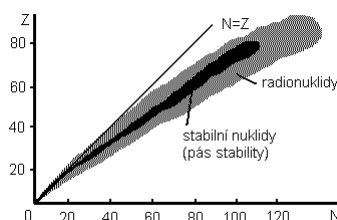
Atomové jádro – centrální oblast atomu zaujímající prostor řádově 10^{-15} m (tj. 1 fm též užívána jednotka 1 F (Fermi)); v této oblasti je soustředěna skoro celá hmotnost atomu (rozměr atomu $\approx 10^{-10}$ m, proton 1840-krát těžší než elektron [$\approx 10^{-27}$ kg a 10^{-31} kg]).

A.j. má kladný elektrický náboj, sestává se z nejméně jednoho protonu a „libovolného“ počtu neutronů (dohromady nukleony) vázaných jadernými silami.

Objeveno při **Rutherfordově experimentu** – sledován rozptyl α -částic na tenké kovové fólii. V rozporu s tehdejší představou o struktuře atomu („puďinkový model“) bylo zjištěno, že α -částice většinou velmi lehce fólií projdou, ale na druhé straně dochází k jejich rozptylu i do značně velkých úhlů. Takové výsledky je možno objasnit představou o velmi malém, ale velmi těžkém jádru s kladným nábojem.

Protonové číslo (atomové číslo), Z , je def. jako počet protonů v jádře, zároveň určuje el. náboj jádra: $Q = Ze$. **Neutronové číslo**, N , udává počet neutronů, **nukleonové číslo** (hmotnostní číslo), A , počet nukleonů v jádře, $A = Z + N$. Zápis A_ZX .

Zajímáme-li se o jádra jen z hlediska jaderných reakcí, mluvíme obecně o nuklidech. Nuklidy se stejným Z , ale rozdílným N jsou **izotopy**. **Izobary** jsou nuklidy se stejným A a různým Z . **Izotony** jsou nuklidy se stejným N a různým A resp. Z . Nuklidy klasifikujeme pomocí **nuklidového diagramu** (viz obr), pro stabilní nuklidy jsou v těchto diagramech udány relativní četnosti výskytu (%), pro radionuklidy poločasy rozpadu.



Informace o velikosti a struktuře jádra lze získat ostřelováním e^- o vysoké energii a pozorováním, jak jádra odchylují dopadající e^- . Energie musí být tak velká, aby jejich de Broglieho vlnová délka byla menší než detaily zkoumané jaderné struktury. Poloměr jádra má pouze orientační význam (jádro není obecně sféricky symetrické ani ostře ohraničeno, viz kvantovka), přesto experimenty s rozptylem umožňují připsat jádru efektivní poloměr: $R = R_0 A^{1/3}$, kde $R_0 \approx 1,2$ fm.¹

§ Vazbové síly, vazebná energie jádra

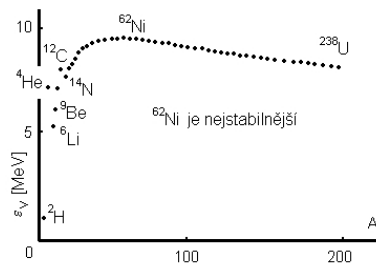
Hmotnosti atomů měřeny s velkou přesností pomocí moderních hmotnostních spektrometrů a z jaderných reakcí. Tyto hmotnosti udáváme pomocí **atomové hmotnostní jednotky** $u = 1/12$ hmotnosti atomu ${}^{12}\text{C}$, $1 u \doteq 1,661 \cdot 10^{-27}$ kg $\rightarrow A$ vyjadřuje hmotnost nuklidu v u zaokrouhlenou na nejbližší celé číslo.

¹ *Rozptylové experimenty – účinný průřez*, σ , je veličina sloužící pro kvantitativní popis rozptylu částic na rozptylových centrech, popř. reakce svazku částic s „terčíkovými“ částicemi; σ je výtěžek procesu na jednotkový tok nalétajících částic, jednotku času a jedno rozptylové centrum terče: $\sigma = R/j_0 t N_T$ (R je výtěžek procesu, j_0 tok nalétajících částic, N_T celkový počet terčíkových center).

Diferenciální účinný průřez, $d\sigma/d\Omega$, podíl počtu rozptýlených či v reakci emitovaných částic za jednotku času do elementu prostorového úhlu $d\Omega$ a hustoty toku j dopadajících částic.

Charakteristické jednotky σ : $1 \text{ fm}^2 = 10^{-30} \text{ m}^2$; $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$ (1 barn = „stodola“).

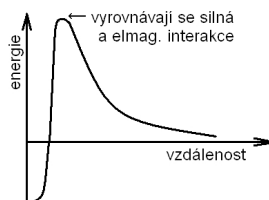
Vazebná energie jádra je energie, která by se uvolnila při vzniku jádra z volných nukleonů, resp. energie potřebná k rozbití jádra na jednotlivé nukleony; často se pracuje s vazebnou energií na 1 nukleon $\varepsilon_V = E_V/A$. **Hmotnostní schodek** je rozdíl mezi klidovou hmotností jádra a Σ klidových hmotností všech nukleonů v jádře; tj. hmotnostní schodek je s vazebnou energií spojen vztahem $E_V = \Delta mc^2$. (Energie odpovídající 1 u tedy je 931,5 MeV.) Pokles vazebné energie pro těžké nuklidy umožňuje **jaderné štěpení**, pokles křivky pro malá čísla říká, že k uvolnění energie může dojít i sloučením dvou lehkých nuklidů na 1 středně těžký – **jaderná fúze**, viz obr.



Hodnoty energie jádra jsou podobně jako energie atomu kvantovány – jádro se může nacházet pouze v diskretních kvantových stavech s danou energií. Typické energie jsou zde MeV (u atomů eV). Přechází-li jádro z vyšší hladiny na nižší, je emitován γ foton.

Pro udržení jádra pohromadě musí působit síla dostatečně silná k překonání odpudivé el. síly mezi protony, musí udržet protony i neutrony v nepatrném objemu a musí být silou krátkého dosahu (její působení nesahá příliš daleko za hranice „povrchu“ jádra) = **jaderná síla**. Podle současných představ nepatří mezi fundamentální fyzikální síly, ale jedná se až o druhotný projev silné síly, která váže kvarky do neutronů a protonů.

Potenciálová jáma atomového jádra = přitažlivý potenciál jaderných sil, graf závislosti pot. energie na vzdálenosti od středu jádra má tvar „jámy“ se strmými okraji, hloubka zhruba odpovídá vazebné energii částice v jádře a šířka jámy dosahu jaderných sil. Potenciálový val atomového jádra = potenciál odpudivých sil, který vzniká superpozicí elektrostatických a odstředivých sil, a který zabraňuje částicím nemajícím dostatečnou kinetickou energii proniknout do jádra a dostat se tak pod převažující vliv přitažlivého potenciálu jaderných sil, viz obr.



§ Modely jádra

Slupkový model atomového jádra (model nezávislých částic) = jednotlivé nukleony obsazují diskretní energetické hladiny (slupky) obdobně jako e^- v atomovém obalu, dobře popisuje excitace atomových jader, kterých se zúčastňuje jen malý počet nukleonů, selhává v případě jaderných reakcí; jednočásticový kvantový model.

Kapkový (hydrodynamický) model a.j. (kolektivní model) = jádro chápáno jako kapka nukleonové kapaliny, ve které se projevují objemové i povrchové síly, pomocí něj lze objasnit některé členy popisující vazbovou energii ² a hodí se pro názorné představy průběhu jaderných reakcí – syntézy a štěpení; kolektivní, ale nekvantový.

Zobecněný model a.j. = odstraňuje nedostatky a spojuje výhody předchozích dvou. Skládá se ze dvou podsystémů – kolektivní (počet nukleonů odpovídající nejbližšímu mag. číslu ³) a jednočásticový (zbytek nukleonů). Kolektivní podsystém je popisován jako kapka kvantové kapaliny, jež může rotovat a vibrovat pouze v dovolených kvantových stavech. Jednočásticový podsystém je popisován analogicky slupkovému modelu.

§ Jaderné reakce, radioaktivita

Radioaktivita = jev samovolné/spontánní jaderné přeměny radionuklidu, která je doprovázena emisí radioaktivního záření α, β^-, β^+ nebo γ , záchytem elektronů ⁴, emisí protonů nebo emisí fragmentů. **Radioaktivní rozpad** = samovolně probíhající jednorázová (neřetězová) jaderná přeměna; radioaktivní nuklid samovolně emituje nějakou částici a mění se na jiný, který zaujímá odlišné políčko v diagramu nuklidů. R. r. poskytl první důkaz, že zákony řídící subatomový svět mají statistický charakter. Neexistuje vůbec žádný způsob, jak předpovědět, jestli určité jádro ze vzorku bude mezi jedním z malého počtu jader, která se rozpadnou v následující sekundě. U všech jader je pravděpodobnost rozpadu stejná. Statistickou podstatu procesu rozpadu vyjádříme tvrzením, že pro vzorek s N radioaktivními jádry je rychlost rozpadu $-dN/dt$ úměrná N : $-dN/dt = \lambda N$, kde λ je **rozpadová konstanta** [s^{-1}], integrací předchozího vztahu dostaneme **rozpadový zákon**:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

kde N_0 je počet jader v čase $t = 0$. Analogicky

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = \Delta N / \Delta t,$$

kde A je aktivita (celková rychlost rozpadu, jednotka 1 Bq = 1 rozpad za 1 s). Dále zavedeme střední dobu života τ a poločas rozpadu $T_{1/2}$, tj. dobu, po které N i A klesnou na 1/2 původní hodnoty. Odtud díky $A_0/2 = A_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$ dostaneme

$$\lambda = 1/\tau = \ln 2/T_{1/2},$$

$$A(t) = \lambda N(t).$$

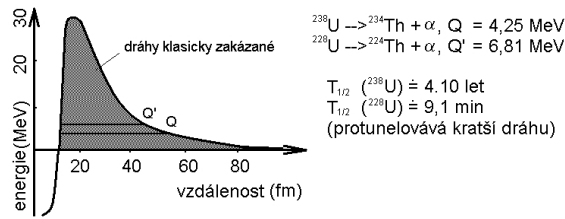
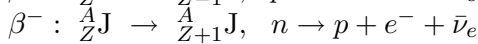
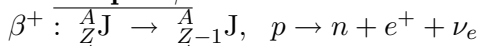
Rozpad α :

${}^A_Z J \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} J, \alpha = {}^4_2 \text{He}$, korpuskulární záření, kladné, odstítnelné např. listem papíru, energetické spektrum diskrétní. Model α rozpadu: částice α vzniká v jádře ještě než unikne, následně tuneluje ven skrz potenciálovou bariéru soustavy α a zbytkového jádra. Typické poločasy rozpadu: 10^{-7} s až 10^{10} let, viz obr.

² Weizsäckerova formule – empir. vztah pro výpočet vazebné energie jádra E_V určeného čísly Z a A .

³ Magická čísla = hodnoty protonového, neutronového resp. nukleonového čísla, pro která jsou atomová jádra stabilnější než jiná jádra. Existenci mag. čísel a jejich hodnoty objasňují propracovanější slupkové modely jádra. 2, 8, 20, 28, 50, 82 ...

⁴ Jaderná přeměna, při níž dochází k zachycení a pohlcení elektronu slupky k , nejbližší k jádru; ${}^A_Z X + {}^0_{-1} e \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e$

**Rozpad β :**

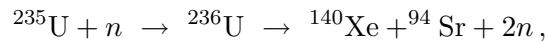
Korpuskulární záření, jež se dá odstínit např. plechem. Typické poločasy rozpadu jsou cca 10^{-2} s až 10^{15} let. Emise $e^{-/+}$, když v jádru nejsou??? Vznikají v průběhu emise. Získáváme tak indicii, že n i p nejsou skutečně fundamentální částice. Při β rozpadu je energie reakce rozdělena mezi e^- a $\bar{\nu}_e$ (e^+ a ν_e), e^- (e^+) tak dostává energii od 0 do jisté maximální hodnoty \rightarrow spektrum je spojité. Neutrina viz str. 167.

Přechod γ :

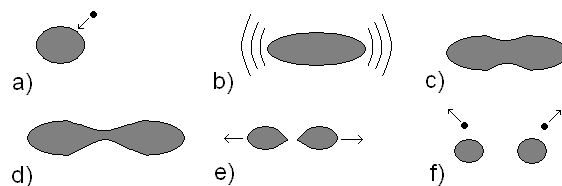
$\frac{A}{Z}\text{J}^* \rightarrow \frac{A}{Z}\text{J}$, excitované jádro vyzáří po deexcitaci γ foton, nedochází ke změně složení jádra, spektrum diskrétní/čarové, zastaví až silná vrstva olova.

Jaderná reakce = jaderná přeměna (proces, při kterém dochází ke změně ve složení jádra) vyvolaná vnějším zásahem – zpravidla interakcí s další částicí. Může docházet ke změně struktury jader i ke změně pohybových stavů (nepružný rozptyl).

Jaderné štěpení = jaderná reakce při níž dochází k rozštěpení původního jádra na nejméně dvě částice či nová lehčí jádra (fragментy). Typické štěpení např.



oba fragментy vysoce nestabilní, prodělají řadu β rozpadů až končí stabilním produktem. Ideální „projektily“ vyvolávající štěpení jsou tepelné neutrony = neutrony v tepelné rovnováze s okolím, tj. $E_k = kT$, pro pokojovou teplotu je $E_k \approx 0,025 \text{ eV}$, neutrony jsou bez náboje \rightarrow při přibližování k jádru na ně nepůsobí odpudivé síly. Představa jaderného štěpení podle Bohra a Wheelera viz obr.



Obrázek 3.1: Představa jaderného štěpení: a) jádro terčiku ^{235}U absorbuje tepelný neutron, b) vytvoří se ^{236}U s nadbytkem energie, dochází k divokým oscilacím, c) při pohybu se může vytvořit útvar s úzkým středem, d) Coulombovská síla napíná útvar do délky, e) dojde ke štěpení, f) fragментy se oddělí a odpaří se několik neutronů

Jaderná fúze = jaderná reakce, při níž dochází ke slučování lehčích jader na jádra těžší. Jako exotermická (viz dále) může j. f. probíhat pouze pro jádra, která jsou lehčí než železo a nikl (mají v absolutní hodnotě nejvyšší vazebné energie na jeden nukleon);

nutno překonat elektrostatické síly a přiblížit se tak na dosah sil jaderných \rightarrow vysoká $T =$
 $=$ termonukleární reakce.

Pozn.:

Dominující interakcí v jaderných reakcích je silná interakce, podstatný vliv však může mít i slabá interakce (přeměna β) nebo elmag. interakce (potenciálový val atomového jádra).

Energie reakce, Q , je přebytek celkové kinetické energie částic po jaderné reakci nad celkovou kinetickou energií částic před reakcí.

$Q > 0 \dots$ exoenergická/exotermická reakce

$Q < 0 \dots$ endoenergická/endotermická reakce

Čerenkovovo záření – vzniká, když rychlost částice je větší než rychlost světla (v daném prostředí!!!, tj. vždy je menší než c). Šíří se v kuželu, který svírá se směrem letící částice ostrý úhel θ , $\cos \theta = c/nv$, kde n je index lomu prostředí. Jde o analog rázové vlny u nadzvukové rychlosti.

Kosmické záření – převážně korpuskulární charakter, dopadá na Zemi z okolního kosm. prostoru (primární složka) nebo z horních vrstev atmosféry (sekundární složka); až energie 10^{20} eV (větší než v pozemských urychlovačích). Zdrojem procesy ve hvězdách, při jejich zániku (novy, SN), jádra galaxií \dots

3.2 Interakce

Základní fyzikální interakce: **gravitační, elektromagnetická, silná, slabá**. Interakce je obecnější než síla, zahrnuje nejen silové působení částic, ale i mechanismy jejich rozpadů.

Typ	Relativní síla	Dosah [m]	Zprostředkovatel
silná	1	10^{-15} (hadrony) ∞ (kvarky)	gluony
elmag	10^{-2}	∞	foton
slabá	10^{-13}	10^{-18}	intermed. bosony $W^{+/-}, Z^0$
gravit	10^{-38}	∞	graviton ???

Gravitační interakce: projevuje se univerzálně mezi všemi typy hmotných objektů, dosah ∞ , nejslabší známá, tj. v mikrokosmu nemá vliv, v megakosmu dominuje (neexistuje záporná) ...

Elektromagnetická interakce: v klasické i relativistické fyzice popsáno Maxwellem, kvantový popis možný v rámci kvantové teorie pole. Předpokladem je existence el. náboje nebo magnetického momentu u interagujícího objektu. Dosah ∞ , na rozdíl od grav. se neuplatňuje v megakosmu – dochází ke kompenzaci z důvodu existence + a -. Má největší škálu projevů (drží atomy, výrazný projev u různých typů chem. vazby ...). Na atomové úrovni působí dle Coulombova zákona, hlubší pohled ukazuje, že e^- pociťuje přítomnost druhého e^- tak, že si s ním vyměňuje fotony (popisuje kvantová elektrodynamika). Kdyby e^- emitoval γ a jeho stav zůstal nezměněn, nezachovávala by se energie. K porušení ZZE ale nedojde uvažíme-li relace neurčitosti $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \rightarrow$ můžeme přecherpat jistou energii ΔE , za předpokladu, že ji vrátíme během času Δt , jež je dán relacemi neurčitosti.

Silná interakce: z dnešního pohledu představuje základní interakci mezi kvarky, krátký dosah, nejsilnější. Jaderná pouze zbytkový projev s. i. mezi kvarky tvořícími interagující hadrony; s. i. mezi kvarky = tzv. asymptotická volnost = dochází k růstu přitažlivé síly na prakticky neomezenou hodnotu už na vzdálenostech přesahujících lineární rozměry hadronů, v těsné blízkosti je naopak relativně malá. Uplatňuje se ve stavbě hadronů a v jejich vzájemném působení i při jejich rozpadu.

Slabá interakce: projevuje se univerzálně u všech typů elementárních částic, velmi malý dosah. Nevytváří žádné vázané systémy částic, ale projevuje se pouze rozpadem elementárních částic (viz β). Kvantem jsou intermediální bosony (na rozdíl od fotonu hmotné ⁵: W^\pm má hmotnost $80,6 \text{ GeV}/c^2$, neutrální Z má $91,2 \text{ GeV}/c^2$, tj. jsou cca stokrát těžší než proton) – předpovězené teorií elektroslabé interakce ⁶ potvrzeny 1983, CERN, Carlo Rubbia.

Rozpad je relativně pomalý, trvá $10^{-10} - 10^{-6} \text{ s}$ (neboť některé běžně se zachovávající veličiny [parita, podivnost] se při procesech způsobených slabou interakcí nezachovávají, proto je rozpad částic [pionů, mionů ...] „zakázaný“ a o mnoho řádů pomalejší než rozpad částic silnou interakcí).

⁵ W s nábojem $\pm e$

⁶ Teorie s. s. rozvinuta analogicky k teorii elmag. síly; nakonec se ukázalo, že slabá a elmag. jsou pouze rozdílné projevy elektroslabé síly

Všechny procesy, při nichž se vyskytnou neutrina, jsou způsobeny slabou interakcí. Díky malému dosahu sl. interakce je malá pravděpodobnost interakce neutrina s hmotou. Pokud se tak stane, předpokládaný scénář: odehrává se tak uvnitř nukleonů – neutrino jež se ke kvarku přiblíží na méně než 10^{-17} m si s ním vymění boson, náboj kvarku předán neutrinu, jež se změní na příslušný lepton → můžeme tak nepřímo pozorovat neutrina resp. vzniklou částici, např. pomocí Čerenkovova záření . . .

3.3 Elementární částice, jejich klasifikace

Znamé částice: protony, neutrony, elektrony + neutrino. Od 30. let 20. století se postupně zjišťuje, že částic je podstatně více – nejprve objeveny v kosmickém záření (pozitrony, miony, piony), od 50. let používány urychlovače (srážky mezi p a $e \dots$ urychlenými na vysoké energie, např. Fermilab (Chicago), CERN (Ženeva), SLAC (Stanford), DESY (Hamburk); běžné urychlovače užívají el. pole k urychlení a magnetické pole k zakřívování dráhy iontů; např. cyklotron, synchrotron – přihlíží k relativistickým změnám hmotnosti = mění se indukce mag. pole ...) → dnes známo několik stovek částic. Lze vnést řád provedením hrubých řezů a rozřazením právě do jedné ze dvou skupin dle určitých fyzikálních charakteristik ...

Fermiony nebo bosony ???

Všechny částice mají vlastní moment hybnosti – spin (\vec{S}). Základní vlastnost částice, není možno ji objasnit jako rotaci částice. Místo velikosti spinu $|\vec{s}|$ se při popisu používá kvantové číslo s dané vztahem $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$, který je analogií vztahu pro orbitální moment hybnosti; s je spinové kvantové číslo, jež může nabývat buď hodnot poločíselných ($1/2, 3/2, \dots$) nebo celých ($0, 1, 2, \dots$). Kromě velikosti spinu lze určit pouze jednu komponentu spinu (např. ve směru z), která je kvantovaná a pro kterou lze psát $s_z = m_s \hbar$, kde $m_s = s, s-1, \dots, -s$ je spinové magnetické kvantové číslo.

Částice s poločíselným spinem = **fermiony**, řídí se Fermiho-Diracovou statistikou, p, n, e . Pro fermiony platí **Pauliho vylučovací princip** – v daném stavu se může nacházet jediná částice.

Částice s celočíselným (nulovým) spinem = **bosony**, řídí se Boseho-Einsteinovou statistikou, fotony. Bosony se neřídí P.v.p. – v daném kvantovém stavu může být libovolný počet bosonů; mají tendenci zaujímat stav s nejnižší energií.

Hadrony nebo leptony ???

Částice můžeme třídit podle sil, které na ně působí resp. zda na ně působí silná síla. Působí-li = **hadrony** (např. protony, neutrony, piony ...), nepůsobí-li (a dominantní silou je síla slabá) = **leptony** (např. elektrony nebo neutrino). Další dělení hadronů: jsou-li bosony = **mesony** (např. pion), jsou-li fermiony = **baryony** (např. proton).

Částice nebo antičástice ???

Dirac předpověděl, že e^- by měl mít kladný protějšek (se stejnou hmotností a spinem) – pozitron e^+ . Postupně se přišlo k poznání, že ke každé částici existuje odpovídající antičástice. Členové takových dvojic mají stejnou hmotnost a spin, ale opačné znaménko náboje resp. dalších kvantových čísel. Původní řazení: známé (p, n, e^-) jsou částice, zřídka pozorované protějšky antičástice. U ostatních méně známých se řazení děje tak, aby bylo konzistentní s určitými zák. zachování mikrosvěta. Setkání částice a antičástice může vést k anihilaci = obě částice zmizí, jejich energie se objeví v jiných formách (fotony γ) ...

§ Leptony a zákony zachování mikrosvěta

K leptonům patří např. e^- a $\bar{\nu}_e$, jež ho doprovází u β rozpadu. Dále např. mion μ^\pm (stř. doba života $\approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ s), jež se rozpadá: $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$. Bylo zjištěno, že neutrino z rozpadu μ není totožné s neutrinem z β rozpadu → máme mionové a elektronové neutrino. Dále byl objeven tauon, τ . Rovněž k němu existuje přidružené neutrino.

Všechny leptony jsou fermiony, mají spin $1/2$. Leptony jsou rozděleny do 3 rodin – každá obsahuje částici a k ní přidružené neutrino. Nemají žádnou rozeznatelnou vnitřní strukturu ani měřitelné rozměry, při interakcích se chovají jako skutečné bodové funda-

mentální částice.

Rodina	Částice	Symbol	Hmotnost [MeV/c ²]	Náboj	Antič.
elektron	elektron	e^-	0,511	-1	e^+
	el. neutrino	ν_e	0 ???	0	$\bar{\nu}_e$
mion	mion	μ^-	105,7	-1	μ^+
	mionové neutr.	ν_μ	0 ???	0	$\bar{\nu}_\mu$
tauon	tauon	τ^-	1777	-1	τ^+
	tauonové neutr.	ν_τ	0 ???	0	$\bar{\nu}_\tau$

ZZ leptonového čísla: v každé ze tří rodin můžeme definovat kvantové číslo, tzv. leptonové číslo: $L = +1$ pro částici, $L = -1$ pro antičástici. Částice jiných druhů (např. p) mají $L = 0$. Je ověřeno, že leptonové číslo se zachovává pro každou rodinu zvlášť – jsou vlastně 3 leptonová čísla.

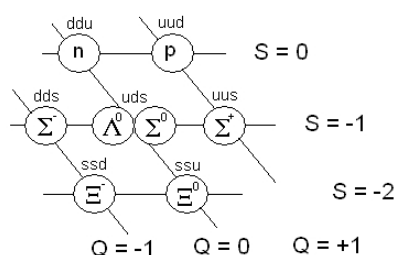
Analogicky existuje **ZZ baryonového čísla**, baryon má $B = +1$, antibaryon $B = -1$, částice jiných druhů mají $B = 0$. Nemohou probíhat takové částicové reakce, které mění celkové baryonové číslo.

Částice mají ještě další charakteristiky než hmotnost, náboj, spin, leptonové a baryonové číslo. Např. **podivnost** = kvantové číslo charakterizující elementární částice, zachovává se ve všech základních interakcích mimo slabé, zde dochází ke změně podivnosti o ± 1 . Je-li $p \neq 0$, hovoříme o podivných částicích. Obsahují podivný kvark (viz dále). Např. kaon, první objevený zástupce této třídy.

Dále existují **půvab** = půvabné částice, obsahují půvabný kvark, zachová se ve všech interakcích mimo slabé, zde změna o ± 1 . **Krása** = krásné částice, krásný kvark, zachování mimo slabé (změna o ± 1); **pravda** ...

§ Kvarkový model

Existuje 8 baryonů se spinem 1/2; sestavíme-li graf podivnost (S) vs. náboj (Q) dostaneme jeden z obrazců tzv. Osminásobné cesty: Též existuje 9 mezonů se spinem 3/2,



jež tvoří obraz „kuželníku“ etc. Jedná se diagramy Osminásobné cesty, název z východní mystiky, 8 odpovídá 8 kvantovým číslům, která užívá teorie založená na předpokladu určité symetrie a která předpovídá existenci podobných diagramů. Obrazce Osminásobné cesty mají podobný význam jako periodická tabulka v chemii. Prázdná místa ukazují směr bádání, předpovídání vlastností daných částic.

Existence diagramů Osminásobné cesty ukazuje, že mezony a baryony by měly mít nějakou vnitřní strukturu, pomocí níž lze pochopit dané vlastnosti, symetrie ...

... v roce 1964 Gell-Mann poukazuje, že diagramy Osminásobné cesty pochopíme, když budeme předpokládat, že mezony a baryony jsou složeny z částíček, které nazval **kvarky**.

Částice	Symbol	Hmotnost [MeV/c ²]	Náboj	Podivnost	Bar.číslo	Antič.
Up	u	5	+2/3	0	+1/3	\bar{u}
Down	d	10	-1/3	0	+1/3	\bar{d}
Charm	c	1500	+2/3	0	+1/3	\bar{c}
Strange	s	200	-1/3	-1	+1/3	\bar{s}
Top	t	~180000	+2/3	0	+1/3	\bar{t}
Bottom	b	4300	-1/3	0	+1/3	\bar{b}

Všechny kvarky mají spin 1/2 a jsou to fermiony. Kvantová čísla Q , S a B u antikvarků mají opačná znaménka. „Jména kvarků“ = tzv. **vůně** (flavors). Nejsou známy žádné mezony či baryony, jejichž vlastnosti nelze pochopit jako výsledek vhodné kombinace kvarků. Naopak každá možná kombinace kvarků (u, d, s) odpovídá nějakému pozorovanému mezonu či baryonu. Každý **baryon je tvořen 3 kvarky** (\rightarrow baryonové číslo bude $3 \times 1/3 = 1$, spin bude $2 \times$ paralelně a $1 \times$ antiparalelně = $1/2 \dots$). **Mezony jsou dvojice kvark + antikvark**. Předpokládá se, že každá „vůně“ existuje ve třech druzích tzv. „barvách“ – červená, žlutá a modrá. Antikvarky mají odpovídající antibarvy. Síle působící mezi kvarky (tj. silná) se pak také říká barevná a příslušné teorii v analogii s kv. eldyn. kvantová chromodynamika. V přírodě se mohou vyskytovat pouze neutrální kombinace – všechny 3 barvy/antibarvy či barva + příslušná antibarva.

Kvarkový model umožňuje porozumět struktuře elementárních částic. Podle současných poznatků jsou kvarky a leptony fundamentální částice!!! Nebo ne? ;-)

Literatura a zdroje

- D.Halliday, R.Resnick, J.Walker: Fyzika, Vutium, Brno 2000
- Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz, Prometheus, 1999
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Fyzika V, RNDr. Jiří Dolejší, CSc.
- ... výpisky k souborce od Káti Kůsové ...

Kapitola 4

Termodynamika a statistická fyzika

Termodynamika a statistická fyzika: Stavové veličiny, zákony termodynamiky, entropie. Statistická interpretace termodynamiky. Kanonické rozdělení. Fermiony a bozony. Matice hustoty. Stavové rovnice. Termodynamika záření, záření absolutně černého tělesa.

- Entropie v zákonech termodynamiky.
- Souvislost klasické termodynamiky a statistické fyziky. Matice hustoty.
- Boltzmannova rovnice a Liouvilleův teorém.
- Klasické částice, fermiony bosony. Rozdělení Boltzmannovo, rozdělení Fermi-Diracovo a Bose-Einsteinovo. Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí.

4.1 Termodynamika a molekulová fyzika

Termodynamika je fenomenologická věda, která se zabývá studiem nejobecnější rovnováhy makroskopických systémů, zejména v souvislosti s přenosem tepla a s teplotou.

Mezi základní termodynamické pojmy patří pojem systému – daného předmětu zkoumání. Obvykle požadujeme, aby byl makroskopický (a popsatelný klasickou fyzikou) a aby byly přesně definovány jeho hranice a tím pádem i okolí.

Stav systému pak popisujeme souhrnem nezávislých makroskopických parametrů. Stav může být *statický*, obvykle zvaný rovnovážný, charakterizovaný nepřítomností toků fyzikálních veličin a jejich časovou neměnností; *stacionární*, kde připouštíme toky, a *nestacionární*, kde připouštíme i situace, kdy systém v některých okamžicích nemůžeme popsat obvyklými makroskopickými parametry vůbec. Posloupnost stavů systému pak nazýváme termodynamický děj.

Parametry popisující systém mohou být extenzivní (aditivní; objem, energie) nebo intenzivní (v rovnováze se vyrovnají; tlak, teplota).

• **Rovnovážný stav soustavy** je charakterizován nepřítomností toků a časovou neměnností fyzikálních veličin (vnitřních parametrů). Termodynamika je založena na dvou postulátech:

– **první postulát termodynamiky** nám říká, že *libovolný izolovaný systém po uplynutí určité doby dospěje do rovnovážného stavu, který není nikdy spontánně narušen ...*

– podle **druhého postulátu termodynamiky** je *stav systému v rovnováze jednoznačně určen souborem všech vnějších parametrů a jediným parametrem vnitřním*; tento postulát zaručuje existenci stavové rovnice/stavových veličin, které vážou systém v rovnováze ...

• **Teplota** je stavová intenzivní veličina určující stav systému. Předpokládáme-li platnost druhého postulátu termodynamiky a dále, že stav termodynamické rovnováhy je tranzitivní (tj. jsou-li v rovnováze tělesa 1 a 2, a zároveň tělesa 1 a 3, jsou v rovnováze i tělesa 2 a 3), můžeme odvodit, že existuje funkce závislá pouze na parametrech systému, která má v rovnováze všude stejnou hodnotu. Nazveme ji **empirická teplota**. Jednou z možných empirických teplot je např. Celsiova měřená pomocí rtuťového teploměru ...

• **Tepl** je forma energie. Existují pouze dva možné způsoby přenosu energie, jedním je **práce**, druhým **tepl** – vždy přechází z teplejšího tělesa na chladnější. Tepl můžeme definovat jako souhrn mikroskopických procesů mezi systémem a okolím. Práce popisuje uspořádaný, vratný proces, zatímco tepl je popisem procesu chaotického. Práce i tepl jsou veličiny dějové, vázané na děj/přenos energie, nikoliv na stav.

Přenos tepla probíhá každým prostředím, obecně různě snadno/těžko, různá prostředí mají různou tepelnou vodivost. Poměr mezi přírůstkem tepla a přírůstkem teploty nazýváme tepelnou kapacitou

$$C_{proces} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{proces} .$$

Udává nám, kolik tepla je potřeba k zahřátí tělesa o 1 K. Obecně závisí na podmínkách, za nichž k předání tepla došlo. Rovněž můžeme zavést i měrnou tepelnou kapacitu (na jednotku hmotnosti nebo na 1 mol).

§ Hlavní věty termodynamiky

• **První věta termodynamiky** nám říká, že *vnitřní energie soustavy se může zvýšit dodaným teplem a snížit prací, jež soustava vykonala*¹

$$dU = dQ - dW$$

dU je úplný diferenciál²; vnitřní energie charakterizuje stav (množství vnitřní energie nezávisí na způsobu přechodu). Naopak dQ a dW nejsou úplné diferenciály; teplo a práce charakterizují děj a ne stav. První věta termodynamiky vyjadřuje zákon zachování energie (vznik nebo zánik energie není možný).

• **Druhá věta termodynamiky**: zavádí další stavovou funkci, **entropii**, S . Všechny přírodní procesy jsou spojené s růstem entropie, všechny vratné procesy jsou spojené s její nulovou změnou. Existuje více formulací 2.VT, např. *transformace tepla na práci bez změny stavu tělesa nebo okolí není uskutečnitelná* nebo *v každém okolí každého stavu teplotně homogenního systému existují adiabaticky nedosažitelné stavy*.

Teplo je jedním z ústředních pojmů termodynamiky a je proto obzvláště nepříjemnou záležitostí, že není ve tvaru úplného diferenciálu. Naštěstí lze ukázat, že vždy existuje integrační faktor, který teplo převede na diferenciální formu ve tvaru úplného diferenciálu. Touto nově vzniklou úplnou diferenciální formou/veličinou je právě entropie a integrační faktor obsahuje termodynamickou teplotu

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Tento vzorec tedy můžeme také považovat za formulaci druhé termodynamické věty (pro vratný děj). Též můžeme říci, že $S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ je stavová funkce. Nebo že není možné sestrojít periodicky pracující stroj, který by jen odebíral teplo z rezervoáru a vykonával práci (perpetuum mobile 2. druhu) ...

¹ resp. obecněji *vnitřní energie soustavy se může zvýšit dodaným teplem nebo přidáním dalších částic a snížit prací, jež soustava vykonala*, $dU = dQ - dW + dU_N$, kde $dU_N = \mu dN$. Koefficient úměrnosti μ se nazývá chemický potenciál soustavy a závisí na typu látky, ze které se soustava skládá.

² diferenciál = malý přírůstek fce více proměnných. Např. k fci $f(x, y) = x^2 + y^2$ je prvním diferenciálem výraz $df = 2xdx + 2ydy$. V termodynamice nás zajímá především obrácená úloha, tj. zda existuje funkce, ke které by výraz byl prvním diferenciálem. Výrazy tohoto typu se obecně nazývají Pfaffovy diferenciální formy a zapisujeme je ve tvaru $d\omega = a_k(x)dx_k$. Položená otázka tedy je: Kdy je Pfaffova forma ve tvaru úplného diferenciálu nějaké funkce? Obecně všechny diferenciální formy se dělí na dvě velké skupiny. První z nich není ve tvaru úplného diferenciálu nějaké funkce a tento typ nemá žádné „hezké“ vlastnosti. Druhý typ je ve tvaru úplného diferenciálu nějaké funkce, má mnoho velmi elegantních vlastností a velmi snadno se s ním pracuje – platí tzv. věta o pěti ekvivalencích: Necht' má diferenciální forma $d\omega = a_k dx_k$ koeficienty, které mají spojité derivace do druhého řádu včetně. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- 1) Existuje funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ taková, že forma je jejím prvním diferenciálem, tj. koeficienty formy jsou parciálními derivacemi této funkce: $a_k = \partial f / \partial x_k$.
- 2) Existuje funkce ϕ taková, že křivkový integrál mezi dvěma body je jen rozdílem koncové a počáteční hodnoty této funkce (nazýváme ji potenciálem diferenciální formy): $\int_A^B = a_k dx_k = \phi_B - \phi_A$.
- 3) Křivkový integrál mezi dvěma body nezávisí na křivce (cestě integrace).
- 4) Křivkový integrál po jakékoli uzavřené křivce z diferenciální formy je nulový.
- 5) Koeficienty formy splňují relace: $\partial a_k / \partial x_l = \partial a_l / \partial x_k \quad \forall k, l$.

Máme-li diferenciální formu, buď pro ni platí všechny vlastnosti vyjmenované ve větě o pěti ekvivalencích nebo žádná z nich. Neexistuje nic mezitím. Páté tvrzení je vlastně návodem jak poznat „správné“ diferenciální formy, tj. formy ve tvaru úplného diferenciálu. Ověřme-li, že platí vlastnost 5), platí už i všechny vlastnosti ostatní. Ve fyzice bychom řekli, že koeficienty a_k diferenciální formy tvoří konzervativní pole.

Entropie charakterizuje míru neuspořádanosti systému. Umožňuje matematicky formulovat 2.VT, a tak kvantitativně vyjádřit podmínku pro nevratné procesy, které mohou bez zásahu probíhat v termodynamické soustavě jen v jednom směru (posloupnost těchto dějů dána navýšením entropie – s časem roste, definujeme „šipku času“). V izolovaných soustavách probíhají jen takové procesy, při nichž entropie roste. Přestane růst, pokud izolovaná soustava dosáhne rovnovážného stavu, který se vyznačuje maximální hodnotou entropie za daných podmínek.³

Spojením první a druhé věty, dostaneme

$$dU \leq TdS - dW$$

(rovnost platí pro vratné děje).

• **Třetí termodynamická věta** nám říká, že není možné dosáhnout absolutní nuly: vratná nulová izoterma splývá s adiabatou. Též čistou látku nelze ochladit konečným počtem pochodů na nulovou termodynamickou teplotu. Rovněž existuje Planckova definice $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$, tato zároveň umožňuje určit entropii jednoznačně, protože její nulová hodnota přísluší teplotě 0 K.

+ Pozn. o **základních termodynamických procesech:**

Izotermický, T je konst. $\rightarrow dT = 0$, pro ideální plyn, kde je vnitřní energie pouze fci teploty dostaneme $dU = 0 \rightarrow dQ = dW = pdV$; Boyle–Mariottův zákon: $pV = \text{konst.}$

Izochorický, V je konst. $\rightarrow dV = 0$, nekoná se práce, 1.VT bude mít tvar $dQ = dU$

Izobarický, p je konst. $\rightarrow dp = 0 \rightarrow dW = p_0 dV$

Adiabatický, $C = 0$, $dQ = 0 \rightarrow dU = -dW$ (např. probíhá-li děj rychle, aby se nestačila vyrovnat teplota s okolím ...)

Polytropický, C_L je konst., $(dQ/dT) = C_L = \text{konst.}$

+ Pozn. o **Carnotově cyklu**: Ideální C.c. je vratný cyklický děj (soustava se vrací do původního stavu, změna entropie celého systému je 0), který se skládá ze dvou adiabatických a dvou izotermických částí. Je to dobré schéma činnosti tepelných strojů. Nakreslíme-li si Carnotův cyklus v pV -diagramu, bude plocha, kterou křivky ohraničují, rovna získané práci. U Carnotova cyklu můžeme snadno určit jeho účinnost (na adiabatách je $dQ = 0$):

$$\int_1 \frac{dQ}{T_1} + \int_2 \frac{dQ}{T_2} = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Odtud plyne, že tepelná účinnost $\eta = W/Q_2 = |Q_2 - Q_1|/Q_2 = T_2 - T_1/T_2$ id. Carn. cykl. závisí pouze na teplotě chladiče a ohřívače, a nezávisí na způsobu jakým byl C.c. proveden ani na použité hmotě. Poměr $Q/Q_0 = T/T_0$ byl položen za základ porovnávání termodynamických teplot dvou těles a jako základ termodynamické teploty – je-li teplotou T_0 zvolená základní t.t., je uvedeným vztahem definována t.t., základní teplotou je teplota trojného bodu vody = 273,16 K (stanoveno tak aby se K a °C co nejvíce shodovaly).

§ Stavová rovnice, ideální plyn

Parametry popisující rovnovážný stav na sobě nejsou nezávislé, ale jsou svázány vztahy, které nazýváme **stavové rovnice**. Rovnici, která stanovuje vnitřní energii systému, nazýváme **kalorickou** $U = U(a_i, T)$, rovnice spojující ostatní veličiny jsou rovnicemi **termickými** $A_j = A_j(a_i, T)$. V těchto vztazích a označuje vnější parametry, A vnitřní. Stavovou rovnici nemůžeme v rámci termodynamiky odvodit.

³ \exists Boltzmannova statistická definice entropie: $S = k \ln w_p$, kde w_p je počet mikrostavů (= počet způsobů realizace daného rozdělení) u mikrokanonického rozdělení (tj. pro uzavřený izolovaný soubor, viz též str. 92). Pro směsi platí Gibbsův teorém: entropie směsi v objemu V je dána sumou entropií komponent v objemu V .

Kalorická a termická stavová rovnice na sobě nejsou nezávislé, ale jsou svázány rovnicí „devadesátí procent“

$$T \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_a = \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right)_T + A(a, T).$$

V termodynamice často studovaným systémem je **ideální plyn**. U ideálního plynu předpokládáme, že nemá vnitřní tření a je dokonale stlačitelný; přesně se řídí Boyle-Mariottovým zákonem (pV je konst.) a Gay-Lussacovým zákonem (při izobarickém ději v id. plynu konstantní hmotnosti je objem plynu V přímo úměrný jeho termodynamické teplotě); rozměry molekul i.p. jsou zanedbatelně malé ve srovnání se střední vzdáleností molekul od sebe + molekuly i.p. na sebe kromě vzájemných srážek nepůsobí + vzájemné srážky molekul i.p. a srážky těchto molekul se stěnami jsou dokonale pružné. Většinu plynů lze za běžných podmínek považovat za ideální.⁴

Termická, resp. kalorická stavová rovnice pro ideální plyn má tvar

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{nN_a kT}{V}, \quad \text{resp.} \quad U = n(c_V T + U_0).$$

Jeden ze složitějších modelů popisujících plyn je model van der Waalsova plynu

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT.$$

V tomto modelu započítáváme jednak přitažlivé síly, kterými na sebe molekuly plynu působí, započtením vnitřního tlaku, který vzájemným působením vytvářejí, jednak odpudivé síly působící na blízké vzdálenosti zmenšením objemu, do kterého „jedna molekula ostatní pustí“.

Též lze napsat stavové rovnice pro záření absolutně černého tělesa

$$p = \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad \text{resp.} \quad U = \sigma V T^4.$$

§ Základy molekulové fyziky, kinetická teorie

Molekulová fyzika vykládá chování makroskopických systémů z vlastností molekul a ze statistických zákonitostí, ale vzájemné chování molekul popisuje fenomenologicky, aniž by se snažila o jeho vysvětlení.

Důležitou charakteristikou pohybu molekul je jejich rychlost; chceme-li znát takové „rychlostní spektrum“ je často vhodné použít **Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení**

$$\rho(\vec{r}, \vec{p}) = e^{-E/kT} \quad (E = mv^2/2 + U)$$

ve tvaru

$$\frac{dn(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}, \vec{p}, \vec{p} + d\vec{p})}{N} = e^{-\frac{E}{kT}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z.$$

Speciálně například pro molekuly, na které nepůsobí žádné síly, dostaneme (přintegrováním přes objem [rychlostního prostoru], převedením do sférických souřadnic a přintegrováním přes úhlovou část) výraz pro pravděpodobnost, že molekula se pohybuje rychlostí v

$$dP_v = \frac{dn}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv.$$

⁴ Pro adiabatický děj v id. plynu platí tzv. Poissonův zákon: $pV^\kappa = konst.$, kde $\kappa = C_P/C_V$

Z tohoto výrazu můžeme určit nejpravděpodobnější rychlost, střední rychlost, střední kvadratickou rychlost, apod.⁵ (viz str. 98)

Vnitřní energie je pro jakýkoliv model plynu dána jako součet energií všech molekul; je tedy součtem kinetických energií molekul, jejich potenciálních energií ve vnějším poli i potenciálních energií vzájemného působení a vnitřních potenciálních energií daných strukturou molekuly (změny vedou k excitaci, ionizaci . . .). Uvažujeme-li speciální případ ideálního plynu bez vnějších vlivů, budou mít jeho molekuly pouze kinetickou energii

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2}m\bar{v}^2.$$

Střední hodnotu čtverce rychlosti můžeme určit z MB

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 \rho(v) dv = \frac{3}{2} \frac{2kT}{m} \rightarrow \bar{E}_k = \frac{3}{2}kT,$$

což se formuluje jako **ekvipartiční teorém**: *v ideálním plynu bez vnitřních stupňů volnosti platí, že každý stupeň volnosti molekuly přidává střední energii člen $kT/2$, podrobněji viz dále, část Statistická fyzika.*

Tlak plynu můžeme modelovat jako srážky molekul se stěnami nádoby. Narazí-li molekula na stěnu nádoby, předá jí hybnost $\Delta p_x = 2mv_x$. Za dobu t narazí molekula celkově $tv_x/2l$ -krát (l je vzdálenost mezi protějšími stěnami nádoby, mezi kterými molekula lítá a odráží se tam a zpět) a předá tedy celkovou hybnost tmv^2/l . Jednotlivé nárazy na stěnu nahradíme střední silou $\Delta p_x = F_x t = tmv^2/l$, která vyvolává na stěnu tlak $p = F_x/S = mv_x^2/V$. Celkový tlak všech molekul má tedy tvar

$$p = \frac{N}{V}m\bar{v}^2 = 2\frac{N}{V}\bar{E}_k = 2\frac{N}{V}\frac{1}{2}kT$$

a pro jeden mol dostáváme stavovou rci ideálního plynu

$$pV = N_A kT = RT.$$

§ Poznámka o transportních jevech

Patří sem viskozita tekutin, tepelná vodivost, difúze . . .

Vlivem neuspořádaného tepelného pohybu molekul dochází v plynu ke srážkám molekul. Pokud se v plynu vyskytnou makroskopické oblasti různé hustoty nebo teploty, překládá se přes neuspořádaný pohyb pohyb uspořádaný, který má vyrovnat zmíněné nehomogenity.⁶

⁵ • Boltzmannovo rozdělení udává rozdělení molekul id. plynu, na který působí vnější silové pole, a který je ve stavu tepelné rovnováhy. Jestliže je v plynu N molekul, pak relativní četnost molekul dn/N v elementu $dV = dx dy dz$ je dána $dn/N = \varphi(x, y, z) dx dy dz$, kde φ je tzv. rozdělovací fce $\varphi(x, y, z) = A e^{-E_p(x, y, z)/kT}$ vyjadřující B. rozdělení. Konstanta A se určí z normovací podmínky $A \int \int \int e^{-E_p/kT} dx dy dz = 1$.

• Maxwellovo rozdělení naopak udává rozdělení rychlostí molekul plynu, který je ve stavu termodynamické rovnováhy. Pro plyn z N stejných molekul analogicky dostáváme $dn/N = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$, rozdělovací fce vyjadřující Max. rozd. rychlostí $f(v_x, v_y, v_z) (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT}$.

• Obecně tyto vychází z klasického M-B rozdělení $dP(p, q) = \rho(p, q) dp dq = A e^{-E(p, q)/kT} dp dq$, kde $E(p, q) = T(p) + U(q)$, tedy $dP(p, q) = A e^{T(p)/kT} \cdot e^{-U(q)/kT} dp dq$. Ovšem v klasické fyzice je rozdělení souřadnic a hybností nezávislé, dostáváme tak rozdělení Maxwellovo $dP_p(p) = a \cdot e^{-T(p)/kT} dp$ a Boltzmannovo $dP_q(q) = b \cdot e^{-U(q)/kT} dq$.

⁶ Obecně makroskopické toky vznikají jako následek gradientů příslušných veličin. Nejsou-li tyto gradienty příliš velké, můžeme tyto toky vyjádřit jako lin. fce těchto gradientů, viz např. Fickův zákon pro difúzi, Ohmův zákon pro el. vodivost . . .

Tento uspořádaný pohyb je pak příčinou jevů přenosu. Pokud se vyrovnávají rozdíly koncentrace uvnitř plynu, dochází k difúzi. Máme-li na počátku dva různé plyny, které se setkají, dojde v poměrně krátké době k jejich promísení, a to i proti gravitaci (tj. těžší plyn byl původně dole, lehčí nahoře). Můžeme napsat zákon zachování částic ve tvaru

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_n = 0$$

pomocí změny koncentrace a toku. Tok je množství částic, které projde jednotkou plochy za jednotku času a můžeme pro něj psát **Fickův zákon difúze**

$$\vec{J}_n(\vec{r}, t) = -D\nabla n(\vec{r}, t),$$

kde D je součinitel difúze [m^2/s] (lze vyjádřit pomocí střední rychlosti a střední volné dráhy molekul; obecně fcí teploty, tlaku a složení směsi). Použijeme-li navíc výše uvedený zákon zachování částic, zjistíme, že výsledná diferenciální rovnice má tvar rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\Delta n(\vec{r}, t).$$

Pokud se nepřenáší částice, ale energie, dochází k přenosu tepla. Důvodem difúze jsou různé chemické potenciály, důvodem přenosu tepla různé teploty uvnitř plynu. Analogicky lze tedy pro tok tepla (vedení, kondukce) získat $\vec{q} = -\lambda \text{grad } T$ (\vec{q} je hustota tepelného toku, λ součinitel tepelné vodivosti).

4.2 Statistická fyzika

§ Makrostavy a mikrostavy, třídy systémů

Stav souboru v každém časovém okamžiku určují stavy jeho jednotlivých systémů (částic). Udáním stavu každého systému určujeme **mikrostav souboru**. Výsledný stav, který budeme bezprostředně pozorovat = **makrostav souboru**.

I když se z makroskopického hlediska stav souboru s časem nemění, může se měnit na mikroskopické úrovni – soubor bude přecházet z jednoho mikrostavu do jiného. Daný stav může být tvořen různými mikrostavy.

Základní předpoklad statistické fyziky (ergodická hypotéza) pak zní: *pravděpodobnost výskytu souboru v kterémkoli z jeho přípustných mikrostavů je stejná.*

Na základě této hypotézy lze určit pravděpodobnost výskytu různých makrostavů. Nejpravděpodobnější je ten makrostav, který odpovídá maximálnímu počtu mikrostavů.

Tvar výrazu pro pravděpodobnost výskytu a rozdělovací fce závisí mimo jiné na tom, jakými pohybovými zákony se příslušné systémy řídí.

Systémy pro které vyhovují zákony klasické mechaniky mají spojité spektrum energie a jsou **rozdílitelné**. Jejich statistické zákonitosti popisuje **klasická (Maxwellova-Boltzmannova) statistika**.

Systémy řídicí se zákony kvantové mechaniky mají diskrétní spektrum energie a jsou **nerozdílitelné**.⁷ Jejich stat. zákonitosti popisuje **kvantová statistika**. Podle chování vlnové fce při vzájemné výměně systémů dělíme nerozliš. syst. na bosony a fermiony.

Bosony jsou systémy, jejichž vlnová funkce je symetrická vůči vzájemné výměně dvou systémů a složka spinu se rovná celočíselnému násobku Planckovy konstanty \hbar (nebo 0). Mezi bosony patří např. fotony či částice složené ze dvou kvarků (mezony). Pro bosony neexistuje omezení jejich výskytu v žádném kvantovém stavu. Soubory bosonů popisuje **Boseho-Einsteinova statistika**.

Fermiony jsou systémy, jejichž vlnová funkce je antisymetrická (vůči vzájemné výměně dvou systémů) a složka spinu se rovná lichému násobku poloviny Planckovy konstanty. Patří sem např. elektrony, též protony, neutrony (tj. částice tvořené třemi kvarky – baryony) ... Pro fermiony platí Pauliho princip, podle něhož každý kvantový stav může být obsazen nejvýše jedním fermionem. Je tedy zřejmé, že statistický popis fermionů a bosonů se bude lišit. Soubory fermionů popisuje **Fermiho-Diracova statistika**.

M-B statistika je limitním případem B-E i F-D statistiky.

§ Rozdělení

Nechť \exists soubor složený z n neinteragujících systémů. Předpokládejme, že spektrum energií studovaných systémů je diskrétní. Přípustné energetické hladiny očíslováme E_i , stupeň její degenerace⁸ (degenerační faktor) označme g_i . Počet systémů jejichž energie je rovna E_i bude tzv. **obsazovací číslo** i -té hladiny n_i .

⁷ V kvantové teorii můžeme předpovědět jen pravděpodobnost výskytu částice v nějakém místě a čase. Tato pravděpodobnost má maximum v místě klasické trajektorie a se vzdáleností od ní exponenciálně ubývá a dosti daleko od klasické trajektorie je sice velmi malá, nikoli však nulová. Máme-li dvě stejné částice, nikdy si nemůžeme být jisti, která částice je která. Pravděpodobnost výskytu jedné částice v místě druhé je nenulová. Hovoříme o tom, že stejné částice jsou nerozlišitelné. To ve svém důsledku vede k rozdělení všech částic na dva základní typy, fermiony a bosony.

⁸ Degenerace = případ, kdy různým vlastním fcm přísluší stejné vlastní hodnoty vybrané pozorovatelné veličiny (zpravidla energie); jako míra d. se uvádí počet vlastních fcm se stejnou vlastní hodnotou.

Uvažujeme uzavřený soubor, tj. celková energie E a počet částic n se nemění – platí ZZE a ZZ počtu systémů:

$$\sum_{j=1}^r n_j E_j = E \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^r n_j = n.$$

Množina $\{n_j\}$ všech obsazovacích čísel splňující dané ZZ se nazývá rozdělení a charakterizuje jeden makrostav souboru. Makrostav se nezmění vzájemnou výměnou kterýchkoliv dvou systémů \rightarrow hledáme počet w mikrostavů tvořících daný makrostav, tj. počet způsobů realizace. Ten musíme počítat různě pro jednotlivé třídy systémů.

a) rozlišitelné systémy: bez omezení. Mějme n systémů v makrostavu $\{n_j\}$. Mikrostavy tvořící makrostav mohou vznikat jednak vzájemnou výměnou systémů mezi různými hladinami = chceme určit počet rozdělení n rozlišitelných systémů na r rozlišitelných hladin, tak aby na 1. hladině bylo právě n_1 systémů, na 2. hladině $n_2 \dots$

$$w_r' = \frac{n!}{\prod_{j=1}^r n_j!}$$

a jednak výměnou systémů mezi různými stavy na téže hladině energie; pro g_j násobně degenerovanou hladinu obsazenou n_j systémy je počet mikrostavů $g_j^{n_j}$, pro všechny hladiny dostaneme součin

$$w_r'' = \prod_{j=1}^r g_j^{n_j}.$$

Celkový počet mikrostavů tvořících daný makrostav je pro rozlišitelné systémy roven součinu obou výrazů, tj.

$$w_r = n! \prod_{j=1}^r \frac{g_j^{n_j}}{n_j!}$$

Analogický postup lze aplikovat na ostatní třídy systémů.

b) Bosony: nerozlišitelné (mikrostavy lišící se pouze výměnou systémů mezi různými hladinami energie jsou totožné), obsazení nepodléhá omezení, tj. celkový počet mikrostavů tvořících makrostav je dán součinem počtu mikrostavů na jednotlivých hladinách

$$w_B = \prod_{j=1}^r \frac{(n_j + g_j)!}{n_j! g_j!}.$$

c) Fermiony: nerozlišitelné, Pauliho princip \rightarrow žádný stav nemůže být obsazen více než jedním systémem, u fermionů tedy platí $n_j \leq g_j$. Celkem dostaneme

$$w_F = \prod_{j=1}^r \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!}.$$

• **Mikrokanonické rozdělení:** soubor může vyměňovat energii s okolím, ale počet systémů je stálý.⁹ Nejpravděpodobnější je ten makrostav, jenž je tvořen největším počtem mikrostavů. Vlastnosti reálného souboru v termodynamické rovnováze jsou (do značné míry přesnosti) vlastnostmi tohoto nejpravděpodobnějšího makrostavu.

⁹ Těž existuje grandkanonické rozdělení, u něhož se připouští výměna částic s okolím, první větu TD uvažujeme v plném rozsahu ...

Určujeme tedy při jakých hodnotách proměnných n_j nabývá maxima výraz w . Jednodušší je určit při jakých hodnotách nabývá maximum výraz $\ln w$ (jenž nabývá extrémů ve stejných bodech), proměnné n_j považujeme (vzhledem k jejich velikosti) za spojité. Jde o úlohu určit extrém fce s vedlejšími podmínkami ZZE a ZZpočtu systémů, řešíme pomocí Lagrangeových multiplikátorů:

$$\frac{\partial \ln w_p}{\partial n_i} + \alpha \frac{\partial n}{\partial n_i} + \beta \frac{\partial E}{\partial n_i} = 0 \quad \forall i \in \langle 1, r \rangle \quad (*)$$

$$\sum_{j=1}^r n_j - n = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^r n_j E_j - E = 0$$

Dostáváme $r+2$ rovnic pro neznámé n_i, α, β . Protože je vždy $\partial n / \partial n_i = 1$ a $\partial E / \partial n_i = E_i$, dostáváme

$$\frac{\partial(\ln w_p)}{\partial n_i} + \alpha + \beta E_i = 0 \quad \forall i \quad (**)$$

S uvážením velikosti obsazovacích čísel a degeneračních faktorů lze užít tzv. Stirlingova přibližného vzorce¹⁰ a navíc v něm klást $\ln n - 1 = \ln n$. Dostáváme tak jeho zjednodušený tvar

$$\ln n! = n \ln n - n = n(\ln n - 1) \doteq n \ln n.$$

Pro soubor rozlišitelných systémů = Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení máme

$$w_r = n! \prod_{j=1}^r \frac{g_j^{n_j}}{n_j!}$$

$$\ln w_r = n \ln n + \sum n_j \ln g_j - \sum n_j \ln n_j \doteq n \ln n + \sum n_j \ln \frac{g_j}{n_j}$$

$$\frac{\partial \ln w_r}{\partial n_i} = \ln \frac{g_i}{n_i} - n_i \frac{1}{n_i} \doteq \ln \frac{g_i}{n_i}$$

Dosazením do (**) dostaneme

$$\ln \frac{g_i}{n_i} + \alpha + \beta E_i = 0$$

$$\ln \frac{n_i}{g_i} = \alpha + \beta E_i$$

$$n_i = g_i e^{\alpha + \beta E_i} \quad \forall i.$$

Analogickým (ale podstatně zdlouhavějším výpočtem) získáme pro bosony Boseho-Einsteinovo

$$n_i = \frac{g_i}{e^{-\alpha - \beta E_i} - 1}, \quad \forall i$$

a pro fermiony Fermiho-Diracovo rozdělení

$$n_i = \frac{g_i}{e^{-\alpha - \beta E_i} + 1}, \quad \forall i.$$

¹⁰ $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \rightarrow \ln n! \doteq (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \rightarrow$ pro velká n pak další aproximace $\ln n! \rightarrow n \ln n - n$

Vlastnosti logaritmu nejpravděpodobnějšího rozdělení $\ln w_p$:

1) w je určeno jednoznačně zadáním obsazovacích čísel $\{n_j\} \rightarrow \ln w_p$ je jednoznačnou funkcí makrostavu souboru

2) počet způsobů realizace nejpravděpodobnějšího rozdělení souboru složeného ze dvou nezávislých podsouborů je dán součinem počtů způsobů realizace w_{pI} a w_{pII} nejpravděpodobnějších rozdělení dílčích souborů, tj. $w_{p(I+II)} = w_{pI} \cdot w_{pII}$ a odtud

$$\ln w_{p(I+II)} = \ln w_{pI} + \ln w_{pII}$$

3) přechod izolovaného souboru z makrostavu 1 do makrostavu 2 může nastat jen v případě, že $w_{p2} \geq w_{p1}$, neboť rovnovážný stav souboru je stav s maximálním počtem mikrostavů. Odtud

$$\ln w_{p2} \geq \ln w_{p1}$$

a tedy hodnota $\ln w_p$ nikdy neklesá a při vratných dějích zůstává konstantní! Vlastnosti $\ln w_p$ jsou shodné s vlastnostmi entropie zavedené v termodynamice a dostáváme tak Boltzmannovu statistickou definici entropie

$$S = k \ln w_p.$$

Vyjdeme-li z (*), vynásobíme-li každou z těchto rovnic diferencíálem dn_i a sečteme je přes všechna i , dostaneme

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial(\ln w_p)}{\partial n_i} dn_i + \alpha \sum_{i=1}^r \frac{\partial n}{\partial n_i} dn_i + \beta \sum_{i=1}^r \frac{\partial E}{\partial n_i} dn_i = 0$$

resp.

$$d(\ln w_p) + \alpha dn + \beta dE = 0.$$

Odtud plyne

$$\left(\frac{\partial \ln w_p}{\partial E} \right)_n = -\beta \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial \ln w_p}{\partial n} \right)_E = -\alpha$$

Jejich přenásobením Boltzmannovou konstantou dostaneme

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_n = -k\beta \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_E = -k\alpha.$$

Z termodyn. máme pro entropii souboru, který nekoná/nepřijímá práci ($dW = 0$)

$$dS = \frac{1}{T} dE - \frac{\mu}{T} dn,$$

a tedy

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_n = \frac{1}{T} \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_E = -\frac{\mu}{T}.$$

Srovnáním získáme

$$\beta = -\frac{1}{kT} \quad \text{a} \quad \alpha = \frac{\mu}{kT}.$$

Pro jednotlivá statistická rozdělení tak lze psát finální výsledek

$$n_{i \text{ B/F/r}} = \frac{g_i}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - / + / \text{nic } 1}.$$

§ Statistická interpretace I. a II. věty termodynamické

Diferenciál Boltz. stat. def. entropie je

$$dS = k d(\ln w_p),$$

kde w_p je počet způsobů realizace nejpravděpodobnějšího rozdělení. Protože w_p je funkcí pouze obsazovacích čísel n_i , můžeme psát

$$dS = k \sum_{i=1}^r \frac{\partial \ln w_p}{\partial n_i} dn_i$$

a za derivaci logaritmu dosadit z podmínky (**). Dostaneme tak

$$dS = k \sum (-\alpha - \beta E_i) dn_i = -\alpha k \sum dn_i - \beta k \sum E_i dn_i.$$

První výraz je roven nule (pro mikrokanonické rozdělení, $\sum dn_i = d \sum n_i = dn$), do druhého dosadíme $\beta = -1/kT$ a dostaneme

$$dS = \frac{1}{T} \sum E_i dn_i.$$

Protože **II.VT** je ve stavu rovnováhy $dQ = TdS$, obdržíme srovnáním **statistickou interpretaci tepla dodaného do souboru**

$$dQ = \sum E_i dn_i.$$

Teplu, které soubor přijme z okolí při vratném ději, je rovno té části změny energie souboru, která je výsledkem změny rozdělení systémů mezi jednotlivými hladinami energie. Teplu je tedy pojem, jenž není definován v čisté mechanice, neboť úzce souvisí s nemechanickým pojetím teploty.

I.VT pro uzavřený soubor je $dE = dQ - dW$. Vnitřní energie souboru E je totožná s úhrnou energií všech systémů $E = \sum_{i=1}^r n_i E_i$ a pro její diferenciál tak dostáváme

$$dE = \sum E_i dn_i + \sum n_i dE_i.$$

První výraz je roven teplu dQ (viz předchozí odstavec), význam druhého získáme srovnáním s I.VT:

$$\sum n_i dE_i = -dW.$$

§ Poznámky k jednotlivým rozdělením, Boltzmannova rce

Pro rozlišitelné systémy se multiplikátor α určuje zpravidla jinak než vztahem μ/kT . Dosadíme-li M-B rozdělení do ZZpočtu systémů a uijeme-li pro druhý multiplikátor $\beta = -1/kT$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^r g_i e^{\alpha - E_i/kT} = n,$$

odkud plyne

$$e^{\alpha} = \frac{n}{\sum g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}.$$

Funkce ve jmenovateli se nazývá **partiční funkce**, označuje se

$$Z = \sum_{i=1}^r g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

a jedná se o základní funkci užívanou pro výpočet termodynamických vlastností rozlišitelných systémů. Též se jí říká stavová suma, neboť ji lze psát i ve tvaru $\sum_s e^{-E_s/kT}$, kde sčítáme přes všechny přípustné stavy systémů. Užitím partiční fce lze psát $e^\alpha = n/Z$, odtud $\alpha = \ln \frac{n}{Z}$ a M-B můžeme zapsat

$$n_i = \frac{n}{Z} g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad 11, 12$$

Mějme dvě různé energetické hladiny, např. $E_i < E_j$. Nejpravděpodobnější obsazovací čísla těchto hladin jsou

$$n_i = g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad \text{a} \quad n_j = g_j e^{-\frac{E_j}{kT}},$$

a jejich vzájemný poměr je (Boltzmannova rovnice)

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\frac{E_j - E_i}{kT}}.$$

Protože $E_j - E_i > 0$ a $T > 0$, je

$$\frac{n_j}{n_i} < \frac{g_j}{g_i}.$$

¹¹ M-B rozdělení, se kterým se relativně snadněji pracuje než s B-E a F-D rozdělením, je limitou těchto rozdělení pro $e^{-\alpha - \beta E_i} \gg 1$, tj. pro $n_i/g_i \ll 1$ (dle $n_i/g_i = 1/(e^{-\alpha - \beta E_i} \mp 1)$). Pokud tato podmínka platí $\forall i$ mluvíme o „rozředěných systémech“ (většina stavů není obsazena). Položíme-li pro jednoduchost $E_i = 0$, budou pro $i \neq 1$ hodnoty $E_i > 0$ a maximální n_i/g_i bude pro $n_1/g_1 = e^\alpha$. Na základě vztahu $n_i/g_i \leq n_1/g_1 = e^\alpha = n/Z$ (viz předchozí odstavec). Odtud

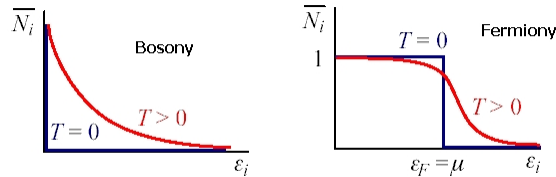
$$\frac{n}{Z} \ll 1,$$

což je podmínka použitelnosti klasického M-B rozdělení pro bosony a fermiony. (U rozředěného souboru je pravděpodobnost výskytu dvou systémů v jednom stavu nepatrná, stírá se tedy rozdíl mezi bosony a fermiony). M-B rozd. je tedy vhodné pro statistický popis reálných plynů ($n/Z \sim 10^{-5}$), ale nevhodné pro popis např. elektronového plynu v kovech ($n/Z \sim 10^3$).

¹² Partiční suma má jednoznačný vztah k volné energii a můžeme ji určit z experimentálního měření volné energie: $F = -kT \ln Z$. (Volná energie společně s entalpií či Gibbsovým potenciálem patří mezi další veličiny, jež tvoří diferenciální formy ve tvaru úplného diferenciálu.) + Při nízkých teplotách je nutno vždy použít kvantovou statistiku. Víme, že pro teplotu 0 K jsou všechny fermiony na nejnižších hladinách energie (přípustných dle Pauliho principu). To lze učinit jedním nebo nejvýše několika málo způsoby. Bosony budou všechny na nejnižší energetické hladině, což lze opět uskutečnit jen velmi malým počtem způsobů. Proto je entropie zavedená Boltzmannovou definicí rovna 0 resp. několika málo k a ve srovnání s hodnotami entropie při běžných teplotách $\geq 10^{24}$ můžeme psát $S = 0$ pro $T = 0$.

Chování rozdělení v lim $T \rightarrow 0$ je na obrázku, \bar{N}_i je střední počet částic v i -tém stavu, ε_i je energie i -tého stavu. *Fermiony*: všechny stavy jsou zaplněné po jedné částici až po tzv. Fermiho mez $\varepsilon_F = \mu$. Nad Fermiho mezí jsou stavy neobsazené. Fermiho mez je tak poslední obsazenou energetickou hladinou při nulové teplotě. Chemický potenciál je při absolutní nule roven Fermiho mezi. Fermiony se chovají „nesnášenlivě“. Je-li nějaký stav obsazen částicí, další částice již tento stav nemůže obsadit. Při absolutní nule se snaží zaujmout stav s co nejnižší energií. Jeli již obsazen, obsadí nejbližší další volný. Tím dojde k tomu, že při absolutní nule jsou obsazené všechny stavy až po Fermiho mez. *Bosony*: Při absolutní nule všechny obsadí základní energetický stav. V reálných systémech je počet částic konečný. Stav látky při kterém se částice hromadí v základním stavu nazýváme *bosonový kondenzát*.

Vidíme tedy, že vyšší energetická hladina, je obsazena méně (relativně ke stupni degenerace). Tento poměr je tím výraznější, čím nižší je teplota souboru. Při nízkých teplotách zvýhodňuje M-B rozd. obsazení nižších energetických hladin. Při vysokých teplotách $E_j - E_i \gg kT$ je $n_j/n_i \doteq g_j/g_i$, tj. obsazení hladin je úměrné počtu stavů na nich. Statistická rovnováha tedy představuje rovnováhu mezi silami tepelného vlivu, které mají tendenci k rovnoměrnému obsazování všech hladin a mechanickou tendencí souboru zaujímat stavy s nejnižší možnou energií.



§ Klasická statistika a její aplikace – Liouvilleův a ekvipartiční teorém ...

Má-li systém f stupňů volnosti, udává jeho stav v každém časovém okamžiku f obecných souřadnic q_1, q_2, \dots, q_f a f jim přiřazených hybností p_1, p_2, \dots, p_f . Různé stavy každého systému tak můžeme zobrazit bodem ve **fázovém prostoru** Γ_s , tzv. reprezentativní bod systému. Dim je $2f$. Mění-li se s časem stav systému, vytvoří reprezentativní body ve fázovém prostoru **fázovou trajektorii systému**. Pro časovou změnu souřadnic a impulsů platí HKR $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ a $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$. Pravděpodobnost, že reprezentativní bod systému se bude nacházet v časovém okamžiku t v objemovém elementu $d\Phi_s = dqdp$ označme dw_s . Tuto pravděpodobnost lze psát

$$dw_s = \rho_s(q, p, t) d\Phi_s,$$

kde fce všech souřadnic a impulsů představuje hustotu rozdělení pravděpodobnosti v Γ_s = **rozdělovací fce systému**. Splňuje normovací podmínku

$$\int_{\Gamma_s} \rho_s(q, p, t) d\Phi_s = 1.$$

• **Liouvilleův teorém**

Pokusme se určit výraz pro časovou změnu rozdělovací funkce v daném místě prostoru Γ . Pro jednoduchost budeme uvažovat, že zobrazujeme stavy N nezávislých identických systémů (stejné složení, stejný počet stupňů volnosti ...) Stav každého systému je v každém časovém okamžiku popsán jedním reprezentativním bodem v prostoru Γ , pro N systémů tak dostáváme v každém časovém okamžiku N reprezentativních bodů.

Vytkněme si nyní objemový element $d\Phi$ prostoru Γ . Počet reprezentativních bodů uvnitř objemu $d\Phi$ v časovém okamžiku t bude

$$N\rho(q, p, t) d\Phi.$$

Též zavedeme vektor rychlosti pohybu reprezentativních bodů

$$\vec{v}_r = (\dot{q}_1^{(1)}, \dot{p}_1^{(1)}, \dots, \dot{q}_f^{(n)}, \dot{p}_f^{(n)}).$$

Počet zobrazovaných systémů je stálý \rightarrow celkový úbytek počtu systémů z libovolného objemu $\Delta\Phi$ je roven počtu systémů, které projdou za daný čas plochou S ohraničující $\Delta\Phi$:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta\Phi} N\rho d\Phi = \oint_S N\rho\vec{v}_r d\vec{S},$$

užitím Gaussovy věty i.p. dostaneme

$$-\int_{\Delta\Phi} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\Phi = \int_{\Delta\Phi} \operatorname{div}_r(\rho\vec{v}_r) d\Phi,$$

$$-\int_{\Delta\Phi} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}_r(\rho\vec{v}_r) \right] d\Phi = 0.$$

Musí platit pro libovolný objem, tedy

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}_r(\rho\vec{v}_r) = 0. \quad (\Delta)$$

Dále lze psát

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_r(\rho\vec{v}_r) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^f \left[\frac{\partial(\rho\dot{q}_i^{(j)})}{\partial q_i^j} + \frac{\partial(\rho\dot{p}_i^{(j)})}{\partial p_i^j} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^f \left[\frac{\partial\rho}{\partial q_i^{(j)}} \dot{q}_i^{(j)} + \frac{\partial\rho}{\partial p_i^{(j)}} \dot{p}_i^{(j)} + \rho \left(\frac{\partial\dot{q}_i^{(j)}}{\partial q_i^{(j)}} + \frac{\partial\dot{p}_i^{(j)}}{\partial p_i^{(j)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Z Hamiltonových rovnic plyne

$$\frac{\partial\dot{q}_i^{(j)}}{\partial q_i^{(j)}} + \frac{\partial\dot{p}_i^{(j)}}{\partial p_i^{(j)}} = \frac{\partial}{\partial q_i^{(j)}} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^{(j)}} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i^{(j)}} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i^{(j)}} \right) = 0,$$

Dostáváme tak **1. formulaci Liouvilleova teorému**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i^{(j)}} \dot{q}_i^{(j)} + \frac{\partial\rho}{\partial p_i^{(j)}} \dot{p}_i^{(j)} \right).$$

Uvědomíme-li si, že $\rho = \rho(q, p, t)$, platí

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i^{(j)}} \dot{q}_i^{(j)} + \frac{\partial\rho}{\partial p_i^{(j)}} \dot{p}_i^{(j)} \right),$$

získáme

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

což je **2. formulace Liouvilleova teorému**: *Celková časová změna hustoty rozdělení pravděpodobnosti ve fázovém prostoru souboru podél jeho trajektorie je rovna nule nebo hustota (rozdělovací funkce) se nemění a pravděpodobnost výskytu systémů ve fázovém prostoru se chová jako nestlačitelná kapalina. Jedná se o analogii rce kontinuity.*

Důsledkem L.t. je zachování objemu fázového prostoru při pohybu reprezentativních bodů¹³ a existence pouze jediné veličiny (energie) na které může záviset rozdělovací fce systému (a tedy i objem fázového prostoru je pouze funkcí energie systému).

• **Další dodatek k M-B rozdělení**

Energetické spektrum kvantově mechanických systémů je zpravidla degenerované. Klasické mechanice je pojem degenerace cizí. Pro skutečně klasický zápis M-B rozdělení tak využijeme skutečnosti, že existuje těsná souvislost mezi objemem ve fázovém prostoru a počtem kvantových stavů v něm: počet kvantových stavů v objemu $\Delta\Phi$ fázového prostoru systému je roven přibližně

$$\Delta g \doteq \frac{\Delta\Phi}{h^f},$$

kde f je počet stupňů volnosti.¹⁴

Použitím tohoto vztahu lze vypočítat degenerační faktor pro M-B rozdělení

$$g_i = \frac{dq_1 \dots dq_f \cdot dp_1 \dots dp_f}{h^f}.$$

Jsou-li jednotlivé energetické hladiny natolik těsně uspořádány, že můžeme přejít ke spojitému spektru, nahradíme jednotlivé energetické hladiny úzkým intervalem energií $(E, E + dE)$, uvnitř něhož je faktor $e^{-\beta E}$ prakticky konstantní. Při výpočtu partiční fce přejdeme od sčítání k integraci, tj.

$$Z = \int_{(q_1)} \dots \int_{(p_f)} \frac{e^{-\frac{E}{kT}} dq_1 \dots dq_f \cdot dp_1 \dots dp_f}{h^f}$$

a M-B rozdělení přejde na

$$\frac{dn}{n} = \frac{dq_1 \dots dq_f \cdot dp_1 \dots dp_f}{Z \cdot h^f},$$

kde dn/n je relativní počet stavů systému se souřadnicemi a impulsy v objemovém elementu $dq_1 \dots dp_f$. Celkem dostáváme **nejčastěji užívaný tvar M-B rozdělení**

$$\frac{dn}{n} = \frac{e^{-\frac{E}{kT}} dq_1 \dots dp_f}{\int_{(q_1)} \dots \int_{(p_f)} e^{-\frac{E}{kT}} dq_1 \dots dp_f}.$$

¹³ V okamžiku t vytkneme ve fázovém prostoru objem $\Delta\Phi$. Počet reprezentativních bodů v tomto objemu je $\Delta N = \rho(q, p, t)\Delta\Phi$. Představme-si, že objem $\Delta\Phi$ je ohraničen blánou. Pomocí HKR jsou v každém bodě prostoru Γ určeny směrnice tečen fázových trajektorií, a to jednoznačně \rightarrow dvě různé trajektorie se nemohou protnout \rightarrow obalová blána se může posunout, roztáhnout, smrštít, ale žádné body jí nemohou projít \rightarrow

$$\frac{d}{dt}(\Delta N) = 0.$$

Odtud plyne

$$\frac{d}{dt}(\rho\Delta\Phi) = \frac{d\rho}{dt}\Delta\Phi + \rho\frac{d(\Delta\Phi)}{dt} = 0.$$

Dle L.t. je $d\rho/dt = 0$, musí tedy platit

$$\frac{d}{dt}(\Delta\Phi) = 0. \quad QED$$

¹⁴ Souvisí s relacemi neurčitosti $\Delta q_i \cdot \Delta p_i \doteq h$, takže poloha systému ve $2f$ rozměrném prostoru je nejistá v objemovém elementu $\Delta q_1 \dots \Delta q_f \cdot \Delta p_1 \dots \Delta p_f \doteq h^f$. Protože neurčitost vychází přímo ze základů kvantové mechaniky, je přirozené předpokládat, že tento objem souvisí s jednotlivým kvantovým stavem.

Použitím tohoto výrazu na soubor molekul ideálního plynu zjistíme, že relativní počet molekul, které mají souřadnice z intervalů $(x, x + dx)$, $(y, y + dy)$, \dots , $(p_z, p_z + dp_z)$ je roven

$$\frac{dn(x, y, z, p_x, p_y, p_z)}{n} = \frac{e^{-\frac{1}{2mkT}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} \cdot e^{-\frac{1}{kT}(x+y+z)} dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{\int_x \dots \int_{p_z} e^{-\frac{1}{2mkT}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} \cdot e^{-\frac{1}{kT}(x+y+z)} dx dy dz dp_x dp_y dp_z}.$$

Odtud je zřejmé, že rozdělení molekul dle souřadnic a impulsů je nezávislé, tj. pro relativní počet molekul, jež mají složky impulsů v příslušných intervalech dostaneme

$$\frac{dn(p_x, p_y, p_z)}{n} = \frac{e^{-\frac{1}{2mkT}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} dp_x dp_y dp_z}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2mkT}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} dp_x dp_y dp_z}.$$

Takže

$$\frac{dn(p_x, p_y, p_z)}{n} = (2\pi mkT)^{-3/2} e^{-\frac{1}{2mkT}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} dp_x dp_y dp_z.$$

Odtud získáme pomocí $p = mv$ relativní počty molekul, jež mají složky rychlostí z intervalů $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$, tj. jeden z tvarů **Maxwellova rozdělení rychlostí**

$$\frac{dn(v_x, v_y, v_z)}{n} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z.$$

Ve sférických souřadnicích $v \in \langle 0, \infty \rangle$, $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ máme

$$\frac{dn(v, \vartheta, \varphi)}{n} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \sin \vartheta dv d\vartheta d\varphi,$$

kde

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_z}, \quad \varphi = \arctg \frac{v_y}{v_x}.$$

Rozdělení dle velikosti rychlosti získáme integrací přes ϑ a φ , tj.

$$\frac{dn(v)}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Pomocí tohoto vztahu lze určit další veličiny, např. střední rychlost¹⁵ dostaneme

$$\bar{v} = \int v \frac{dn}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

nebo nejpravděpodobnější rychlost v_p , pro kterou musí platit

$$\left[\frac{d\rho(v)}{dv} \right]_{v=v_p} = 0,$$

¹⁵ Střední hodnota dynamické proměnné D se v klasické statistické fyzice vypočte dle

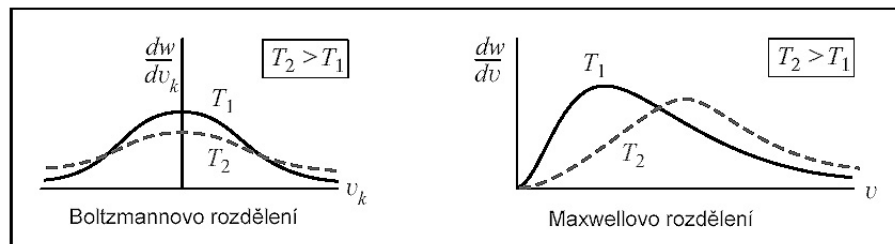
$$\bar{D} = \int_{(q_f)} \dots \int_{(p_f)} D \frac{dn}{n}$$

kde $\rho(v)$ je hustota stavů s rychlostmi $(v, v + dv)$

$$\rho(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

Dosažením a derivováním dostaneme

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$



• Ekvipartiční teorém pro LHO

Energie klasického LHO je $E = p^2/2m + \kappa x^2/2$, kde κ je elastická konstanta oscilátoru:

$$\bar{T} = \int_x \int_p \frac{p^2}{2m} \frac{dn}{n},$$

pomocí nejčastěji užívaného tvaru M-B rozd.

$$\bar{T} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2}{2m} e^{-(\frac{p^2}{2mkT} + \frac{\kappa x^2}{2kT})} dx dp}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{p^2}{2mkT} + \frac{\kappa x^2}{2kT})} dx dp}.$$

Části s $e^{\kappa x^2/2kT}$ se zkrátí, zbytek pomocí Laplaceova resp. Poissonových integrálů:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} kT$$

Analogicky

$$\bar{U} = \frac{1}{2} kT.$$

Střední hodnota celkové energie LHO je

$$\bar{E} = \bar{T} + \bar{U} = kT.$$

Podobné odvození se dá udělat pro obecný systém s f stupni volnosti: v klasické fyzice připadá na jeden stupeň volnosti systému střední hodnota kinetické energie $kT/2$ a je-li tvar $U = \sum_{i=1}^f \kappa_i q_i^2/2$, pak i potenciální energii odpovídá $kT/2$ na jeden stupeň volnosti $\bar{E} = \bar{T} + \bar{U} = f \cdot kT$.

§ Úvod k nerovnovážné statistice, Boltzmannova kinetická rce

Zatím jsme se zabývali systémy v termodynamické rovnováze, ze které vyplynulo kanonické nebo grandkanonické rozdělení. Hustota pravděpodobnosti se ale v obecném případě mění s časem.

Systém může být složen z několika druhů částic (e^- , n , ionty ...), které budeme označovat indexem α . Označme hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu α

$$f_\alpha = f_\alpha(t, \vec{x}, \vec{v}_\alpha).$$

V termodynamické rovnováze hustota pravděpodobnosti nezávisí na čase a splývá s rozdělovací funkcí ρ . Obecně se však pravděpodobnosti výskytu částic druhu α mění s časem z důvodu srážek částic s ostatními stejného druhu i s částicemi ostatních druhů:

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(t, \vec{x}, \vec{v}_\alpha) = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Členy napravo se nazývají *Boltzmannovy srážkové integrály*¹⁶. Rozepišme úplnou derivaci na levé straně:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{k\alpha}} \frac{dv_{k\alpha}}{dt} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Časové derivace poloh jsou rychlosti a časové derivace rychlostí zrychlení, která vyjádříme pomocí síly z II.NZ:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_{k\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} + \frac{F_{k\alpha}}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{k\alpha}} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Členy přes které se sčítá zapíšeme jako působící operátory:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\vec{F}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{v}}) f_\alpha = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Dostáváme tak Boltzmannovu rovnici, která je základní rovnicí statistiky nerovnovážných procesů. Členy na pravé straně se nazývají Boltzmannův srážkový integrál (lze je vyjádřit jako integrál přes část fázového prostoru). Podle možných způsobů vyjádření srážkového integrálu tuto rovnici nazýváme různými způsoby:

- **Boltzmanova (kinetická) rovnice:** Srážky jsou obecné a vyjadřují se pomocí srážkového integrálu.
- **Fokker-Planckova rovnice:** Srážkový člen započítává jen párové Coulombovy interakce, pro které je účinný průřez dobře znám.
- **Landauova rovnice:** Jako dolní mez vzdálenosti párových Coulombových srážek zvolíme vzdálenost, při které se srážející částice odchýlí o pravý úhel (srážka na menší vzdálenosti je málo pravděpodobná) a jako maximální vzdálenost srážky Debyeovu vzdálenost (vzdálenost přirozeného stínění bodových zdrojů).
- **Vlasovova rovnice:** Srážky zcela zanedbáváme (na pravé straně je nula) a působící síla je jen Lorentzova síla. Nejméně přesná, ale nejčastěji používaná aproximace.

Aplikace, momenty Boltz. rce etc. viz část Kosmická elektrodynamika, str. 381 ...

¹⁶ Tyto výrazy jsou dány tím, že pravděpodobnost srážky dvou částic je úměrná součinu hustot pravděpodobností obou částic (tj. výskytu částic v daném místě fázového prostoru) násobené účinným průřezem srážky.

Literatura a zdroje

- Petr Kulhánek, TF3: Statistická fyzika, Studijní text pro doktorské studium, FEL ČVUT, Praha 2002
- Jarmila Dlouhá, Statistická fyzika pro studium učitelství fyziky, Praha, psáno autorem - xerox, 1985
- Jan Obdržálek, Alois Vaněk, Termodynamika a molekulová fyzika, Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem, 1996
- Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz, Prometheus, 1999
- ... výpisky k souborci od Káti Kůsové ...

(H)různé doplňky a „výkřiky do tmy“ . . .

Souřadnice

Sférické:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

Obecně lze kinetickou energii do zobecněných souřadnic přepsat pomocí tzv. délkového elementu $dl^2 = g_{ij} dq_i dq_j$, kde g_{ij} je metrika/metrický tenzor . . . Tedy

$$E_k = \frac{1}{2} m \frac{dl^2}{dt^2} = \frac{1}{2} m g_{ij} \frac{dq_i dq_j}{dt^2} = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j .$$

Prostorový úhel

Prostorový úhel, Ω , kužele je podíl obsahu A plochy, kterou tento kužel vytíná na povrchu koule se středem ve vrcholu kužele, a druhé mocniny poloměru r této koule, $\Omega = A/r^2$.

$S_{koule} = 4\pi r^2 \rightarrow$ „celkový prostorový úhel“ je 4π sr = 12,5664 . . .

Kužel s vrcholým úhlem ϑ vytíná $\Omega = 2\pi(1 - \cos \vartheta/2)$. . .

Často užívané integrály

Laplaceův integrál

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Laplaceovy-Poissonovy integrály

$$I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^{n+1} \alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

speciálně

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{8\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Pravděpodobnostní integrál

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

Pro konečná x se tento integrál dá vypočítat pouze numericky. Pro $x \rightarrow \infty$ přechází $\phi(x)$ v násobek Laplaceova integrálu

$$\phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt,$$

kde $\alpha = 1/2$, takže $\phi(\infty) = 1$ odpovídá úhrnné pravděpodobnosti.

Další integrály

$$I_{2n+1} = \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$$

speciálně

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^2}$$

Část II

Astronomie

Požadavky

Astronomie a poziční astronomie: Souřadnicové systémy a jejich transformace. Pohyb pozorovatele a zdroje záření, aberace, Dopplerův jev. Vliv atmosféry na pozorování, refrakce, extinkce. Paralaxa. Precese, nutace. Vlastní pohyby hvězd. Metody určování souřadnic. Čas a jeho měření.

Efemeridová astronomie: Problém dvou těles, elementy dráhy, výpočet efemeridy. Určování drah těles Sluneční soustavy a dvojhvězd. Zatmění a zákryty. Omezený problém tří těles.

Sluneční soustava: Popis pohybu Měsíce. Planetky, satelity planet, komety. Meziplanetární plyn a magnetické pole, prach a drobná pevná tělíska, vliv záření na jejich pohyb. Meteority. Metody datování. Charakteristické procesy ve vývoji terrestrických planet a planet velkých. Exoplanety. Představy o tvorbě planetárních soustav.

Přístroje a metody pozorování: Optické systémy, jejich vady, metody navrhování. Dalkohledy. Zpracování snímků fotografických, CCD. Fotometrie. Interferometry. Instrumenty družicových observatoří. Spektrografie, spektroskopie.

Otázky

- Astrometrická pozorování - přehled vlivů působících na souřadnice a způsoby jejich redukce (refrakce, precese, nutace, aberace, vlastní pohyby, paralaxa ...)
- Optické systémy a jejich vady. Interferometrie.
- Přístroje a detektory pro astronomickou fotometrii.
- Metody redukce fotometrických a spektroskopických dat. (Přístroje a metody pro astronomickou fotometrii. Přístroje a metody pro astronomickou spektroskopii.)
- Přístroje pro astronomickou spektroskopii na pozemských a družicových observatořích.
- Přístroje a metody pozorování kosmického záření, neutrin a gravitačních vln.
- Metody hledání periodicity v astronomických datech.
- Výpočet efemerid v nerušeném problému dvou těles.
- Metody určování drah těles ve Sluneční soustavě (Laplaceova metoda ze změřené rychlosti a polohy, Gaussova metoda ze tří pozorování, Olbersova metoda ...)
- Přehled a návaznost metod určování vzdáleností ve vesmíru (radarová pozorování, trigonometrická paralaxa, pohybové hvězdokupy, modul vzdálenosti, cefeidy, ..., Hubbleův zákon ...)
- Přehled metod určování hmotností kosmických objektů - dvojhvězdy, hvězdokupy, galaxie, věta o viriálu ...
- Spektrální klasifikace hvězd, barevné indexy, bolometrická korekce, přehled definic povrchové teploty hvězd a metod k jejich určování
- Pohyby hvězd v Galaxii, rotace galaxií, Oortovy konstanty, stabilita kruhové dráhy, epicykl. ¹⁷
- Stavba Galaxie - hvězdné populace, rozložení mezihvězdného plynu a prachu, HI oblasti. H₂, CO a další molekuly v mezihvězdném prostoru, chemický vývoj látky v Galaxii. Morfologická klasifikace galaxií. ¹⁹
- Prostorové rozložení a pohyby galaxií. Pozorování reliktního záření (dipólová anizotropie ...) ¹⁹

¹⁷ !!!Zpracováno v sekci astrofyzika – Galaxie a mezihvězdná látka!!!

Kapitola 5

Astrometrická pozorování

Astronomie a poziční astronomie: Souřadnicové systémy a jejich transformace. Pohyb pozorovatele a zdroje záření, aberace, Dopplerův jev. Vliv atmosféry na pozorování, refrakce, extinkce. Paralaxa. Precese, nutace. Vlastní pohyby hvězd. Metody určování souřadnic. Čas a jeho měření.

Efemeridová astronomie: Problém dvou těles, elementy dráhy, výpočet efemeridy. Určování drah těles Sluneční soustavy a dvojhvězd. Zatmění a zákryty. [Omezený problém tří těles = viz otázky z oddílu nebeská mechanika!].

- Astrometrická pozorování - přehled vlivů působících na souřadnice a způsoby jejich redukce (refrakce, precese, nutace, aberace, vlastní pohyby, paralaxa ...)
- Výpočet efemerid v nerušeném problému dvou těles.
- Metody určování drah těles ve Sluneční soustavě (Laplaceova metoda ze změřené rychlosti a polohy, Gaussova metoda ze tří pozorování, Olbersova metoda ...)

5.1 Souřadnicové systémy

Definovány *základní rovinou*, počátkem souřadnic (v místě pozorovatele = *topocentrické*, ve středu Země = *geocentrické*, ve středu Slunce = *heliocentrické* ...) a základním směrem. Souřadnicové sítě určujeme na jednotkové *nebeské sféře*. Hlavní kružnice mají střed v počátku s. s., vedlejší kružnice mají střed mimo počátek s. s..

Souřadnice *obzorníkové/horizontální*, **H**. Základní rovinou je rovina vodorovná protínající nebeskou sféru v hlavní kružnici zvané **obzorník/horizont**. Příčka vedená kolmo k této rovině je příčka vertikální a protíná nebeskou sféru v **zenitu**/nadhlavníku a **nadiru**/podnožníku. Vedlejší kružnice rovnoběžné s horizontem = almukantaraty. Hlavní kružnice procházející zenitem jsou **vertikály**/výškové kružnice. Výšková kružnice procházející jižním a severním bodem je **meridián**/místní poledník. **První vertikál** pak prochází západním a východním bodem. Souřadnice jsou **azimut A** a **výška h** (objektu nad obzorem). Azimut (astronom.!) je úhel mezi jižním bodem a patou výškové kružnice měřený ve směru S→W→N→E. Místo výšky se též užívá **zenitová vzdálenost** $z = 90^\circ - h$.

Soustava *rovníkových souřadnic 2. druhu*, **Q2**. Základní je rovina rovníku jenž protíná nebeskou sféru v hlavní kružnici zvané **nebeský rovník**. Na rovníku leží **jarní bod** (který určuje základní směr, v současnosti v souhvězdí Ryb). Vertikální osa je rovnoběžná s rotační osou Země a protíná nebeskou sféru v **severním** a **jižním nebeském pólu**. Hlavní kružnice procházející těmito body jsou **deklináčnické kružnice**. Deklináčnické kružnice procházející jarním a podzimním bodem = kolur rovnodennosti. Souřadnice jsou **rektascenze** α a **deklinace** δ . Rektascenze se měří od jarního bodu směrem k východu, deklinace od rovníku kladně na sever a záporně na jih.

Rovníkové souřadnice 1. druhu, **Q1** jsou analogické předchozí soustavě. Místo rektascenze se zavádí **hodinový úhel t**, který je měřen od meridiánu k hvězdě ve směru jejího denního pohybu. Platí $\theta = \alpha + t$, kde θ je **místní hvězdný čas** (tj. je definován jako hodinový úhel jarního bodu).

+ rektascenze Slunce během roku roste, přibližně o 1° za den; kulminace je průchod hvězdy hlavním poledníkem a v té době bude mít výšku nad obzorem danou rovnicí $h = 90^\circ - \varphi + \delta$, kde φ je zeměpisná šířka; astronomické souřadnice viz obr. 5.1.

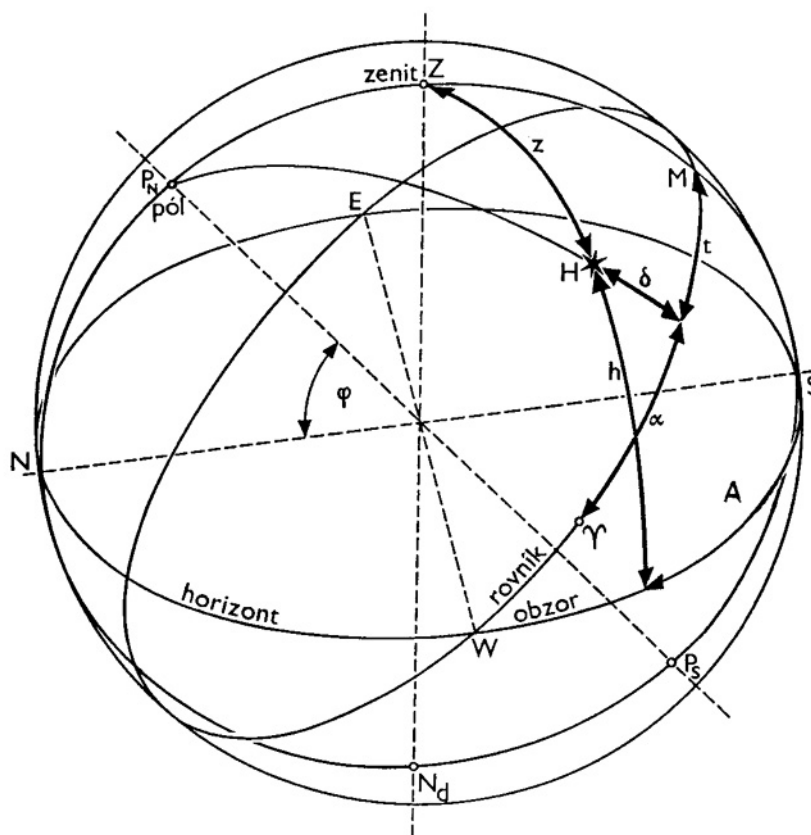
Další soustavou je soustava *ekliptikální*, **E**. V ní je referenční rovinou rovina ekliptiky (svírá s rovinou rovníku přibližně úhel $23,5^\circ$) a vertikální osa míří do severního pólu ekliptiky (v Dra). Souřadnice jsou **ekliptikální délka** λ (měřena od jarního bodu k východu, tj. ve směru zdánlivého ročního pohybu Slunce) a **ekliptikální šířka** β (od ekliptiky analogicky deklinaci).

Nakonec máme ještě souřadnice *galaktické*, **G**. Referenční rovinou je rovina Galaxie (protíná nebeskou sféru v hlavní kružnici zvané galaktický rovník, v Mléčné dráze) a počátek této soustavy souřadné je ve Slunci. Souřadnicemi jsou **galaktická délka** l a **galaktická šířka** b .

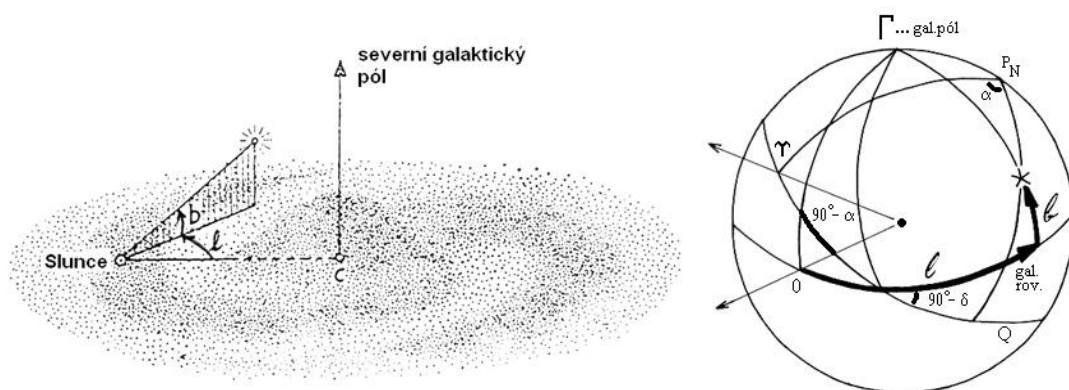
- Souřadné soustavy **H** a **Q1** se hodí pro pozorování oblohy, souvisí se souřadnicemi na dělených kruzích dalekohledu v závislosti na typu jeho montáže. Horizontální se užívá k určení polohy na pevnině či moři. Souřadnice se díky rotaci Země neustále mění s časem.

- **E** jsou vhodné pro sledování drah těles ve Sluneční soustavě, pomalu se mění v důsledku precese a nutace, a v důsledku aberací.

- **Q2** se používá pro katalogy a mapy, souřadnice se opět pomalu mění v důsledku precese a nutace (proto se mapy vztahují k určitému okamžiku, ekvinokcium).



Obrázek 5.1: Astronomické souřadnice

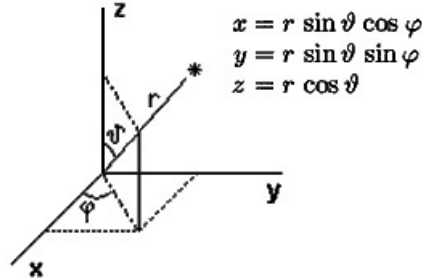


Obrázek 5.2: Galaktické souřadnice

- G jsou nejvhodnější pro popis rozložení útvarů v Galaxii a ve vzdáleném vesmíru.

Tyto systémy souřadnic **sférické**, tj. např. pro polohový vektor \vec{r} v rovníkové soustavě 2. druhu platí:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{QII} = \begin{pmatrix} \sin \delta \cos \alpha \\ \sin \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \end{pmatrix}.$$



§ Transformace souřadnic

Nejvhodněji pomocí matic rotace. Popisují transformaci mezi dvěma kartézskými s. s. vzájemně pootočenými o úhel ψ . Jednotlivé matice rotace mají tvar:

$$\mathbf{R}_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Převod ze soustavy **Q2** do **E** je tedy vlastně rotací kolem osy x o úhel $23,5^\circ$. Platí pro něj vztah:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{Q2}.$$

Protože je rotace kolem osy x z grupy rotací, platí pro ni: $\mathbf{R}_x^{-1}(\psi) = \mathbf{R}_x^T(\psi)$. Opačná transformace pak má tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{QII} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E.$$

- Transformace polohového vektoru z **H** do soustavy **Q1** a obráceně:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_H = \begin{pmatrix} \cos h \cos (-A) \\ \cos h \sin (-A) \\ \sin h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{Q1} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos (-t) \\ \cos \delta \sin (-t) \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

- Transformace od **H** ke **Q1** je rotací kolem osy y o úhel $90^\circ - \varphi$. Transformace opačná je rotace kolem osy y o úhel $\varphi - 90^\circ$.

- Transformace od **Q1** ke **Q2** a obráceně se děje pomocí formulky $\theta = \alpha + t$.
 - Transformaci od **Q2** k **E** provedeme pomocí rotace kolem osy x o úhel ε .
- \Rightarrow Vzájemné převody je vhodné (a nejjednodušší) provádět pomocí naznačených vztahů v postupné řadě:

$$H \xrightarrow{R_y(90^\circ - \varphi)} Q1 \xrightarrow{\alpha = \theta - t} Q2 \xrightarrow{R_x(\varepsilon)} E,$$

$$E \xrightarrow{R_x(-\varepsilon)} Q2 \xrightarrow{t = \theta - \alpha} Q1 \xrightarrow{R_y(\varphi - 90^\circ)} H.$$

- Transformace **G** v **Q2** už není tak jednoduchá a sestává se ze tří kroků:
 - otočení x_{Q2} , aby jarní bod splynul s průsečíkem rovníků obou soustav, $\mathbf{R}_{z_{Q2}}(90^\circ - \alpha_0)$,
 - rovinu rovníku otočíme do galaktické roviny, $\mathbf{R}_{z_{Q2}}(90^\circ - \delta_0)$,
 - provedeme splynutí os x_{Q2} a x_G , $\mathbf{R}_{z_{Q2}=z_G}(-\theta + 90^\circ)$.

Celková transformace má tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_G = \mathbf{R}_z(90^\circ - \theta) \mathbf{R}_x(90^\circ - \delta_0) \mathbf{R}_z(90^\circ - \alpha_0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{Q2}.$$

§ Sférická trigonometrie

Základem je jednotková sféra a hlavní kružnice na ní. Vektory \vec{A} , \vec{B} a \vec{C} se společným počátkem ve středu sféry vytínají na povrchu sféry sférický trojúhelník. Průsečíky vektorů se sférou označíme A, B a C, strany sférického trojúhelníka a, b, c (mají vlastně význam úhlů sevřených jednotlivými vektory \vec{A} , \vec{B} nebo \vec{C}). Dále označme α, β a γ vnitřní úhly našeho sférického trojúhelníka.

Sférická sinová věta:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Sférická kosinová věta:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Nautický trojúhelník = sférický trojúhelník daný zenitem, severním pólem a polohou hvězdy (viz obrázek 5.3). Podívejme se na něj z pohledu souřadnicových soustav a provedme mezi nimi transformaci. Půjde nám o převod **Q1** do **H**. Napřed ale pro sférický nautický trojúhelník napíšeme sinové a kosinové věty. Získáme tři rovnice:

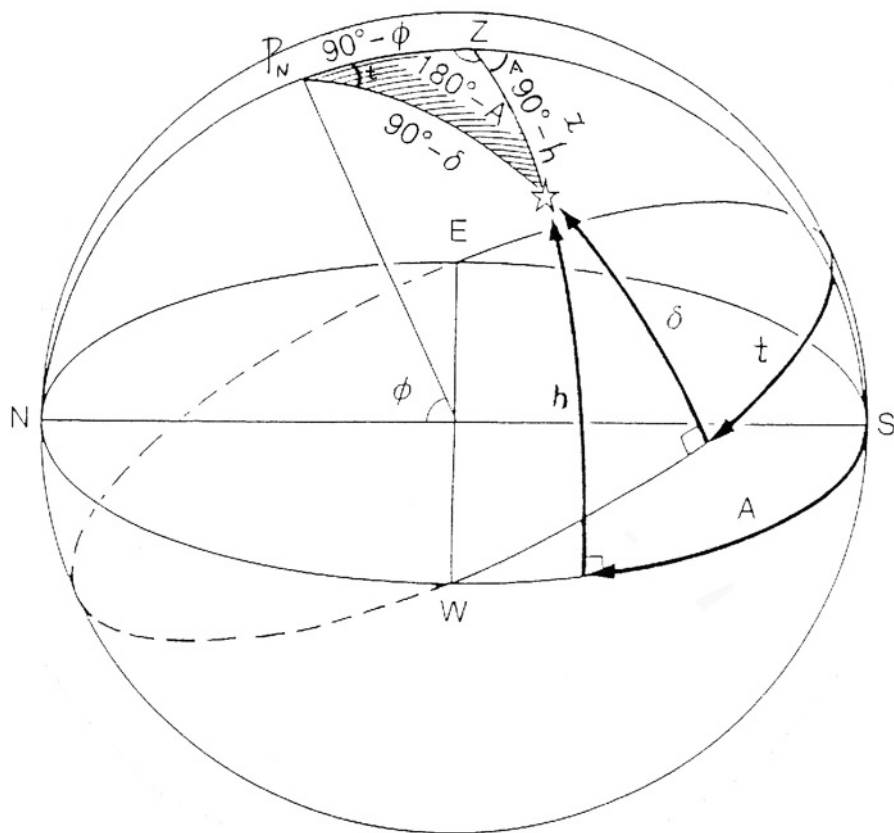
$$\cos z = \underbrace{\cos(90^\circ - \delta)}_{\sin \delta} \sin \varphi + \underbrace{\sin(90^\circ - \delta)}_{\cos \delta} \cos \varphi \cos t,$$

$$\underbrace{\cos(90^\circ - \delta)}_{\sin \delta} = \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \underbrace{\cos(180^\circ - A)}_{\cos A},$$

$$\frac{\sin t}{\sin z} = \frac{\sin A}{\cos \delta}.$$

A nyní provedme transformaci souřadnic:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos t \\ -\cos \delta \sin t \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin z \cos A \\ -\sin z \sin A \\ \cos z \end{pmatrix}.$$



Obrázek 5.3: Nautický trojúhelník

Proveďme tuto transformaci explicitně. Dostaneme tři rovnice:

$$\cos \delta \cos t = \sin \varphi \sin z \cos A + \cos \varphi \cos z,$$

$$-\cos \delta \sin t = -\sin z \sin A,$$

$$\sin \delta = -\cos \varphi \sin z \cos A + \sin \varphi \cos z.$$

Vidíme, že druhou a třetí rovnici je možno ztotožnit se sférickou kosinovou resp. sinovou větou ¹ ⇒ transformační vztahy lze odvodit i řešením sférického/nautického trojúhelníka...

¹ první rovnici lze ztotožnit se sférickou sinus-kosinovou větou pro stranu a přilehlý úhel:

$$\sin a \cos \beta = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos \alpha, \quad \sin a \cos \gamma = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha, \quad \dots$$

5.2 Vlivy působící na souřadnice, jejich redukce

= relativně malé změny souřadnic nebeských objektů mající nejružnější příčiny:

- **pohyb objektu - vlastní pohyb** hvězd, Edmund Halley 1718
- **pohyb pozorovatele a konečná rychlost světla - aberrace**
 - roční - pohyb Země kolem Slunce, James Bradley 1729
 - denní - rotace Země unášející pozorovatele
 - sekulární - pohyb Sluneční soustavy v Galaxii

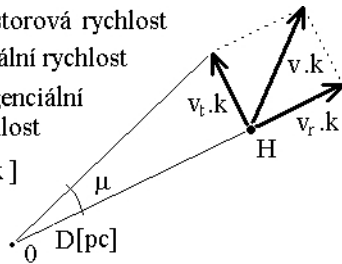
... roční + denní + sekulární = stelární (nezávislá na vzdálenosti a pohybu pozorovaného objektu) + oprava ze šíření světla (způsobeno pohybem pozorovaného objektu, nezávislé na pohybu pozorovatele) = planetární aberrace (uvažuje se u pozorování těles sluneční soustavy)
- **přechod od jedné vztažené soustavy k jiné - paralaxa**
 - a) topocentrická - počátek s. s. v místě pozorovatele
 - b) geocentrická - vztažená ke středu Země
 - c) heliocentrická - vztažená ke středu Slunce
 - d) barycentrická - vztaženo k těžišti Sluneční soustavy
 - a) → b) ⇒ denní paralaxa ($\sim 1^\circ$ u Měsíce ...)
 - b) → c) ⇒ roční paralaxa ($\sim 0,7''$ u Prox. Cent. ..., F.W.Bessel 1738)
- **pohyb souřadných os v prostoru -**
 - precese = rotační osa Země koná dlouhoperiodický pohyb (25 725 let, tzv. Platónský rok) po plášti kužele; působením Slunce, Měsíce a planet; Hipparchos (... lunisolární precese [v důsledku působení Slunce a Měsíce → změna polohy světového rovníku vzhledem ke hvězdám, tj. pohyb jarního bodu o $\sim 50''/\text{rok}$] + + planetární precese [rozdílný sklon drah ostatních planet k dráze Země → zmenšování sklonu ekliptiky o $\sim 0,47''/\text{rok}$ a posun jarního bodu o $\sim 0,125''/\text{rok}$] = = generální/obecná precese [výsledný posuv jarního bodu])
 - pohyb pólů = rotační osa Země se pohybuje v tělese Země, pohyb Zemských pólů po nepravidelných křivkách kolem střední polohy (výchylna max. 15 m)
 - nutace = rotační osa Země se pohybuje kolem střední polohy s periodou 18,61 let, způsobeno Měsícem
- **vliv atmosféry = refrakce** - na rozhraní vakuum/atmosféra se paprsek láme ke kolmici → objekty vidíme blíže k zenitu, Tycho Brahe
- **ohyb světla v gravitačním poli Slunce** - A. Einstein, potvrzeno 1919; při okraji Slunce $\sim 1,73'' \times$ kolmo ke spojnici Země-Slunce $\sim 0,001''$ (1 mas)

§ Vlastní pohyb

$$\operatorname{tg} \mu \doteq \mu [\text{rad}] = \frac{v_t [\text{km/s}] \cdot k [\text{s}]}{D [\text{km}]} \rightarrow v_t [\text{km/s}] = \text{konst} \cdot \frac{D [\text{pc}] \cdot \mu [''/\text{rok}]}{k [\text{s}]} \rightarrow$$

$$v_t [\text{km/s}] = 4,74 \cdot D [\text{pc}] \cdot \mu [''/\text{rok}] \quad + \text{Doppler} \Rightarrow \text{prostorová rychlost: } v^2 = v_t^2 + v_r^2$$

v ... prostorová rychlost
 v_r ... radiální rychlost
 v_t ... tangenciální rychlost
 μ ["/rok]
 D [pc]



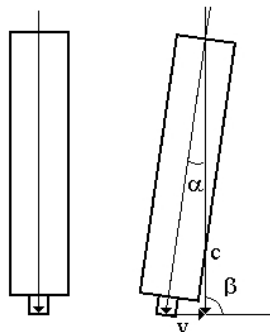
k je počet sekund v roce
 $(365,2422 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \doteq 3,16 \cdot 10^7)$

$1 \text{ pc} \doteq 3,26 \text{ ly}$
 $\doteq 206265 \text{ AU}$
 $\doteq 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$

- největší vlastní pohyb: Barnardova šipka, $\mu \doteq 10''/\text{rok}$
- obvykle: $\mu \leq 1''/\text{rok}$

§ Aberace

• **roční** - okamžitý bod, ke kterému Země směřuje (rychlostí $\approx 20\text{-}30 \text{ km/s}$) = **apex**. Touto rychlostí je unášen každý přístroj na povrchu Země \rightarrow abychom hvězdu viděli ve středu zorného pole dalekohledu, musíme jej sklonit o α směrem k apexu, viz obrázek. Úhel α je závislý na v , c a β = vzdálenost hvězdy od apexu. Maximální aberaci jeví hvězdy vzdálené o 90° , neboť $\text{tg } \alpha = \frac{v \cdot \sin \beta}{c} \rightarrow \alpha = 20,47'' \cdot \sin \beta$, kde $20,47''$ je tzv. aberační konstanta a zároveň maximální hodnota aberace (\rightarrow aberace objevena dříve než paralaxa).



Obrázek 5.4: Aberace

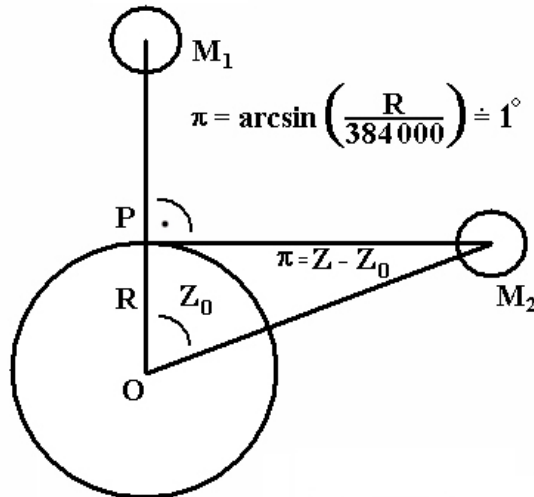
V důsledku aberace opisuje hvězda na obloze malou elipsu. Velká poloosa této elipsy je u všech hvězd (nezávisle na jejich vzdálenosti, odlišné od paralaxy) rovna aberační konstantě. Malá poloosa je tím menší, čím je hvězda blíže k ekliptice (na ekliptice se hvězdy pohybují po úsečce, na pólu ekliptiky po kružnici).

- **denní** - rychlost pozorovatele na rovníku $\approx 463 \text{ m/s}$ \rightarrow denní aberace je max. pro pozorovatele na rovníku $\approx 0,3''$
- **sekulární** - způsobena pohybem Sluneční soustavy v Galaxii ($\approx 230 \text{ km/s}$), neznáme přesně směr \rightarrow nezapočítává se

§ Trigonometrické paralaxy

Paralaxa = míra vzdálenosti. U blízkých těles sluneční soustavy vzniká vlivem rotace Země tzv. **denní paralaxa**; u blízkých hvězd (do vzdálenosti několika set světelných roků) v důsledku oběhu Země kolem Slunce **roční paralaxa**; vlivem pohybu celé sluneční soustavy směrem k apexu (Her) vzniká **sekulární paralaxa**.

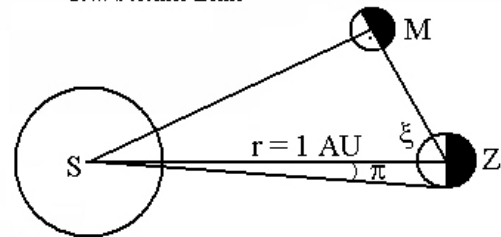
Ekvatoreální horizontální paralaxa je úhel, pod kterým (např. z Měsíce) vidíme poloměr zemského rovníku. Prakticky lze určit paralaxu buď změřením polohy Měsíce v různých místech na Zemi ve stejném okamžiku, nebo z jednoho stanoviště určováním zenitových vzdáleností při průchodu a jistou dobu po průchodu meridiánem.



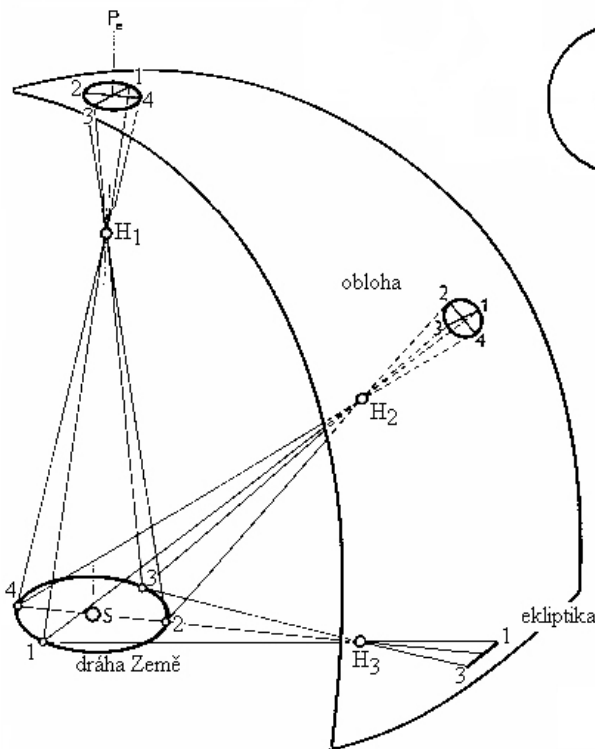
Denní paralaxa Měsíce. Pro pozorovatele P na rovníku rotující Země bude střed Měsíce v poloze M_1 v zenitu a do téhož směru se promítá i ze středu Země O. V okamžiku, kdy Měsíc pro pozorovatele zapadá a jeho střed je v poloze M_2 , zenitová vzdálenost $Z = 90^\circ$, avšak měřeno ze středu Země O bude $Z_0 < 90^\circ$. Rozdíl $Z - Z_0$ je denní paralaxa Měsíce (přesněji denní horizontální ekvatoreální paralaxa).

- obecně: $\pi = \frac{R}{r}$ [rad]

r ... vzdálenost tělesa od Země
R ... poloměr Země



Zdánlivý roční pohyb hvězd v důsledku paralaxy. Hvězda H_1 se promítá na oblohu do těsné blízkosti pólu ekliptiky. Během roku se posouvá kolem pólu ekliptiky po kružnici (resp. po elipse, jejíž excentricita odpovídá excentricitě dráhy Země). Hvězda H_3 na ekliptice koná toliko pohyb po úsečce. Všechny hvězdy mezi póly ekliptiky a ekliptikou vykonávají eliptický pohyb a velká poloosa této elipsy odpovídá paralaxe hvězdy.



D[pc]: $1 \text{ pc} \doteq 206\,265 \text{ AU} = \frac{1}{\sin 1''}$
tj.

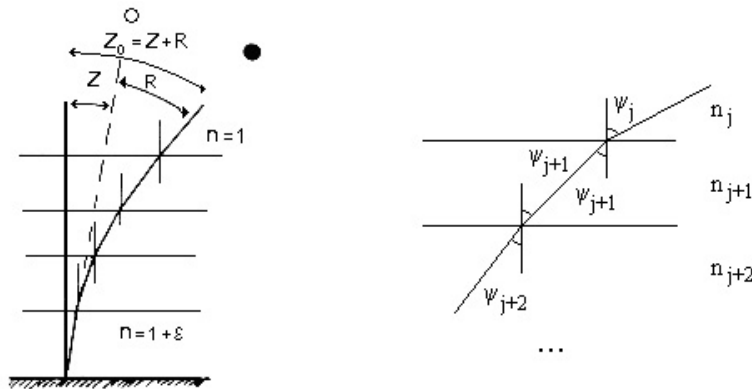
$$D[\text{pc}] = \frac{1}{\pi''}$$

Určení délky AU je ekvivalentní stanovení rovníkové paralaxy Slunce (tj. úhel pod kterým bychom viděli rovníkový poloměr Země ve střední vzdálenosti Země – Slunce, kolmo k zornému paprsku), nejstarší určení Aristarchos – měřil úhel ξ v okamžiku první resp. poslední čtvrti v pravoúhlém trojúhelníku ZMS, odtud spočteme r . Dnes 8,8".

Oprava o denní paralaxu dána zeměpisnou šířkou a délkou, nadmořskou výškou a natočením Země v prostoru (hvězdný čas); tato čísla udávají okamžitou hodnotu vektoru

spojujícího střed Země a místo pozorovatele. Má smysl jen pro objekty ve sluneční soustavě, pro objekty nad ≈ 70 AU je denní paralaxa neměřitelně malá \rightarrow pro určování vzdáleností hvězdných objektů volíme větší základnu, tj. poloměr dráhy Země \rightarrow **roční paralaxa**. Hvězda vykoná na sféře během roku pohyb obecně po elipse, který úplně odpovídá tvaru zemské dráhy, jak bychom ji viděli z hvězdy, viz obrázek. Paralaxy hvězd vesměs menší než $0,1''$ (Proxima Centuri = $0,763''$).

§ Refrakce



Obrázek 5.5: Refrakce

Jev způsobený atmosférou, postupné zhušťování při průchodu \rightarrow lom ke kolmici, paprsek se zakřivuje a hvězda se jeví výše nad obzorem než ve skutečnosti je. Roste se vzrůstající zenitovou vzdáleností, při obzoru $\approx 0,5^\circ$.

Lom mezi vrstvami $j, j+1$:

$$\frac{n_j}{n_{j+1}} = \frac{\sin \psi_{j+1}}{\sin \psi_j}$$

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{\sin \psi_1}{\sin Z_0} \dots \frac{n_j}{n_{j+1}} = \frac{\sin \psi_{j+1}}{\sin \psi_j} \dots \frac{n_{k-1}}{n_k} = \frac{\sin Z}{\sin \psi_{k-1}} \rightarrow \frac{n_0}{n_k} = \frac{\sin Z}{\sin Z_0} \rightarrow$$

$$\frac{1}{n_k} = \frac{\sin Z}{\sin(Z+R)} \rightarrow n_k \sin Z = \sin Z \underbrace{\cos R}_{\approx 1} + \cos Z \underbrace{\sin R}_{\approx R} \rightarrow \mathbf{R} = (\mathbf{n}_k - 1) \mathbf{tg} Z$$

Výsledek platí pro malé zenitové vzdálenosti. Přesný výpočet musí brát v úvahu kulovou atmosféru, změny atmosférického tlaku a teploty ovzduší.

$$R = \alpha \beta \gamma \operatorname{tg} Z,$$

kde $\alpha = 60,236'' - 0,070'' \operatorname{tg}^2 Z$ je korekce na kulovou atmosféru, $\beta = B / 1013,25$ a $\gamma(f)$. B je tlak vzduchu v hPa a f je tlak vodních par v hPa (platí pro $\lambda = 590$ nm a pro daleké objekty – pro blízké objekty [Měsíc...] je refrakce menší o tzv. paralaktickou refrakci r a celková refrakce je tedy $R - r$). Střední hodnoty refrakce a jejich opravy na teplotu a tlak jsou tabelovány v tzv. refrakčních tabulkách (Pulkovské tabulky 1985).

Refrakce urychluje východ a opoždí uje západ nebeských těles o několik minut. Způsobuje deformaci slunečního a měsíčního kotouče nad obzorem . . .

+ vliv seeingu = rozmazání téměř bodového obrázku hvězdy do neostrého kotoučku
 ← v reálné atmosféře uvidíme skvrnky neustále se přeskupující s typickou frekvencí 20 Hz, statisticky se nejčastěji vyskytující v maximu Airiho fce; seeing je pak dán průměrem obálky všech teček

§ Precese

Dlouhoperiodický kuželový pohyb zemské osy způsobený momentem síly. Důsledek odchylky tvaru Země od sféry.

Přitažlivé síly Měsíce a Slunce působí dvojicí sil na rovníkovou výduť Země a snaží se dostat rovník do oběžné roviny Měsíce a do ekliptiky. Země reaguje precesním pohybem, **lunisolární precesí**, při níž zemská osa opíše kužel jednou za 25 725 let. Osa opisovaného precesního kužele je kolmá k ekliptice a protíná oblohu v pólu ekliptiky (Dra). Poloviční vrcholový úhel je roven sklonu rovníku vůči ekliptice, tj. $23,5^\circ$. Precesním pohybem zemské osy se mění poloha světového pólu na obloze (za 12 000 let bude blízko Vegy). S otáčením osy se také mění poloha světového rovníku, posouvají se tedy i jeho průsečky s ekliptikou, jarní a podzimní bod (po ekliptice západním směrem, proti zdánlivému pohybu Slunce). Vlivem lunisolární precese se oba body posunou po ekliptice o $50,40''$ za rok, z čehož větší díl ($30''$) připadá na působení Měsíce. Jarní bod je počátkem systému rovníkových souřadnic → rektascenze a deklinace se s časem pomalu mění.

Zatímco Měsíc a Slunce působí lunisolární precesy zemské osy, gravitační přitažlivost planet působí na polohu zemské dráhy. Vzniká tak periodická změna polohy ekliptiky na obloze, **planetární precese**. Planetární precese přidává k posuvu jarního bodu posuv $0,12''$ za rok a současně zmenšuje sklon ekliptiky o $0,47''$ za rok (→ sklon ekliptiky kolísá v mezích $21^\circ 55'$ až $24^\circ 18'$ s periodou 40 000 let).

Souhrnné působení lunisolární a planetární precese = **všeobecná precese**. Působí posuv jarního bodu po ekliptice o $50,26''$ za rok proti směru zdánlivého pohybu Slunce. Za rok tedy Slunce neopíše plných 360° → tropický rok je o něco kratší než hvězdný rok.

Generální precese v délce je $p = p_{ls} - p_{pl} \cos \varepsilon \doteq 50,26''/\text{rok}$. Předpokládá se, že změna $\cos \varepsilon$ resp. $\sin \varepsilon$ za rok je nepatrná. Celková precese v deklinaci je

$$n = \text{jar.bod}_0 \rightarrow D = p_{ls} \sin \varepsilon = 20,04311'' - 0,00853'' T \quad .$$

Celková precese v rektascenzi je

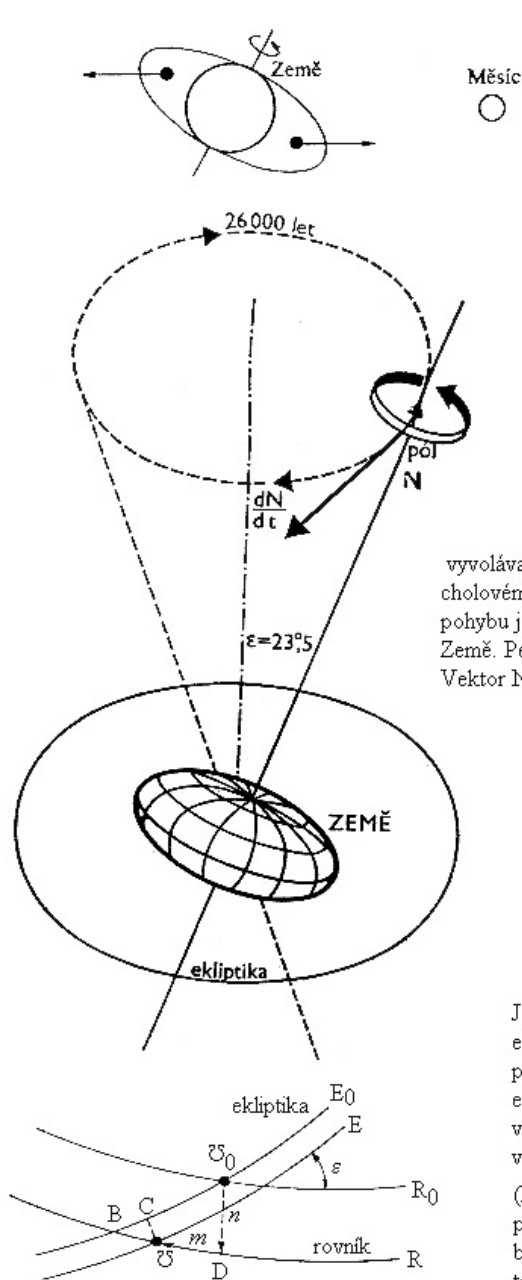
$$m = D \rightarrow \text{jar.bod} = p_{ls} \cos \varepsilon = 46,12436'' + 0,02793'' T \quad .$$

Pro (roční) změnu polohy hvězdy v důsledku precese platí

$$\Delta\alpha/\text{rok} = m (t_2 - t_1) + n (t_2 - t_1) \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$$

$$\Delta\delta/\text{rok} = n (t_2 - t_1) \cos \alpha \quad ,$$

kde T je čas od okamžiku standardní epochy J2000.0 (2 451 545.0) do doby t_1 (obvykle začátek roku), t_2 je okamžik pozorování. Hodnoty m a n pro daný rok spočteny v ročence.



Zemi si můžeme představit jako rotační elipsoid. Na přebytek hmoty v rovníkové oblasti elipsoidu působí gravitační síly Měsíce a Slunce, které se snaží narovnat osu Země kolmo ke spojnici střed Země - střed Měsíce. Tím vzniká dvojice rušivých sil vyvolávající precesní pohyb zemské osy.

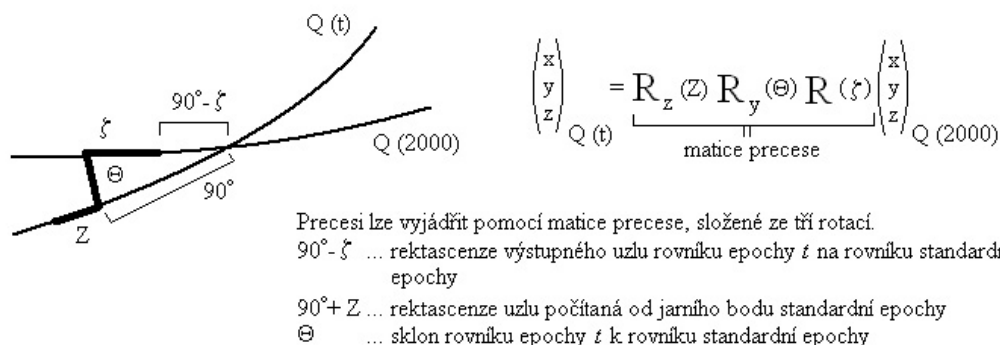
Rušivé síly působící na rotující Zemi vyvolávají pohyb osy Země po plášti kužele o vrcholovém úhlu přibližně $23,5^\circ$. Směr precesního pohybu je v opačném směru než je směr rotace Země. Perioda precesního pohybu je 25 725 let. Vektor N leží v rotační ose.

Změna polohy jarního bodu v důsledku precese. Jestliže původní poloha jarního bodu byla v průsečíku ekliptiky E_0 a rovníku R_0 , pak v důsledku precese se posune za jednotku času do bodu, který je průsečíkem ekliptiky E a rovníku R . V rovníkových souřadnicích vztahených na rovník R_0 se poloha jarního bodu změní v deklinaci δ a v rektascenzi α .

(Lunisolární precese přispívá k posunutí z \mathcal{U}_0 do B , tj. posunutí, které by bylo možno měřit, kdyby se jarní bod posouval pouze po ekliptice E_0 , kdežto planetární precese způsobí posun z B do \mathcal{U} , jako by se jarní bod posouval po rovníku R .)

§ Nutace

Periodické kolísání zemské osy, překládající se přes precesní pohyb s periodou $\approx 18,6$ roku. Měsíční dráha je skloněna k ekliptice o $\approx 5^\circ$ a gravitační síly Slunce se snaží měsíční dráhu narovnat do roviny ekliptiky. Výsledkem je precesní pohyb měsíční dráhy s periodou 18,6 let. Z toho plynou periodické změny ve směru, ve kterém se počítají maximální rušivé síly Slunce a Měsíce na rotující zemi (tj. nutace jsou z fyzikálního hlediska kmity volně rotujícího setrvačnicku, kdy osa rotace je nesymetrická k rozložení hmoty). Světový pól



tak opisuje kolem střední precesní polohy nutační elipsu s velkou poloosou $9,21''$. Nutace mění polohu jarního bodu na ekliptice a zároveň sklon ekliptiky. Nutace v ekliptikální délce $\Delta\psi$ (dána pohybem jarního bodu) a nutace ve sklonu ekliptiky $\Delta\varepsilon$ vyjadřovány ve tvaru řady s 263 členy:

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{263} [(A_i + A'_i) \sin(arg) + A''_i \cos(arg)],$$

$$\Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^{263} [(B_i + B'_i) \sin(arg) + B''_i \cos(arg)],$$

kde arg dány lineárními kombinacemi Delaunayových proměnných (viz část Nebeská mechanika, např. střed. anom. Měs. a Sl., střed. délka výstup. uzlu dráhy Měs. ...).

Celkem precese + nutace:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{t2} = \underbrace{R_x(-\varepsilon - \Delta\varepsilon) R_z(-\Delta\psi) R_x(\varepsilon)}_{\widehat{N}} \underbrace{P}_{\text{matice precese}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{t1}$$

Skutečný pól opisuje vlivem precese a nutace na obloze vlnovku.

§ Pohyb pólů

První teorie Euler, 1756, na základě pohybu setrvačníku resp. pohybu rotační osy v tělese setrvačníku. Pro tuhou Zemi odvodil periodu 305 dní.

Skutečně nalezeno až 1884 (obtížné měření), pomocí Harrelow-Talcott metody, zenit teleskop - během roku se mikrometrem měří polohy (vzdálenosti od optické osy) hvězd ve vybraných pásech → získáme variace během roku → variace zeměpisné šířky.

Chandler, 1892, teorie pohybu pólu - pohyb má dvě periody:

- roční, závisí na pokrytí Země sněhem, na klimatu ...

- 427 dní = **Chandlerova perioda** - ekvivalent Eulerovy periody (Země není tuhá, ale deformovaná slapy → rozdíl od původních 305 dní)...

Průměr oblasti, ve které se pól pohybuje ≈ 15 m. Dříve sledovalo a zaznamenávalo 50 stanic IPMS (International Polar Motion Service), od vypuštění Hipparcha v kompetenci IERS (International Earth Rotation Service).

5.3 Čas v astronomii

Sluneční hodiny, vodní hodiny (klepsidry), přesýpací hodiny (cca 8. stol.), mechanické hodiny (Evropa, 13. stol., pražský orloj 1409), pásmový čas ve světě zaveden 1879, mezinárodní atomový čas zaveden 1972. Dnes měřeny intervaly s přesností až 10^{-11} s.

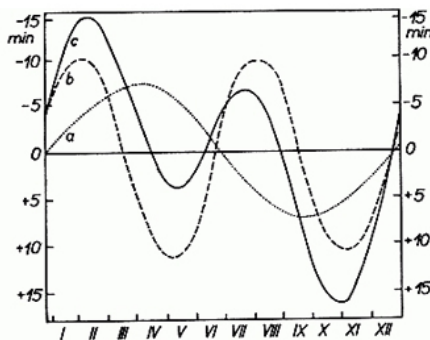
§ Typy časů

• **hvězdný čas** = hodinový úhel jarního bodu; hvězdný den je doba mezi dvěma horními za sebou následujícími průchody jarního bodu místním poledníkem. Jarní bod se díky precesy pohybuje tak, že rektascenze hvězd s časem roste. Máme dva jarní body: střední postupující rovnoměrně a ovlivněný pouze precesí, a pravý nerovnoměrný a ovlivněný precesí i nutací. Rozdíl udává rovnice ekvinokcií.

$$\theta - \bar{\theta} = \overbrace{(\Delta\psi + d\psi)}^{\text{nutace v délce}} \cos \varepsilon$$

GMST = Greenwichský střední hvězdný čas (G. Mean Sidereal Time), čas na místním poledníku pak označován jako LMST (Local MST).

• **sluneční čas** = hodinový úhel Slunce zvětšený/zmenšený o 12 hodin; sluneční den pravý = doba, která uplyne mezi dvěma spodními kulminacemi skutečného Slunce. Sluneční hodiny ukazují pravý sluneční čas, ten je nepravidelný, variace ± 15 min (2. Keplerův zákon a sklon roviny rovníku a ekliptiky \Rightarrow v únoru nastává pravé poledne později než střední (cca 15 min), v listopadu nastává pravé poledne dřív (cca 17 min), viz analema). Rozdíl mezi pravým a středním slunečním časem vyjadřuje časová rovnice.



Plně vtažená křivka c znázorňuje průběh časové rovnice během roku. Záporné hodnoty označují o kolik se pravé Slunce při kulminaci zpozdí za Sluncem středním. Kladné hodnoty naopak vyjadřují předstih pravého Slunce proti Slunci střednímu. Křivka a naznačuje průběh časové rovnice pro případ, že by se Země pohybovala po kruhové dráze, ale sklon zemské osy k rovině dráhy Země by zůstal též jako v současné době. Křivka b naznačuje průběh časové rovnice pro případ, že sklon osy Země ke dráze by byl nulový, tj. kdyby se projevoval toliko důsledek druhého Keplerova zákona.

Za jeden tropický rok (365,2422 dne) vykoná střední Slunce 365,2422 zdánlivých oběhů po obloze. Za tutéž dobu však jarní bod vykoná o jeden denní oběh více (střední Slunce, které se za rok dostane opět do jarního bodu se o celý jeden denní oběh opozdí):

$$\begin{aligned} 365,2422 \text{ dní středních} &= 365,2422 + 1 \text{ dní hvězdných} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 24 \text{ hodin středních} &= 24^h 03^m 56,555 42^s \text{ času hvězdného} \end{aligned}$$

• **universální čas UT** - nejčastěji jsou okamžiky středů astronomických pozorování udávány ve světovém čase (Universal Time, UT) – vztažen k lokálnímu času na greenwickskému poledníku, měří se jako občanský čas od půlnoci každého dne.² Universální

² Do konce roku 1924 používali astronomové greenwickský střední čas (Greenwich Mean Time, GMT), ve kterém začínal den vždy v poledne.

čas se odvozoval od rotace Země a nutně zahrnoval implicitní předpoklad, že rok trvá celý počet sekund. To ovšem není striktně splněno a navíc v rotaci Země dochází ke změnám.³ Pro civilní použití byl proto zaveden tzv. koordinovaný universální čas UTC, který je měřen v sekundách podle současné definice, tj. atomovými hodinami. UTC je čas, který je šířen rozhlasovými stanicemi. Platí, že UTC se od atomového času TAI liší vždy o celý počet sekund a to tak, aby rozdíl nebyl větší než 0,9 s. V praxi to znamená, že cca jedenkrát za rok se vkládá či vypouští přestupná sekunda. Pokud tedy potřebujeme analyzovat časové řady s vysokými požadavky na přesnost, je dobré převést universální čas na čas terestrický, a to podle vztahu $TT = UT + \Delta T$, kde ΔT je pravidelně zveřejňovaná korekce, dosahující zhruba 65 s (začátek 2007).

- **efemeridový čas ET** - rovnoměrně plynoucí (dle Newtonovského pojetí), stanoven dle pohybu Země kolem Slunce a dle pohybu Měsíce (měření zákrytů), sekunda definována jako díl $(1/31\,556\,956,9747)$ tropického⁴ roku 1900, přesnost 1 ms, udržován křemennými hodinami.

- **terestrický čas TT** - TDT = terestrický dynamický čas, nahradil ET, definován obecnou relativitou jako vlastní čas pozorovatele, později přejmenován na TT = terestrický čas, jenž se užívá v geocentrických efemeridách těles sluneční soustavy = v ročenkách, dnes odvozován z TAI.

- **atomový čas TAI**⁵ - v současnosti nejpreciznější rovnoměrně plynoucí čas.⁶ Udržován Rb a Cs hodinami (užívá se vážený průměr z několika nejlepších atomových časových laboratoří). Roku 1967 sekunda definována na jejich základě, $TT = TAI + 32,184$ s.

- **čas GPS** - základní okamžik 6.1.1980 ($GPS = TAI$), dnes $GPS = TAI - 19$ s

§ Změny v rotaci Země

Ideální přesné hodiny srovnávané s hodinami jdoucími dle rotace Země odhalí:

- roční periodu s amplitudou přibližně 22 ms (pravidelné klimatické změny)
- půlroční periodu s amplitudou zhruba 10 ms (daná elipticitou dráhy Země, a tím i periodickým kolísáním gravitačního působení Slunce na rotující Zemi)
- periodu 13,8 a 27,6 dne s amplitudou pod 1 ms (daná excentricitou měsíční dráhy)
- sekulární změny rotace (brzdění, dáno především slapovými působeními, příliv a odliv)

§ Kalendář

Gregoriánský... , v astronomii při výpočtech nelze užívat začátku normálního občanského roku, jelikož se nikdy nerovná délce roku tropického. Proto se používá počátek roku astronomického, který začíná v okamžiku kdy rektascenze středního slunce je $18^h 40^m$; nazýván annus fictus či rok Besselův.

§ Juliánské datum

Zavedl Joseph Scaliger (1583), název na počest svého otce Julia. Začátek periody 1.1.4713 př. n. l.; juliánský den = $24 \times 60 \times 60$ SI, juliánský rok = 365,25 juliánských dnů; výhodné

³ Mluvíme o tzv. rotačních časech = vázané na rotaci Země, ovšem rotace nepravidelná... Patří sem samozřejmě hvězdný a sluneční čas.

⁴ doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Slunce jarním bodem

⁵ Temps Atomic International

⁶ přesnost cca 1 ns

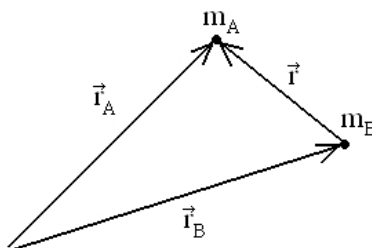
pro hledání periodicity v dlouhých obdobích (datování spojitě, neobsahující nepravidelné měsíce a přestupné dny a roky). MJD = modifikované juliánské datum, začíná o půlnoci, $MJD = JD - 2\,400\,000,5$ dne.⁷

Podrobněji viz (H)různé doplňky . . .

§ Epochy

Význačná místa na časové stupnici, k těmto epochám se dělají katalogy a atlasy. Polohy hvězd tedy rozlišujeme na zdánlivá místa, tj. polohy skutečně pozorované, opravené o refrakci a denní aberaci; pravá místa, tj. zdánlivá místa opravená o roční aberaci a paralaxu; střední místa, tj. pravá místa při započtení nutace a precese převedená na jisté datum, tj. epochu/ekvinokcium (kreslí se do katalogů a atlasů). Mezi jednotlivými místy se přechází pomocí redukčních vzorců.

⁷ 2000 = JD 2 451 545.0000 = MJD 51 544.5000 = gregoriánský kalendář 1.1.2000 12^h UT 1

5.4 Problém dvou těles

Zvolme souřadnicový systém pro dvě tělesa A a B , jejichž hmotnosti jsou m_A a m_B , polohové vektory pak \vec{r}_A a \vec{r}_B . Definujme vektor vzájemné polohy obou těles $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Napišme pohybové rovnice⁸ v inerciálním prostoru:

$$m_A \ddot{\vec{r}}_A = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

$$m_B \ddot{\vec{r}}_B = G \frac{m_A m_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Vykrácením m_A resp. m_B a odečtením výsledných rovnic dostaneme:

$$\ddot{\vec{r}}_B - \ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}} = G \frac{m_A + m_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Toto je pohybová rovnice v relativních souřadnicích v neinerciálním prostoru.

Spočtěme výraz $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$.

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

Výsledek je roven nule, jelikož se jedná o vektorové násobení vektoru se sebou samým resp. s vektorem úměrným. Z tohoto vyplývá, že výraz $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ bude roven konstantnímu vektoru, označme jej \vec{C} . Tím jsme dokázali, že **problém dvou těles se odehrává v rovině** a vektor \vec{C} bude na tuto rovinu kolmý. Proto zavedeme jiný systém souřadnic, místo kartézských x a y zavedeme **polární** r a v (**vzdálenost mezi tělesy** a tzv. **pravá anomálie**). Platí převodní vztahy:

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v.$$

Převědme do těchto souřadnic vztah $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C}$.

$$\dot{x} = \dot{r} \cos v - r \sin v \dot{v}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin v + r \cos v \dot{v}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy - \dot{x}y \end{pmatrix}$$

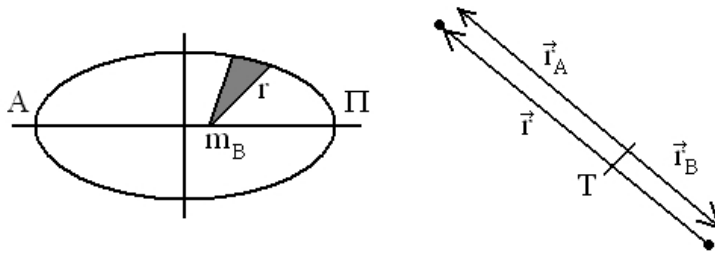
⁸ pouze s úvahou gravitace

$$\begin{aligned} x\dot{y} - \dot{x}y &= x(\dot{r} \sin v + r \cos v \dot{v}) - y(\dot{r} \cos v - r \sin v \dot{v}) = \\ &= r\dot{r} \cos v \sin v + r^2 \cos^2 v \dot{v} - r\dot{r} \cos v \sin v + r^2 \sin^2 v \dot{v} \rightarrow \\ & r^2 \dot{v} = C \end{aligned}$$

Toto je jedna z formulací 2. Keplerova zákona.

Druhý Keplerův zákon – plošná rychlost pohybu tělesa po kuželosečce je konstantní. Označíme-li plošnou rychlost jako w a zavedeme ji vztahem $w = \frac{1}{2}r^2 \dot{v}$, je vztah mezi plošnou rychlostí a zavedenou konstantou $C = 2w$.

Pro eliptickou dráhu zavádíme bod centrálnímu tělesu nejbližší – **pericentrum** Π (např. perihelium, perigeum, periastr) a nejdálčenější – **apocentrum** A (např. afelium, apogeum, apastr).



§ Moment hybnosti

Moment hybnosti \vec{L} vyjadřujeme vůči těžišti systému v tzv. těžišťové inerciální soustavě.

$$\vec{L} = \vec{r}_B \times \overbrace{m_B \vec{r}_B}^{\vec{p}_B} + \vec{r}_A \times \overbrace{m_A \vec{r}_A}^{\vec{p}_A}$$

Vektory \vec{r}_A a \vec{r}_B jsou tentokrát polohové vektory jednotlivých hmotných bodů vůči těžišti (viz obr). V důsledku toho je vztah mezi nimi a vektorem \vec{r} , který jsme zaváděli jako polohový vektor tělesa A vůči tělesu B

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}$$

V těžišťové soustavě platí zákon zachování momentu sil ve tvaru:

$$m_A \vec{r}_A = -m_B \vec{r}_B.$$

Z toho vypočítáme:

$$\vec{r}_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{r}, \quad \vec{r}_B = -\frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{r}.$$

Označíme-li $M = m_A + m_B$, můžeme moment hybnosti počítat:

$$\vec{L} = -\frac{m_A}{M} m_B \vec{r} \times \left(-\frac{m_A}{M}\right) \dot{\vec{r}} + \left(\frac{m_B}{M}\right)^2 m_A \vec{r} \times \dot{\vec{r}} =$$

$$= \frac{m_A m_B}{M^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} (m_A + m_B) = \frac{m_A m_B}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}},$$

kde

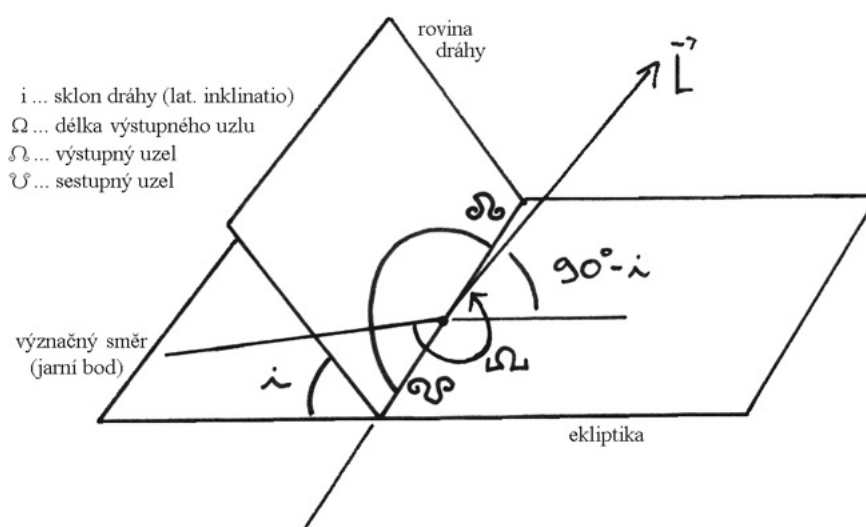
$$\frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)} = \mu$$

je tzv. **redukována hmotnost**; $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C} \rightarrow$

$$\vec{L} = \mu \vec{C} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}.$$

Poslední rovnost platí v kartézské soustavě souřadnic (x, y, z) , kde rovina dráhy je xy a počátek soustavy souřadné je v tělese B . Obecně je ale referenční rovina jiná, než je rovina dráhy. Tato rovina se s referenční rovinou (např. ekliptikou) protíná v **uzlové přímce**. Odchylku obou rovin označíme i a budeme jí říkat **sklon dráhy**, natočení roviny vůči souřadné ose popisuje úhel Ω – **délka výstupného uzlu**. Moment hybnosti pak bude mít rozklad na složky:

$$L_x = L \sin \Omega \sin i, \quad L_y = -L \cos \Omega \sin i, \quad L_z = L \cos i.$$



§ Hledání pohybových rovnic se souřadnicemi r a v ⁹

Vyjdeme z langrangiánu soustavy:

$$\begin{aligned} L &= T - U = \frac{1}{2} m_A \dot{r}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{r}_B^2 + G \frac{m_A m_B}{r} = \\ &= \frac{1}{2} m_A \frac{m_B^2 \dot{r}^2}{(m_A + m_B)^2} + \frac{1}{2} m_B \frac{m_A^2 \dot{r}^2}{(m_A + m_B)^2} + G \frac{m_A m_B}{r} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} \dot{r}^2 (m_B + m_A) + G \frac{m_A m_B}{r} = \end{aligned}$$

⁹ r je velikost průvodiče tělesa A vzhledem k tělesu B

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}}_{\mu} \dot{\vec{r}}^2 + G \frac{m_A m_B}{r}.$$

Protože

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos v - r \sin v \dot{v} \\ \dot{r} \sin v + r \cos v \dot{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{v}^2$$

je

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{v}^2) + G \frac{m_A m_B}{r}.$$

Nyní již jen vyřešíme **Lagrangeovy rovnice 2. druhu**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Dosadíme-li za q souřadnici r , dostaneme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu 2 \dot{r} \right) - \frac{1}{2} \mu \dot{v}^2 2r + \frac{G m_A m_B}{r^2} = 0$$

$$\mu (\ddot{r} - \dot{v}^2 r) = -\frac{G m_A m_B}{r^2}$$

Ve výsledku:

$$\ddot{r} - r \dot{v}^2 = -G \frac{m_A + m_B}{r^2},$$

což je **pohybová rovnice**. Souřadnice v je cyklická (L na ní explicitně nezávisí) \rightarrow

$$\frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{v}) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \dot{v} = \frac{\text{konst}}{\mu} = C.$$

Dostali jsme opět druhý Keplerův zákon a vidíme, že $\text{konst} = L$.¹⁰

Z pohybové rovnice budeme hledat tvar dráhy. Zavedme substituci $u = 1/r$. Tečkou budeme dále značit derivaci podle t , čárkou derivaci podle v , tedy: $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ a $r' = \frac{dr}{dv}$.

Druhý Keplerův zákon dostane jiný tvar: $r^2 \dot{v} = C \quad \rightarrow \quad \dot{v} = C u^2$.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{d(\frac{1}{u})}{dv} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{u^2} \dot{v} u' = -C u',$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dv} \frac{dv}{dt} = -C u'' \dot{v} = -C^2 u^2 u''.$$

Pohybová rovnice pak nabude tvaru:

$$C^2 u'' + C^2 u = G(m_A + m_B) \quad \Rightarrow \quad u'' + u = \frac{G}{C^2} (m_A + m_B).$$

¹⁰ moment hybnosti

Poslední tvar pohybové rovnice se nazývá **Binetova rovnice**¹¹. Jejím řešením jsou harmonické funkce, tj. například $u = \frac{G(m_A+m_B)}{C^2} + k \cos(v - \omega)$, kde k a ω jsou integrační konstanty. Pak

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{G(m_A+m_B)}{C^2} + k \cos(v - \omega)} = \frac{\overbrace{C^2}^{\text{parametr } p}}{G(m_A+m_B)} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{G(m_A+m_B)}{kC^2}}_{\text{numerická excentricita}} \cos(v - \omega)} \rightarrow$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(v - \omega)}.$$

Poslední rovnice je **rovnice kuželosečky v polárním tvaru**, dostali jsme 1. Keplerův zákon.

První Keplerův zákon říká, že *planety obíhají po elipsách (blízkých kružnicím), v jejichž společném ohnisku je Slunce.*

Z podobnosti parametrů geometrických¹² a dynamických získáme vztahy pro numerickou excentricitu e a parametr p :

$$e = \frac{KC^2}{G(m_A+m_B)}, \quad p = \frac{C^2}{G(m_A+m_B)}.$$

Vlastnosti kuželoseček shrnuje následující tabulka:

Kuželosečka	e	p, a
kružnice	$e = 0$	$r = a$
elipsa	$e \in (0, 1)$	$p > 0, a > 0$
parabola	$e = 1$	$p = 2q, a \rightarrow \infty$
hyperbola	$e > 1$	$p > 0, a < 0$

Tabulka 5.1: Vlastnosti kuželoseček.

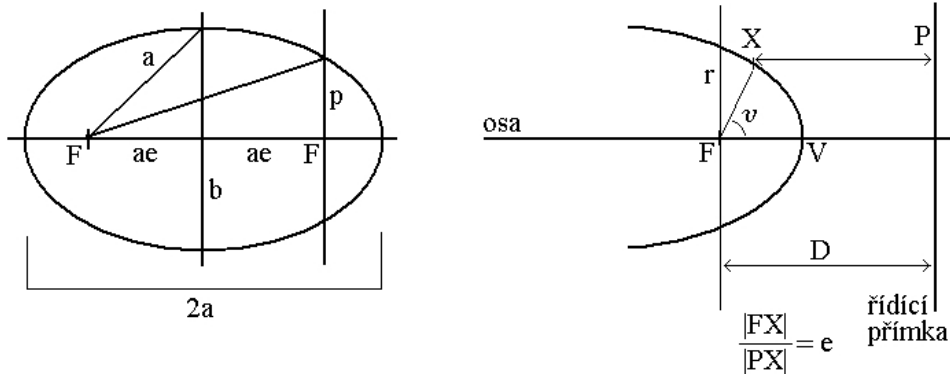
§ Pohyb po elipse

Víme, že plošná rychlost $w = konst$. Lze ji vypočítat z plochy elipsy a periody oběhu P jako $w = konst = \frac{\pi ab}{P}$, kde a je velká a b malá poloosa elipsy. Dále počítejme za využití geometrického faktu, že malou poloosu lze vypočítat z velké poloosy a excentricity ($b = a\sqrt{1 - e^2}$) a že konstanta $C = 2w$ souvisí s parametrem elipsy p podle vztahu $p = a(1 - e^2) = \frac{C^2}{G(m_A+m_B)}$ dostaneme:

$$w = \frac{\pi a^2}{P} \sqrt{1 - e^2} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a(1 - e^2)G(m_A+m_B)}.$$

¹¹ umožňuje najít trajektorii v poli centrální síly

¹² Kuželosečky lze definovat pomocí řídicí přímky, ohniska a excentricity. Je-li F ohnisko, X bod na kuželosečce a P kolmý průmět bodu X do řídicí přímky, platí: $\frac{|FX|}{|PX|} = e$ a $\frac{r}{D - \cos v} = e$, kde D je vzdálenost ohniska od řídicí přímky. Pak také $\frac{p}{D} = e$, $r = \frac{eD}{1 + e \cos v} = \frac{p}{1 + e \cos v}$ a $p = a(1 - e^2)$, kde a je velká poloosa dráhy tělesa (někdy – v případě paraboly zcela nutně – se místo velké poloosy používá parametr q , tj. vzdálenost v pericentru).



p = parametr elipsy = délka kolmice na velkou poloosu z místa ohniska ($x = e$) do oblouku elipsy

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{e}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 = 1$$

$$b^2 = a^2 - (ae)^2 \quad \rightarrow \quad p = a(1 - e^2)$$

Umocněním a dalšími úpravami dostáváme:

$$\frac{\pi^2 a^4}{P^2} (1 - e^2) = \frac{1}{2} a (1 - e^2) G (m_A + m_B),$$

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G (m_A + m_B)}{4\pi^2}.$$

Poslední výraz je formulace 3. Keplerova zákona.

Třetí Keplerův zákon říká, že poměr třetí mocniny velké poloosy dráhy planety a druhé mocniny její oběžné periody je konstantní. Vyjádříme-li velkou poloosu v astronomických jednotkách a periodu v rocích, dostaneme číslo přibližně rovné jedné.¹³

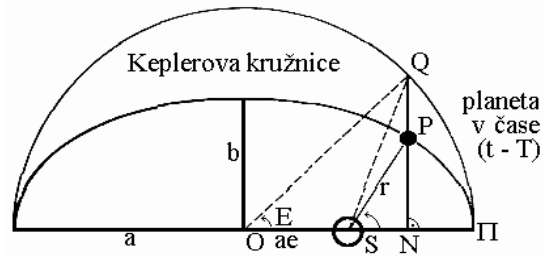
§ Keplerova úloha

Všimněme si, že řešení pohybové rovnice, které jsme našli, je ve tvaru $r = r(v)$. Časové závislosti $r = r(t)$ a $v = v(t)$ analyticky vyjádřit nelze.¹⁴

Keplerova úloha = nalezení způsobu výpočtu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ a $v = v(t)$. Trajektorii tělesa v rovině je elipsa, v jejímž jednom ohnisku S je Slunce (viz obrázek). **Pravou anomálii** v budeme odečítat od směru velké poloosy, jež vede k periheliu Π . Elipse opíšeme kružnicí (bude mít tedy poloměr právě a) = tzv. **Keplerova kružnice**. Planeta se bude nacházet v bodě P na elipse a průmětem, kolmým na hlavní osu elipsy, vznikne její obraz na Keplerově kružnici Q . Patu průmětové přímky označme N . Úhel, jehož vrchol je ve středu Keplerovy kružnice, jedno jeho rameno tvoří hlavní poloosa elipsy ve směru k periheliu a druhé polopřímka procházející bodem Q , budeme označovat **E = excentrická anomálie**. Potřebujeme ještě jeden údaj, který nám celou situaci popíše v čase. Zvolme tedy časový okamžik průchodu periheliem, T .

¹³ Velikost rychlosti tělesa kdekoli podél jeho trajektorie lze určit pomocí **zákona zachování živé síly**: $v^2 = G(m_A + m_B) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$. Živá síla (*vis viva*) je veličina, která se v astronomii používala dříve než energie, platí $h = E/\mu$. ZZZS lze odvodit pomocí ZZE ($E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \mu G \frac{m_A + m_B}{r}$) a 2.KZ.

¹⁴ pouze ve tvaru řady



Z geometrie plyne, že $\frac{|PN|}{|QN|} = \frac{b}{a}$. Pak počítejme plochy některých vybraných obrazců v čase t , oběžná perioda planety bude P_o :

– plocha sektoru $S\Pi P = w(t - T) = \frac{\pi ab}{P_o}(t - T)$

– plocha sektoru $S\Pi Q = \frac{a}{b} \frac{\pi ab}{P_o}(t - T) = \frac{\pi a^2}{P_o}(t - T)$

– plocha trojúhelníku $OSQ = \frac{1}{2}ae \cdot a \sin E$

– plocha kruhové výseče $O\Pi Q = \pi a^2 \frac{E}{2\pi}$.

Poslední obrazec lze též složit z plochy trojúhelníka OSQ a sektoru $S\Pi Q$. Dostaneme:

$$\pi a^2 \frac{E}{2\pi} = \frac{1}{2} a^2 e \sin E + \frac{\pi a^2}{P_o}(t - T),$$

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{P_o}(t - T) = n(t - T) = M.$$

Této rovnici se říká **Keplerova rovnice**. Veličina M se nazývá **střední anomálií** a **n středním denním pohybem**.

Algoritmus výpočtu Keplerovy úlohy:

1) Vyjdeme z oběžné doby P_o a z okamžiku průchodu perihelem T . Vypočítáme střední anomálii $M = \frac{2\pi}{P_o}(t - T)$.

2) Vyřešíme Keplerovu rovnici a získáme tak excentrickou anomálii E .

3) Vypočítáme $v = v(t)$ pomocí E . Platí: $\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \frac{(1-e)(1-\cos v)}{(1+e)(1+\cos v)} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$.¹⁵

4) Vypočítáme $r = \frac{p}{1+e \cos v(t)}$.¹⁶

§ Keplerova rovnice diferenciálně¹⁷

Víme, že platí:

$$\vec{C}_z = C = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|_z = -(x\dot{y} - x\dot{y}),$$

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - e), & \dot{x} &= -a \sin E \dot{E}, \\ y &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E, & \dot{y} &= a\sqrt{1 - e^2} \cos E \dot{E}. \end{aligned}$$

¹⁵ Plyne ze srovnání souřadnic x, y bodu P vyjádřených pomocí anomálií, tj. $x = r \cos v = a(\cos E - e)$, $y = r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$.

¹⁶ V kartézských souřadnicích se algoritmus mírně modifikuje:

3) $x = x(E)$, $x = a(\cos E - e)$

4) $y = y(E)$, $y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$.

Pak:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (a \cos E - ae)^2 + a^2(1 - e^2) \sin^2 E = \dots = a^2(1 - e \cos E)^2$$

a tedy $r = a(1 - e \cos E)$.

¹⁷ = odvození integrací z 2.KZ ...

Pak

$$\begin{aligned} C &= -(-a^2\sqrt{1-e^2}\sin^2 E\dot{E} - a^2\sqrt{1-e^2}\cos^2 E\dot{E} + a^2e\sqrt{1-e^2}\cos E\dot{E}) = \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}(\sin^2 E\dot{E} + \cos^2 E\dot{E} - e\cos E\dot{E})\dot{E}a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E) \rightarrow \\ &\dot{E}(1-e\cos E) = \frac{C}{a^2\sqrt{1-e^2}}. \end{aligned}$$

Tuto dif.rov. vyřešíme separací proměnných, integrujeme z perihelu do bodu P .

$$\int_0^E (1-e\cos E)dE = \int_T^t \frac{C}{a^2\sqrt{1-e^2}} dt$$

Použijeme-li dříve odvozeného vztahu $C^2 = G(m_A + m_B)a(1-e^2)$, dostaneme rovnici ve tvaru:

$$E - e\sin E = \sqrt{\frac{G(m_A + m_B)a(1-e^2)}{a^4(1-e^2)}}(t-T) = \sqrt{\frac{G(m_A + m_B)}{a^3}}(t-T) = M = n(t-T).$$

Toto je Keplerova rovnice odvozená diferenciálně.

§ Pohyb po parabole

Pro pohyb po parabole platí **Barkerova rovnice**, analogie a limitní případ Keplerovy rovnice pro poloosu jdoucí k nekonečnu a excentricitu blížící se k jedné.

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} + \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{G(m_A + m_B)}{2q^3}}(t-T)$$

§ Pohyb po hyperbole

Pro hyperbolu platí prakticky Keplerova rovnice, jen je zapotřebí ji mírně modifikovat:

$$e\sinh H - H = k_1|a|^{-3/2}(t-T) = N,$$

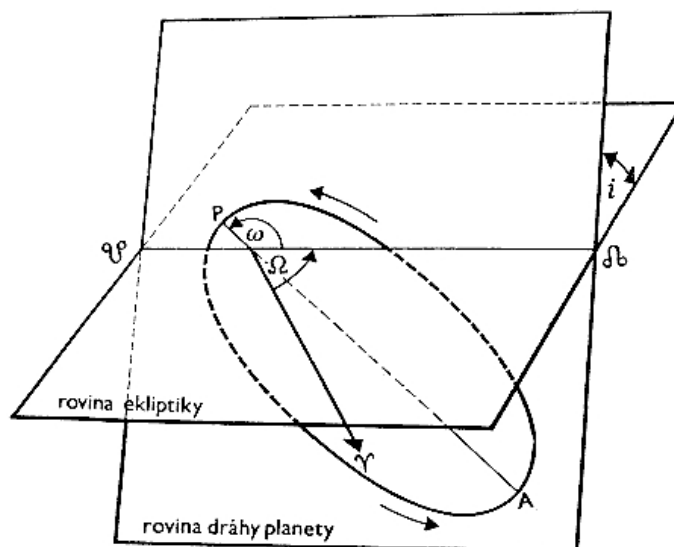
kde N je analogií střední anomálie a $H = iE$, tj. $\sinh H = i\sin E$, $\cosh H = \cos E$.

Platí také analogie třetího Keplerova zákona ve tvaru $n = k_1|a|^{-3/2}$, kde ale n nelze počítat podle vztahu $n = \frac{2\pi}{P_{ob}}$ (hyperbola je neperiodický pohyb).

§ Keplerovy (geometrické) elementy dráhy

Pohybová rovnice je diferenciální rovnicí druhého řádu pro tři složky průvodiče r . Můžeme tedy při řešení očekávat zavedení šesti integračních konstant, které činí řešení jednoznačným.¹⁸

¹⁸ např. 3 složky místa startu a 3 složky vektoru rychlosti; my stanovujeme elementy dráhy, které určují velikost i tvar dráhy a její orientaci vzhledem ke stanovené rovině



Ω	délka výstupného uzlu	$\Omega \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$
a	velká poloosa dráhy	$a \in \mathbb{R}$
i	sklon ekliptiky/dráhy	$i \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ pro prográdní pohyb, $i \in \langle 90^\circ, 180^\circ \rangle$ pro retrográdní pohyb
e	excentricita	$e \geq 0$
ω	argument perihelu	$\omega \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$
T	okamžik průchodu perihelem	–

Parametry Ω a i popisují polohu roviny oběžné dráhy tělesa vůči referenční rovině (například ekliptice), a a e formují tvar dráhy v rovině a ω definuje polohu hlavní osy v rovině dráhy. T je zbývajícím parametrem, který celý pohyb lokalizuje v čase.

§ Počítání efemerid v problému dvou těles

Výchozím bodem výpočtu efemeridy jsou Keplerovy elementy (a, e, i, Ω, ω a T). Pro nerušený pohyb budou tyto elementy po celou dobu jeho pohybu konstantní. Ve skutečnosti jsou pohyby ve vesmíru vždy rušené a všechny parametry jsou pomalu proměnné v čase. Tedy dokonalá elipsa se skutečné dráze vždy jen přimyká, tvoří **oskulační elipsu**. Keplerovy elementy jsou tedy konstantní a platí se stanovenou přesností vždy jen kousek dráhy, říkáme jim **oskulační elementy**.

Výpočet efemeridy u komet a planetek pak ve skutečnosti probíhá tak, že používáme oskulační elementy vždy jen na krátké úseky dráhy, kdy vyhovují se stanovenou přesností.

Postup při výpočtu efemeridy

- 1) Pro čas t vypočteme střední anomálii M : $M = n(t - T)$.
- 2) Řešíme Keplerovu rovnici \rightarrow excentrickou anomálii E : $E - e \sin E = M$.
- 3) Z excentrické anomálie stanovíme souřadnice v rovině dráhy tělesa ¹⁹

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁹ osa x směřuje k perihelu

4) Provedeme rotaci souřadnicových soustav:

a) Osu x otočíme do uzlové přímky: $R_z(-\omega)$.

b) Sklopíme rovinu dráhy do roviny ekliptiky: $R_x(-i)$.

c) Osu x ztotožníme se směrem k jarnímu bodu: $R_z(-\Omega)$.

Dohromady tak máme operaci $R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)$, což je matice 3×3 :

$$\begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix}.$$

Poslední sloupec nás nezajímá, protože výsledkem jeho aplikace na polohový vektor v rovině dráhy bude nula (působí na z -tovou souřadnici, která je nulová). Ostatním šesti prvkům matice se říká **vektorové elementy** dráhy. Výsledkem jsou heliocentrické pravoúhlé souřadnice; sklopením o úhel $-\varepsilon$ kolem osy x je převedeme do souřadnic heliocentrických ekvatoreálních.

5) Vypočítáme geocentrickou efemeridu (geocentrické ekvatoreální souřadnice). Máme pro tři tělesa (těleso, Země a Slunce) obecný vektorový trojúhelník, jehož jednotlivé strany označme: vektor Slunce \rightarrow těleso \vec{r} (**heliocentrický průvodič**), vektor Země \rightarrow těleso $\vec{\rho}$ (**geocentrický průvodič**) a vektor Země \rightarrow Slunce \vec{R} (**pravoúhlé souřadnice Slunce**). Předchozím výpočtem jsme získali heliocentrický průvodič, pravoúhlé souřadnice Slunce najdeme v ročence nebo vypočítáme pomocí programové rutiny schválené IAU (počítá se rozvojem). Co nás zajímá je geocentrický průvodič tělesa. Ve výsledku získáme základ geocentrické efemeridy:

$$\vec{\rho}_{QII} = \vec{R} + \vec{r}_{QII}.$$

6) Provedeme opravy o aberace, nutaci a precesi.

7) Vypočítáme topocentrické souřadnice a opravíme je o rotaci Země (denní aberaci) a paralaxu.

Pozn. - metody řešení Keplerovy rovnice: Keplerova rovnice $E - e \sin E = M$ je transcendentním typem, který nelze vyřešit analyticky \rightarrow řeší se numericky:

1) V dobách prehistorických se tato rovnice řešila pomocí tabulek a nomogramů.

2) Nejjednodušší iterační metoda: stanoví se prvotní odhad hodnoty excentrické anomálie a dosadí se do upravené rovnice, v níž na levé straně necháme jen lineární člen v E a na stranu pravou dáme zbytek. Vypočítáme E , porovnáme s předchozím výsledkem a jestliže jsme ještě nedosáhli požadované přesnosti, výpočet opakujeme, tj.:

a) $E_0 = M$, b) $E_1 = M + e \sin E_0$, c) $E_2 = M + e \sin E_1 \dots$

Výpočet končí v okamžiku, kdy $|E_n - E_{n-1}|$ je menší než zadaná přesnost.

3) Iterační metodou, která konverguje rychleji je Newtonova metoda – stanovuje, jak z předchozí hodnoty stanovit hodnotu následující, aby rychleji konvergovala do námi očekávaného výsledku.

4) Pro $e \rightarrow 1^-$ velmi dobře funguje **Hartmannův vzorec**, analogický Newtonově metodě:

$$E_{n+3} = M + e \sin \left[E_n + \frac{E_{n+1} - E_n}{1 - \frac{E_{n+2} - E_{n+1}}{E_{n+1} - E_n}} \right],$$

startovací hodnoty E_0, E_1, E_2 určíme pomocí obyčejné iterační metody ...

5.5 Metody určování drah – elementů ve Sluneční soustavě

Pokud známe elementy dráhy nějakého tělesa, můžeme určit jeho efemeridy. Chceme tedy z pozorování stanovit dráhu tělesa. Protože elementy neznáme, musíme využít jiných 6 počátečních podmínek a elementy dráhy najít. Bylo navrženo mnoho metod – např. Laplace, Gauss, Olbers (zaměřil se na komety) ...

Stanovení elementů pokud:

a) známe souřadnice a složky rychlosti v daném časovém okamžiku tj. $\vec{r}, \dot{\vec{r}} \rightarrow$ elementy, rozpracoval Laplace, nejjednodušší případ

b) nebo máme potřebný počet pozorování = známe zdánlivé souřadnice/zdánlivá místa alespoň pro 3 časové okamžiky, složitě, např.:

- Gaussova metoda ze 3 pozorování (α, δ v časech t_i pro $i = 1, 2, 3$) časy pozorování od sebe mohou být libovolně vzdáleny
- α, δ v časech t_i pro $i = 1, 2, 3$, kdy časy pozorování jsou si blízké
- Olbersova (geometrická) metoda (1804, pro komety) ... atd. apod. etc....

§ Laplaceova metoda

Většinou u družic a umělých těles. Vždy vede k cíli. Postup:

- určíme $\dot{\vec{r}}$ (na základě Dopplerova jevu),
- určíme \vec{r} (pomocí radiolokace, laserové lokace).

Předpoklady: známe $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ pro čas t_0 ; $\frac{m_a}{m_b} \rightarrow 0$ tj. centrická gravitační konstanta $k_1 \rightarrow k$ (Gaussova gravitační konstanta²⁰).

1) Vektor rychlosti je dle integrálu živé síly

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = v^2 = k^2 \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right),$$

²⁰ Při počítání je důležitá správná volba jednotek. Jsme ve Sluneční soustavě \rightarrow za jednotku volíme hmotnost Slunce $M_\odot = 1$. Pro zjednodušení výpočtů je vhodné přejít od klasické Newtonovy gravitační konstanty G k nové konstantě $k =$ **Gaussova gravitační konstanta**, platí: $G = k^2$. (Newtonovu gravitační konstantu nelze z astronomických pozorování určit, stanovil ji v r. 1798 H. Cavendish ...) Pokud dále za jednotkou délky zvolíme AU (střední vzdálenost Země-Slunce) a za jednotku času střední sluneční den, bude hodnota Gaussovy gravitační konstanty rovna $k = 0,0172 \text{ rad} = 3548.2''$ (jedná se o střední denní pohyb Země vyjádřený jako úhel; ze 3.KZ resp. středního denního pohybu $n = \sqrt{G(m_A + m_B)}/a^3$).

Gauss při svém výpočtu použil hodnotu středního slunečního dne ze siderického roku, který má 365.256 383 5 takových dní a poměr hmotnosti Země ku hmotnosti Slunce $m_\oplus/M_\odot = 1/354 710$. IAU na svém zasedání v roce 1976 stanovila hlasováním moderní hodnotu tohoto poměru $m_\oplus/M_\odot = 1/332 946$, v důsledku čehož by se musela hodnota Gaussovy gravitační konstanty změnit. Protože však již bylo s touto hodnotou učiněno mnoho výpočtů, bylo rozhodnuto, že hodnota Gaussovy gravitační konstanty se zachová, ale změní se velikost velké poloosy zemské dráhy, která má podle usnesení z téhož roku hodnotu $a_\oplus = 1.000 000 02 \text{ AU}$.

V soustavě SI má Gaussova gravitační konstanta hodnotu, jež přímo vychází z hodnoty gravitační konstanty Newtonovy $G = (6 675 \pm 1) \times 10^{-14} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2 = k^2$.

V astronomii se ale takováto konstanta neměří – měříme konstantu gravitační v součinu s hmotnostmi jednotlivých těles, jichž se problém týká. Vzniká tak **centrická gravitační konstanta** k_1 , jejíž hodnota je závislá na tělese, u něhož měření provádíme (centrické gravitační konstanty se měří z oběžné periody a velké poloosy oběžné dráhy), $G(M_\odot + m) = k_1^2$.

(Gravitační konstanta a její hodnota v SI: heliocentrická = $13 271 244,0 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$; geocentrická = $398 600,5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$; selenocentrická: $4 902,8 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$)

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Jedinou neznámou je velká poloosa \boxed{a} ; pokud $a \rightarrow \infty$ tak je výhodnější hledat průvodič perihele $q = a(1 - e)$.

2) Z projekce momentu hybnosti platí následující vztahy:

$$\sqrt{p} \sin i \sin \Omega = \frac{1}{k}(y_0 \dot{z}_0 - \dot{y}_0 z_0),$$

$$\sqrt{p} \sin i \cos \Omega = \frac{1}{k}(x_0 \dot{z}_0 - \dot{x}_0 z_0),$$

$$\sqrt{p} \cos i = \frac{1}{k}(x_0 \dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0).$$

Odtud máme \boxed{p} , \boxed{i} , $\boxed{\Omega}$. Pomocí $p = a(1 - e^2)$ dostaneme \boxed{e} .

3) Okamžik průchodu perihelem lze určit pomocí derivace průvodiče dle času, jež dostaneme z

$$r_0 \dot{r}_0 = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0.$$

Platí $\dot{r}_0 = kp^{-1/2} e \sin v_0$, jež společně s rovnicí kuželosečky $r_0 = \frac{p}{1 + e \cos v_0}$ dá \boxed{v} . Z rovnice $\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{E_0}{2}$ určíme $\boxed{E_0}$, z Keplerovy rovnice $E_0 - e \sin E_0 = M_0$ dostaneme $\boxed{M_0}$.

Okamžik průchodu perihelem \boxed{T} je pak dán $t_0 - T = \frac{M_0}{n}$, kde $n = ka^{-3/2}$ je střední denní pohyb. Známe tak všechny elementy až na argument perihele $\boxed{\omega}$, který určíme ze třetí rovnice následující sady:

$$x_0 = r_0[\cos(v_0 + \omega) \cos \Omega - \sin(v_0 + \omega) \sin \Omega \cos i],$$

$$y_0 = r_0[\cos(v_0 + \omega) \sin \Omega + \sin(v_0 + \omega) \cos \Omega \cos i],$$

$$z_0 = r_0[\sin(v_0 + \omega) \sin i].$$

(První rovnici rozšíříme $\cos \Omega$, druhou $\sin \Omega$ a sečteme; sadu získáme ze sférických trojúhelníků těleso-uzel dráhy-průniky os x,y,z s nebeskou sférou.)

§ Elementy ze tří pozorování

Metody zpravidla založeny na srovnávání dynamických veličin s geometricky určenými veličinami.²¹

Postup zpravidla:

a) nalezneme geocentrické vzdálenosti

b) s jejich pomocí určíme elementy.

Část b) je ekvivalentní určování elementů dráhy, známe-li pravoúhlé souřadnice ve dvou časových okamžicích,²² v dalším tedy popis a).

²¹ např. srovnávání ploch sektorů určených z 2.KZ a ploch trojúhelníků určených geometricky

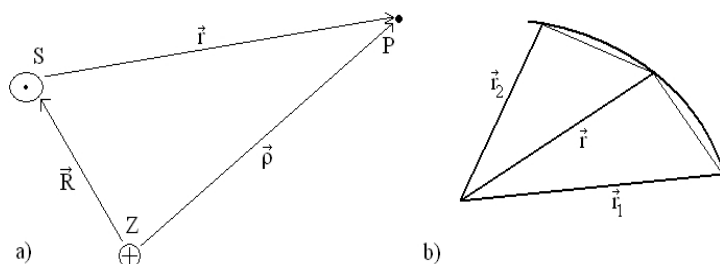
²² Tj. máme x_1, y_1, z_1 a x_2, y_2, z_2 v t_1 a t_2 . Jednotkový vektor určující normálu k rovině dráhy má složky $\sin i \sin \Omega$, $-\sin i \cos \Omega$, $\cos i$. Z vektorového počtu platí

$$\begin{aligned} y_1 z_2 - y_2 z_1 &= |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \sin i \sin \Omega, \\ z_1 x_2 - x_2 z_1 &= -|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \sin i \cos \Omega \end{aligned} \quad (\Delta\Delta)$$

Mějme tři polohy (planety), jež odpovídají časovým okamžikům $t_1 < t < t_2$. Nechtě λ_i, μ_i, ν_i jsou odpovídající směrové cosiny jednotlivých poloh, tj.

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \cos \delta_i \cos \alpha_i, \\ \mu_i &= \cos \delta_i \sin \alpha_i, \quad j = 1, \text{nic}, 2 \\ \nu_i &= \sin \delta_i.\end{aligned}$$

Označme ϱ_j vzdálenost planety v t_j , $R_j = (X_j, Y_j, Z_j)$ jsou pravoúhlé souřadnice Slunce. Viz obrázek 5.6 a.



Obrázek 5.6: Poloha planety: \vec{r} je heliocentrický průvodič planety, $\vec{\rho}$ je geocentrický průvodič planety, $-\vec{R}$ jsou pravoúhlé souřadnice/geocentrický průvodič Slunce. Tedy $\vec{\rho} = \vec{r} + \vec{R}$ resp. po složkách $\varrho_x = \varrho \cos \delta \cos \alpha = x + X$, $\varrho_y = \varrho \cos \delta \sin \alpha = y + Y$ a $\varrho_z = \varrho \sin \delta = z + Z$.

Rovnice uvedené u obrázku tak lze přepsat na

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_1 \varrho_1 - X_1; & x &= \lambda \varrho - X; & x_2 &= \lambda_2 \varrho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \varrho_1 - Y_1; & y &= \mu \varrho - Y; & y_2 &= \mu_2 \varrho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \varrho_1 - Z_1; & z &= \nu \varrho - Z; & z_2 &= \nu_2 \varrho_2 - Z_2\end{aligned} \quad (**)$$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \cos i.$$

Zároveň $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin 2f$ (*), kde $r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2$ a v_j jsou hodnoty pravé anomálie odpovídající r_j . Kombinací těchto výrazů určíme i, Ω a rozdíl $v_2 - v_1$.

Nejsložitější je určit parametr dráhy p (viz dále). Pokud tento známe, tak kombinací vztahů $v_1 - v_2 = 2f$, $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ a definice $s_j = p/r_j - 1$ (pro $j = 1, 2$) dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}e \cos v_1 &= s_1 \\ e \cos v_2 &= e \cos(v_1 + 2f) = s_2\end{aligned}$$

jež společně s (*) umožňuje určit excentricitu a obě pravé anomálie. Další závisí na tvaru dráhy – např. pro eliptickou potřebujeme velkou poloosu a , okamžik průchodu perihelem t a argument perihele ω . Poloosu určíme z $p = a(1 - e^2)$, pomocí $n = ka^{-2/3}$ dostaneme střední denní pohyb, z $\text{tg} \frac{v_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tg} \frac{E_0}{2}$ získáme excentrickou anomálii E a z Keplerovy rovnice odpovídající střední anomálii. Okamžik průchodu perihelem je pak dán $T = t_1 - M_1/n$ (viz analogicky Laplaceova metoda).

Výpočet parametru vede na transcendentní rovnici řešenou iterací, a to proto, že neznáme složky rychlosti a nelze využít integrál energie/živé síly – musíme proto užít 2.KZ ploch = plochu eliptického sektoru ohraničeného vektory \vec{r}_1 a \vec{r}_2 lze psát jako $S = \frac{1}{2} k p^{1/2} (t_2 - t_1)$. Pokud je $t_2 - t_1$ velmi krátký, je plocha sektoru \approx ploše trojúhelníka určeného \vec{r}_1, \vec{r}_2 a úhlem $v_2 - v_1$, tj. $S_\Delta = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin 2f$. Problém hledání parametru je tak převeden na problém hledání poměru sektoru a trojúhelníka – pokud tento nalezneme, nalezneme i parametr p . Pro určování poměru existuje řada analytických metod (např. Eulerova-Lambertova věta pro elipsu ...), jejich význam dnes malý (numerické výpočty) ...

Dále chceme nalézt rovnice vhodnější pro hledání geocentrických průvodičů – problém dvou těles je problém rovinný, tj. vektory $\vec{r}_1, \vec{r}, \vec{r}_2$ jsou lineárně závislé a platí

$$\alpha_1 \vec{r}_1 + \alpha \vec{r} + \alpha_2 \vec{r}_2 = \vec{0},$$

kde $\alpha_1, \alpha, \alpha_2$ nejsou současně rovny nule. Vyloučíme-li z úvah přímkovou dráhu²³, lze poslední vzorec skoro vždy převést na

$$n_1 \vec{r}_1 - \vec{r} + n_2 \vec{r}_2 = \vec{0}, \quad (***)$$

kde veličiny n_1 a n_2 mají geometrický smysl: po vektorovém přenásobení \vec{r}_1 a \vec{r}_2 máme

$$n_1 = \frac{|\vec{r} \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}, \quad n_2 = \frac{|\vec{r} \times \vec{r}_1|}{|\vec{r}_2 \times \vec{r}_1|}.$$

Tj. veličiny n_1 a n_2 odpovídají poměrům ploch trojúhelníků, jež svírají příslušné vektory (viz 5.6 b). Rovnice (***) je výchozím vztahem pro určování drah nebeských těles ze tří pozorování. Dosadíme-li do ní složky vektorů \vec{r}_i z předchozí strany, budeme mít:

$$\begin{aligned} n_1 \lambda_1 \varrho_1 - \lambda \varrho + n_2 \lambda_2 \varrho_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ n_1 \mu_1 \varrho_1 - \mu \varrho + n_2 \mu_2 \varrho_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2 \quad (\Delta) \\ n_1 \nu_1 \varrho_1 - \nu \varrho + n_2 \nu_2 \varrho_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2. \end{aligned}$$

Nejjednodušším případem obecného problému určení dráhy z pozorování je parabolická dráha. Obecně se v problému dvou těles realizují pouze eliptické a hyperbolické dráhy, avšak řadu drah lze parabolou aproximovat. Potřebujeme nalézt pouze 5 elementů, tj. můžeme volit jednu podmínku, jež nám pomůže při řešení. Nejznámější metodou pro výpočet parabolické dráhy je **metoda Olbersova**. Základní idea: parabolčnost dráhy a jeden vztah mezi ϱ_1 a ϱ_2 zajišťuje tzv. Eulerova věta, jež dává do souvislosti \vec{r}_1, \vec{r}_2 , tětivu mezi těmito vektory s a časový interval $t_2 - t_1$ ($6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}$, lze odvodit z Lambertovy-Eulerovy věty či např. z Barkerovy rovnice). Druhý pak dostaneme ze základní soustavy (Δ) vyloučením ϱ . Dostaneme tak

$$\varrho_2 = H \varrho_1 + h,$$

tj. lineární vztah mezi 1. a 3. polohou (představuje námi zvolenou dodatečnou podmínku). Platí (použijeme-li první dvě rovnice z (Δ)):

$$\begin{aligned} H &= \frac{\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1}{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu} \cdot \frac{n_1}{n_2} = K \frac{n_1}{n_2}, \\ h &= \frac{\lambda Y_1 - \mu X_1}{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu} \cdot \frac{n_1}{n_2} - \frac{\lambda Y - \mu X}{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu} \cdot \frac{1}{n_2} + \frac{\lambda Y_2 - \mu X_2}{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu} = L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3. \end{aligned}$$

Veličiny n_1 a n_2 se v případě obecné dráhy vyjadřují jako řady s $n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ a $n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau} = \frac{t_2-t}{t_2-t_1}$ (např. tzv. **Oppolzerovy formule** ...). První aproximaci geocentrických vzdáleností dostaneme dosazením nultých členů řad do výrazů pro h a H . Nyní do výpočtu dostaneme předpoklad, že se jedná o parabolickou dráhu, a to užitím Eulerovy rovnice (do které jsme předtím pomocí (**)) zavedli geocentrické vzdálenosti). Dále se geocentrické vzdálenosti hledají iteračně, dokud není dosaženo požadované přesnosti.

²³ jež ani nemůže nastat

Předchozí postup převádí problém určení elementů parabolické dráhy na problém určení elementů známe-li geocentrické souřadnice pro dvě pozorování, viz předch. pozn.

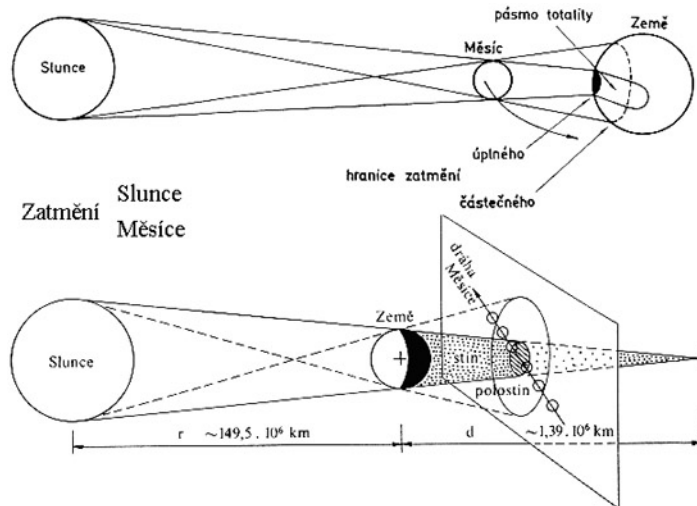
Tj. určíme rozdíl pravých anomálií krajních bodů $v_1 - v_2 = 2f$, a to pomocí trojúhelníka svíraného \vec{r}_1 a \vec{r}_2 .²⁴ Průvodič perihelu q a pravé anomálie krajních poloh určíme ze vztahů $(\frac{r_j}{q})^{1/2} \cos \frac{1}{2}v_j = 1$, $j = 1, 2$, tj. $(r_1/q)^{1/2} \cos v_1/2 = 1$ a $(r_1/q)^{1/2} \sin v_1/2 = \cotg f - (r_1/r_2)^{1/2} \operatorname{cosec} f$. Okamžik průchodu perihelmem T určíme z Barkerovy rovnice. Elementy i a Ω určíme z $(\triangle\triangle)$; argument perihelu ω z rovnic analogických poslední sadě Laplaceovy metody:

$$\begin{aligned} r_j \cos v_j + \omega &= x_j \cos \Omega + y_j \sin \Omega \\ r_j \sin v_j + \omega &= z_j \operatorname{cosec} i. \end{aligned}$$

Nejobecnější problém určení dráhy nebeského tělesa ze tří pozorování, kde excentricita je jednou z neznámých (nemáme předpoklad tvaru dráhy, nelze tedy využít Eulerovu větu ...) řeší např. **Lagrangeova-Gaussova metoda**, viz např. P.Andrle, *Základy nebeské mechaniky*.

²⁴ $\sin f = \frac{1}{2} \left[\frac{(s-r_1+r_2)(s+r_1-r_2)}{r_1 r_2} \right]^{1/2}$, s je tětiva/třetí strana trojúhelníka

5.6 Zatmění a zákryty



Slunce se pro pozorovatele na Zemi posunuje za den asi o 1° k východu. Měsíc se pohybuje po dráze k ekliptice zhruba o 5° skloněné, za den asi o 13° k východu. Měsíční dráha se tak se Sluneční křížuje ve dvou uzlech. Pokud se setká v uzlu Slunce s Měsícem, který je v novu, nastane **zatmění Slunce** (částečné, úplné či prstencové – podle pozice pozorovatele resp. délky stínu Měsíce). Poloha uzlů se mění, jelikož se mění i měsíční dráha. Uzly se posouvají k západu, Měsíc k jednomu z nich dorazí vždy za $\approx 27,212$ dne = **drakonický** měsíc. Se Sluncem se měsíc setkává po 29,531 dne = **synodický** měsíc. Setkání v uzlu, nutné pro vznik zatmění, se tak opakuje v periodě 18 let 11 dnů 7 h 43 m = **saros**, obsahující celiství počet násobků synodického a drakonického měsíce (223 a 242).

Počet dnů ale není přesně stejný (242 synodických měsíců = 18l 11d 8h 40m), průchod Měsíce uzlem nastane v příštím období sarosu o hodinu později než v období předešlém, tj. zatmění nebudou přesně stejná (např. zatmění Měsíce začne jako částečné, po několika periodách sarosu bude úplné, pak zase částečné, až zanikne, aby bylo nahrazeno nově vznikajícím zatměním). V periodě saros vznikají postupně zatmění, vždy posunutá zhruba o 115° zeměpisné délky na západ oproti předchozímu (Země v okamžiku souhlasné polohy všech tří těles a uzlu vzhledem k předcházejícímu zatmění pootočena o 7 h 43 m), vytvářejí tak sérii saros – trvá zhruba 1300 let, v jejím průběhu nastává 70 zatmění (41 slunečních a 29 měsíčních). Sérii saros probíhá současně více a prolínají se. Na celém povrchu Země za rok nastane max 7 zatmění (z toho 4 až 5 slunečních), min 2 (obě sluneční).

Zatmění Měsíce vzácnější, ale viditelné z celé zemské polokoule. Během zatmění Měsíc z oblohy nemizí – zemský stín není zcela temný ← díky rozptylu a lomu do něho vniká hodně slunečního světla, hlavně červeného (tečné paprsky musí u povrchu Země projít atmosférou, kde se lámou směrem do stínu).

Analogicky vznikají zákryty hvězd a planet Měsícem. Pomáhají k zpřesnění určení měsíční dráhy.

Literatura a zdroje

- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Příhoda P., Průvodce astronomií, HaP Praha, 2000
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002
- Andrlé P., Základy nebeské mechaniky, Praha, Academia, 1971
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Základy astronomie a astrofyziky I, Doc. RNDr. Martin Šolc, CSc., sepsal Michal Švanda
- Harmanec P., Základy astronomie a astrofyziky II, verze 6, interní materiál k přednášce AST007, AU MFF UK

Kapitola 6

Observační výsledky; přístroje

Přístroje a metody pozorování: Optické systémy, jejich vady, metody navrhování. Dálkohledy. Zpracování snímků fotografických, CCD. Fotometrie. Interferometry. Instrumenty družicových observatoří. Spektrografy, spektroskopie.

+

Hvězdy – přehled observačních výsledků: Fotometrické systémy, magnitudy. Určování hmotností kosmických objektů, dynamická paralaxa, funkce hmotnosti. Určování rozměrů hvězd, efektivní teplota, úhlové průměry. Teploty hvězd, spektrální klasifikace. Hertzsprungův-Russellův diagram (HRD). Vztah hmotnost – zářivý výkon.

- Optické systémy a jejich vady. Interferometrie.
- Přístroje a detektory pro astronomickou fotometrii.
- Metody redukce fotometrických a spektroskopických dat. (Přístroje metody pro astronomickou fotometrii. Přístroje a metody pro astronomickou spektroskopii.)
- Přístroje pro astronomickou spektroskopii na pozemských a družicových observatořích.
- Přístroje a metody pozorování kosmického záření, neutrin a gravitačních vln.
- Metody hledání periodicity v astronomických datech.
- Spektrální klasifikace hvězd, barevné indexy, bolometrická korekce, přehled definic povrchové teploty hvězd a metod k jejich určování¹
- Přehled a návaznost metod určování vzdáleností ve vesmíru (radarová pozorování, trigonometrická paralaxa, pohybové hvězdokupy, modul vzdálenosti, cefeidy, . . . , Hubbleův zákon . . .)
- Přehled metod určování hmotností kosmických objektů - dvojhvězdy, hvězdokupy, galaxie, věta o viriálu . . .

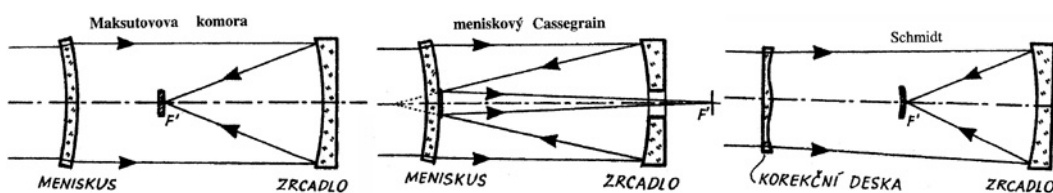
¹ efektivní teploty etc. viz část astrofyzika

6.1 Optické systémy, dalekohledy; Interferometrie

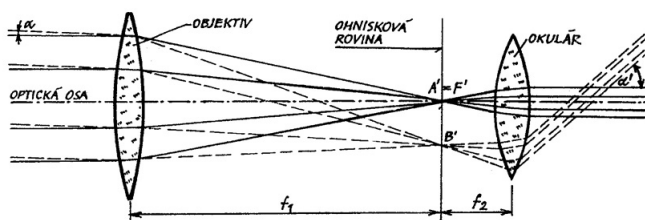
Dalekohled = základní astronomický přístroj; **shromáždí více světla než oko**, uvidíme tak slabší hvězdy; zvětší pozorovaný obraz, **zvětší rozlišovací schopnost**.

Montáž dalekohledu - azimutální Dobsonova, paralaktická - německá (s protizávažím) nebo anglická (bez protizávaží, např. vidlicová, podkovová ...)

Refraktor (soustava dioptrická), 1610 G.Galilei & **Reflektor** (soustava katoptrická), 1668 I.Newton; kombinovaná soustava - zrcadločočkový dalekohled = katadioptrická soustava (odstranění kulové vady pomocí skleněné korekční desky - např. Schmidtova komora, Maksutovova komora nebo meniskový Cassegrain)



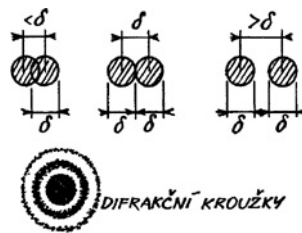
Zvětšení – např. Keplerův dalekohled: z bodu v ∞ , který se jeví prostému oku v úhlové vzdálenosti od osy α vzniká v ohniskové rovině reálný obraz ve vzdálenosti y' od osy. Ten je pak promítán okulárem do nekonečna, pozorovací zorný úhel je α' , $Z = \left| \frac{\text{tg } \alpha'}{\text{tg } \alpha} \right| = \frac{y'/f_2}{y'/f_1} = f_1/f_2$, viz obr. Dá se zjistit i z poměru vstupní D (průměr objektivu) a výstupní d pupily, $Z = D/d$.



Dalekohledem vidíme slabší objekty – přichází do našeho oka více světla. Aby se světlo neztrácelo, musí být výstupní pupila menší než vstupní pupila oka (asi 8 mm). Nejmenší rozumné zvětšení dalekohledu (tzv. normální zvětšení) je tak dáno ($Z = D_{[\text{mm}]} / 8$). Naopak, abychom plně využili zvětšení, musíme rozlišovací schopnost δ zvětšit alespoň na rozlišovací schopnost oka, tj. asi $120''$, odtud $Z = 120/\delta = 120/(114/D_{[\text{mm}]}) \approx D_{[\text{mm}]}$. Jde o tzv. užitečné zvětšení. Obvykle se volí o něco větší, max $2D$. Při větším zvětšení je výstupní pupila příliš malá, obraz ztrácí na kontrastu a ostrosti, nespatříme žádné další podrobnosti, výrazné uplatnění neklidu vzduchu = mrtvé zvětšení.

Rozlišovací schopnost – obraz objektu vytvořený objektivem pozorujeme v ohniskové rovině okulárem jako lupou (resp. sem umístíme CCD, spektrograf ...). Množství světla jež dalekohled zachytí je určeno průměrem objektivu, aperturou; průměr objektivu zároveň určuje rozlišovací schopnost dalekohledu – čím je průměr větší, tím větší detaily lze rozlišit. Následkem ohybových jevů je obrazem bodu ploška konečných rozměrů – minimální úhlová vzdálenost, na níž je možno rozeznat např. dvě hvězdy jako hvězdy různé, je určena **Rayleighovým kritériem** – tj. rozeznatelné jsou když nulové maximum padne do prvního minima druhé, číselně (šířka maxima v jedné polovině výšky) $\delta_{\min} = 1,22 \lambda / D$ [rad] resp. prakticky $\delta_{\min} = 114 / D$ ["], kde D je průměr objektivu

v mm a konstanta 114 platí pro žluté světlo. (Airyho/ohybové kroužky - „obraz“ stálice v ohniskové rovině je dán ohybovým jevem na obrubě objektivu, průměr „obrazu“ dán průměrem 1. tmavého kroužku, což je malý obraz otvoru, jímž světlo vstupuje do dalekohledu). K zvětšení rozlišovací schopnosti pozemských dalekohledů pomáhá **aktivní** a **adaptivní optika**. *Aktivní optika* = systém elektronických opěr, které automaticky upravují tvar a polohu optického dalekohledu tak, aby byly odstraněny optické chyby vzniklé při pozorování (deformace hlavního zrcadla při různé orientaci dalekohledu, teplotní změny). Aktivní optika sleduje kvalitu obrazu referenční hvězdy, vypočítává chyby (komu, astigmatismus) a opravuje tvar i nastavení zrcadel tak, aby je kompenzovala. Zabývá se pomalými změnami vlnoplochy (několikrát za minutu). *Adaptivní optika* = odstraňuje zhoršení kvality obrazu způsobené průchodem světla atmosférou, systém rychle (až několiksetkrát za sekundu) reagujících elektronických opěr kompenzujících deformaci vlnoplochy vzniklé při průchodu světla atmosférou. Deformace vlnoplochy měřena pomocí referenční hvězdy, která může být uměle vytvořena ve výšce kolem 90 km, laserová hvězda. U velkých dalekohledů dnes nezbytné, lze tak ze Země dosáhnout (praktické) rozlišovací schopnosti setin obloukové sekundy (narozdíl od hodnot okolo 1" (dáno seeingem) u soustav bez adaptivní optiky, ekvivalentní 15 cm přístroji). Každý systém adaptivní optiky má tři části: přijímač schopný rozlišit rozdíly ve fázi dopadající vlnoplochy, deformovatelná zrcadla schopná tento rozdíl korigovat a rychlý počítač.



§ Vady optických soustav

Aberace monochromatické – vznikající v soustavě i při použití jediné vlnové délky světla.

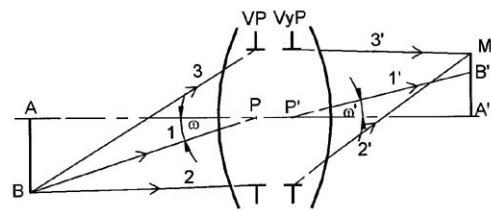
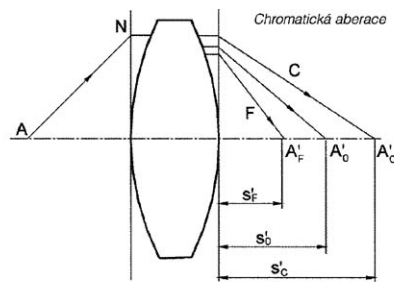
Aberace polychromatické (barevné vady) – dány závislostí indexu lomu použitého skla na vlnové délce.

Polychromatické vady

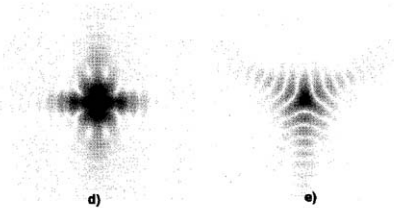
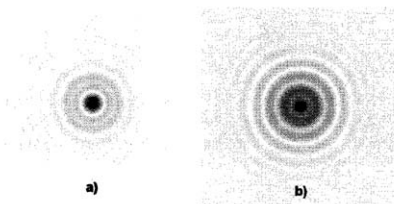
Bílé světlo se průchodem přes lámavé optické plochy rozkládá do spektra = **disperze**, způsobeno závislostí indexu lomu prostředí na vlnové délce procházejícího světla \rightarrow ne u zrcadel. Červené paprsky se tedy v čočce lámou méně než modré či fialové, ohnisková vzdálenost je pro červené paprsky větší než pro fialové – obraz nelze zaostřit. Částečně lze odstranit vhodnou kombinací různých skel s opačnou hodnotou disperze (korunová spojka a flintová rozptylka ...) = **achromatický objektiv**, achromat. Zbytkovou barevnou vadu potlačují troj resp. vícečočkové objektivy = **apochromaty**, potlačují barevnou vadu v celém viditelném spektru (ale ne 100%, principiálně není možné odstranit barevnou vadu pro všechny vlnové délky, libovolná soustava je vždy zatížena zbytkovým chromatismem = sekundární spektrum). \exists chromatická vada ohnisková a zvětšení.

Monochromatické vady

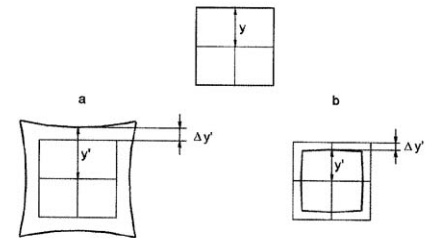
Sférická aberace, kulová vada – paprsky jdoucí krajem čočky se lámou více než paprsky jdoucí blízko středu, rovnoběžné paprsky se po průchodu soustavou neprotínají



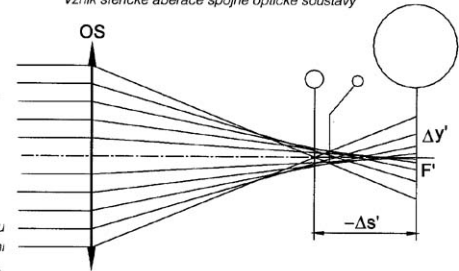
Průchod širokého světelného svazku optickou soustavou, která je zatížena komou (osový paprsek a šikmý paprsek se neshňají v obrazovém poloprostoru v jednom bodě)



Vliv aberací na zobrazení bodu – a) ideální zobrazení bodu; b) zobrazení ovlivněné sférickou aberací; c) zobrazení degradované komou; d) zobrazení bodu v astigmatické soustavě; e) zobrazení bodu v soustavě s vnitřním pnutí materiálu; f) souhrnný vliv sférické aberace, komy a astigmatismu.



Vznik sférické aberace spojné optické soustavy



přesně v ohnisku. Odstraňuje se spolu s barevnou vadou soustavou dvou čoček (spojka a rozptylka mají opačné znaménko sférické aberace, jejich vhodnou kombinací lze tuto aberaci zmenšit), tento objektiv = **aplanát** (odstraňuje i komu). Nebo lze použít asférických ploch (paraboloid) místo kulových resp. korekčních desek (menisk ...).

Asymetrická chyba, koma – narušení symetrie svazku paprsků, vycházejících z mimo-osového předmětového bodu. Bodové objekty mají se vzdávající vzdáleností od optické osy protažený/kometovitý tvar. Odstranění vhodným návrhem optické soustavy, tak aby byla souměrná vůči středové cloně, popř. doplněním optické soustavy o prvek s opačnou hodnotou této aberace (komakorektory).

Astigmatismus a sklenutí obrazu – astigmatismus = světelné paprsky předmětu položeného mimo optickou osu, které dopadají kolmo na okrajové oblasti čočky/zrcadla, se lámou jinak, než paprsky dopadající šikmo. Sklenutí obrazu/pole = zakřivení optických ploch má za následek, že zobrazované body obrazu se zobrazují ostře v různých za sebou ležících rovinách, obrazová „rovina“ není rovina, ale je zakřivena; obraz je sklenutý. Soustavy s odstraněným astigmatismem a rovinným obrazovým polem = **anastigmaty**.

Zkreslení/distorze – je-li zvětšení optické soustavy v blízkosti optické osy jiné než na okraji pole → zkreslení, čtverec nebude čtverec, zkreslení poduškové nebo soudkové. Soustavy čoček s korigovaným zkreslením = soustava **ortoskopická**.

Vady (s výjimkou barevné) popisuje komplexně Seidelova aberační funkce, každý člen odpovídá určité vadě.

§ Dalekohledy dneška

Hubbleův kosmický dalekohled, HST – vypuštěn 1990, průměr zrcadla 2.4 m, po opravách (korekce vady primárního zrcadla ...) a modernizaci (IR kamera, spektrograf) je mezní hvězdná velikost 29 mag, rozlišení 0.043". Nízká kruhová dráha cca 600 km. Omezení pozorování: nelze pozorovat blíže než 50° od Slunce, 15.5° od osvětleného povrchu Země ...

VLT – čtveřice zrcadlových dalekohledů, každý o průměru 8.2 m na Cerro Paranal, Chile, poušť Atacama – nejsušší oblast na světě, ESO. ² Při simultánním provozu celková plocha odpovídá zrcadlu o průměru 16.4 m, adaptivní optika.

KECK I, II – největší průměr = 9.82 m, simultánní provoz ekvivalentní 14 m zrcadlu, složeno z 36 šestiúhelníkových zrcadel, jež díky aktivní optice vytváří jedinou souvislou optickou plochu. Od 2001 interferometr. Na vrcholku Mauna Kea, Havaii.

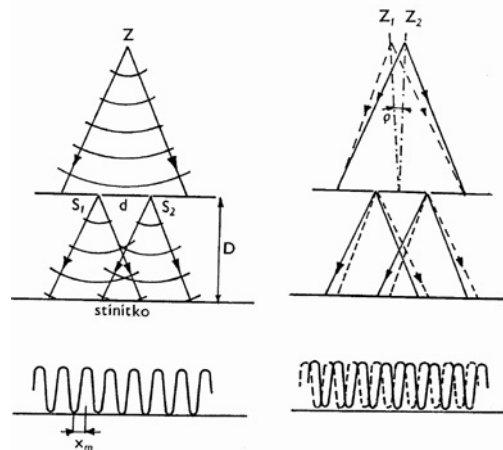
SST – Spectroscopic Survey Telescope, 1999, největší specializovaný dalekohled světa, 11 m, 91 segmentů, Mount Graham, Arizona.

Subaru – největší monolit, průměr 8.3 m, provozovatel Japonsko, opět umístěn na vrcholku Mauna Kea.

§ Interferometrie, určení průměru hvězd

Průměr hvězd lze odhadnout jednak pomocí fotometrie (ze znalosti svítivosti a efektivní teploty – viz dále), jednak z interferometrických měření. ³

Princip interferometrického měření průměrů hvězd: světlo z bodového zdroje o λ dopadá na stínítko se dvěma štěrbinami ve vzdálenosti d , prochází těmito štěrbinami (S_1 , S_2) a dopadá na další stínítko ve vzdálenosti D , viz obr. Na druhém stínítku vznik-



² Nejlepší podmínky pro pozorování = daleko od civilizace, sucho (molekuly vody rozptylují záření), stálé klima (nevelké teplotní výkyvy)

³ Pro dvojhvězdy ještě pomocí vzájemných zákrytů jednotlivých složek zákrytových dvojhvězd: mějme dvě složky o průměrech D a d , dráha délky L leží v zorném paprsku, doba oběhu v kruhové dráze je P ; ze světelné křivky lze určit L , P , t_1 , t_2 , t_3 , t_4 (počátek poklesu jasnosti, počátek úplného minima ...); z geometrie plyne:

$$(t_4 - t_1)/P = (D + d)/L \quad \text{a} \quad (t_4 - t_2)/P = (D - d)/L$$

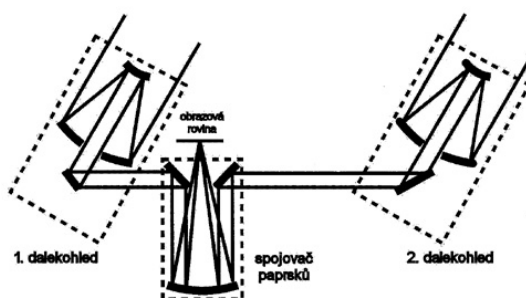
Odtud lze určit průměry obou složek. V reálu složitější (sklon ne přesně 90°, hvězdy mohou být zploštělé, rozdělení jasů na hvězdném disku nerovnoměrné ...).

nou tmavé a jasné obrazy štěrbin – interferenční jevy = superpozice maxim a minim světelných vln. Vzdálenost interferenčních proužků od optické osy je

$$x = \lambda \frac{D}{d} n \quad \text{kde } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Štěrbiny S_1 a S_2 mohou být umístěny před objektivem dalekohledu a v ohnisku dalekohledu se pak pozoruje interferenční jev. Vzdálenost interferenčních proužků je $x = \lambda f/d$, kde f je ohnisková vzdálenost objektivu dalekohledu. Z ohniska objektivu je vzdálenost x viděna pod úhlem $\alpha = \lambda/f$ a úhlová vzdálenost dvou sousedních jasných proužků je $\alpha = \lambda/d$. Jakmile je objektiv osvětlen dvěma stejně jasnými zdroji, jejichž úhlová vzdálenost je ϱ , budou proužky zachovány popř. zesíleny pokud $\varrho = n\alpha$. Interferenční jev naopak zmizí pokud $\varrho = (n + 1/2)\alpha$. Dokud $\varrho \ll \alpha$ a úhlová vzdálenost obou zdrojů je nepatrná, pak interference zůstává zachována, neboť zdroj se stále chová jako bodový. Zvětšováním rozestupu d je možno dosáhnout (při stálé hodnotě ϱ) toho, že pro $\varrho = \lambda/2d$ proužky zmizí, pro $\varrho = \lambda/d$ se opět objeví ... Maxima tedy nastávají pro $\varrho = 0, \lambda/d, 2\lambda/d \dots$ Minima pro $\varrho = \frac{1}{2}\lambda/d, \frac{3}{2}\lambda/d, \frac{5}{2}\lambda/d \dots$ Poměr λ/d je znám, změnou vzdálenosti štěrbin d je tak možno určit úhlovou vzdálenost obou zdrojů. Toto se uplatní při výpočtu dvojhvězd. Ale i zdánlivý disk hvězdy se chová jako dva světelné body – „levá a pravá půlka kotoučku hvězdy se chovají jako dva samostatné zdroje“. Přesným výpočtem lze odvodit, že je-li zdánlivý průměr kotoučku ϱ_* , pak první zmizení interferenčních obrazců nastane pro $\varrho = 0,41\varrho_*$, tj. $0,41\varrho_* = \frac{1}{2}\lambda/d$. Průměr hvězdy je dán $\varrho_* = 1,22\lambda/d_0$, kde d_0 je minimální vzdálenost štěrbin, při které interferenční jev zmizí. Pro obří hvězdy ze slunečního okolí provedeno již Michelsonem (~ 1920), např. pro Betelegeuse určen průměr $0,047''$, při znalosti paralaxy (vzdálenosti) je možno stanovit absolutní průměr ~ 750 průměrů Slunce.

Též intenzitní interferometrie – světlo hvězdy dopadá na dva fotonásobiče, vzdálené několik desítek až stovek metrů. Signál obou násobičů je zpracováván tak, že na výstupu je možno reprodukovat interferenční jev obdobně jako v optickém interferometru. Díky dlouhé základně jsou měřitelné úhlové zdroje 10^{-4} až 10^{-5} obloukových vteřin. Tento princip se běžně užívá v radioastronomii k rozlišení struktury či úhlového rozměru rádiod zdrojů, základny jsou ale až tisíce kilometrů, místo fotonásobičů jsou antény radioteleskopů (delší vlnové délky \rightarrow nižší požadavky na přesnost součástí).



V dnešní době užívány tzv. dalekohledy se složenou aperturou – dva i více dalekohledů rozmístěných až několik set metrů od sebe, jejichž obrazy jsou opticky spojeny (možno díky vynálezu optických vláken). Dosahovaná přesnost až $10^{-5}''$. Viz obr., např. VLT nebo KECK ...

6.2 Fotometrie

Měření jasností objektů. Asi 150 let před začátkem našeho letopočtu publikoval Hipparchos katalog poloh a jasností asi 800 hvězd. Jasnosti hvězd v něm rozdělil do šesti kategorií, přičemž v první byly hvězdy nejjasnější. Ptolemaios později tento katalog rozšířil o dalších 200 hvězd. To se stalo základem postupně se vytvořivší škály hvězdných velikostí. Ukázalo se, že pro empiricky se vyvinuvší škálu hvězdných velikostí velmi přibližně platí, že rozdíl pěti hvězdných velikostí odpovídá stonásobný rozdíl jasností. Jasností zde rozumíme veličinu úměrnou množství zářivé energie z uvažované hvězdy, které prochází jednotkovou plochou v místě použitého detektoru. Lidské oko vnímá lineárně se měnící osvětlení na logaritmické škále⁴. Na základě tohoto zjištění byla zavedena moderní škála hvězdných velikostí na návrh Pogsona (1856) tak, že zmíněný přibližný vztah byl přijat jako platící přesně. Matematicky tedy hledáme logaritmický vztah, který zároveň převrací směr číselné osy tak, aby většímu osvětlení odpovídala menší hvězdná velikost, tj.

$$m_1 - m_2 = -a \log \frac{E_1}{E_2},$$

kde m_i a E_i , $i = 1, 2$ označuje hvězdné velikosti a na Zemi měřené jasnosti, úměrné toku zářivé energie, pro hvězdu 1 a hvězdu 2. Konstantu a zjistíme z přijaté definice škály hvězdných velikostí, neboť musí platit, že

$$5 = a \log 100.$$

Pracovní vztah pro výpočet hvězdných velikostí, nazývaný dnes Pogsonova rovnice, je tedy

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{E_1}{E_2}.$$

Opačný vztah je $E_1/E_2 = 10^{0.4(m_2-m_1)} = b^{(m_2-m_1)}$, kde $b = \sqrt[5]{100} \doteq 2,512$. Jak vidíme, je pátá odmocnina ze sta numericky podobná konstantě úměrnosti v rovnici a proto může docházet k záměně!!! Rozdíl hvězdných velikostí $\Delta m = -2,5n$ odpovídá poměru intenzit $10^n : 1$. Jasnost hvězdy první velikosti je tedy stokrát větší než jasnost hvězdy šesté magnitudy a desettisíckrát větší než jasnost hvězdy jedenácté magnitudy ...

Hvězdné velikosti se udávají v jednotkách nazývaných magnituda označovaných horním indexem m nebo zkratkou mag za číselnou hodnotou⁵.

Skládání hvězdných velikostí (např. u dvojhvězd): protože Pogsonova rovnice je v diferenciálním tvaru, nezáleží při udávání jasností na použitých jednotkách. Z řešení světelných křivek zákrytových dvojhvězd lze obvykle určit poměr jasností obou složek L_2/L_1 vyjádřený v jednotkách celkové jasnosti v daném oboru vlnových délek ($L_1 + L_2 = 1$). Hvězdné velikosti jednotlivých složek tedy zřejmě určíme z pozorované hvězdné velikosti dvojhvězdy m podle vztahů

$$m_1 - m = 2,5 \log \left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) \quad \text{a} \quad m_2 - m = 2,5 \log \left(1 + \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{-1} \right).$$

Např. je-li dvojhvězda složena ze dvou stejně jasných složek, bude se dvojhvězda jevit o $2,5 \log 2 \doteq 0,^m 75$ jasnější, než by se ve stejné vzdálenosti od nás jevila každá z

⁴ Weberův-Fechnerův psychofyzikální zákon = mění-li se podnět geometricky, vnímáme to aritmeticky

...

⁵ v SI: $0 \text{ mag} \Leftrightarrow j_0 = 2,54 \cdot 10^{-6} \text{ lx}$ (jasnost = (plošná) hustota světelného toku = osvětlenost, lux; $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$; světelný tok, lumen, $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd}\cdot\text{sr}$)

složek dvojhvězdy. Analogicky můžeme odhadnout, jakou celkovou hvězdnou velikost m naměříme, pokud se do zorného pole našeho fotometru dostanou dvě velmi blízké hvězdy o známých hvězdných velikostech m_1 a m_2 . Dle předchozího tak musí platit $m = m_1 - 2,5 \log(1 + 10^{-0,4(m_2 - m_1)})$.

Je zřejmé, že Pogsonova rovnice nedefinuje nulový bod škály hvězdných velikostí. A navíc záření hvězd je rozloženo do celého elektromagnetického spektra, a proto musíme při praktickém používání dodat, pro jakou vlnovou délku hvězdnou velikost udáváme. Obvykle se hvězdné velikosti v různých mezinárodně přijatých fotometrických systémech volí tak, aby nulový bod škály odpovídal historicky vzniklé škále hvězdných velikostí. Žádný detektor a žádná detekční soustava nedokáže se stejnou účinností registrovat tok záření v různých vlnových délkách. Většina detektorů má u určité vlnové délky maximum citlivosti a na obě strany od ní jejich citlivost klesá. Výsledná funkce relativní citlivosti detekční soustavy v závislosti na vlnové délce se obvykle označuje výrazem **spektrální propustnost** R_λ . Můžeme ji zásadním způsobem ovlivnit, jestliže při pozorování jasnosti hvězd zařadíme před detektor nějaký barevný filtr propouštějící záření pouze v určitém známém intervalu vlnových délek. Obecně můžeme pro tok zářivé energie zaznamenaný fotometrem psát

$$E = \int_0^\infty E(\lambda)R(\lambda) d\lambda.$$

Visuální hvězdné magnitudy m_{vis} – lidské oko je nejcitlivější ke žluté barvě a proto je historická škála hvězdných velikostí vázána na jasnosti hvězd ve žluté části spektra. Přesnost odhadů založených pouze na pozorování lidským okem je obvykle několik málo desetín magnitudy. Po vynálezu fotografických emulzí začaly být jasnosti hvězd získávány proměřováním fotografií hvězd – *fotografické hvězdné velikosti* m_{pg} . Dosahovaná přesnost určení hvězdných velikostí činí zhruba $0,^m 1$. Protože ale běžné fotografické desky mají maximum citlivosti v modré oblasti spektra, liší se takto získané hvězdné velikosti od velikostí visuálních v závislosti na barvě (a tedy povrchové teplotě) hvězdy. Astronomové velmi brzo zjistili, že existuje dobře definovaný vztah mezi spektrálním typem hvězd (určený podle vzhledu jejich čárového spektra) a mezi barevným indexem ($m_{pg} - m_{vis}$). První *fotoelektrická měření* jasnosti hvězd byla prováděna okolo 1920. Přesnost měření tak vzrostla na $0,^m 01$ – $0,^m 02$. V období mezi dvěma válkami se postupně začaly používat *fotometry s fotonásobičem* a zdrojem vysokého napětí. Vzhledem k vyšší citlivosti fotonásobičů bylo možné začít používat různé **barevné filtry**. Z hlediska šířky pásma barevné propustnosti se rozlišují filtry *širokopásmové* (propustnost v šíři několika málo stovek nm), *středopásmové* (několik desítek nm) a *úzkopásmové* (obvykle méně než 2 nm).

§ Standardní barevné systémy

- **Johnsonův UBV systém** – definovaný třemi širokopásmovými filtry:

U : propustnost od 300 nm do 420 nm s maximem u 360 nm

B : propustnost od 360 nm do 560 nm s maximem u 420 nm

V : propustnost od 460 nm do 740 nm s maximem u 535 nm

tj. ultrafialovým, modrým a žlutým. Johnson a jeho spolupracovníci proměřili mnoho tisíc hvězd a publikovali jejich UBV magnitudy. Díky tomu a díky jasně definovaným vztahům mezi určitými fyzikálními vlastnostmi hvězd a barvami v UBV systému (ty charakterizujeme tzv. barevnými indexy $(B - V)$ a $(U - B)$ = rozdíl měřených hvězdných velikostí ve dvou sousedních filtrech) se jejich systém stal velmi populární a dnes patří mezi nejužívanější.

• **Strömgrenův uvby systém** – Nevýhodou Johnsonova systému je to, že filtr U zahrnuje oblast vlnových délek před i za Balmerovým skokem. Aby bylo možno výšku Balmerova skoku z fotometrie určovat, navrhl Strömgren středněpásmový systém s následujícími čtyřmi filtry:

u : pološířka 38 nm, maximum u 350 nm

v : pološířka 20 nm, maximum u 410 nm

b : pološířka 10 nm, maximum u 470 nm

y : pološířka 20 nm, maximum u 550 nm

Díky užším pásmům propustnosti poskytuje tento systém přesnější a lépe definovaný odhad některých základních vlastností hvězd. Kalibrovaná veličina y magnitudy je přímo navázána na Johnsonovu magnitudu V , což je možné díky obvykle hladkému průběhu spojitého záření hvězd ve žluté oblasti spektra. Strömgren zavedl několik barevných indexů – kromě indexů $(b - y)$ a $(u - b)$, analogických Johnsonovu systému, jsou to ještě $c_1 = (u - v) - (v - b) = u + b - 2v$ a $m_1 = (v - b) - (b - y) = v + y - 2b$, které jsou citlivé na chemické pekularity a překrývání spojitého spektra spektrálními čarami.⁶

+ **další systémy** – Johnsonův UBV systém byl rozšířen do červené a infračervené oblasti spektra pomocí širokopásmových filtrů R (700 nm), I (900 nm), J (1250 nm), K (2200 nm) a L (3400 nm). Mezi kanadskými astronomy je užíván *DAO* systém (podle Dominion Astrophysical Observatory ve Victorii), který používá tři filtry a je dosti blízký UBV systému. Známy je *sedmibarevný systém* středopásmové fotometrie, používaný astronomy ženevské observatoře (filtry $U, B, V, B_1, B_2, V_1, G$). Existují i různé *systémy používané na družicích*, které byly kalibrovány, např. širokopásmová a velmi přesná a dobře standardizovaná měření jasnosti získávaná družicí Hipparcos.

§ Redukce fotoelektrických měření jasnosti hvězd

Fotoelektrická měření jasnosti hvězd jsou nejpresnější měřící technikou, která se používá již od dob první světové války. Intenzita světla každé hvězdy je funkcí vlnové délky záření a ve velmi hrubém přiblížení lze záření hvězdy aproximovat zářením absolutně černého tělesa s teplotou odpovídající efektivní teplotě hvězdy. Pro reálné hvězdy – stejně jako pro absolutně černá tělesa – platí, že maximální intenzita jejich záření se s rostoucí teplotou posouvá směrem ke kratším vlnovým délkám.

Přechod od měření k mezinárodně srovnatelným hvězd. velikostem

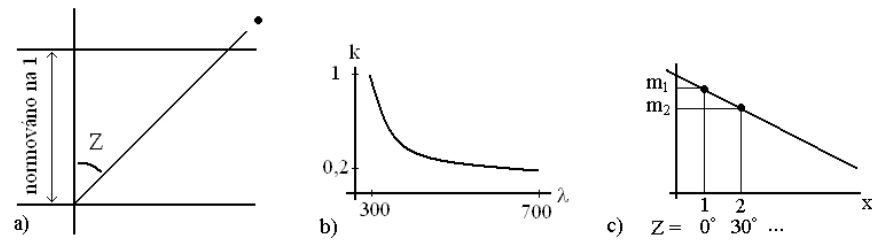
(tzv. absolutní fotometrie)

Osvětlení, které zaznamená detektor našeho fotometru (fotonásobič, CCD ...) neodpovídá barevnému rozložení jasnosti hvězdy, protože dopadající záření je dvojnásobem transformováno. **Prvním transformačním prostředím je zemská atmosféra.** V optické oblasti spektra platí, že čím kratší je vlnová délka dopadajícího záření, tím více je zemskou atmosférou zeslabováno. Tomuto zeslabení se říká **atmosférická extinkce** a je výsledným efektem absorpce a rozptylu dopadajícího záření.⁷

Extinkční koeficient v dané barvě používaný v praktické hvězdné fotometrii udává procento zeslabení dopadajícího světla v magnitudách po průchodu vrstvou atmosféry pro hvězdu v zenitu (tj. na jakýsi jednotkový sloupec vzdušné hmoty, viz obr). Světlo hvězdy u

⁶ V některých zdrojích bývají uvedeny pro jednotlivé hvězdy pouze hodnoty V , $(b - y)$, c_1 a m_1 . Jednotlivé magnitudy a index $(u - b)$ lze pak vypočítat ze vztahů $b = V + (b - y)$, $v = b + (b - y) + m_1 = V + 2(b - y) + m_1$, $u = v + (b - y) + m_1 + c_1 = V + 3(b - y) + 2m_1 + c_1$, $(u - b) = 2(b - y) + 2m_1 + c_1$.

⁷ Absorpce: hlavně O_2 , O_3 , H_2O ; záleží na vlnové délce (viz obr), pod 290 nm atmosféra absorbuje „vše“ (O_3). Rozptyl: na molekulách – Rayleighův $\sim \lambda^{-4}$; aerosolový rozptyl: na prachových částicích, nezávisí na λ . Celkově je ale extinkce funkcí $\lambda \rightarrow$ zvětšuje barevný index



obzoru prochází daleko větším sloupcem vzdušné hmoty; zhruba platí, že pro ekvivalentní sloupec vzdušné hmoty v hvězdných veličinách, X , je nepřímě úměrný kosinu zenitové vzdálenosti ($X = 1/\cos Z = \sec Z$).⁸ Pro celý rozsah vzdušných hmot, ve kterých má ještě smysl provádět fotoelektrická měření jasnosti, se dobře osvědčuje aproximační vztah

$$X = (1 - 0,0012\text{tg}^2 Z) \sec Z.$$

Označíme-li m a m_0 měřenou hvězdnou velikost hvězdy a hvězdnou velikost, kterou bychom stejným přístrojem naměřili vně zemské atmosféry a k lineární extinkční koeficient, platí tedy $m = m_0 + kX$. Ke zjišťování lze v případě monochromatické fotometrie použít např. **metodu Boguerovy přímky**, viz obr c), měříme jasnost jedné a téže hvězdy v průběhu jejího denního pohybu; protože platí předcházející vztah (tj. jde vlastně o rovnici Boguerovy přímky pro jednu barvu, m_0 je hvězdná velikost opravená o extinkci), lze psát $k = \frac{m_1 - m_2}{x_1 - x_2}$.⁹

Ke druhé transformaci měřeného světla dochází ve vlastním měřicím přístroji. Všechny optické části dalekohledu a fotometru zeslabují světlo různých vlnových délek různě a rovněž citlivost detektoru fotometru ke světlu různých barev je různá. Měřená jasnost je proto obecně vzato složitým integrálem přes všechny křivky spektrální propustnosti jednotlivých optických a detekčních elementů použitého přístroje.

⁸ Obecně: Světlo o intenzitě I_0 je ovzduším oslabeno na dráze l dle vztahu $I = I_0 e^{-\chi l} = I_0 e^{-\tau}$, kde χ je absorpční koeficient a τ je optická tloušťka pro kterou platí $d\tau = \chi dl$. Je-li výška atmosféry h , celková optická tloušťka atmosféry je $\tau = \int_0^h \chi dl$. Zenitovou vzdáleností se přibližně zvětšuje dráha paprsku $dl = \sec z dh$, tj. optická tloušťka pro zenitovou vzdálenost z je $\tau(z) = \sec z \int_0^h \chi dh$. Je-li $\tau(0)$ optická tloušťka atmosféry pro zenit, pak platí dosti přesně až do $z = 65^\circ$ $\tau(z) = \tau(0) \sec z$.

⁹ Správná interpretace tohoto jednoduchého vztahu zasluhuje určitý komentář. Stav zemského ovzduší, jeho průzračnost i barevná propustnost se s časem dosti rychle mění – důsledkem změny stavu ovzduší dochází ke změnám extinkčního koeficientu a jeho závislosti na vlnové délce. Pokud je měřicí přístroj stabilní a měří osvětlení ve formě nějak kalibrované výchylky měřicího přístroje či jako počet pulsů v přístrojích počítajících fotony, tedy nějakou veličinu, kterou budeme označovat d , pak platí $m = 2,5 \log d + c$, kde c je libovolně zvolený nulový bod škály přístrojových hvězdných velikostí. Velmi často není detekční aparatura během noci dokonale stabilní a že se tedy mění nulový bod měřené škály hvězdných velikostí. Změny přístrojového nulového bodu mohou nastat např. v důsledku měnění se teploty přístroje, ... Extinkční koeficient k je směrnici přímky udávající, jak rychle se v daném místě a v daném čase mění hvězdná velikost v závislosti na měnící se vzdušné hmotě (viz předcházející rovnice). Pokud budeme určovat extinkční koeficient z našich měření v situaci, kdy dochází ke změnám nulového bodu přístroje, pak se můžeme dočkat toho, že námi určenými extinkční koeficient bude zcela nesprávný. Jinými slovy, to co se při pozorování během noci v některých případech mění, je nulový koeficient c , nikoli samotný extinkční koeficient k ! Zkušenost ukazuje, že časovou změnu nulového bodu lze obvykle dostatečně dobře popsat jako lineární nebo kvadratickou závislost na čase. Obecná transformační rovnice vyjadřující převod mezi vněatmosférickou a měřenou hvězdnou velikostí tedy bude $m = m_0 + kX + at^2 + bt + c$, kde t je čas měření.

Kdyby se nám jednalo pouze o spolehlivé měření změn jasnosti některého objektu v čase, vystačili bychom při důsledném používání stejného přístroje pouze s opravami o zdánlivé změny jasnosti způsobené zemskou atmosférou a změnou nulového bodu přístroje. Lze tak ovšem s úspěchem činit pouze tehdy, můžeme-li si být jisti, že optické vlastnosti přístroje se s časem nemění. Tak tomu ale bohužel nikdy není. Čerstvě pohlíknované zrcadlo dalekohledu odráží světlo kratších vlnových délek lépe, než totéž zrcadlo vystavené rok vlivu zemského ovzduší. Je proto žádoucí i běžná měření jasnosti proměnných hvězd vždy pečlivě redukovat na standardní systém. Skutečnost, že žádný detektor neměří monochromatickou hvězdnou veličinu, nýbrž hvězdnou veličinu integrální, která vzniká jako součet příspěvků přes určitou oblast vlnových délek způsobuje, že vlastnosti přístroje mají vliv i na měření zeslabení světla zemskou atmosférou ← horké hvězdy vyzařují více světla pro kratší vlnové délky než hvězdy chladné. Jestliže tedy měříme integrální hvězdnou veličinu přes nějakou oblast vlnových délek, pak je zřejmé, že horká hvězda relativně více přispívá v krátkovlnné a chladná v dlouhovlnné části pásma propustnosti. Zároveň ale víme, že pohlcování světla zemskou atmosférou roste se zkracující se vlnovou délkou. V důsledku toho bude okamžitý extinkční koeficient pro libovolnou integrální hvězdnou veličinu vždy poněkud vyšší pro horké, než pro chladné hvězdy. Parametrická závislost extinkčního koeficientu na barvě hvězd byla nazvána **extinkčním koeficientem druhého řádu** nebo **barevným extinkčním koeficientem**. Na rozdíl od stavu zemské atmosféry se optické vlastnosti přístroje a jeho spektrální citlivost mění jen zvolna s časem, takže je během jedné sezóny měření můžeme považovat za stálé. Totéž tím pádem platí i pro barevné extinkční koeficienty. Barevné extinkční koeficienty jsou dány vlastnostmi použitého přístroje, jsou proto během pozorovací sezóny stálé a musí být určeny z co největšího počtu měření za celou sezónu. K jejich spolehlivému určení je nezbytné pořídit měření jasnosti horkých i chladných standardních hvězd ve velkém rozsahu vzdušných hmot, alespoň do vzdušné hmoty 2. Pokud bychom mohli měřit čistě monochromatické hvězdné veličiny, žádné barevné extinkční koeficienty by nebylo třeba určovat. Pro měření v úzkopásmových filtrech je také skutečně můžeme spolehlivě zanedbat.

Tedy: problém nastává tehdy, chceme-li porovnávat měření jasností ze dvou různých přístrojů resp. z téhož přístroje, ale z různých let. Byly vytvořeny různé standardní, referenční systémy hvězdných jasností. K definici takových systémů bylo obvykle použito několika barevných filtrů o známé spektrální propustnosti a konkrétní přístroj, pomocí kterého byly změřeny stovky či tisíce hvězd po celé obloze. Úloha barevných filtrů je, zhruba řečeno, dvojí:

1) Jednak představují dominantní člen určující spektrální průběh dané integrální hvězdné veličiny. To zajišťuje, že tento spektrální průběh bude pro různé přístroje a danou integrální hvězdnou veličinu alespoň přibližně podobný.

2) Druhým důležitým posláním barevných filtrů je, že nám umožňují velmi dobře měřit barvu hvězd a charakterizovat jejich spektrální vyzařovací charakteristiky.

Představme si, že bychom konkrétní přístroj, který bychom zvolili pro definici standardního systému, umístili vně zemské atmosféry a změřili s ním pro nějakou hvězdu standardní UBV hvězdné veličiny. Protože sama funkce logaritmus má tendenci "linearizovat" nelineární průběh logaritmované veličiny, a protože v období před zavedením počítačů existovala snaha používat co nejjednodušší funkční závislosti, byl i při definici Johnsonova systému učiněn předpoklad, že obecně neznámou a složitou funkční závislost mezi vněatmosférickými hvězdnými veličinami a barvami z různých přístrojů měřících s UBV filtry - či z různých sezón měření tímž přístrojem - lze dostatečně dobře popsat

lineárnými vztahy

$$\begin{aligned} V &= v_0 + H_1(B - V) + H_2 \\ (B - V) &= H_3(b - v)_0 + H_4 \\ (U - B) &= H_5(u - b)_0 + H_6, \end{aligned}$$

kde indexem 0 jsou označeny vněatmosférické hodnoty měřené naším přístrojem. Koeficienty H jsou transformační koeficienty barevného systému fotometru na systém standardní a lze je pro danou sezónu považovat za konstanty.

§ Určování fyzikálních vlastností hvězd z fotometrických měření

Modul vzdálenosti, bolometrická korekce a zářivý výkon hvězdy

Jak jsme si již uvedli dříve, bylo velké množství hvězd proměřeno v Johnsonově UBV systému a též ve Strömgrenově uvby. Hvězdné velikosti měřené ve žluté barvě Strömgrenova systému y jsou přímo navázány na Johnsonovy hvězdné velikosti ve žlutém filtru V jeho systému, a totéž platí i o několika dalších používaných systémech. I z dalších praktických důvodů se při srovnávání dat z různých zdrojů jeví hvězdná velikost měřená ve žluté barvě jako nejvhodnější: rozložení energie hvězd se v oblasti žluté barvy kolem 550 nm mění jen zvolna s vlnovou délkou a také extinkční koeficient naší atmosféry je při pozorování ve žluté barvě nižší, než v barvě modré či fialové. Ze všech těchto důvodů jsou měření ve žluté barvě zatížena nejmenšími chybami a také se nejsnáze převádějí na standardní systém.

Chceme-li ovšem z měření jasnosti ve žluté barvě získat představu o bolometrickém zářivém výkonu L_* (např. proto, abychom jej mohli porovnat s nějakým modelem), musíme provést několik kroků. Nejprve musíme **naměřenou zdánlivou hvězdnou velikost přepočítat na velikost absolutní** (zde značena M_V), která je definována jako hvězdná velikost, kterou by hvězda měla ve vzdálenosti 10 pc od nás.¹⁰ Protože tok záření v prázdném prostoru ubývá se čtvercem vzdálenosti d , je z Pogsonovy rovnice (zářivý výkon $L = 4\pi r^2 E$)

$$M_V - V = -2,5 \log \frac{L4\pi d^2}{L4\pi 10^2} = -2,5 \log \frac{d^2}{100} = 5 - 5 \log d.$$

Vlivem mezihvězdné hmoty dochází však na velkých vzdálenostech k pohlcování světla hvězdy, což se obvykle popisuje absorpčním koeficientem ve žluté barvě A_V a skutečná zdánlivá hvězdná velikost ve žluté barvě je: $V_0 = V - A_V$.¹¹ Pro absolutní hvězdnou velikost ve žluté barvě, zvanou obvykle velikost vizuální, tak dostáváme jednoduchý pracovní vztah $M_V = V_0 + 5 - 5 \log d = V_0 + 5 + 5 \log \pi$, kde $\pi = 1/d$ je paralaxa, vyjádřená v obloukových vteřinách. **Modulem vzdálenosti** bývá označován rozdíl nezčervenale pozorované vizuální magnitudy a magnitudy absolutní. Pro modul vzdálenosti tedy platí

$$MODUL = V_0 - M_V = V - A_V - M_V = 5 \log d - 5.$$

¹⁰ ve Sluneční soustavě je referenční vzdálenost 1 AU resp. pro meteory je to 100 km

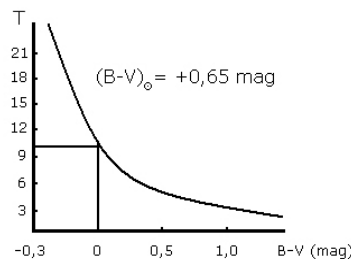
¹¹ Po proměření řady hvězd, u nichž bylo možno získat určitou představu o jejich vzdálenosti od nás, bylo zjištěno, že absorpci ve žluté barvě lze vcelku dobře popsat pomocí vztahu $A_V = 3,2E(B - V)$, kde veličina $E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0$ označuje **zčervenání** barevného indexu $(B - V)$. Index nula označuje ve fotometrických systémech obvykle nezčervenale hodnoty, jaké bychom naměřili, kdyby nebylo mezihvězdné absorpce. Zčervenání $E(B - V)$ se dá z měření v Johnsonově či Strömgrenově systému obvykle dobře určit pro hvězdy hlavní posloupnosti. Čára zčervenání v diagramu $(U - B)$ vs. $(B - V)$ je blízká přímce (budeme-li danou hvězdu postupně vzdalovat, bude červenat).

Vztah můžeme přirozeně použít jen tehdy, známe-li vzdálenost hvězdy od nás. Naopak, známe-li modul, lze určit paralaxu – paralaxa určená z modulu vzdálenosti resp. z Pogsonovy rovnice = **fotometrická paralaxa**. Modul vzdálenosti hraje roli u určování vzdálenosti galaxií, cepheid . . .

Rozdíl mezi bolometrickou¹² a visuální absolutní hvězdnou velikostí se nazývá **bolometrická korekce BC**. Bolometrické korekce byly empiricky určeny na základě měření úhlových průměrů hvězd pomocí intenzitního interferometru, měření jejich rozložení energie a s použitím modelů atmosfér pro odhad příspěvku z krátkovlnné části spektra. Jejich přičtením k absolutní visuální velikosti dostáváme potřebnou absolutní velikost bolometrickou: $M_{bol} = M_V + BC$. Tuto bolometrickou hvězdnou velikost můžeme již přímo porovnat s bolometrickou hvězdnou velikostí spočtenou ze zářivého toku hvězdy (udaného v jednotkách zářivého toku Slunce); ze známé M_{bol} pro Slunce a jeho výkonu, lze určit svítivost hvězdy L :

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2,5 \log \frac{L_*}{L_\odot}. \quad 13$$

Barevný index: $B - V = M_B - M_V = -2,5 \log L_B/L_V + konst.$; barva hvězd závisí na teplotě vnějších vrstev hvězdné atmosféry (měříme-li B a V zachytíme tak vlastně 2 body Planckovy křivky → lze něco říct o teplotě hvězdy), konst. závislá na definici nulové hodnoty $B - V$ ($B - V \equiv 0$, dáno úmluvou: hvězdy o povrchové teplotě 10^4 K [A0] v intervalu 5,5 -5,6 mag mají pro všechny vlnové délky stejnou jasnost) ⇒ hvězdy s pozitivním barevným indexem jsou červenější než A0, negativní barevný index prozrazuje hvězdy modřejší; viz obr.



Efektivní teplota hvězdy¹⁴

Efektivní teplotu hvězdy lze odhadnout přímo z jejího spektrálního typu, ∃ různé tabulky. Ideální je použít k určení efektivní teploty spočtené detailní modely hvězdných atmosfér a srovnávat pozorované a spočtené profily řady spektrálních čar, až nalezneme model,

¹² dána ideálním detektorem, jenž by byl schopen měřit, vyintegrovat a vyhodnotit magnitudu v celém spektru, je odvozena ze zářivého výkonu hvězdy v celém spektru

¹³ Protože novější studie ukazují, že zářivý výkon Slunce se poněkud mění během jedenáctiletého slunečního cyklu, a protože hodnota sama závisí na současné přesnosti našich měření, vyskytují se v literatuře pro zářivý výkon Slunce mírně odlišné údaje. To je ovšem nepříjemnost, která do našich srovnání vnáší zbytečnou nepřesnost navíc. Proto IAU přijala na svém 23. valném shromáždění r. 1997 resoluci, která stanoví, že nadále se nebude nulový bod škály bolometrických hvězdných velikostí definovat pomocí bolometrického zářivého výkonu Slunce, nýbrž tak, že bolometrická hvězdná velikost $M_{bol} = 0,^m 0$ odpovídá zářivému výkonu $L = 3,055 \cdot 10^{28}$ W. To jinými slovy znamená, že lze zavést absolutní škálu pro převod zářivého výkonu na bolometrickou magnitudu ve tvaru $M_{bol} = 71,^m 2125 - 2,5 \log L$, kde zářivý výkon je udán ve watech. Dostáváme tak: bolometrický zářivý výkon Slunce $M_{bol\odot} = +4,^m 75$ a $L_\odot = 3,846 \cdot 10^{26}$ W.

¹⁴viz též str. 193!!!

jehož spočtené čáry nejlépe popisují spektrum pozorované. Jestliže nějakým způsobem pro danou hvězdu určíme jak efektivní teplotu, tak i její bolometrický zářivý výkon, pak můžeme z definice efektivní teploty ($L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$) odhadnout také poloměr hvězdy. Platí zřejmě

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R_{\odot}^2}{L_{\odot}} \right) - 5 \log (R/R_{\odot}) - 10 \log T_{eff},$$

což po dosazení numerických hodnot vede na vztah

$$M_{bol} = 42,368 - 5 \log (R/R_{\odot}) - 10 \log T_{eff}.$$

Tento vztah můžeme naopak např. pro zákrytové dvojhvězdy, u nichž určíme poloměr z řešení světelné křivky, použít k určení bolometrické magnitudy a tedy k odhadu vzdálenosti soustavy od nás. Dnes, při znalosti mnohem přesnějších paralax jasnějších hvězd z měření družice Hipparcos můžeme odhadovat poloměry jednotlivých hvězd s dobrou přesností. Kombinací předchozího vztahu se vztahy $M_V = V_0 + 5 + 5 \log \pi$ a $M_{bol} = M_V + BC$ dostáváme pracovní vztah pro výpočet poloměrů hvězd

$$\log (R/R_{\odot}) = 7,474 - 2 \log T_{eff} - 0,2 BC - 0,2 V_0 - \log \pi.$$

Tj. známe-li paralaxu a máme-li ze spektra alespoň hrubou představu o efektivní teplotě, dostaneme docela dobrý odhad poloměru.

§ Fotometrie – přístroje

- 2D fotometrie – lidské oko, fotografická deska, CCD ... rozlišení do 1"

- aperturní fotometrie – clonka vytínající 10 ÷ 100" + fotonásobič (zlepšení = simultánní fotometry [více objektů], vícekanálové [ve více filtrech])

V současné době **fotoelektrická fotometrie**, transformuje tok dopadajícího záření na elektrický proud, detektorem fotonásobič nebo prvek CCD.

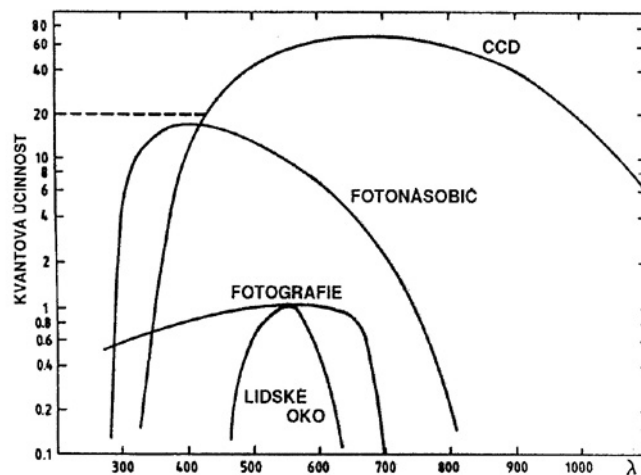
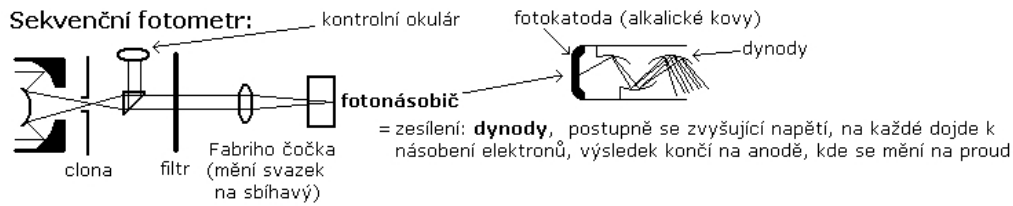
• **CCD** = charged coupled device (zařízení strádající náboj), 2D detektor s vysokou kvantovou účinností (~ 80%, = schopnost detektoru přeměňovat jednotlivé fotony na výstupní signál), polovodičový prvek umožňující dle indukovaného náboje určovat s velkou přesností energii fotonů, které na detektor dopadly, vyznačující se též linearity = přímou úměrou mezi energií dopadnuvšího světla a velikostí indukovaného náboje, citlivý především v červené oblasti světla. Polovodičový prvek (pole křemíkových fotodiod chráněných SiO₂), který je fotocitlivou jednotkou, je rozdělen na rastr malých plošek (pixelů), z nichž každá je schopna měřit intenzitu světla jež na ni dopadá; po tzv. vyčtení – zjištění velikosti indukovaného náboje – se obraz z celého detektoru skládá řídicí elektronikou.¹⁵

Vady: *temný proud* = samovolná emise, šum – funkcí teploty ($I = A.e^{-B/kT}$) → musíme chladit (Peltierův jev: dva kovy, mezi nimi vysoký proud [~ A], jeden z nich se bude ohřívat, druhý ochlazovat až o 30 °C pod okolní teplotu. Pevné CO₂ → až -70 °C. Kapalný N₂ → až -170 °C.); *horké pixely* = díky sprškám kosmického záření jež způsobí uvolnění velkého množství elektronů, rychlost ~ 1 – 2/cm²/min; *mrtvé pixely* ...

¹⁵ Každý pixel má pod sebou tři elektrody s proměnlivým napětím. Počáteční stav: prostřední proužek má malé kladné napětí. Při expozici: vyrážejí se elektrony a padají do „jámy“ = vnitřní fotoefekt, elektron je vyražen z valenčního do vodivostního pásu, lze dále vyčítat. Vyčítání (read-out): po sloupcích se (proměnným elektrickým polem) obsahy řádků přesouvají do vyčítacího registru, vyčítací registr se v řádku vyčte do A/D převodníku a odtud se data dostávají do paměti k dalšímu zpracování.

Eliminace vad: *dark frame* = expozice s uzavřenou závěrkou, odečítáme od snímku; *flat field* = expozice rovnoměrně osvětleného čipu, dělíme snímek (osvětlené plátno v kopuli = dome flat nebo cca 40-50 min před východem (po západu) Slunce v opačném směru) - eliminujeme tím to, že každý element detektoru má poněkud jinou citlivost na dopadající světlo ...

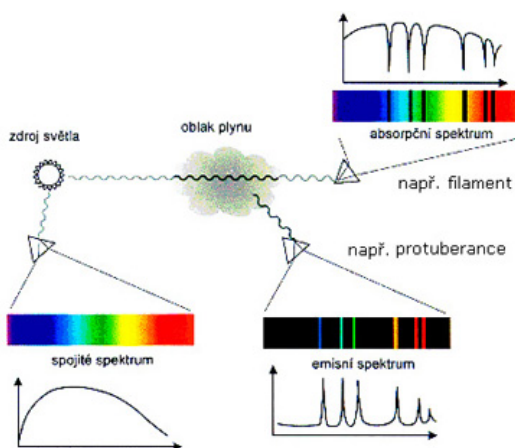
• **Fotonásobiče** = princip fotoefektu $mv^2/2 = h\nu - W$, kde W je výstupní práce, kvantová účinnost 10 – 30% ... viz obr ...



6.3 Spektroskopie

Spektrum = rozdělení intenzity elektromagnetického záření zkoumaného objektu v závislosti na jeho vlnové délce resp. frekvenci.

Spektrum dělíme dle energií fotonů na jednotlivé obory (rádio, IR, optical, UV, X, γ) a dle charakteru spektra na spojité, emisní, absorpční a jejich kombinace.



Spektrogramy hvězd jsou bohatým zdrojem informací a dovolují nám určovat celou řadu údajů:

radiální rychlost hvězdy (dále RV) tj. rychlost do směru k pozorovateli, kterou získáme porovnáním vlnových délek známých spektrálních čar s nepohyblivým laboratorním zdrojem; kladná RV znamená, že se od nás objekt vzdaluje, jeho čáry jsou v důsledku Dopplerova jevu posunuty směrem k delším vlnovým délkám;

centrální intenzitu (I_c), tj. intenzitu v jádru čáry vyjádřenou v jednotkách úrovně spojitého záření v daném místě; pro absorpční čáry je tedy tato veličina vždy < 1 ;

ekvivalentní šířku (EW), což je plocha spektrální čáry měřená opět v jednotkách úrovně spojitého záření v dané vlnové délce; jde tedy o veličinu, která závisí pouze na počtu absorbujících/emituujících fotonů a ne na skutečném profilu čáry; změřením tedy lze určit poměrné zastoupení prvků

šířku čáry ($FWHM$) měřenou v poloviční hloubce čáry mezi centrem čáry a úrovní spojitého záření;

promítnutá rotační rychlost hvězdy (dále $v \sin i$), tj. rovníková lineární rotační rychlost v průmětu do směru k pozorovateli (i je úhel sklonu rotační osy hvězdy vůči nebeské sféře); tato veličina není přímo měřenou veličinou, určuje se z rotačního rozšíření profilů spektrálních čar; pro konkrétní spektrální čáru lze přirozeně nalézt dobrou korelaci mezi $FWHM$ a $v \sin i$.

Obecněji vzato nám spektra hvězd poskytují informace o chemickém složení jejich atmosfér a díky závislosti excitace a ionizace jednotlivých chemických prvků na teplotě také o povrchových teplotách hvězd.

Cílem **prvotního zpracování spektrogramů** je provést dvě kalibrace:

- Stanovit funkční závislost mezi lineární polohou s na desce od nějakého zvoleného nulového bodu a vlnovou délkou λ ve spektru.
- Zajistit, aby zobrazení spektra v relativních intenzitách bylo úměrné toku záření z hvězdy v každé vlnové délce.

Kalibrace vlnových délek (disperzní křivka)

Tento úkol je společný pro fotografické i elektronické spektrogramy a liší se pouze podle toho, zda zpracováváme spektrum z hranolového či z mřížkového spektrografu. Ke kalibraci se obvykle používá čárové emisní spektrum nějakého laboratorního zdroje s čarami o známých vlnových délkách – nyní je hodně rozšířeno použití čar thoria, protože tento prvek má v celém optickém oboru velké množství čar, dosti rovnoměrně rozložených po celém spektru. Pro mřížkový spektrograf lze použít formuli

$$\lambda = \frac{D}{k} \left(\sin \alpha + \sin \left(\frac{s - s_0}{f} + \alpha - \psi_0 \right) \right), \quad (*)$$

kde α je úhel mřížky, f je ohnisko kamery, k je řád spektra a $D = 10^6/V$ je mřížková konstanta (V označuje počet vrypů mřížky na 1 mm a faktor 10^6 zajišťuje, aby v případě, že všechny měřené údaje budou v mm, byla škála vlnových délek v nm). Tuto rovnici lze pro praktické výpočty přepsat do tvaru $\lambda = a_1 + a_4 \sin(a_2 s + a_3)$ a koeficienty a_i určit metodou nejmenších čtverců z měření srovnávacích čar.

Kalibrace intenzit (kalibrační křivka)

Fotografická emulze reaguje jako nelineární detektor, to znamená, že zčernání desky není přímo úměrné dopadajícímu toku zářivé energie. Chceme-li proto dostat potřebné informace z fotografického spektra, stojíme před úkolem kalibrace densit na intenzitu. K tomu účelu se obvykle exponuje na fotografickou desku tzv. kalibrační spektrum, tj. např. proužky, vzniklé prosvětlením stupňovitého šedého klínu o známých odstupňovaných propustnostech nějakým laboratorním zdrojem bílého světla. Deska se proměří na mikrodensitometru pomocí zdroje světla a fotonásobiče s lineární odezvou, který měří tzv. transparenční T , tj. tok zdroje světla mikrodensitometru, které prošlo v tom kterém místě deskou. Z proměření kalibračních klínů se pak určí vztah mezi densitou, což je záporně vzatý logaritmus transparence, a intenzitou a tato funkční závislost se pak použije na převod density hvězdného spektra do intenzit.

S odlišným problémem kalibrace se setkáváme u elektronických spekter. Elektronické detektory jsou v širokém rozsahu osvětlení lineární, ale každý element detektoru má poněkud jinou citlivost na dopadající světlo. To se řeší tak, že se celý detektor osvětlí bílým světlem a spektrum hvězdy se pak element po elementu dělí takto získaným kalibračním spektrem (viz flat field). Změní se tím přirozeně spektrální průběh, ten je ale stejně ovlivněn barevnými vlastnostmi přístroje a zemské atmosféry. Podstatné je, že tímto postupem odstraníme nespojitě změny v citlivosti sousedních prvků detektoru. Od všech spekter se vždy nejprve odečítá vlastní pozadový signál detektoru získaný expozicí na zakrytý detektor, abychom pracovali s čistým signálem (viz dark frame).

Lineární disperze a rozlišovací schopnost spektrografu

Lineární disperze W udává, jaká část elektromagnetického spektra v jednotkách vlnové délky se zobrazí daným disperzním elementem (podle rovnice (*)) na jednotku délky na použitém detektoru. Čím je disperze numericky menší, tím větší detaily v profilu čáry můžeme pozorovat.¹⁶

Rozlišovací schopnost R je definována vztahem

$$R = \frac{\lambda}{n \cdot d\lambda} = \frac{\lambda}{n \cdot W \cdot s}$$

kde λ je uvažovaná vlnová délka spektra v Å, W je lineární disperze v Å mm⁻¹, $d\lambda$ je rozdíl vlnových délek mezi dvěma sousedními detekčními elementy zobrazeného spektra (zrny

¹⁶ Pozor ale, je to tak trochu jako s hvězdnými velikostmi. Zpravidla se o spektrografu s numericky menší disperzí říká, že má větší disperzi.

emulze či pixely elektronického detektoru) v Å, s je vzdálenost středů dvou detekčních elementů v mm a n udává, kolikrát je promítnutá šířka šterbiny v poloviční hloubce ($FWHM$) větší než $d\lambda$. Zpravidla se n pohybuje mezi 2 až 3. Obvyklá hodnota parametru s činí pro fotografické emulze 20 až 25 μm a 10 až 25 μm pro elektronické detektory.

Poměr signál/šum

Jak fotografická, tak elektronická spektra obsahují kromě signálu S odpovídajícího dopadajícímu toku z hvězdy v dané vlnové délce také víceméně náhodný šum N . U fotografických desek je tento šum dán především zrnitostí fotografických emulzí, u elektronických spekter je určen vlastním šumem použitého detektoru. Ten lze sice ochlazením detektoru značně snížit, ale úplně potlačit jej nelze. Pro vědecké zpracování spekter je žádoucí dosáhnout co největšího poměru signál/šum při co nejkratší expozici. Pro dané spektrum lze poměr signál/šum S/N jednoduše odhadnout jako poměr průměrného signálu a jeho střední kvadratické chyby určené pro vhodně zvolený úsek spektra, o kterém víme,

že neobsahuje žádné spektrální čary. Platí tedy $S/N = \sqrt{\frac{\sum S^2 - (\sum S)^2/m}{m-1}}$, kde m je počet bodů rektifikovaného spektra, ve kterých byl uvažován signál S úměrný toku záření z kontinua hvězdy. Podstatně lepší poměr signál/šum mívají elektronická spektra.

Měření radiálních rychlostí

Klasicky pomocí formule $RV = c \cdot (\lambda - \lambda_0)/\lambda$, kde λ je měřená a λ_0 laboratorní vlnová délka uvažované čary (pro červenou oblast odpovídá 1 Å cca 45 km/s). K takto získané radiální rychlosti musíme ovšem ještě přičíst heliocentrickou korekci rychlosti, která představuje opravu o pohyb Země okolo Slunce a o rotaci Země. (Pro velmi přesná měření radiálních rychlostí, např. v případě hledání poruch způsobených oběhem planety kolem studované hvězdy, je třeba zahrnout i korekci o pohyb kolem těžiště soustavy Země-Měsíc.) Při kruhovém oběhu či rotaci platí mezi obvodovou lineární rychlostí V , periodou jedné otočky P a poloměrem kruhové dráhy R zřejmý vztah $V = 2\pi R/P$, který lze pro astronomické účely upravit numericky tak, abychom poloměr udávali v jednotkách poloměru slunečního ($R_\odot = 695835$ km), oběžnou periodu ve dnech a lineární rychlost v $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Dostáváme tak užitečný vztah $V = 50,6025 R/P$. Zanedbáme-li pro orientační odhad malou výstřednost zemské dráhy, pak můžeme za její poloměr dosadit AU dělenou poloměrem Slunce a za periodu tropický rok (365,24219 dne). Zjistíme, že střední oběžná rychlost Země kolem Slunce je 29,786 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, což je tedy maximální možná korekce pro hvězdy, které se nacházejí právě v rovině ekliptiky. Analogicky opravu na otáčení Země zjistíme, použijeme-li rovníkový poloměr Země (6378 km). Ta může činit maximálně 0,464 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Většina redukčních programů již tyto korekce zahrnuje. Je také dobře si uvědomit, že při stejné lineární disperzi daného spektrografu je pro měření radiální rychlosti z hlediska přesnosti podstatně výhodnější použít červenou nebo dokonce infračervenou oblast spektra než oblast ultrafialovou – změně vlnové délky o 1 nm odpovídá v ultrafialovém oboru mnohem větší změna RV než v oblasti infračervené.

Měření spektrofotometrických veličin

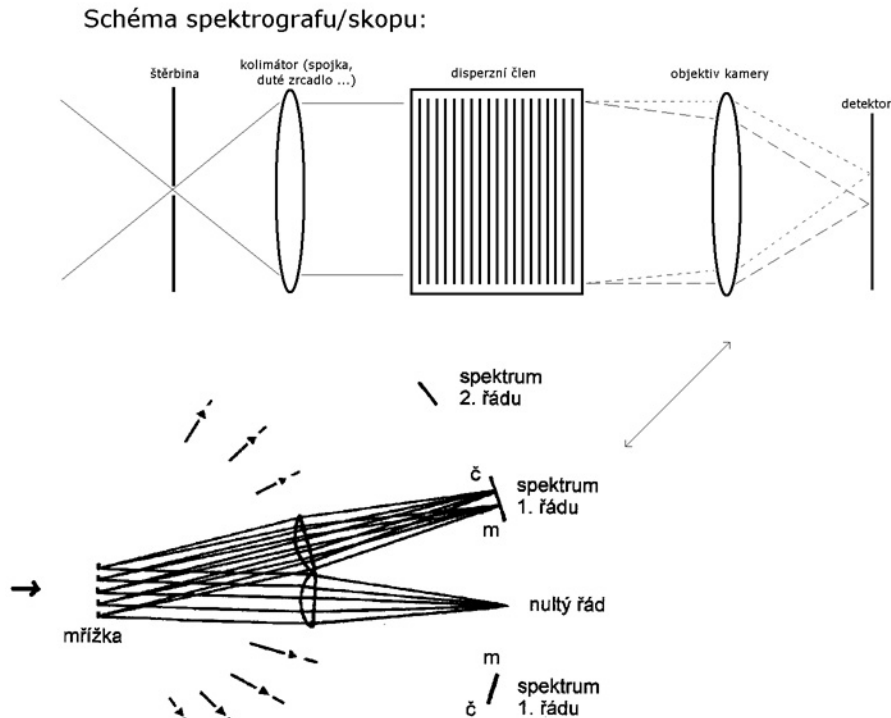
V rektifikovaných spektrech můžeme pro každý profil měřit několik charakteristických veličin. Pro absorpční čary jsou to tyto veličiny:

- *Centrální intenzita* I_c měřená od hladiny nulové intenzity (čím silnější absorpční čára, tím menší číslo, rozsah je od 0 do 1).
- *Ekvivalentní šířka* EW je plocha čary vyjádřená v tzv. ekvivalentních angströmech, jednotkou je plocha obdélníka s výškou od nuly do jedné v rektifikovaném spektru a se šířkou 1 Å na ose vlnových délek. Zde ovšem platí, že čím je čára silnější, tím má větší ekvivalentní šířku.

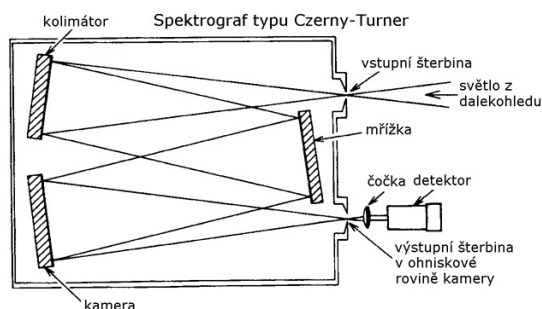
- *Šířka čáry v poloviční hloubce FWHM* (full width at half maximum), která se udává v jednotkách vlnové délky, nm či Å, někdy též v $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ (přepočteno podle vztahu pro radiální rychlost).
- *Promítnutá rotační rychlost v sin i* se obvykle určuje srovnáváním pozorovaného a rotačně rozšířeného teoretického profilu spektrální čáry. Pro konkrétní čáry udávají někteří autoři vztah mezi pološířkou a promítnutou rotační rychlostí, takže k odhadům lze využít i měření FWHM. Na rozdíl od všech předchozích veličin není promítnutá rotační rychlost veličinou přímo měřenou, nýbrž určenou z pozorovaného rozšíření spektrálního profilu na základě určitého modelu a ovlivňují ji i veličiny jako makroturbulence, mikroturbulence a podobně.

§ Spektroskopie – přístroje

Spektroskopie zkonsumuje 70 – 80 % veškerého pozorovacího času. Spektrum získáme rozložením elektromagnetického záření **disperzním členem** (hranol, dnes výhradně mřížka). K disperzi se využívá jevů **difrakce** (ohybu vln)¹⁷ a **interference** (skládání dvou a více vlnění). Typicky **štěrbinový** spektrograf = obraz zdroje vytvořený dalekohledem dopadá na úzkou vstupní štěrbinu, ta vybere z obrazu úzký proužek a prošlý rozbíhavý paprsek se přemění kolimátorem v paprsek rovnoběžný → mřížka/hranol → rozložení na mnoho jednobarevných svazků, tyto jsou pak objektivem soustředěny do ohniskové roviny, tam se vytvoří řada jednobarevných obrazů vstupní štěrbinu, tj. spektrum (viz obr).



¹⁷ ohyb jakéhokoliv vlnění kolem hrany překážky nebo při průchodu malým otvorem, vzniká ohybový obrazec – v případě štěrbinu jasně a tmavé proužky, v případě otvoru ohybový disk obklopený soustřednými kroužky, viz Airyho disk



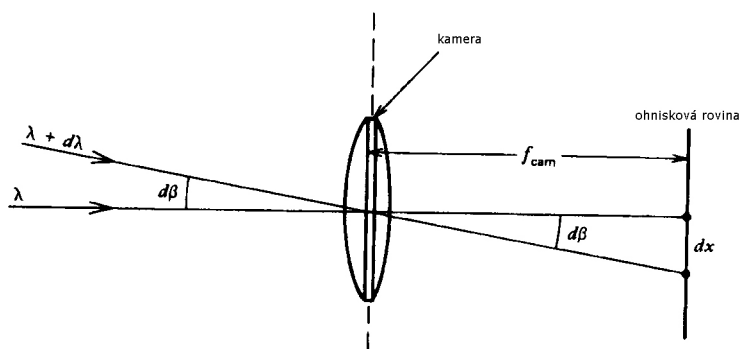
Výkon spektrografu charakterizují tři veličiny:

- 1) **disperze** = udává kolik Å se vejde do 1 mm či kolik mm zabere 1 Å (běžně 0,1 - 100 nm/mm, sluneční ~ 0,5 nm/mm)
- 2) zvětšování disperze je omezeno **světelností** spektrografu, neboť s rostoucí disperzí se zmenšuje intenzita ve spektru
- 3) užitečnou disperzi určuje **spektrální rozlišovací schopnost** (tj. poměr $\Delta\lambda/\lambda$; $\Delta\lambda$ je nejmenší rozdíl vlnových délek, které lze od sebe ještě rozlišit (u dané vlnové délky λ))

Pro spektrograf platí:

$$\frac{\text{Šířka šterbiny}}{\lambda} = \frac{\text{Ohnisko}}{\text{Šířka kolimátoru}}$$

$$\underbrace{\frac{d\lambda}{dx}}_{\text{lineární rozlišení}} = \frac{d\lambda}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{f_{cam}} \cdot \frac{1}{\underbrace{d\beta/d\lambda}_{\text{úhlová disperze daná mřížkou}}}$$



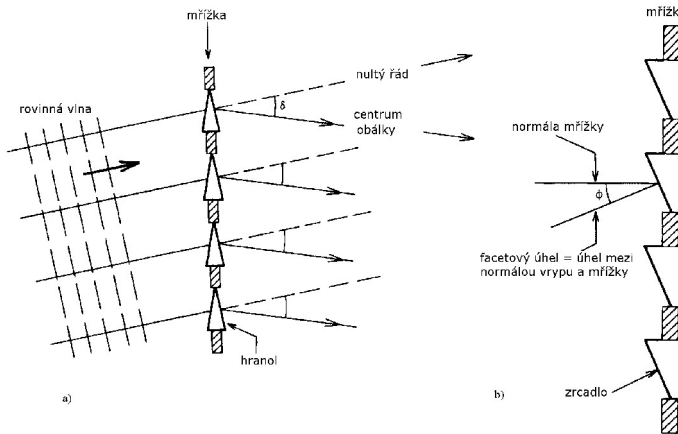
Mřížky: na odraz, na průchod. Charakteristiky: **hustota vrypů** (počet vrypů na mm, typicky 100-1000 [až 10000], mřížková konstanta $d = 1/\text{počet vrypů}$), **úhel vrypů**. **Rovnice mřížky** (světlo dopadá pod úhlem α , pozorujeme pod úhl. β , N je řád spektra, n je počet vrypů):

$$\frac{N\lambda}{d} = \sin \alpha + \sin \beta \quad \rightarrow$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{N}{d \cos \beta} \quad \dots \quad \text{úhlová disperze} \quad \rightarrow \quad D = \frac{d\beta}{d\lambda} f = \frac{Nf}{d \cos \beta} \quad \dots \quad \text{disperze lineární}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N \cdot n$$

Problém jednoduchých mřížek: maximum intenzity v nultém řádu, jenž je bez disperze. Řeší se pomocí **blazeovaných** mřížek – difrakční obálka dopadajícího záření je posunuta relativně vzhledem k interferenčnímu vzorku mřížky do úhlu ve kterém chceme pracovat. Princip viz obr a), v reálu řešeno sklonem vrypů, obr b).

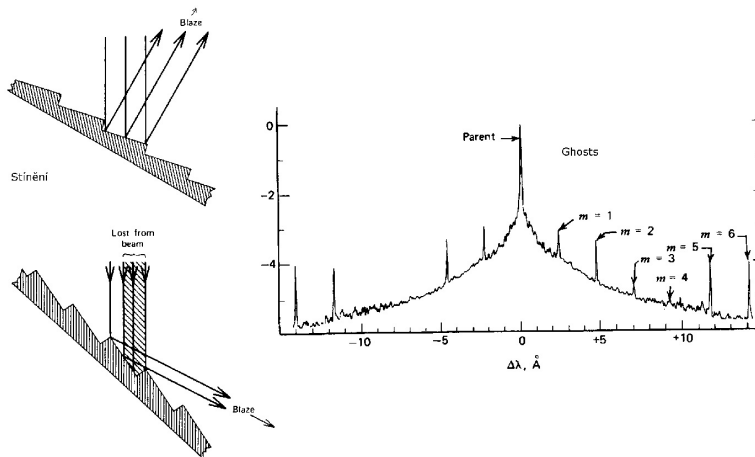


+ chyby mřížek:

stínění = klesá intenzita světla, objevuje se světlo rozptýlené/parazitické

ghosts („duchové“) = chyba při rytí (periodická → vznik periodické modulace, „peaky pro daný řád“, viz obr)

anomálie = chyby při blazeování, projeví se jako skoky ve spektru.



Instrumentální profil = profil nekonečně tenké spektrální čáry, vytvořený štěrbinou a optickým systémem spektrografu (tj. inst. prof. zahrnuje šířku štěrbinu zobrazenou na spektrogramu včetně ohybových jevů, zrna fotografické emulze apod.), závisí tedy na rozlišovací schopnosti přístroje. Při určování skutečných profilů čar na základě pozorovaných profilů ve spektru je nutné vliv inst. prof. odstranit – metoda: Fourierova analýza (známe-li inst. prof., provedeme dekonvoluci (tj. \mathcal{F} obrazu, \mathcal{F} inst. prof., podělíme, opět $\mathcal{F} \dots$)). Význam má u blízkých čar (dublety apod.), pro čáry s šířkou $>$ šířka inst. prof. zanedbáváme.

§ Spektrální klasifikace

= třídění hvězd podle spektra, a to podle rozložení energie ve spektru do vlnových délek a podle přítomnosti spektrálních čar.

Soustavnější pozorování spekter hvězd byla prováděna zhruba od poloviny devatenáctého století, nejprve vizuálně pomocí spektroskopu a později ve spektrografech, se záznamem na fotografickou desku. Byly činěny různé pokusy spektra podle vzhledu klasifikovat, ujala se klasifikace, kterou postupně na základě mnoha tisíců spekter vypracovala na Harvardově observatoři v USA slečna Cannonová. Spektra hvězd se podle svého vzhledu dělí do následujících spektrálních tříd (**Harvardská klasifikace**):

třída O Přítomny čáry ionizovaného helia He II, neutrálního helia He I a neutrálního vodíku H I. Též čáry dvakrát ionizovaného kyslíku, uhlíku a dusíku O III, C III a N III.

třída B Dominují čáry neutrálního helia He I a neutrálního vodíku H I, přítomny jsou též čáry O II, C II, N II, Fe III a Mg II.

třída A Chybí čáry neutrálního helia He I a dominují čáry neutrálního vodíku H I, nápadné jsou jednou ionizované čáry kovů skupiny železa jako Fe II, Ti II, V II či Cr II.

třída F Čáry neutrálního vodíku H I jsou výrazně slabší, i když stále dominují, ve spektru přibývá čar kovů.

třída G Čáry H a K ionizovaného vápníku (Ca II 393,3 a 396,9 nm) jsou ve spektru dominantní, objevují se první molekulární pásy.

třída K Spektrum je bohaté na čáry neutrálních kovů.

třída M Ve spektru převládají molekulární pásy TiO a VO.

(Tohle jsou základní třídy, ze všech hvězd [jasnějších než 8 mag] do nich spadá 99% ...)

třída L Tato třída byla zavedena až poměrně nedávno v souvislosti s hledáním tzv. hnědých trpaslíků. Ve spektrech hvězd třídy L mizí molekulární pásy TiO a VO a objevují se silné čáry neutrálního draslíku K I a také čáry Rb I, Cs I a CrH.

třída T I tato třída byla zavedena až nedávno a vyznačuje se zejména čarami methanu CH₄ a širokými spektrálními pásy vodních par H₂O.

Dále existují třídy **Q, P, W** řazené před třídu O, neboť mají vyšší teplotu (Q jsou novy, P plynné mlhoviny, W Wolfovy-Rayetovy hvězdy). Též třídy **S, R, N** řazené za třídu M. Třídy R a N se označují jako uhlíkové hvězdy (typ C).

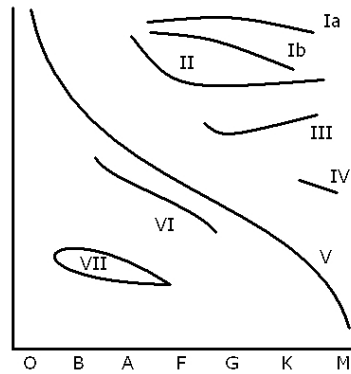
Spektrální třídy jsou (s výjimkou Q a P) dále rozděleny na deset podtříd značených 0, 1, 2 ... 9.

Je nutno si uvědomit, že laboratorní analýza čárových spekter se rozvíjela souběžně se studiem spekter hvězd a zpočátku nebylo vůbec jasné, že ve hvězdách musí existovat stejné chemické prvky jako na Zemi. Výrazné spektrální čáry byly označovány velkými písmeny a teprve postupně byla nacházena jejich identifikace s pozemskými prvky Mendělejevovy tabulky. Proto byl zásadním zjištěním fakt, že hvězdy spektrálních typů O a B se jeví jako modré a namodralé, hvězdy A a F jako bílé, G žluté, K oranžové a M červené. Ve dvacátých letech 20. století bylo již jasné, že existuje úzká vazba mezi spektrálními typy a povrchovými teplotami příslušných hvězd. Současně se ale ukazovalo, že při stejné spektrální třídě se vyskytují rozdíly ve vzhledu některých čar. V okamžiku, kdy bylo dostatek údajů o vzdálenostech jednotlivých hvězd, vyšlo najevo, že tyto rozdíly souvisí s rozdíly v jasnostech hvězd stejného spektrálního typu, tedy s jejich třídou svítivosti neboli s rozdílem jejich poloměrů. To se stalo základem dvourozměrné spektrální klasifikace, která je užívána dodnes, MK-klasifikace.

MK-klasifikace, Morgan-Keenanova klasifikace, též Yerkeská spektrální klasifikace, dvojměrná. Založena na dvou vlastnostech hvězd: spektrální typ a **třída svítivosti**.

Spektrální třída je kvalitativním ukazatelem efektivní teploty hvězdy, třída svítivosti vystihuje hustotu atmosféry hvězdy a tíži na jejím povrchu – hvězdy téže spektrální třídy mají odlišná spektra, především pokud jde o profil spektrálních čar (např. bílí trpaslíci, v jejichž atmosférách je vysoká hustota a tlak mají čáry značně rozšířené v důsledku častých srážek; naopak veleobři téže třídy mají tytéž čáry velmi úzké, neboť mají rozsáhlé atmosféry, velmi řídké a s nízkým tlakem.

- Ia jasní veleobři (Deneb, Rigel)
- Ib normální veleobři (Antares, Betelgeuse)
- II jasní obři
- III obři (Arcturus, Capella)
- IV podobři (Procyon)
- V hvězdy hlavní posloupnosti
- VI podtrpaslíci
- VII bílí trpaslíci (Sirius B)



Za symbol spektrální třídy se někdy připojují malá písmena upozorňující na spektrální anomálie, např. *e* značí přítomnost emisních čar, *s* označuje čáry s ostrým profilem, *m* kovové čáry, *p* označuje zvláštní spektrum a *v* proměnné spektrum.

+ HR diagram viz též část 9.1.

6.4 Metody hledání periodicity v astronomických datech

Změna nějaké proměnné veličiny se nazývá periodickou, jestliže se hodnoty, jichž veličina postupně nabývá, zcela pravidelně opakují podle určitého zákona (funkce). Délce opakovacího intervalu se říká **perioda** změn, P . Často je výhodné pracovat s převrácenou hodnotou periody, **frekvencí**,

$$f = 1/P.$$

Pro jednoduše periodické děje bývá výhodné měření zobrazit ve **fázovém diagramu**, tj. poskládat v čase rozložená data tak, jako by byla všechna získána během časového intervalu odpovídajícího délce jedné periody. Pro měření získané v čase t spočteme **cyklus/fázi** c resp. **normovanou fázi** φ vůči periodě P podle vztahů

$$c = (t - T_0)/P$$

resp.

$$\varphi = \text{frac}(c),$$

kde T_0 označuje počátek fáze.¹⁸ Poslední vztah transformuje každý čas měření do intervalu hodnot od 0 do 1, a to tak, že stejné hodnoty proměnného děje s periodou P budou mít stejnou hodnotu fáze. Pro konkrétní případ proměnných hvězd se fázovému diagramu obvykle říká **světelná křivka**. Pro hvězdy s proměnnou radiální rychlostí hovoříme o **křivce radiálních rychlostí**.

Každé pozorování jasnosti, radiální rychlosti etc. se zaznamenaným časem měření představuje jeden bod časové řady pozorování sledovaného objektu. Je to tedy dvojice čísel $(t;m)$, kde m označuje jasnost změřenou v čase t . Pokud se jasnost mění, zajímá nás, zda jsou tyto změny pravidelné či nepravidelné; tj. jaký je jejich charakter. V případě pravidelných změn je prvním úkolem nalézt periodu, se kterou se změny jasnosti opakují. Vzhledem k povaze astronomických pozorování v optickém oboru to nemusí vždy být snadný úkol. Rotace Země (opakování dne a noci) a nepravidelné změny oblačnosti způsobují, že časové řady astronomických pozorování mají své charakteristické zvláštnosti:

- a) Při pozorování z jednoho místa obsahují „vzorkovací periodu“ jednoho hvězdného dne.
- b) Jsou obvykle velice nepravidelně rozložena v čase.

Prvním krokem analýzy by vždy mělo být grafické zobrazení studované proměnné veličiny v závislosti na čase. Odtud poznáme: zda nedochází k trvalému poklesu či růstu studované veličiny, zda nejvýraznější změny nejsou zcela očividně neperiodické, nepravidelné ... Pokud časová řada, kterou zkoumáme, sestává z měření, pořázaných několika různými pozorovateli/přístroji, je užitečné je v grafu odlišit různými symboly → zda mezi jednotlivými pozorovateli neexistují systematické rozdíly v hodnotách měřené veličiny ...

Z dané řady měření nelze prokázat přítomnost periody, která je delší, než délka celé série pozorování! Že je změna skutečně periodická, zjistíme teprve z dat, která budou pokrývat několik cyklů.

V principu lze zkoumat, zda v daných datech není přítomna perioda kratší než minimální časová vzdálenost dvou pozorování studovaných dat. Když ale takovou periodu nalezneme, může jít o periodu zdánlivou, vzniklou pouze v důsledku fázového skládání! Abychom přítomnost takové periody prokázali,

¹⁸Funkce $\text{frac}(x)$ nabývá hodnoty zlomkové části x pro nezáporná x , a hodnoty $[1 - \text{absolutní hodnota zlomkové části } x]$ pro $x < 0$. Tedy např. pro $x = 3.77$, $\text{frac}(x)=0.77$; pro $x = -3.77$, $\text{frac}(x)=0.23$...

musíme získat nové řady pozorování s daty, jejichž časový rozestup bude alespoň o jeden řád menší než je hledaná perioda. Na potřebnou hustotu měření bude mít vliv i to, zda křivka s domnělou periodou má pouze jedno maximum/minimum nebo zda je složitější → začínáme-li zkoumat proměnnost nějakého objektu, o jehož změnách není dosud nic známo, měli bychom začít pozorování nejprve hustými celonočními řadami měření, abychom si učinili prvotní představu o tom, jaké nejkratší měřitelné změny jasnosti můžeme pro zkoumaný objekt očekávat.

§ Obecné zákonitosti a problémy při hledání period

Všechny metody používané v astronomii k vyhledávání periodicity nějakého jevu, jsou jen obměnami dvou základních principů (pomocí nichž lze periodicitu v datech s nepravidelným časovým rozložením měření hledat):

- a) Metody, které modelují křivku změn pomocí konkrétních tříd matematických funkcí, předpokládají určitý konkrétní tvar křivky a hledají periodu, pro kterou je shoda funkce s daty nejlepší.
- b) Metody, které pro každou zkoušku periodu setřídí data do fázového diagramu a v jednotlivých malých intervalech fází zkoumají rozptyl bodů. Za nejlepší se považuje ta perioda, pro níž je rozptyl ve všech intervalech fází nejmenší.

Výhodou metod, které používají matematické funkce, je, že získáme kromě periody i analytický popis světelné křivky a můžeme vypočítat očekávanou hodnotu jasnosti pro libovolný čas. Metody minimalizace fázového rozptylu jsou ovšem velice výhodné pro data, pro něž tvar fázové křivky předem neznáme. Pokud tedy o proměnnosti sledovaného objektu předem nic nevíme, doporučuji použít nejprve některou z metod minimalizace fázového rozptylu, a teprve po nalezení správné periody změn uvažovat o vhodném analytickém popisu nalezené křivky.

Zde je ovšem důležitá správná volba kroku prohledávání, se kterým měníme zkoušku periodu. Chceme přirozeně zvolit nejprve krok co nejdělsí, aby výpočet netrval zbytečně dlouho. Je ale zřejmé, že pokud bychom zvolili krok příliš velký, mohli bychom přehlédnout správnou periodu. Kdybychom např. zvolili tak dlouhý krok, že by se dvě po sobě jdoucí zkouškové periody lišily od začátku do konce úseku pokrytého daty o celou 1 zkoušmanou periodu, očividně bychom zanedbali možná setřídění pro všechny periody mezi dvěma zkouškovými. Pro zhruba sinusovou světelnou křivku je proto bezpečné zvolit krok prohledávání tak, aby žádné pozorování nezměnilo svou fázi mezi dvěma po sobě jdoucími zkouškovými periodami o více než $0,^P1$. Matematicky: jestliže zkoumaná měření byla získána v časech t_1 až t_n , pak délka intervalu pokrytého daty je $T = t_n - t_1$. K největší fázové změně může dojít pro časově nejvzdálenější body. Zvolme proto čas t_1 za počátek fází. Požadujeme-li, aby maximální fázová změna mezi zkouškovými frekvencemi na celém intervalu nepřesáhla hodnotu $\Delta\varphi$ beze změny hodnoty cyklu, pak pro krok ve frekvenci Δf platí $c = f.T$, $c + \Delta f = (f + \Delta f).T$, a tedy

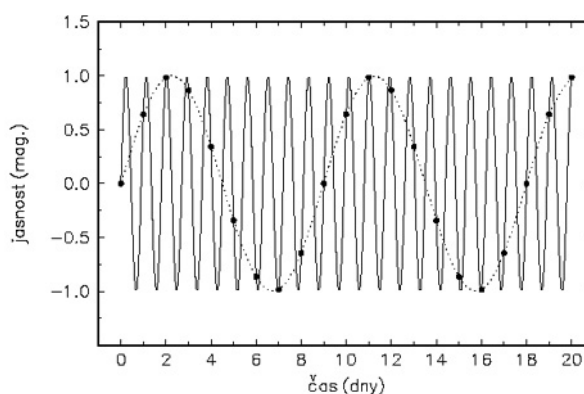
$$\Delta f = \Delta\varphi/T.$$

Ze tohoto vztahu vyplývá, že pro zvolenou fázovou diferenci $\Delta\varphi$ bude krok ve frekvenci lineární. To je jedním z důvodů, proč je vhodné pracovat s frekvencí místo periodou. ¹⁹

¹⁹ Je dobré si uvědomit, jaké nároky na prohledávání podmínka klade. Jestliže na př. pozorování pokrývají interval 100 dní a budeme požadovat $\Delta\varphi = 0,^P1$, musíme zvolit krok $\Delta\varphi = 0.001 \text{ cd}^{-1}$ (cyklů za den), takže např. k prohledání všech možných period od 100 dní dolů k $0,^d1$ budeme muset zvolit $(10-0,01)/0,001 = 9990$ zkouškových frekvencí. Budou-li ale data pokrývat třeba 1000 dní (tedy asi 3 roky),

Pokud provedeme hledání periodicity v určitém rozsahu zkusmých period, velmi často se stane, že námi zvolená metoda nalezne více možných period. Může to znamenat, že změny jasnosti nejsou jednoduše periodické nebo že jsou tvořeny skládáním dvou či více periodických dějů. Než však takový závěr učiníme, musíme se přesvědčit, zda zdánlivá multiperiodicitata není důsledkem konkrétního časového rozložení dat. Rovněž je třeba identifikovat všechny zdánlivé, falešné a přidružené periody.

• **Zdánlivé periody (aliases²⁰)** Každá řada pozorování proměnné hvězdy z konkrétního místa na Zemi bude v důsledku střídání dne a noci ve větší či menší míře „vzorkována“ s frekvencí 1 hvězdného dne. Pozorování slabých hvězd, při nichž se pozorovatel vědomě vyhýbá nocím v době úplňku, budou nutně vzorkována s periodou oběhu Měsíce kolem Země ...



Na obr je znázorněna periodická sinusová změna jasnosti s periodou např. 0.9 dne, kterou pozorujeme vždy jedenkrát denně. Vyneseme-li tato pozorování do grafu v závislosti na čase, usoudíme, že skutečná perioda změny je 9 dní ... Označíme-li časový krok, se kterým získáváme pozorování k (v našem příkladu $k = 1$), pak mezi frekvencemi obou period zřejmě existuje vztah $f(9.0) = f(0.9) - k$, tj. $1/9.0 = 1/0.9 - 1$.

Obecněji: f_r a f_d jsou frekvence 1 tropického roku a 1 hvězdného dne. Protože čas měření udáváme obvykle v jednotkách středního slunečního dne a tropický rok trvá 365,24219 středních slunečních dní - tj. 366,24219 dní hvězdných - je frekvence 1 roku $f_r = 1/365,24219 \text{ d} = 0,002737909 \text{ cd}^{-1}$. Délka 1 hvězdného dne v jednotkách středního času je 366,24219/365,24219, tj. frekvence 1 hvězdného dne je

$$f_d = 1 + f_r = 1,002737909 \text{ cd}^{-1}.$$

Jestliže se jasnost proměnné, kterou sledujeme, mění periodicky s frekvencí f , pak pro frekvence odpovídajících jednodenních aliasů platí

$$f_1 = f_d - f \text{ a } f_2 = f_d + f.$$

budeme již potřebovat 99900 zkusmých frekvencí. Pro časově rozsáhlá data je proto velice užitečné uvážit, zda v důsledku polohy měřeného objektu na nebi neexistují v datech větší sezónní časové mezery. Jestliže ano, je přirozeně výhodné provést prvotní hledání v datech z každé sezony zvlášť, což nám umožní použití mnohem delšího kroku ve fázi. Je-li studovaná změna periodická, měli bychom stejnou periodu nalézt ve všech sezonách. Její hodnotu pak pouze zpřesníme jemným prohledáním úplného souboru dat v malém okolí přibližné periody nalezené v jednotlivých sezonách.

²⁰ doslova „překryvy“

Např. skutečná perioda změn je $P = 2.^d0$, pak dle předcházejících vztahů mají jednodenní aliasy periody $0.^d665452$ a $1.^d989108$ ($1/(1,002737909 \pm (1/2))$). Pro $P = 5.^d0$ to bude $0.^d831436$ a $1.^d245737$ a pro $P = 100.^d0$ dostáváme aliasy $1.^d00732$ a $0.^d98742$. Tj. s rostoucí periodou se jednodenní aliasy zdola a shora blíží periodě 1 hvězdného dne.

Pro frekvence ročních aliasů obdobně platí $f_3 = f - f_r$ a $f_4 = f + f_r$. Označíme-li $T_r = 1/f_r$ délku tropického roku, lze předcházející vztahy přepsat na

$$T_r/P3 = T_r/P - 1 \quad \text{a} \quad T_r/P4 = T_r/P + 1.$$

Vezmeme-li v úvahu definici cyklu, vidíme, že názorný smysl ročních aliasů je, že se jedná o periody, které se od skutečné liší o délku ± 1 cyklu za dobu 1 roku.

• **Falešné periody** Aliasů jsou důsledkem přítomnosti určité periodicity v časovém rozložení jednotlivých pozorování. Naproti tomu falešné periody vznikají obvykle v důsledku určité periodicity v systematických chybách našich měření. Záludné je, že se v obou případech může jednat o podobné periody. Nejlépe si můžeme vznik falešné periodicity vysvětlit opět na příkladech. Budeme-li např. pořizovat dlouhé noční řady měření jasnosti nějaké hvězdy a nebudeme-li naměřené hodnoty opravovat o vliv extinkce nebo budou-li naše korekce chybné, pak se určená jasnost i neproměnné hvězdy bude zdánlivě měnit s periodou 1 hvězdného dne ...

• **Násobné periody** (vyšší harmonické) Většina metod hledání periodicity bude v našich datech indikovat i periody dvakrát a třikrát delší, než je skutečná perioda změn. To je logické, a v některých případech je bez dodatečné informace (např. z jiného druhu pozorování) nemožné rozhodnout, zda skutečná fyzikální perioda změn odpovídá jednoduché (zhruba sinusové) křivce nebo křivce se dvěma minimy a maximy a dvakrát delší periodou. Metody minimalizace fázového rozptylu indikují složitější křivky přirozeně lépe, než metody založené na modelu jednoduše periodické změny.

⇒ pokud v datech nalezneme periody blízké 1 dni nebo 1 roku, měli bychom je zpočátku přijímat s velkou rezervou. (Test na falešné periody je zřejmý – měly by se tou či onou měrou vyskytovat i v měřeních kontrolních neproměnných hvězd podobných vlastností a polohy na obloze jako zkoumaný objekt. Proti aliasům pomohou pouze pozorování s vhodným časovým rozložením. Ideálním způsobem, jak se bránit jednodenním aliasům, je pozorovat hvězdu po určitou dobu z několika míst na Zemi, která jsou vzdálená v místním čase.) Pečlivé zkoumání jednodenních aliasů není samoúčelné – typické rotační periody hvězd spektrálních typů O a B jsou blízké právě k 1 dni a rovněž dvojhvězdy s jednodenní oběžnou periodou nejsou žádnou vzácností ...

6.5 Kosmické záření, neutrino a gravitační vlny

- **Neutrino:** předpověď W.Pauli, 1930; střední volná dráha ~ 1 pc; účinný průřez $\sim 10^{-46}$ m²; uvolňována v termonukleárních reakcích na Slunci (cca $10^{38} \nu_e/s$)²¹ ...

Základní otázka: *Jsou hmotná, oscilují?* ($\nu_e \rightarrow \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$?)

- **Davisův Cl detektor**, 1968, 600 t C₂Cl₄, reakce $\nu_e + {}^{37}_{17}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}_{18}\text{Ar} + e^-$, Ar má poločas rozpadu 35 dní, citlivost 0,814 MeV, malý σ ... Dle teorie by měl být tok $7,9 \pm 0,5$ SNU (sluneční neutr. jednotka, 1 SNU = 10^{-36} s⁻¹/vzniklý Ar). Změřeno $2,2 \pm 0,4$ SNU (tj. 1 at. Ar/2 dny) = asi 1/3 \rightarrow oscilace?

- **Galiové detektory**, **SAGE**, 65 tun kovového Ga, reakce $\nu_e + {}^{71}_{31}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}_{32}\text{Ge} + e^-$, Ge má poločas rozpadu 11,4 dní. deficit neutrin potvrzen. **GALEEX**

- **H₂O detektory**, **Kamiokande**, **SNO**. Tyto detektory měří v reálném čase energie elektronů vyprodukovaných po interakci s neutrinem ve vodě ($\nu_e + {}^1_1\text{H} \rightarrow \text{p} + \text{p} + e^-$ resp. $\nu_e + \text{p} \rightarrow \text{n} + e^+$, elektrony produkují Čerenkovovo záření, kužel o urč. velikosti a směru, získáváme další info i o směru).

+ SNO, Ontario, Kanada, v jednom z nejhlubších dolů detektor obsahující 1000 tun těžké vody. Podzim 2001, první výsledky tohoto experimentu potvrdily oscilační řešení problému deficitu slunečních neutrin. Alespoň pro neutrino s vyšší energií (vznikající při poslední reakci pp-cyklu) jsou detekované toky ve shodě se současnými modely Slunce. SNO je díky přítomnosti těžké vody citlivý na všechny tři druhy neutrin (Cl detektory jsou citlivé jen na neutrino elektronová, využitím vody a čerenkovských detektorů získáme částečnou citlivost i na mionová neutrino).

Jak neutrino oscilují? Zdá se, že pozorov. neutrino (ν_e, ν_μ, ν_τ) nejsou „čistými“ stavy, ale směsí tří základních/vlastních stavů (ν_1, ν_2, ν_3). Tyto základní stavy při šíření v prostoru interferují (jako u každého vlnění). Občas se nějaké dvě frekvence odečtou tak, že na okamžitý charakter významně převáží vliv frekvence třetí. Za chvíli pak začne dominovat jiný základní stav – podle toho detekujeme buď e^- nebo μ^- či τ^- neutrino.

Pokusy o určení hmotnosti: ta dle souč. experimentů musí být menší než několik eV. Princip: β rozpad, měříme velmi přesně energii jádra před rozpadem, po rozpadu a energii odlétajícího elektronu. Platí ZZE a ZZH, lze vypočítat hmotnost odlétající částice.

- současné experimenty detekující **Kosmické záření**: od roku 2003 na kanárských ostrovech největší dalekohled na světě (934 segmentů, ploše 239 m² odpovídá průměru 17 m) – pro pozorování Čerenkovova záření. Snaha nepřímo detekovat gama fotony s energií vyšší než 30 GeV. (Fotony interagují s molekulami zemské atmosféry a vyvolávají vznik spršek sekundárních částic, ty pak při svém pohybu vysílají specifické záření (na hranic viditelného a UV záření) pod určitým úhlem). Tyto energetické fotony na rozdíl od většiny kosm. záření nejsou nabitě, šíří se tedy přímočaře. Pokud se podaří zrekonstruovat směr příchodu k Zemi, lze určit směr zdroje v kosmu ...

Kosmickým zářením nejvyšších energií se bude zabývat **Pierre Auger Observatory**, Argentina. Dokončení 2006. 1600 pozemských detektorových stanic pokryje plochu 3000 km². Tyto budou doplněny o 24 teleskopů o průměru 3,6 metru. Budou sledovat spršky sekundárních částí v atmosféře. Pozemní detektory zaznamenávají počty zachycených částic, dalekohledy budou pozorovat doprovodnou fluorescenci v atmosféře. Řešení

²¹ Velký tok neutrin uvolňován v nitrech kolabujících hvězd – supernovy, viz 1987, experiment IBM, zachycena sprška neutrin ze SN 1987A; vyzářená neutrino uvolňují z hroutícího se nitra zanikající hvězdy teplo, takže hvězda se hroutí pod vlastní vahou v krátkém okamžiku – bez neutrin by takovýto gravitační kolaps nebyl možný ...

záhady nejenergetičtějších částic (energie až 10^{18} eV, těch z kosmu přichází mnohem více než udávají teoretické předpovědi)?

• **Gravitační vlny:** periodické změny gravitačního potenciálu (vlnění zakřivení prostoru, kmitá sám prostor a čas). Předpovězeno OTR. Každá hvězda zakřivuje prostoročas ve svém okolí, změní-li náhle hvězda svůj tvar (výbuch supernovy), změní se též okolní geometrie a vzniklý rozruch se bude předávat dále – směrem od hvězdy se začnou šířit konečnou rychlostí (c) gravitační vlny. V jejich amplitudě a frekvenci je zakódovaná informace o zániku hvězdy . . . Vznikají nejen při výbuších supernov ale všude tam, kde se nerovnoměrně mění tvar a tím i rozložení hmoty, např. dvojhvězdy . . .²²

Gravitační vlny slabé, např. supernova v naší Galaxii bude mít předpokládanou amplitudu 10^{-18} a frekvenci $\nu \sim 10^3$ Hz. V podstatě nejsilnější zdroj, který bychom mohli zaznamenat, ale malá četnost, proto stavěné detektory musí mít alespoň 10^3 krát větší citlivost (pak by mělo jít zachycovat např. grav. vlny generované v kupě galaxií v Panně (40 mil.ly), kde v průměru vybuchne několik supernov za rok) . . .

První detektor, **J. Weber**, 1969, hliníkový válec zavěšený ve vakuové komoře a izolovaný od okolních otřesů, deformace válce zaznamenávány piezoelektrickými snímači. Průchod vlny by válec rozkmital, při vhodných frekvencích by rezonance způsobila zesílení vibrací. K vyloučení falešných pozemských signálů dva detektory 1000 km od sebe. Citlivost 10^{-16} . Nezaznamenal jednoznačný úspěch.

Nepřímé potvrzení grav. vln, 70.léta. Objeven pulsar PSR 1913+16, binární systém se dvěma obíhajícími (8 hod.) neutronovými hvězdami. V takovém systému výrazné relativistické efekty (stáčení osy kvazieliptické dráhy o 4° za rok . . .). Ukázalo se, že oběžná doba se výrazně zkracuje – potvrzení OTR, obě hvězdy se k sobě spirálovitě přibližují, ztracená vazbová energie systému je odnášena vyzařovanými gravitačními vlnami.

Dnes **detektory interferometrické**, na principu Michelsonova interferometru. Např. **LIGO**, USA, ramena cca 4 km, citlivost 10^{-21} . **VIRGO**, Itálie, dvě na sebe kolmá 3 km ramena, detekce frekvencí od 10 do 6000 Hz. **LISA**, *Laser Interferometry Space Antenna*. Obrovské rozměry a nepřítomnost siesmického rušení → na rozdíl od pozemských detektorů výrazné zlepšení poměru signál/šum + možno detekovat i vlny o nízké frekvenci (pod 1 Hz, detekci takových vln na zemi znemožňuje seismická aktivita). Tři satelity na heliocentrických drahách, ve formaci rovnostranného trojúhelníku, laserový interferometrický kontakt. Signál bude obíhat mezi družicemi dokola (ramena délky 5 mil. km), z interferometrických měření se bude určovat změna konfigurace systému. 2012?

²² Gravitačně vyzářený výkon dvojhvězdy, $L_G \sim \frac{M_1^2 M_2^2 (1+e^3)}{P^{10/3}}$, pro trpasličí novu, kde $M_1 = M_2 \approx 1,5 \times 10^{30}$ kg, $P = 10^4$ s dostaneme 2×10^{24} W, ve vzdál. 250 pc máme tok 3×10^{-15} W/m² . . .

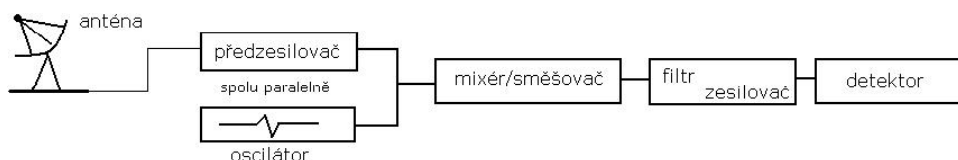
6.6 Rádio a další obory, jejich přístroje, družice

- **Rádio:** cca 100 m - 0,01 m, objev ve vesmíru = 1932, K.G.Jansky ...
 - *tepelné záření*, Planckův z., pro nízké frekvence platí aproximace **Rayley-Jeans** ($e^x \sim 1 + x$):

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

Měření v radioastronomii je $\sim T$ (k, c jsou konstanty; ν přepočteno na λ je pro danou anténu též konstantní) \rightarrow měříme **jasovou/zářivou teplotu** (z rádiového zdroje dopadá na 1 m² povrchu Země tok záření $S = 2kT\lambda^{-2}\Theta^2$ [W/m²Hz], Θ je úhlový průměr zdroje, T je jasová teplota zdroje).

– *netepelné záření* (např. synchrotronové - záření vyvolané relativistickými elektrony kroužícími v magnetickém poli), spektrální rozdělení intenzity je obecně odlišné od Planckova rozdělení, můžeme tak rozeznat zdroje netepelného a tepelného záření, netepelné $B_\nu \sim \nu^{-\alpha}$, kde α je tzv. spektrální index (0,2 - 1,2).



Pasivní radioastronomie: pouze vlny z vesmíru přijímá (pulsary ...)

Aktivní radioastronomie: pomocí radaru vysílá rádiové vlny a po odrazu je přijímá a studuje, výzkum Sluneční soustavy – planety a malá tělesa Sluneční soustavy

Radiolokační rovnice: *Jaký je maximální dosah přístroje?* Nejmenší zachytitelný signál (citlivost přijímače) je P_0 [W], výkon vysílače je P_v [W], zesílení antény $G_v = 4\pi A_p/\lambda^2$, kde plocha přijímací antény je A_p [m²]. Účinná plocha (přivrácený průmět) studovaného tělesa je σ [m²]. Tok vyslaný radarem a dopadající na studované těleso je

$$\Phi_1 = \frac{G_v P_v}{4\pi r^2}.$$

Tok přicházející zpět je tedy

$$\Phi_2 = \frac{\sigma G_v P_v}{(4\pi r^2)^2}.$$

Přijatý výkon ozvěny P_0 tedy je

$$P_0 = \frac{\sigma G_v P_v A_p}{16\pi^2 r^4} = \frac{\sigma P_v A_p^2}{4\pi r^4 \lambda^2}.$$

Dostáváme tak

$$r_{max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma P_v A_p^2}{4\pi \lambda^2 P_0}}.$$

Dosah radaru se zvýší pokud zvýšíme výkon a plochu vysílače, zmenšíme vlnovou délku. Např. Arecibo má dosah asi 85 mil. km.

Radioteleskopy: **Arecibo**, Portoriko, průměr 304 m, nejvýkonější radioteleskop světa; **GBT** (Green Bank Telescope), největší pohyblivý radioteleskop na světě o 100 × 110 m; **VLA** (Very Large Array), 27 antén s průměrem 25 m na kolejnicích tvaru písmene Y,

ramena tak mohou mít až 21 km. Souží jako radiointerferometr (rozlišovací schopnost interferometru je srovnatelná s parabolickou anténou, jejíž průměr se rovná základně interferometru.). Standardní pracovní režimy 1,3 cm - 21 cm (neutrální vodík). **VLBA** (Very Long Baseline Array), deset radioteleskopů s průměrem 25 m, rozmístěných mezi Havajskými ostrovy a Portorikem, základna je tak přes 8000 km. **VLBI** (Very Large Baseline Interferometry), systém radiových interferometrů se základnami stovek až tisíců kilometrů, řada radioteleskopů rozmístěných po celém světě. **VSOP** (VLBI Space Observatory Program) rozšíření sítě VLBI pomocí satelitu HALCA = radioteleskop o průměru 8 m. Umožnila vytvořit interferometr se základnou přes 20 000 km.

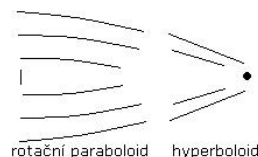
- **IR**, 1 μm - 1 mm; objev: W.Herschel, 1800; zdroje = místa chladnější než hvězdy (vznik nových hvězd, oblaka plynu) ... Přístroje: obdoba zrcadlového (refraktor nelze užít, sklo nepropouští ...) dalekohledu, ale odrazné plochy nemusí mít takovou přesnost + čidla PbS, Ge+Ga ... (polovodiče, dopadající foton vybudí elektrony ze základní hladiny do vodivostního pásu, vznikne tak napětí na diodě nebo se mění elektrická vodivost materiálu ...). Družice **IRAS** (Infra Red Astronomical Satellite), 60 cm dalekohled, detekováno 95% oblohy, přes 250 000 zdrojů; **COBE**; **SIRTF** (Space InfraRed Telescope Facility, Spitzer), 2003, pracovní oblast je 3 až 1800 μm . Umístěn v bodě L2. Průměr 0,85 m. Dále např. **SOFIA**, letecká observatoř vzniklá přestavbou Boeingu B-747, teleskop o 2,7 m, pro IR spektroskopii na 5-300 μm . **WMAP** (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), v 2003 proměřila drobné teplotní odchylky v kosmickém pozadí záření → nové přesnější hodnoty základních kosmologických parametrů našeho vesmíru (dominuje skrytá látka a temná energie, stáří cca asi 13,7 mld. let) ...

- **UV, RTG, γ** , vysokoenergetické fotony vznikající při vysokoenergetických explozivních procesech (Slunce, pulsary, supernovy, galaxie, kvasary, ...).

extremeUV	10 - 100 nm	12 - 120 eV
soft RTG	1 - 10 nm	120 - 1200 eV
RTG	0,01 - 1 nm	1,2 - 120 keV
měkké γ	0,001 - 0,01 nm	120 - 1200 keV
γ	< 0,001 nm	> 1,2 MeV

Detektory – GM čítače (prostor mezi elektrodami vyplněn parami Ar + alkohol, vlétne-li částí → vodivá stopa), scintilační detektory (např. NaI, fotonem vzbuzen záblesk, zachycen fotonásobičem ...), Čerenkovovy detektory ...

RTG optika – Walter, kombinace 2 křivých ploch, kde na obou nastává totální odraz.



Tyto obory pohlcovány atmosférou → balóny, výšková letadla, družice. **Compton GRO** (Gamma Ray Observatory) 1991-2000, objevila přes 400 zdrojů, podařilo se registrovat přes 2500 záblesků. **Chandra**, pro RTG, průměr teleskopu 1.2 m, délka 10 m, rozlišení 0.5", tvořen čtyřmi soubory sousedících parabolicko-hyperbolických zrcadel ... **Integral** (International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory), ESA, první družice zkoumající simultánně v oboru γ , RTG i optickém.

6.7 Vesmírné zdálenosti

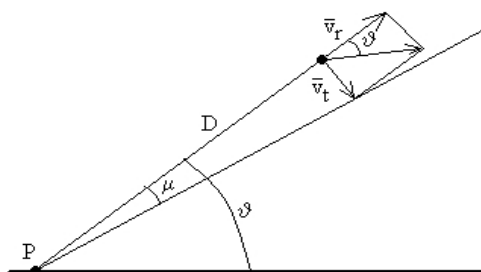
Nejbližší vzdálenosti ve Sluneční soustavě určovány pomocí **laserových** a **radarových měření**. Vzdálenost Země-Měsíc je pomocí laseru měřena s přesností několika milimetrů. Radarová měření vzdálenosti Merkuru, Venuše a Marsu byla použita k určení vzdáleností těchto planet od Slunce (pomocí 3.KZ). Tak byla stanovena velmi přesně AU, později byla ověřena radarovým měřením vzdálenosti Země-Slunce. Vzdálenost blízkých hvězd (do několika set ly) je možno určit pomocí **roční paralaxy**, viz str. 114. Jde o trigonometrickou paralaxu, základnu tvoří vzdálenost Země-Slunce. Velmi přesné měření provedla astrometrická družice Hipparcos (ESA, 1989 - 1993). Pro vzdálenosti kolem 1000 ly, už chyby měření Hipparca srovnatelné s měřenou paralaxou → musíme použít nepřímé metody (**b**) (užívají jiné měřené vlastnosti hvězd – magnituda, svítivost, perioda cefeid, spektrum – a vztahů mezi nimi – modul vzdálenosti, perioda-svítivost pro cefeidy ...) nebo můžeme pro některé vesmírné objekty využít měření radiálních rychlostí a vlastních pohybů (**a**).

a) Hvězdy **pohybových hvězdokup** se pohybují přibližně rovnoběžně, při pohledu ze Země se nám zdá, že se sbíhají do určitého bodu, *vertexu*. Směr k vertexu určíme jako průsečík prodloužení vlastních pohybů, známe ϑ . Tedy

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\bar{v}_t}{\bar{v}_r} = \frac{4,74 D \mu}{\bar{v}_r},$$

$$D[\text{pc}] = \frac{\bar{v}_r \operatorname{tg} \vartheta}{4,74 \mu}.$$

Do cca 10^2 pc (1980).



Nevykazují-li naopak hvězdokupy žádný systematický pohyb na obloze a předpokládáme-li, že se hvězdy pohybují nahodile (jako např. molekuly plynu), platí pro průměrné hodnoty pozorovaných složek rychlostí jednotlivých hvězd $2\bar{v}_r^2 = \bar{v}_t^2 = D^2 \bar{\mu}^2$, tj.

$$D = \left(\frac{2\bar{v}_r^2}{\bar{\mu}^2} \right)^{1/2}.$$

Jde o tzv. metodu **statistické paralaxy**, použitelné až do několika set pc.

Resp. viz pohyb hvězd v Galaxii: složka rychlosti hvězdy, která směřuje k antapexu a je způsobena pohybem Slunce, je největší, je-li hvězda vzdálena od apexu 90° . Avšak zdánlivý vlastní pohyb hvězdy vyvolaný pohybem Slunce bude tím menší, čím bude hvězda dále. Jelikož délka relativní dráhy Slunce vzhledem k okolním hvězdám za jeden rok je cca $6,8 \cdot 10^8$ km, tj. asi 4 AU, je možno odhadnout z posuvu hvězdy k antapexu její paralaxu. Takto získané paralaxy jsou **paralaxy sekulární**. Viz též str. 114.

Metoda výpočtu plyne z definice tangenciální rychlosti. Nechť úhlová vzdálenost hvězdy od apexu je λ , tj. jde o úhel, který svírá vektor okamžité rychlosti Slunce se spojnicí Slunce - hvězda, a pro

zjednodušení nechť se hvězda pohybuje rovnoběžně se Sluncem rychlostí v_h , tj. vektory rychlostí Slunce i hvězdy jsou v jedné rovině a jsou rovnoběžné. Pak tangenciální rychlost pozorovaná ze Slunce/Země je

$$v_{obs} = v_h - v_{\odot} \sin \lambda,$$

kde v_{\odot} je rychlost Slunce vzhledem k okolním hvězdám. Jelikož $v_{obs} = 4,74\mu/\pi$, pak

$$v_h = 4,74\frac{\mu}{\pi} + v_{\odot} \sin \lambda.$$

Možno říci, že statisticky jsou v průměru hvězdy nehybné vzhledem k nejbližšímu okolí, tj. součet vektorů okamžitých rychlostí hvězd je nulový v souřadném systému, jehož počátek se pohybuje po kruhové dráze kolem středu Slunce. To znamená, že pro skupinu hvězd v jistém směru a v jisté vzdálenosti (nikoli však příliš velké) platí přibližně, že $v_h = 0$, a tedy $v_{obs} = -v_{\odot} \sin \lambda$, kde ovšem v_h i v_{\odot} jsou vztaženy na místní „klidový systém“, LSR. Platí pak též, že

$$\bar{\mu}_0 = -\frac{v_{\odot} \sin \lambda}{4,74} \bar{\pi},$$

kde $\bar{\mu}_0$ je vlastní pohyb nehybné hvězdy a $\bar{\pi}$ je její paralaxa, a tedy

$$\bar{\pi} = -\frac{4,74}{v_{\odot} \sin \lambda} \bar{\mu}_0.$$

(Resp. tedy $\bar{\pi}$ je průměrná paralaxa skupiny hvězd a $\bar{\mu}_0$ jejich průměrný vlastní pohyb rovnoběžný s vektorem okamžité rychlosti Slunce a celá skupina tak reprezentuje nehybnou hvězdu. Princip je zřejmý, vlastní postup výpočtu paralaxy je poněkud složitější.) Podle metody výběru a rozložení hvězd, popř. s přihráním radiálních rychlostí rozlišujeme paralaxy:

- a) střední = určena výše uvedenou metodou,
- b) sekulární = výběr hvězd se omezuje na $\lambda = \pm 90^\circ$,
- c) statistické = bere v úvahu i radiální rychlost.

U dvojhvězd je možno získat tzv. **dynamickou paralaxu**. Jde o paralaxu určenou pomocí 3.KZ: $a^3 = (M_1 + M_2)P^2$, kde a je velká poloosa [AU], M_1 a M_2 jsou hmotnosti složek v hmotnostech Slunce, P je oběžná doba v rocích. Základem je odpozorovaná zdánlivá dráha složek dvojhvězdy na obloze a vztah hmotnost-svítivost. Změříme-li periodu a určíme-li hmotnosti obou složek (vztah hmotnost-svítivost, často lze též bez problémů položit $M_1 + M_2 = 2M_{\odot}$), lze z 3.KZ vypočítat vzájemnou vzdálenost obou složek. Porovnáním této vzdálenosti s měřenou úhlovou vzdáleností obou složek lze určit vzdálenost dvojhvězdy od nás. Paralaxu π tedy obdržíme, vyjádříme-li velkou poloosu v obloukových vteřinách, $\pi'' = a/\sqrt[3]{(M_1 + M_2)P^2}$.

b) Většina těchto metod nepřímou určuje absolutní hvězdnou velikost. Vzdálenost pak lze stanovit pomocí **modulu vzdálenosti** (rozdíl mezi zdánlivou a absolutní hvězdnou velikostí), viz str. 151.

Absolutní hvězdnou velikost lze pro hvězdy hlavní posloupnosti odhadnout např. pomocí spektra a HR diagramu (dosah cca 10^4 pc (1980, dáno přibližně minim. magnitudou, kterou jsou schopné dalekohledy zaznamenat), metoda tzv. **spektrální paralaxy**). Nejpřesněji lze touto metodou určit vzdálenosti hvězdokup, jejichž hvězdy se nacházejí prakticky ve stejné vzdálenosti, a je tedy možné najít polohu hlavní posloupnosti sestavením barevného diagramu (analogue HR diagramu, na vodorovné ose je barevný index, na svislé zdánlivá hvězdná velikost \rightarrow dostáváme tak vlastně HR diagram posunutý ve svislém směru o modul vzdálenosti, který tak lze získat, viz též str 259).

Cefeidy - nejsou příliš početně zastoupeny (v Galaxii jich je známo asi 700), mají ale důležitou roli při studiu struktury Galaxie – mezi periodou jejich proměnnosti a průměrnou svítivostí existuje lineární vztah, který dovoluje určit z pozorované periody její absolutní hvězdnou velikost a pomocí modulu vzdálenosti i její vzdálenost. Vztah je

poměrně dobře nanormován z našeho okolí jinými metodami, $M_V = a + b \log P + c(B - V)$. Zářivý výkon cefeid je velký, lze tak určovat vzdálenosti až do 10^6 pc, tj. pro objekty ležící v místní skupině galaxií. Nejnovější tvar kalibrace:

$$M_V = -(2,769 \pm 0,073) \log - (1,440 \pm 0,075).$$

Viz též str. 267. Analogicky lze použít (zejména u kulových hvězdokup) proměnné typu **RR Lyrae** – stejné absolutní velikosti bez ohledu na periodu. Vyskytují se zejména v kulové složce galaxie (téměř všechny proměnné hvězdy vyskytující se v kulových hvězdokupách jsou RR Lyrae).

Novy - z pozorování nov, které vzplanuly v naší galaxii plyne, že jejich absolutní magnituda souvisí jednoznačně s dobou, za kterou jasnost novy klesne o 3 magnitudy (vztah MMRD = Maximum Magnitud versus Rate of Decline, absolutní hvězdná velikost nov se určí z křivky světelných změn a rychlosti poklesu jasnosti novy). Výsledky této metody souhlasí dobře (10%) s metodou cefeid. Novy jsou ale jasnější, tj. použitelnější pro větší vzdálenosti (10^7 pc). Srovnatelných výsledků lze dosáhnout použitím kulových hvězdokup jako standardních svíček – zdrojů o zhruba stejném zářivém výkonu (**paralaxa hvězdokup**, využívá se předpokladu, že svítivost nejjasnější hvězdy v kulových hvězdokupách je zhruba stejná).

Supernovy typu I - vznikají v důsledku akrece nadkritického množství hmoty na bílého trpaslíka, viz str. 270.

Nejjasnější galaxie v kupách - pro ještě větší vzdálenosti nerozlišíme jednotlivé hvězdy, jako indikátory uijeme magnitudy celých galaxií. Ukazuje se, že rozložení zdánlivých magnitud galaxií v kupách galaxií je shora dosti ostře ohraničené. Předpokládáme-li, že nejjasnější galaxie v kupách mají zhruba stejnou absolutní magnitudu (absolutní mag nejjasnější galaxie v kupě galaxií v Panně, jejichž vzdálenost známe, je rovna -21,7), můžeme pomocí nich určovat vzdálenost až do 10^9 pc.

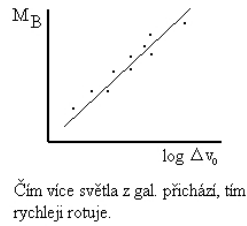
Paralaxa ze zbarvení, čím je hvězda vzdálenější, tím je červenější v důsledku zeslabení (extinkce) modrého světla v mezihvězdné hmotě.²³, viz též str. 151

Kinematická paralaxa = na základě známe diferenciální rotace galaxie je možno z radiální rychlosti zdroje (např. oblastí HI) odvodit jeho vzdálenost, viz str. 325.

Tullyho-Fisherův vztah, 1977, poměrně přesný způsob určování vzdálenosti spirálních galaxií. Založeno na vztahu mezi absolutní hvězdnou velikostí M spirálních galaxií a rychlostí jejich rotace. Rychlost rotace se změří pomocí profilu (rozšířeného rotací, rozšíření $\Delta\nu_0 \leftrightarrow \Delta v_0$) H čáry 21 cm a T.-F. vztahem se převede na absolutní hvězdnou velikost \rightarrow známe tak modul vzdálenosti, můžeme určit vzdálenost. Jde o empirický vztah, který musí být kalibrován na blízkých galaxiích, jejichž vzdálenosti jsou určeny jinak [Cepheidy]. Princip není přesně znám. Použitelný až do 300 mil. ly. Analogický vztah existuje pro eliptické galaxie, Faberův-Jacksonův.

Suňajevův-Zeldovičův jev: nepatrné oslabení (změna vlnové délky) fotonů reliktního záření při průchodu kupou galaxií. Použitelný k měření vzdálenosti nejvzdálenějších galaxií. Prostor mezi galaxiemi kupy není prázdný (vyplněn plazmatem) – fotony reliktního záření se na volných elektronech roztylují \rightarrow reliktní záření za kupou poněkud oslabeno. Zeslabení je na centimetrových vlnách cca 0,1 mK. Měření obtížná

²³ Založeno na předpokladu rovnoměrného rozložení mezihvězdné hmoty, tj. ne zcela přesné ...



a málo přesná. Důležité použití v kosmologii (dovoluje např. určit Hubbleovu konstantu nezávisle na tradiční kalibraci vzdáleností ve vesmíru).

Spektra galaxií informují nejen o průměrném spektrálním typu hvězd v tom kterém objektu, ale současně i o celkové radiální rychlosti. Již v roce 1912 bylo zjištěno, že převážná většina spirálních galaxií jeví zřetelný posuv spektrálních čar k červenému konci spektra. Později Hubble zjistil korelaci mezi hodnotou posuvu spektrálních čar $z = \Delta\lambda/\lambda$ a vzdáleností, kterou lze vyjádřit jednoduchým vztahem $Hr = zc = v$, kde H je tzv. **Hubbleova konstanta** [$\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$], c rychlost světla, v radiální rychlost a r vzdálenost. Pokud určíme H (z pozorování blízkých galaxií), pak možno tento vztah použít i k odhadu vzdálenosti těch galaxií, u kterých známe pouze velikost rudého posuvu. Konstanta tedy vyjadřuje, o kolik se zvětší radiální rychlost, jestliže se vzdálenost zvětší o jeden Mpc. Její měření značně obtížné, v poslední době se nejpravděpodobnější zdá hodnota (z WMAP) okolo $75 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Pokud se vyjádří Mpc v kilometrech, pak $1/H$ je vyjádřeno v časových jednotkách a je to formálně pojaté stáří vesmíru odvozené za předpokladu stálého rozpínání (Hubbleovo stáří). Je to horní odhad stáří vesmíru. H ve skutečnosti není konstantou neboť v důsledku vzájemné přitažlivosti všech galaxií se rozpínání vesmíru zpomaluje a H s časem klesá. Stáří, jež počítá se zpomalováním, tj. s klesající H , je menší – Friedmannovo stáří.

6.8 Vesmírné hmotnosti

Jediná přímá metoda zjišťování hmotnosti je **užitím 3.KZ v přesném tvaru pro dvojhvězdy**. Tj. vyjdeme z

$$a^3 = \frac{G}{4\pi^2} P^2 (M_1 + M_2),$$

resp. numericky upraveného

$$a^3 = P^2 (M_1 + M_2),$$

kde hmotnosti jsou v hmotnostech Slunce, perioda v rocích a poloosa a v astronomických jednotkách. Dosadíme-li velikost lineární poloosy $a = a'' \cdot r$, kde r je vzdálenost dvojhvězdy, vyjde z posledního vztahu součet hmotností složek. Je-li navíc známo a''_1, a''_2 , platí pro těžiště

$$a''_1 \cdot M_1 = a''_2 \cdot M_2.$$

Můžeme tedy určit přímo hmotnosti složek.

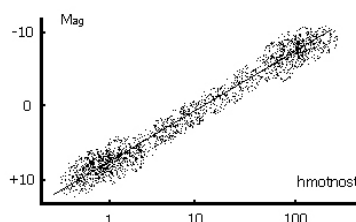
Určení hmotností spektroskopických dvojhvězd (ztíženo neznalostí sklonu dráhy i) pro případ kdy známe obě spektra (resp. funkce hmotnosti pokud známe jedno spektrum), viz kapitola Dvojhvězdy, str. 279 a dále.

Obecně nejlepší informace o hmotnostech hvězd poskytují zákrytové spektroskopické dvojhvězdy – oběžná rovina leží téměř rovnoběžně se zorným paprskem, tj. $\sin i \sim 1$, popř. lze přesnou hodnotu určit z tvaru světelné křivky.

Vztah hmotnost-svítilivost resp. hmotnost-zářivost; množství energie, které hvězda každou sekundu vysílá je závislé na její hmotnosti. Poprvé jej vypočetl Eddington, 1924. Prakticky objeven při určování hmotností dvojhvězd. Obecně je závislost vyjádřena v mocnině formě:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^n.$$

Exponent n není stejný pro různé hmotnosti. Pro lehké hvězdy je kolem 2,5 (slabé červené trpaslíky), citlivější je závislost zářivosti na hmotnosti u hvězd podobných slunci, n je zhruba 4. Pro masivní hvězdy na hlavní posloupnosti je zhruba 3.



Uvedený vztah platí jen pro hvězdy na hlavní posloupnosti, neplatí pro degenerované hvězdy bez termonukleárních reakcí, ani pro stárnoucí červené obry s odlišným chemickým složením, složitou vnitřní stavbou a pestrou paletou různých termonukleárních reakcí.

Hmotu hvězdokup lze odvodit, známe-li zdánlivé rozložení hvězd a průběh funkce svítivosti.²⁴ Rovněž lze použít **větu o viriálu**, viz str. 310.

²⁴ = Funkce zářivosti pro vizuální obor. Funkce zářivosti udává počet hvězd resp. galaxií o určité

U blízkých galaxií, které mají relativně velké úhlové rozměry, lze celkovou hmotnost odhadnout **z rotace objektu**. Spektroskopická měření (v optickém oboru [ostré čáry vznikající v mezihvězdném plynu galaxie] nebo čára 21 cm) umožňují zjistit radiální rychlost jednotlivých částí galaxie v různých vzdálenostech od jádra. Z radiálních rychlostí je možno určit rotaci galaxie. Rychlost rotace i závislost rychlosti na vzdálenosti od jádra závisí jak na celkové hmotnosti, tak i na rozložení hmoty v dané soustavě. Byla navržena řada modelů pro Galaxii, které lze použít k teoretickému určení rotační rychlosti v různých vzdálenostech od centra. Porovnáním těchto modelů se skutečným průběhem rotační rychlosti se stanoví pravděpodobná hmotnost zkoumané galaxie.

Pro shluk galaxií je možno opět použít větu o viriálu, podělením získané hmotnosti počtem členů soustavy obdržíme průměrnou hodnotu m pro jednotlivou galaxii ve shluku. Viz str. 310.

Rovněž je možno k odhadu hmotnosti použít vztah hmotnost svítivost, který je však jiný než pro jednotlivé hvězdy. Pro soustavy s malým množstvím prachu odpovídá přibližně $L \sim M^{0,73}$. Tato závislost je splněna od kulových hvězdokup, přes galaxie až ke kupám galaxií, tj. od hmot $10^5 M_{\odot}$ až k $10^{15} M_{\odot}$.

zářivosti v objemové jednotce, $\phi(M)$. Zpravidla se tedy uvažuje počet hvězd v jednom kubickém pc resp. Mpc a v intervalu jedné magnitudy. V okolí Slunce do vzdálenosti 30 ly stoupá fce svítivosti s klesající svítivostí a maxima dosahuje u 15. magnitudy, tj. v našem sousedství jsou nejpočetnější hvězdy slabé.

Literatura a zdroje

- Harmanec P., Základy astronomie a astrofyziky II, interní materiál k přednášce AST007, AU MFF UK
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Základy astronomie a astrofyziky II, Doc. RNDr. Marek Wolf, CSc.
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Vybrané kapitoly ze spektroskopie, RNDr. Pavel Kotrč, CSc.
- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Příhoda P., Průvodce astronomií, HaP Praha, 2000
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002
- ... Časopis 21. století, Extra 1/2004

Kapitola 7

Sluneční soustava

Sluneční soustava: Popis pohybu Měsíce. Planetky, satelity planet, komety. Meziplanetární plyn a magnetické pole, prach a drobná pevná tělíska, vliv záření na jejich pohyb. Meteority. Metody datování. Charakteristické procesy ve vývoji terrestrických planet a planet velkých. Exoplanety. Představy o tvorbě planetárních soustav.

... viz Příhoda, Vanýsek, Kleczek, aktuální informace na internetu ...
... časem snad dopíšu ... ;-)

(H)různé doplňky a „výkřiky do tmy“ . . .

Jednotky

V astronomii se běžně používají jednotky odvozené ze základních fyzikálních vlastností Země, Slunce a sluneční soustavy. Jde např. o následující jednotky času:

Střední sluneční den či jen den (zkratka d) = 86400 s.

Siderický rok je doba oběhu Země kolem Slunce vůči inerciální vztažné soustavě (hvězdám). Jeho délka je 365,2564 dne.

Juliánský rok je hodnota siderického roku s tou přesností, jaká byla známa tvůrcům Juliánského kalendáře: 365,25 dne. Tato hodnota se při některých úvahách užívá i dnes.

Tropický rok zvaný též sluneční či astronomický rok je doba mezi dvěma průchody Slunce jarním bodem. V současnosti je to 365,24219 dne.

Hvězdný den je siderická doba rotace Země (=doba rotace v inerciální soustavě čili vůči hvězdám). Měřena v jednotkách středního slunečního dne činí $365,24219/366,24219 = 0,997269566$ dne.

Juliánské dny, zkratka JD se používají v astronomii všude, kde je třeba analyzovat souvislé časové řady pozorování. Jsou to střední sluneční dny, které začínají vždy v poledne světového času (=lokální čas na poledníku procházejícím observatoří v Greenwichi), přičemž počátek, tedy JD 0, připadá na střední poledne na Greenwichi 1. ledna roku 4713 před naším letopočtem (což je rok -4712 astronomického letopočtu. Např. Juliánské datum 1. ledna 2004 v 0 hodin UT je JD 24530005,5.

Modifikované juliánské dny, zkratka MJD se používají v některých oborech astronomie v posledních desetiletích. Souvisí to s tím, že po většinu doby, pro kterou existují kvantitativní astrofyzikální měření jsou první dvě cifry Juliánského data 24. Modifikované Juliánské datum začíná o půlnoci daného dne a je tedy dáno vztahem $MJD = JD - 2400000$.

Heliocentrický Juliánský den, zkratka HJD se používá všude, kde je třeba vysoká přesnost časového údaje, např. při studiu rychle proměnných objektů. Je to časový údaj měřený v Juliánských dnech, ale vztahený k okamžiku, kdy by záření studovaného objektu dorazilo do místa, kde se nachází střed Slunce. Jeho okamžitá hodnota je pro každý pozorovaný objekt různá. Je to dáno konečnou rychlostí světla ve vakuu a oběhem Země okolo Slunce a její rotací. Představme si třeba, že pozorujeme zcela periodicky se opakující zjasňování a slabnutí nějaké hvězdy. Kdybychom okamžiky maxim jasnosti měřili v Juliánských dnech přímo pro pozorovací místo, pak zjistíme zdanlivé prodlužování a zkracování periody, protože světlo z hvězdy putuje k Zemi různě dlouho podle toho, kde se Země na své oběžné dráze kolem Slunce zrovna nachází. To je důvodem, proč je před vlastní analýzou časových řad pozorování nutné udát čas každého pozorování v HJD.

Barycentrický Juliánský den, zkratka BJD, je přesnější analogií heliocentrického Juliánského dne. Pro daný objekt je to čas vztažený k těžišti neboli barycentru naší sluneční soustavy. Je dobré vědět, že rozdíl mezi JD a HJD se projeví až na 3. desetinném místě, rozdíl mezi HJD a BJD až na 5. desetinném místě.

V pracích, zabývajících se objekty sluneční soustavy se často za jednotku vzdálenosti přijímá **astronomická jednotka** (zkratka AU = astronomical unit), což je střední vzdálenost středu Země od středu Slunce. Její hodnota je

$$1 \text{ AU} = 149\,597\,870\,691 \text{ km} = 1,49597870691 \times 10^{11} \text{ m}.$$

Astronomická jednotka se někdy užívá i ve hvězdné astronomii. Z ní také vychází jednotka vzdálenosti hvězd a dalších kosmických těles od nás, zvaná **parsek** (zkratka pc). Je to vzdálenost, ze které by se střední poloměr zemské dráhy kolem Slunce (=1 AU) jevil pod úhlem jedné obloukové vteřiny. Je tedy

$$1 \text{ pc} = 1 \text{ AU} / \sin 1'' = 206264.80625 \times 1,49597870691 \times 10^{11} \text{ m} = 3,085677581318 \times 10^{16} \text{ m}.$$

Často se užívá jednotka vzdálenosti s názvem **světelný rok**. Rozumí se tím dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za 1 rok. Nejde o oficiálně uznanou a řádně definovanou jednotku, takže se lze setkat s hodnotami světelného roku odvozenými jak od tropického, tak od siderického roku. Nejčastěji se ale světelným rokem rozumí dráha, kterou urazí ve vakuu elektromagnetické záření za 1 Juliánský rok (365,25 dne). 1 světelný rok = $9,4607305 \times 10^{15}$ m a tedy 1 pc = 3,26156 světelného roku.

Důležitá data

- 150, Hipparchos: katalog jasných hvězd
- 150, Ptolemaios: Almagest, 13 knih o astronomii, geocentrický systém
- 1543, Koperník: De revolutionibus, heliocentrická soustava
- 1609, Kepler: Astronomia nova, 1. a 2. zákon
- 1610, Galilei: dalekohled
- 1619, Kepler: Harmonices mundi, 3. zákon
- 1687, Newton: Principia, gravitační zákon
- 1705, Halley: výpočet dráhy periodické komety
- 1781, Herschel: objev Uranu
- 1814, Fraunhofer: absorpční čáry ve spektru Slunce
- 1834, Bessel, Struve: paralaxa hvězd
- 1846, objev Neptuna na základě poruch ve dráze Uranu
- 1850, Pogson: fotometrie hvězd
- 1860, Kirchhoff: základní zákon teorie záření
- 1880, Pickering, Cannonová: spektrální klasifikace hvězd
- 1900, Planck: počátky kvantové teorie
- 1905, Einstein: speciální teorie relativity
- 1908, Hale: objev magnetického pole ve slunečních skvrnách
- 1911/13, Hertzsprung/Russell: závislost spektrum-svítivost
- 1916, Eddington: teorie vnitřní stavby hvězd
- 1923, Hubble: extragalaktická podstat spirálních mlhovin

1929, Hubble: rudý posuv ve spektrech galaxií
1930, Pluto
1932, Janský: rádiové záření vesmíru
1938, Bethe: nukleární reakce ve hvězdách
1957, Sputnik
1961, Gagarin
1962, objev kvasarů
1968, objev pulsarů
1969, Armstrong & Aldrin na Měsíci
...

Různé

- **Gnómonická projekce** = mapa v projekci ze středu koule
- **prográdní** = proti směru pohybu hodinových ručiček (při pohledu od severního pólu (ekliptiky))
- **Katalogy:**
 - hvězdné ...
 - * FK = Fundamentalkatalog
 - * GC = General Catalogue
 - * SAOC = Smithsonian Astrophysical Observatory Catalogue
 - mlhoviny, galaxie, hvězdokupy ...
 - * M = Messier (107 objektů)
 - * NGC = New General Catalogue
 - * IC = Index Catalogue (dodatek k NGC)

Část III

Astrofyzika, hvězdy, galaxie

Požadavky

Fyzika plazmatu: Pohyb nabitě nerelativistické a relativistické částice v plazmatu. Základní rovnice magnetohydrodynamiky. Tepelné a netepelné záření. Synchrotronové záření, inverzní Comptonův jev.

Hvězdné atmosféry: spojitě a čárové spektrum. Stavba atomu vodíku, hélia a těžších prvků. Vlivy určující profily spektrálních čar. Einsteinovy koeficienty. Zeemanův jev. Boltzmannova a Sahaova rovnice. Rovnice přenosu záření. Modelování hvězdných atmosfér. Redistribuce.

Vnitřní stavba hvězd: Jaderné reakce ve hvězdách, přenos energie, stavové rovnice hvězdné látky. Rovnice modelů vnitřní stavby hvězd. Vývoj hvězd, vývojové stopy v HRD, závěrečné fáze hvězdného vývoje. Pulsace hvězd. Příčiny proměnnosti hvězd.

Sluneční fyzika: Globální charakteristiky Slunce, sluneční aktivita, magnetická pole na povrchu Slunce, procesy v erupcích. Pozorování Slunce v různých oborech spektra. Helioseismologie.

Dvojhvězdy: Fotometrie a spektroskopie dvojhvězd, určování elementů. Zvláštnosti vývoje těsných dvojhvězd. Kataklyzmické proměnné.

Mezihvězdná látka: Rozložení prachu a plynu v Galaxii, typy útvarů mezihvězdné látky, metody pozorování. Atomy a molekuly v mezihvězdném prostoru - spektra, chemické reakce. Oblasti ionizovaného vodíku (HII) a jejich fyzika. Prachová zrna, fyzikální vlastnosti a optické projevy. Dynamika mezihvězdné látky. Vícesložkový model mezihvězdného plynu, role supernov, fyzika rázových vln. Stabilita oblaků mezihvězdné látky, Jeansovo kritérium, fragmentace, tvoření hvězd.

Hvězdy - přehled observačních výsledků: Fotometrické systémy, magnitudy. Určování hmotností kosmických objektů, dynamická paralaxa, funkce hmotnosti. Určování rozměrů hvězd, efektivní teplota, úhlové průměry. Teploty hvězd, spektrální klasifikace. Hertzsprungův-Russellův diagram (HRD). Vztah hmotnost – zářivý výkon.

Galaxie, hvězdné soustavy: Stavba Galaxie, hvězdné populace. Rotační křivky galaxií, Oortovy konstanty. Dráhy hvězd a jejich stabilita. Gravitační potenciál Galaxie. Pohybové integrály, ergodické chování drah, třetí integrál, distribuční funkce, Boltzmannova rovnice, Jeansova věta. Čára 1420 MHz, rozložení a rychlosti vodíku HI. Hmotnost galaxií a skrytá hmota. Molekulární vodík, molekuly CO, molekulární oblaka, anomálie v rozdělení HI. Relaxační časy hvězdných soustav. Morfologická klasifikace galaxií.

Stavba vesmíru: Metody určování vzdáleností kosmických objektů a jejich návaznost. Rozložení galaxií ve vesmíru. Hubbleův zákon, funkce expanze, decelerační parametr. Robertson-Walkerova metrika. Einsteinovy rovnice. Friedmannovy modely vesmíru. Kosmologická konstanta. Inflační modely. Rané fáze vývoje vesmíru. Reliktní záření. Skrytá hmota a vývoj vesmíru.

Otázky

- Interpretace čárových spekter hvězd, fyzikální podmínky v atmosférách hvězd, chemické složení.
- Rovnice přenosu záření v různých souvislostech – nitro hvězd, atmosféry hvězd, mezihvězdné prostředí. Přenos záření ve spektrálních čarách, koeficient absorpce, koeficient emise, rozptyl záření, střední volná dráha fotonů ...
- Efekty ovlivňující šířku a profil spektrální čáry (ve spektrech hvězd, ve spektrech mezihvězdné látky ...)
- Hertzsprungův-Russellův diagram v různých souvislostech (velikosti a hmotnosti hvězd, vývojové stopy hvězd, klasifikace a rozmístění proměnných hvězd v HRD ...)

- Nitro hvězd – jaderné reakce (typy reakcí, podmínky pro jejich zahájení a udržování, závislost na stavových veličinách)
 - Střední částicová hmotnost, stavová rovnice hvězdné látky a její limitní případy
 - Nitro hvězd – přenos energie (zářivý, konvektivní, Schwarzschildovo kritérium ...), opacita (příčiny, teplotní závislost ...)
 - Rovnice modelů vnitřní stavby hvězd, jednoduché modely vnitřní stavby hvězd
 - První tři rovnice vnitřní stavby hvězd – rovnice zachování hmoty, pohybová rovnice a rovnice hydrostatické rovnováhy jako její limitní případ
 - Řešení rovnic vnitřní stavby hvězd, závisle a nezávisle proměnné, okrajové podmínky, Heneyova metoda
 - Vývoj hvězd v HR diagramu v závislosti na hmotnosti hvězd, základní testy shody teorie vývoje hvězd s pozorováním
 - Dynamika mezihvězdné látky a tvorba hvězd, Jeansovo kritérium, Jeansovy rovnice, věta o viriálu
 - Metody studia fyzikálních podmínek v různých útvarech mezihvězdné látky (interpretace pozorování optických, rádiových, infračervených spekter; elektronové, vibrační a rotační přechody a s nimi spojená spektra a definice teplot ...)
 - Zářivé a srážkové procesy v mezihvězdném plynu (excitace, ionizace, rovnice statistické rovnováhy, funkce ohřevu a ochlazování ...)
 - Mezihvězdný prach – metody pozorování, rozložení v Galaxii, role prachu při tvorbě hvězd ...
 - Pozdější vývojová stadia hvězd – stavba a vývoj v oblasti obrů a veleobrů, role nukleárního hoření ve slupkách, hvězdný vítr, pulsace hvězd a hlavní typy pulsujících hvězd, novy, supernovy, planetární mlhoviny, bílí trpaslíci, pulsary
 - Vývoj dvojhvězd ve stadiu výměny hmoty mezi složkami a metoda výpočtu modelů, vysvětlení vývojového paradoxu polodotykových soustav
-
- Fyzika plazmatu, základní rovnice magnetohydrodynamiky ¹
 - Pohyb a záření nabitě částice v magnetickém poli (nerelativistický a relativistický případ) ¹
-
- Kosmologický rudý posuv, modely vesmíru
 - Nukleosyntéza (v raném vesmíru, ve hvězdách, supernovy ...)
 - Modelování hvězdných atmosfér, základní rovnice a metody. Stavba hvězdných atmosfér. LTE a non-LTE přístupy. ²
 - Zářivé a srážkové procesy ve hvězdných atmosférách. Redistribuce energie, redistribuční funkce. ²
 - Dvojhvězdy – fotometrie, spektroskopie. Určování elementů. ³
 - Zvláštnosti vývoje těsných dvojhvězd, přetok hmoty mezi složkami. Kataklyzmické proměnné. ³
 - Globální charakteristiky Slunce, sluneční aktivita. ⁴
 - Magnetická pole na Slunci. Erupce, procesy v erupcích. ⁴
 - Vnitřní stavba slunce, helioseismologie. ⁴
 - Charakteristika Slunce v různých oborech spektra, spektrální diagnostika struktury sluneční atmosféry. ⁴

¹ !!!Zpracováno v sekci Kosmická elektrodynamika!!!

² pro absolventy přednášky Hvězdné atmosféry

³ pro absolventy přednášky Dvojhvězdy

⁴ pro absolventy přednášky Sluneční fyzika

+ další ...⁵

⁵ pro absolventy přednášky Kosmologie:

- Vznik galaxií (fluktuace hmoty po rekombinaci vodíku, Jeansova délka resp. hmotnost ...)

pro absolventy přednášky Fyzika malých těles sluneční soustavy:

- Planetky – dráhové a fyzikální charakteristiky; klasifikace, rodiny, dynamika.
- Meteority, klasifikace. Metody datování.
- Komety, meziplanetární plyn a prach.

Kapitola 8

Záření, hvězdné atmosféry

Hvězdné atmosféry: spojité a čárové spektrum. Stavba atomu vodíku, hélia a těžších prvků. Vlivy určující profily spektrálních čar. Einsteinovy koeficienty. Zeemanův jev. Boltzmannova a Sahaova rovnice. Rovnice přenosu záření. Modelování hvězdných atmosfér. Redistribuce.

+

dotatek z Termodynamiky a statistické fyziky: Termodynamika záření, záření absolutně černého tělesa.

- Základní pojmy teorie záření – intenzita, tok, tlak a hustota záření (monochromatické, střední, integrální).¹
- Termodynamika záření – Planckův zákon a s ním související zákony Rayleighův-Jeansův, Wienův, Wienův zákon posuvu a Stefanův-Boltzmannův.¹
- Interakce atomu se zářením, Einsteinovy koeficienty.¹
- Interpretace čarových spekter hvězd, fyzikální podmínky v atmosférách hvězd, chemické složení.
- Rovnice přenosu záření v různých souvislostech – nitro hvězd, atmosféry hvězd, mezihvězdné prostředí. Přenos záření ve spektrálních čarách, koeficient absorpce, koeficient emise, rozptyl záření, střední volná dráha fotonů . . .
- Efekty ovlivňující šířku a profil spektrální čáry (ve spektrech hvězd, ve spektrech mezihvězdné látky . . .)
- Modelování hvězdných atmosfér, základní rovnice a metody. Stavba hvězdných atmosfér. LTE a non-LTE přístupy.²
- Zářivé a srážkové procesy ve hvězdných atmosférách. Redistribuce energie, redistribuční funkce.²

¹ !!!Otázky z části astronomie!!!

² pro absolventy přednášky Hvězdné atmosféry

8.1 Základy teorie záření

Elektromagnetické záření má duální povahu: má současně charakter vlnění a částicovou povahu. Jako vlnění se může šířit i prázdným prostorem a lze jej charakterizovat vlnovou délkou resp. frekvencí. Obě tyto veličiny spolu souvisí známým vztahem $\nu = c_n/\lambda$, kde c_n je rychlost, jakou se elektromagnetické záření šíří v uvažovaném prostředí.

Dále víme, že jedno kvantum elektromagnetického záření o frekvenci ν , tedy foton záření, s sebou nese energii $E_\nu = h\nu$, kde h je malé kladné číslo a nazývá se Planckova konstanta. Podle slavné Einsteinovy rovnice $E_\nu = mc^2$ lze pak pohybuujícímu se fotonu přiřadit hmotnost m a tedy i hybnost mc . Je tedy zřejmé, že energie fotonu je přímo úměrná jeho frekvenci a nepřímo úměrná jeho vlnové délce.

Je-li rychlost světla ve vakuu nepřekročitelnou mezí, pak se rychlost elektromagnetického záření vysílaného i rychle se pohybuujícím zdrojem již nemůže zvýšit. Co se ale změní, je energie fotonů. Pokud se zdroj pohybuje ve směru k pozorovateli, energie fotonu se zvýší o přidanou kinetickou energii a světlo se posune k vyšším frekvencím, tedy do fialova. Naopak u zdroje letícího směrem od pozorovatele se energie fotonu sníží a světlo se posune směrem do červena. Tento jev se nazývá Dopplerovým jevem a pro elektromagnetické záření jej lze v klasické fyzice (tj. pro vzájemnou rychlost zdroje a pozorovatele, která je mnohem menší, než rychlost světla ve vakuu) popsat vztahem $R/V = \frac{c}{\lambda_{lab}}(\lambda - \lambda_{lab})$, kde R/V je radiální rychlost zdroje vůči pozorovateli, tedy rychlost ve směru zorného paprsku, λ je pozorovaná vlnová délka, λ_{lab} je laboratorní klidová vlnová délka a c rychlost světla ve vakuu.

Spektrum elektromagnetického záření = funkce vyzařování nějakého zdroje v závislosti na vlnové délce či frekvenci. Reálné zdroje elektromagnetického záření totiž obvykle nejsou monochromatické, ale vyzařují přes velký rozsah vlnových délek, ač pro různé vlnové délky s různou vydatností. Podle délky vlny se historicky vyvinulo schematické dělení elektromagnetického záření na několik plynule na sebe navazujících oblastí. Ovšem různé prameny udávají hranice oblastí poněkud různě. Zde uvedené dělení je proto jen informativní:

1. Záření γ = Vlnové délky kratší než 0,1 nm.
2. Rentgenové (X) záření = Vlnové délky mezi 0,1 nm a zhruba 4 nm.
3. Ultrafialové (UV) záření = Vlnové délky mezi 4 nm a zhruba 370 nm.
4. Optické záření = Vlnové délky v rozsahu asi 370-750 nm; s rostoucí vlnovou délkou vnímáme toto záření jako světlo fialové, modré, zelené, žluté, oranžové a červené barvy.
5. Infračervené (IR) záření = Vlnové délky mezi 750 nm a zhruba 1 mm.
6. Mikrovlnné záření = Vlnové délky mezi 1 mm a zhruba 100 mm.
7. Rádiové záření = Vlnové délky delší než asi 100 mm; v řadě případů se lze setkat s tím, že část mikrovlnného záření se považuje za podskupinu rádiového záření.

V teorii záření se často se užívají **jednotky cgs**. Základními jednotkami jsou:

g (gram) ... pro hmotnost

cm (centimetr) ... pro délku

s (sekunda) ... pro čas

K (kelvin) ... pro absolutní teplotu

Též odvozené jednotky jako $\text{dyn} = \text{g cm s}^{-2} = 10^{-5} \text{ N}$... pro sílu či $\text{erg} = \text{g cm}^2 \text{ s}^{-2} = 10^{-7} \text{ J}$... pro energii či práci. Používají se i některé starší tradiční jednotky jako jednotka délky angström $\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$.

§ Základní veličiny• Intenzita

Monochromatická intenzita I_ν je množství zářivé energie procházející v daném místě prostoru v daném směru kolmo jednotkovou ploškou do jednotkového prostorového úhlu v jednotkovém intervalu frekvencí za jednotku času. Množství zářivé energie dE_ν vycházející v daném směru z plošky ds do prostorového úhlu $d\omega$ pod úhlem ϑ vůči normále plošky ve frekvenčním intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$ za čas dt je dáno vztahem

$$dE_\nu = I_\nu(x, y, z, \varphi, \vartheta, t) d\nu ds \cos \vartheta d\omega dt.$$

Úhel ϑ měříme od osy z v intervalu od nuly do π , úhel φ od osy x v rozsahu od 0 do 2π . Rozměr intenzity na jednotku frekvence se zpravidla udává v $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$. Častěji se v astronomické literatuře setkáme s rozměrem v soustavě cgs: $\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$. Platí zřejmě, že $I_\nu(\text{cgs}) = 10^{-3}I_\nu(\text{SI})$. Intenzitu lze udávat i na jednotku vlnové délky, pro vzájemný převod musí platit $I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda$. Po diferencování dostáváme zřejmé vztahy mezi oběma veličinami: $I_\nu = I_\lambda \lambda^2 / c$ a $I_\lambda = I_\nu \nu^2 / c$.

Někdy se místo a směr záření popisují vektorově; poloha vektorem \vec{r} a směr jednotkovým vektorem \vec{n} , který s kolmicí na plošku ds svírá úhel ϑ . Intenzitu pak lze psát ve tvaru

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t) d\nu \vec{n} \cdot d\vec{s} d\omega dt,$$

kde skalární součin $\vec{n} \cdot d\vec{s} = ds \cos \vartheta$.

Často se také používá **střední intenzita** záření J_ν , tj. intenzita středovaná přes celý prostorový úhel ω , mnohdy též nazývaná nultý moment intenzity:

$$J_\nu = \frac{\int_0^{4\pi} I_\nu d\omega}{\int_0^{4\pi} d\omega} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_\nu d\omega.$$

V řadě případů – např. v normálních hvězdných atmosférách – lze předpokládat osovou symetrii, tedy to, že intenzita záření nezávisí na úhlu. Označme ji symbolem I_ν^s . S uvážením toho, že $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ a po integraci přes úhel φ lze psát

$$J_\nu^s = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu^s \sin \vartheta d\vartheta.$$

Někdy je užitečné používat celkovou, integrální či **bolometrickou intenzitu** I záření získanou integrací přes celé elektromagnetické spektrum:

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda.$$

• Tok

Celkové množství záření procházející ze všech směrů ploškou ds za čas dt ve frekvenčním intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$ je

$$dE_\nu = \mathcal{F}_\nu d\nu ds dt.$$

Funkce $\mathcal{F}_\nu(x, y, z, t)$ se nazývá **monochromatický tok** záření plochou. Platí tedy

$$\mathcal{F}_\nu = \int_0^{4\pi} I_\nu \cos \vartheta d\omega.$$

Rozměr toku je $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$. V teorii hvězdných atmosfér se velmi často používá transformace $\mu \equiv \cos \vartheta$ příslušné integrace přes interval $\langle 0, \pi \rangle$ v úhlu ϑ se pak změni v integrace přes interval $\langle 1, -1 \rangle$ v proměnné μ .

Pokud budeme opět předpokládat, že intenzita záření nezávisí na úhlu φ , dostáváme pro tok výraz

$$\mathcal{F}_\nu^s = 2\pi \int_0^\pi I_\nu^s \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta .$$

Pokud je intenzita záření do všech směrů stejná tj. pokud nezávisí v daném místě ani na úhlu ϑ , hovoříme o *isotropním záření* s intenzitou I_ν^i . Je zřejmé, že pro isotropní záření je celkový tok plochou **nulový**, neboť

$$\mathcal{F}_\nu^s = 2\pi I_\nu^s \int_0^\pi \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \pi I_\nu^i [\sin^2 \vartheta]_{\vartheta=0}^\pi = 0, .$$

Naproti tomu tok isotropního záření I_ν do poloprostoru je

$$\mathcal{F}_\nu^s = 2\pi I_\nu^s \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \pi I_\nu^i [\sin^2 \vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \pi I_\nu^i, .$$

Často se lze setkat s tím, že tok do celého prostoru je označován výrazem πF_ν , kde F_ν je tzv. astrofyzikální tok související se zavedeným tokem vztahem $\pi F_\nu = \mathcal{F}_\nu$.

Těž se používá tzv. **Eddingtonův tok** neboli první moment intenzity

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_\nu \cos \vartheta d\omega ,$$

který souvisí s tokem zde zavedeným vztahem

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi} \mathcal{F}_\nu .$$

Je přirozeně opět možné zavést celkový, integrální neboli **bolometrický tok**:

$$\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu = \int_0^{4\pi} I \cos \vartheta d\omega .$$

• Hustota zářivé energie

Hustotou zářivé energie rozumíme množství zářivé energie nacházející se v daném místě a čase v objemové jednotce. Množství zářivé energie dE_ν procházející ploškou ds ze směru svírajícího s kolmicí na plošku úhel ϑ za čas dt bude zřejmě $dE_\nu = I_\nu \cos \vartheta dv ds dt d\omega$. Protože záření se pohybuje rychlostí světla c , naplní za čas dt objem $dV = c dt ds \cos \vartheta$. Hustota záření přicházejícího z daného směru bude tedy

$$\frac{dE_\nu}{dV} = \frac{1}{c} I_\nu d\omega d\nu .$$

Integrací přes celý prostorový úhel dostaneme hustotu záření v daném intervalu frekvencí

$$u_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu d\omega d\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu d\nu$$

a integrací přes celé spektrum pak celkovou hustotu záření

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I d\omega = \frac{4\pi}{c} J .$$

• Tlak záření

Označme hybnost záření o dané frekvenci, jež přichází z daného směru, jako dp_ν . Je-li celková hmotnost tohoto záření m_ν , lze pro jeho hybnost psát $dp_\nu = m_\nu c$. S použitím Einsteinovy rovnice $dE_\nu = m_\nu c^2$ pro příspěvek hybnosti záření dostáváme $dp_\nu = dE_\nu/c$, takže síla působící na plošku ds od uvažovaného příspěvku záření je podle 2. Newtonova zákona

$$\Delta f = \frac{dp_\nu}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE_\nu}{dt} = \frac{I_\nu}{c} \cos \vartheta ds d\omega d\nu$$

Složka síly působící kolmo na uvažovanou plošku bude ovšem $\Delta F = \Delta f \cos \vartheta$. Tlak je výsledná síla působící na jednotkovou plochu, tedy

$$P_{r,\nu} = \frac{d\nu}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu \cos^2 \vartheta d\omega.$$

Pro celkový tlak záření všech frekvencí pak platí

$$P_r = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I \cos^2 \vartheta d\omega.$$

Další související veličiny (koeficient opacity/absorpce, optická tloušťka, emisní koeficient, rovnice přenosu záření, zdrojová funkce ...) viz Hvězdné atmosféry ... !!!

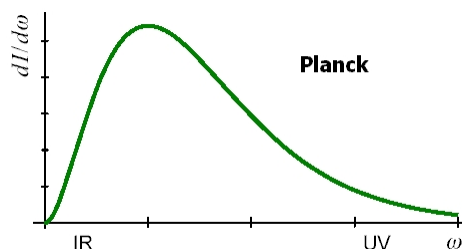
§ Záření absolutně černého tělesa

Z molekulové fyziky víme, že zvýšení T vede ke zvýšení střední rychlosti částic, dochází tak ke zvětšení počtu srážek za jednotku času, roste střední hodnota zrychlení; z elektrodynamiky víme, že nabitá částice pohybující se zrychleně vyzařuje elektromagnetické vlny \rightarrow každé těleso o $T > 0$ vyzařuje.

Z aplikace Boseho-Einsteinovy statistiky na fotonový plyn³ plyne pro monochromatickou intenzitu absolutně černého tělesa **Planckova funkce** – výraz

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

kde h je Planckova konstanta (s hodnotou $6,62 \cdot 10^{-34}$ J/s) a k je Boltzmannova konstanta ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K).



Integrací Planckovy funkce přes celé elektromagnetické spektrum dostáváme **integrální intenzitu** záření černého tělesa

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4.$$

³ viz část Obecná fyzika

Jelikož záření černého tělesa je isotropní, nezávisí jeho intenzita na směru a místo integrálu hustoty energie tak pro integrální hustotu záření černého tělesa dostáváme

$$u(T) = \frac{4\pi}{c} B(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = aT^4,$$

kde a je konstanta hustoty záření; platí $a = 7,565767 \cdot 10^{-16} \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-4}$. Zavedeme-li Stefanovu-Boltzmannovu konstantu σ vztahem

$$\sigma = ac/4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4},$$

dostáváme pro Planckovu funkci

$$B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4.$$

Chceme-li Planck fci přepsat do vlnových délek, opět diferencujeme ($\lambda = c/\nu \rightarrow -d\lambda = c/\nu^2 d\nu$), tj. $B_\nu = B_\lambda \lambda^2/c$, takže

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}.$$

Můžeme se také zajímat, u které vlnové délky dosahuje pro danou teplotu funkce $B_\lambda(T)$ maxima ⁴ – **Wienův zákon posunu**:

$$\lambda_{max} \cdot T = konst = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$$

Maximum vyzařování absolutně černého tělesa se tedy s rostoucí teplotou posouvá ke kratším vlnovým délkám. ⁵

V krátkovlnné oblasti spektra je $e^x \gg 1$, takže lze Planckovu funkci $B(T)$ aproximovat vztahem

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

To se obvykle nazývá **Wienovou aproximací**.

Naopak v dlouhovlnné oblasti spektra je $e^x \approx 1 + x$ takže dostáváme pro Planckovu funkci přibližný výraz

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT.$$

Tomuto vztahu se říká **Rayleighův-Jeansův zákon**. ⁶ $B_\nu \sim T$ [pro danou frekvenci], jedná se tak vlastně o $T = \text{zářivou/jasovou/anténní teplotu} = \text{teplota AČT}$, které vyzařuje pouze v daném intervalu spektra jako pozorované těleso (tj. např. teplota hvězd určená pouze měřením v určité oblasti spektra).

⁴ tj. podm. $\partial B_\lambda(T)/\partial \lambda = 0$

⁵ Dosadíme-li navíc z tohoto zákona do Planckovy funkce resp. do spektrální hustoty energie, získáme závislost pro maximální hodnotu spektrální hustoty energie $u_m(T) = konst' \cdot T^3 \dots$

⁶ Neobsahuje h , byl odvozen ještě před vznikem kvantové teorie na základě klasické teorie elmag pole a ekvipartičního teorému. V té době považován za všeobecně platný, avšak v oblastech vysokých frekvencí odporoval experimentům i logice, předpovídal nekonečnou hustotu energie $\int_0^\infty \nu^2 d\nu = 0$. Tzv. UV-katastrofa.

§ Efektivní teplota hvězdy

Pro tok záření absolutně černého tělesa do poloprostoru plyne vztah ⁷

$$\pi B(T) = \sigma T^4.$$

Absolutní měření rozložení energie elektromagnetického záření v závislosti na vlnové délce ve spektrech hvězd vedlo ke zjištění, že záření hvězd se v hrubém přiblížení svým průběhem podobá záření absolutně černého tělesa. Vzhledem k tomu je pro mnohé úvahy užitečné zavést parametr, kterým lze popisovat celkový (bolometrický) zářivý výkon/svítivost hvězdy L , tj. celkový tok záření z povrchu hvězdy do okolního prostoru. Za tento parametr byla zvolena **efektivní teplota hvězdy**, definovaná rovnicí

$$L = 4\pi R^2 \pi B(T) = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4,$$

kde R označuje poloměr hvězdy. Efektivní teplota je rovna teplotě absolutně černého tělesa o stejném rozměru jako uvažovaná hvězda a vysílajícím do vnějšího prostoru stejný tok záření jako dotyčná hvězda. ⁸

Též se zavádí **barevná teplota** = teplota AČT, které v daném intervalu spektra $\Delta\lambda$ má stejný průběh intenzity jako pozorované těleso (např. barevná teplota oblohy je nereálně vysoká, neboť její barva je modrá).

K určení T_{eff} potřebujeme absolutní měření vyzářené energie ve všech vlnových délkách. K určení zářivé teploty je zapotřebí absolutní měření vyzářené energie v intervalu $\lambda \pm \Delta\lambda$. K určení barevné teploty postačí znát průběh relativní intenzity v intervalu $\lambda \pm \Delta\lambda$. Pro AČT jsou si všechny tyto tři teploty rovny. ⁹

⁷ **Stefan-Boltzmannův zákon**, $E = \sigma T_{eff}^4$, celková energie integrovaná přes všechny vlnové délky, vyzářená tělesem o teplotě T do všech směrů ...

⁸ Hvězda ve skutečnosti nezáří jako černé těleso, svítivost by při dané teplotě byla jiná; veličiny L a R lze měnit → proto se zavádí pojem efektivní teploty

⁹ Pro popis pohybu a energie atomů je zavedena **kinetická teplota** odpovídající nejpravděpodobnější rychlosti částice $v_T = (\frac{2kT}{m})^{1/2}$, kde k je Boltzmannova konstanta, m je hmotnost částice.

8.2 Hvězdné atmosféry - základní úvahy a rovnice

Hvězdná atmosféra - plasma - mix atomů, iontů, volných elektronů, fotonů ... Teploty cca 10^3 K - a few. 10^5 K (až 10^6 - 10^7 u korón). Hustoty částic cca 10^6 - 10^{16} cm^{-3} .

Výchozí fyzikou je kinetická teorie - nejobecnější popis systému pomocí **distribuční fce** $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)$; $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)d^3rd^3p$ má význam počtu částic i -tého druhu v elementárním objemu fázového prostoru na pozici \vec{r} , s hybností \vec{p} a v čase t . Vývoj distribuční fce je popsán **Boltzmannovou** (kinetickou) **rovnici**

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) f_i + (\vec{F} \cdot \nabla_p) f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{coll},$$

kde ∇ , ∇_p jsou nabla operátory vzhledem ke složkám polohy resp. hybnosti, \vec{u} je rychlost částice, \vec{F} vnější síla a $(\partial f_i / \partial t)_{coll}$ je **srážkový člen**, který popisuje vznik/zánik částic daného typu s pozicí $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r})$ a hybností $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p})$. Tato rce dává plný popis systému, nicméně počet neznámých je obrovský¹⁰ → jako standardní zjednodušení se používají rce pro momenty distribuční fce ...¹¹

... výsledné rce = momenty BKR sečtené přes všechny druhy částic = **MHD rce**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

rec **kontinuity**,

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho \vec{v} = -\nabla P + \vec{f}$$

pohybová rce,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \rho \epsilon + P \right) \vec{v} \right] = \vec{f} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (\vec{F}_{rad} + \vec{F}_{con})$$

rce **energetické rovnováhy**,

kde \vec{v} je makroskopická rychlost, ρ celková hustota, p tlak, \vec{f} externí síla, ϵ vnitřní energie, \vec{F}_{rad} tlak záření (*radiation*) a \vec{F}_{con} tlak daný vedením (*conductive*).

Jako další zjednodušení uvažujeme **statický 1D model**, tj. planparalelní vrstvu rozdělenou gravitačním polem (závislost pouze na z souřadnici), stacionární $\partial/\partial t = 0$ resp. statické prostředí ($\vec{v} = 0$, nemáme proudění). Plasma je navíc ve statistické rovnováze, bez magnetického pole ⇒

$$\left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{coll} = 0$$

rce **statistické rovnováhy**,

$$\nabla P = \vec{f} \quad \rightarrow \quad dP/dz = -\rho g$$

rce **hydrostatické rovnováhy**,

$$\nabla F_{rad} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{rad} = const. = \sigma T_{eff}^4$$

rce **zářivé rovnováhy**,

kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta a T_{eff} je efektivní teplota. Rovnice zářivé rovnováhy vyjadřuje fakt, že jediný mechanismus transportu energie je záření; tok vedením je zanedbáván, což je u hvězdných atmosfér běžná aproximace, kterou však nelze užít např. v přechodové vrstvě Slunce ...¹²

¹⁰ Ne jen pro atomy a ionty, ale i jejich excitační stavy ...

¹¹ Podrobně viz část Plazma ...

¹² Proudění (*konvekce*) je samozřejmě a priori zanedbána neboť uvažujeme $\vec{v} = 0$.

§ LTE vs. non-LTE

Nejjednodušší popis systému, je-li tento v termodynamické rovnováze (**TE**). Rozdělení rychlostí, excitace a ionizace jsou popsány pouze 2 parametry.¹³ Ale hvězdy nejsou v TE, nejedná se o izolovaný systém, není to systém s jednou teplotou ...¹⁴

... přesto lze pro studium hvězdných atmosfér použít myšlenku **LTE** - lokální TE = nebereme TE pro celou hvězdu, ale lokálně, tj. $T(\vec{r})$, $N(\vec{r})$ nebo $n_e(\vec{r})$; všechny částicové distribuční fce mohou být počítány lokálně, bez ohledu na fyzikální celek, ve kterém se materiál nachází.

V LTE platí **Maxwellovo rozdělení rychlostí**

$$f(\vec{v})d\vec{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)d\vec{v},$$

Boltzmannova excitační rce

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left[\frac{-(E_j - E_i)}{kT}\right],$$

Sahova ionizační fce

$$\frac{N_i}{N_0} = \frac{(kT)^{5/2}}{N_e} \exp\left(\frac{-E_i}{kT}\right),$$

kde g_j , g_i jsou statistické váhy i , j -tého stavu, N_i je celková číselná hustota daného ionizovaného stavu.¹⁵

Předchozí rce definují LTE z makroskopického hlediska; z mikroskopického LTE platí, pokud jsou atomární procesy v detailní rovnováze, tj. počet procesů $A \rightarrow B =$ počtu procesů $B \rightarrow A$... A , B jsou stavy částic ...

V teorii hvězdných atmosfér hraje záření dominantní roli \rightarrow **rovnici přenosu záření** (RTE) uvažujeme zvlášť od rovnic, jež popisují vlastnosti „materiálu“, tj. v LTE v každé oblasti atmosféry platí TE, ale jen pro částice. Intenzita v LTE není popsána Planckovou fci.¹⁶ Intenzita se spočítá řešením RTE.¹⁷ V případě striktní TE by záření muselo mít tvar Planckovské křivky při teplotě T , v LTE se to nepředpokládá, tj. LTE je z tohoto hlediska nekonzistentní, ale praktický přístup: **stav plazmatu je rovnovážný** (charakterizovaný T), **intenzita je určována řešením RTE**, kde za S dosazujeme Planckovu fci B a tím lze nalézt intenzitu záření ze vztahu¹⁸

$$I_0(\nu) = \int_0^\infty S(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu,$$

kde exponenciální část charakterizuje zeslabení příspěvku od zdroje S v hloubce τ_ν na dráze směrem k povrchu. Tento vztah je tedy přímo řešením RTE. Známe-li průběh

¹³ V souvislosti s hvězdnými atmosférami je obvykle volena termodynamická teplota T a celková částicová hustota N (ev. elektronová hustota n_e) ...

¹⁴ Pozorujeme hvězdu = zachycujeme unikající fotony, jež nesou určitou energii a hybnost \rightarrow alespoň na povrchu musí být gradienty stavových veličin ...

¹⁵ Sahovu ionizační rci lze přepsat též na tvar

$$\frac{N_i}{N_{i+1}} = n_e \frac{U_i}{U_{i+1}} \left(\frac{h^2}{2\pi mk}\right)^{3/2} T^{-3/2} \exp\left(\frac{\chi_i}{kT}\right),$$

kde U je partiční fce ($U_i = \sum_1^\infty g_i \exp(-E_i/kT)$) a χ_i je ionizační potenciál iontu i .

¹⁶ Kdyby byla, nešel by např. vysvětlit výskyt spektrálních čar ...

¹⁷ $\mu dI/d\tau = I - S$, kde pro LTE: $S = B(T)$, S je zdrojová fce = emis. koef./abs. koef. ...

¹⁸ pro příklad polonekonečné atmosféry

S s optickou hloubkou τ_ν , lze přímým výpočtem určit vystupující intenzitu I . Ovšem situace je většinou opačná: známe I a protože S může silně záviset na I v dané hloubce, je problém značně komplikovaný ...

... ale právě v **LTE** známe fci S předem = B . Naopak v **non-LTE** je zdrojová fce silně závislá na poli záření, jež má navíc značně nelokální charakter způsobený relativně dlouhou volnou dráhou fotonů. Z praktického hlediska nemá nekonzistentnost LTE velký význam - LTE platí velmi dobře v hustých vrstvách atmosfér (fotosféry), kde lze očekávat dominující srážkové přechody.

§ Rovnice přenosu záření

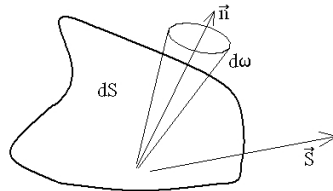
V podstatě se jedná o kinetickou rci pro fotony; na záření hledíme jako na soubor částic, interakce záření-látka jsou popisovány srážkami, vlnové jevy zanedbáváme. To je splněno, pokud je vlnová délka záření \ll typická vzdálenost mezi hmotnými částicemi, a pokud je rozložení částic náhodné. Ve hvězdných atmosférách je obojí velmi dobře splněno, neb uvažujeme horké plazma ...¹⁹

• Intenzita

Uvažujme pole záření; popisujeme ho **specifickou intenzitou** $I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)$ záření o poloze \vec{r} , do směru \vec{n} , s frekvencí ν a v čase t , která je definována jako energie přenášená zářením ve frekvenčním intervalu $(\nu, d\nu)$ přes elementární plošku dS do elementárního úhlu $d\omega$ v časovém intervalu dt

$$dE = I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) dS \cos \Theta d\omega d\nu dt,$$

kde Θ je úhel mezi \vec{n} a normálou k dS , tj. $dS \cos \Theta = \vec{n} \cdot d\vec{S}$. Jednotky intenzity jsou $\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{Sr}^{-1}$ resp. $\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{Sr}^{-1}$. Specifická intenzita dává kompletní popis nepolarizovaného záření z makroskopického hlediska.²⁰



Existuje souvislost mezi specifickou intenzitou I a distribuční fci pro fotony f . Ta je definována jako počet fotonů na jednotkový objem, o dané poloze, v daném čase, s frekvencemi $(\nu, \nu + d\nu)$, postupujících rychlostí c ve směru \vec{n} , tj. $f(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) d\omega d\nu$. Počet fotonů procházejících elementem $d\vec{S}$ v čase dt tedy je

$$f(c \cdot dt)(\vec{n} \cdot d\vec{S})(d\omega d\nu),$$

energie těchto fotonů pak bude $.h\nu$, srovnáním s definičním výrazem specifické intenzity dostaneme $I = (ch\nu)f$.

¹⁹ Všechny vlnové jevy zanedbáváme, pouze pro diagnostiku některých struktur ve hvězdných atmosférách může být důležitá polarizace; obvyklý formalismus RTE pak může být upraven přidáním Stokesova vektoru, tj. psáním RTE ve vektorové podobě ...

²⁰ Pozor, občas místo Hz užívány Å apod., nelze užít $\lambda\nu = c$, neboť ve vztahu je $d\nu$, tj. musíme diferencovat $d\nu = (c/\lambda^2)d\lambda$, $d\lambda = (c/\nu^2)d\nu$...

Podobně jako pro hmotné částice lze definovat různé momenty distribuční fce/resp. specifické intenzity, tj.

- **hustota energie záření**

$$E = \oint (h\nu) f d\omega = \frac{1}{c} \oint I d\omega,$$

kde f je počet fotonů v elementárním objemu, $h\nu$ energie jednoho fotonu

- **tok energie**

$$\vec{F} = \oint (h\nu) \cdot (c\vec{n}) f d\omega = \oint \vec{n} I d\omega,$$

kde $c\vec{n}$ je rychlostní vektor

- **tensor tlaku záření**

$$P = \oint (h\nu) \vec{n} \vec{n} f d\omega = \frac{1}{c} \oint \vec{n} \vec{n} I d\omega,$$

• Absorpční a emisní koeficient

RTE popisuje změny pole záření při interakci s látkou \rightarrow zavádíme absorpční a emisní koeficient.

Absorpční k. $\chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)$ popisuje úbytek z pole záření způsobený látkou: element materiálu o průřezu dS a délce ds odebere ze svazku o specifické intenzitě I dopadající na dS v úhlu $d\omega$ množství energie dané výrazem

$$dE = \chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) dS d\omega d\nu dt ds,$$

$[\chi] \dots \text{cm}^{-1} \rightarrow 1/\chi$ je střední volná dráha fotonu, charakteristická dráha než je pohlčen.

Emisní k. $\eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)$ popisuje energii uvolněnou materiálem v elementárním objemu ve formě záření (elementární objem o dS a ds uvolní do $d\omega$ ve směru \vec{n} ve frekvenčním intervalu $d\nu$)

$$dE = \eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) dS d\omega d\nu dt ds,$$

tj. nezáleží na intenzitě procházejícího záření, $[\eta] \dots \text{erg cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Sr}^{-1}$.^{21, 22}

V TE je detailní mikroskopická rovnováha \rightarrow energie absorbovaná v elementárním objemu a elementárním frekvenčním intervalu = energii emitované tímto objemem na tomto frekvenčním intervalu. Z předchozích definičních vztahů tak dostáváme

$$\chi I = \eta,$$

navíc víme, že v TE je intenzita rovna Planckově fci ($I = B$), tj. v TE platí Kirchhoffův zákon

$$\frac{\eta}{\chi} = B,$$

²¹ Koeficienty jsou definovány na jednotku délky \Rightarrow v čistě definičních rovnicích škrtneme ds . Nebo mohou být definovány na jednotku hmoty, tj.

$$dE = \chi I \rho dS d\omega d\nu dt ds, \quad [\text{m}^2 \text{kg}^{-1}], \quad dE = \eta \rho dS d\omega d\nu dt ds, \quad [\text{Wkg}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}].$$

²² Rozlišujeme „dva druhy absorpce“, tj. **pravou absorpci** (termální) = foton je pohlčen, energie jde na teplo, a **rozptyl** = absorpce a okamžitá reemise do jiného směru s nepatrně jinou ν ; $\chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) = \kappa(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) + \sigma(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)$; ovšem χ popisuje odběr fotonu ze svazku, a ne to, co se děje potom, tj. tento rozdíl se spíše než pro absorpci uplatní u přesného popisu/formulace emisního koeficientu ...

v LTE

$$S = \underbrace{\frac{\eta}{\chi}}_{\text{platí obecně}} = B \neq I.$$

• Fenomenologické odvození RTE

Chceme popsat, kolik energie se nám na daném směru pohltí, a kolik je do tohoto směru vyzařeno. Vyjadřujeme zachování celkové zářivé energie při průchodu svazku elementárním objemem o dS (\perp na směr postupu) a ds . Vezmeme-li do úvahy definiční vztahy pro specifickou intenzitu, emisní a absorpční k., dostaneme

$$\begin{aligned} & [I(\vec{r} + \Delta\vec{r}, \vec{n}, \nu, t + \Delta t) - I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)] dS d\omega d\nu dt = \\ & = [\eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) - \chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)] dS d\omega d\nu dt, \end{aligned}$$

tj. rozdíl specifických intenzit před a po průchodu = rozdílu energie emitované a pohlcené. Rozdíl intenzit na levé straně můžeme vyjádřit jako

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial s} ds + \frac{\partial I}{\partial t} dt = {}^{23} = \left(\frac{\partial I}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} \right) ds,$$

nakonec $\partial/\partial s$ můžeme vyjádřit jako $\vec{n} \cdot \nabla$, celkem tedy dostáváme

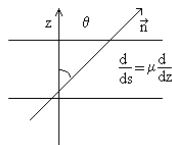
$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{n} \cdot \nabla \right) I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) = \eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) - \chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) \quad (\Delta)$$

obecný tvar RTE (včetně časové závislosti) ...

Př.- **1D planparalelní atmosféra**, časově nezávislá:

$$n_z = (dz/ds) = \cos \Theta \equiv \mu, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\mu \frac{dI(\nu, \mu, z)}{dz} = \eta(\nu, \mu, z) - I(\nu, \mu, z) \chi(\nu, \mu, z)$$



Př.- **1D sférická atmosféra**, časově nezávislá: zde je derivace podél paprsku dána

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(1 - \mu^2)}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right) \\ \mu \frac{\partial I}{\partial r}(\nu, \mu, r) + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I(\nu, \mu, r)}{\partial \mu} &= \eta(\nu, \mu, r) - I(\nu, \mu, r) \chi(\nu, \mu, r) \end{aligned}$$

²³ $s = ct$

• **Optická hloubka a zdrojová fce**

Uvažujme RTE ve tvaru

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad \Big/ \cdot - 1/\chi_\nu$$

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu,$$

kde

$$d\tau_\nu \equiv -\chi_\nu dz$$

je **optická hloubka** charakterizující optické vlastnosti prostředí,

$$S_\nu \equiv \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}$$

pak **zdrojová funkce**. Koeficienty η_ν , χ_ν jsou lokální veličiny, tj. S_ν je také lokální veličina. Předchozí vztah platí pro všechny geometrie. Ovšem optická hloubka na geometrii závisí. Nejpřirozenější definice, tj. ve 3D podél paprsku šíření, má tvar:

$$d\tau = \chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu) ds.$$

Fyzikální význam:

- *optická hloubka*:

- RTE bez emise: $dI/d\tau = I$

- řešení: $I(\tau) = I(\tau + \Delta\tau) \exp(-\Delta\tau) \rightarrow$ optická hloubka je e-násobek charakteristické vzdálenosti ro útlum specifické intenzity díky absorpci, tj. pravděpodobnost, že foton urazí optickou dráhu τ je $p(\tau) = \exp(-\tau)$

- podobně jako abs. k. může významně kolísat s frekvencí; někdy se definuje frekvenčně nezávislá opt. hl. (přes průměrný abs. k. či dokonce přes celé spektrum - např. Rosselandova opt. hloubka ...)

- *zdrojová funkce*:

- uvažujme počet fotonů, jež jsou emitovány element. objemem do všech směrů - z def. emis. koef.

$$N_{em} = \eta ds \frac{4\pi}{h\nu} d\nu dt dS$$

(4π z \int přes ω , $h\nu$ převádí energii na počet, pro jednoduchost bereme izotropní emisi)

- z def. τ_ν a S_ν plyne

$$\eta ds = \frac{\eta}{\chi} \chi ds = S(\tau) d\tau,$$

$$N_{em} = S(\tau) d\tau \frac{4\pi}{h\nu} d\nu dt dS,$$

tj. zdrojová fce je \sim počtu fotonů emitovaných v jednotkovém intervalu opt. hloubky

- počet fotonů absorbovaných na jednotkový interval optické hloubky pak je

$$N_{abs} = J(\tau) d\tau \frac{4\pi}{h\nu} d\nu dt dS,$$

kde $J(\tau)$ je střední intenzita záření

- celkem tedy zdrojová fce charakterizuje příspěvek k záření, jež vystupuje z povrchu atmosféry; lokální příspěvek v dané hloubce, který je však ještě oslaben o absorpci na dráze směrem k povrchu

• **Elementární řešení RTE**

Řešení jednoduchých případů 1D planparalelní RTE

- bez absorpce i emise:

$$\chi = \eta = 0 \quad \rightarrow \quad dI/dz = 0 \quad \rightarrow \quad I = const.$$

- bez absorpce, jen emise:

$$\chi = 0, \eta > 0 \quad \rightarrow \quad I(z, \mu) = I(0, \mu) + \frac{1}{\mu} \int_0^z \eta(z') dz'$$

- obvykle užíváno pro popis záření vycházejícího z opticky tenké zářící vrstvy (zakázané čáry planetárních mlhovin, sluneční koróna)

- bez emise, jen absorpce:

$$\eta = 0, \chi > 0 \quad \rightarrow \quad \mu \frac{dI}{d\tau} = I \quad \rightarrow \quad I(0, \mu) = I(\tau, \mu) \exp\left(\frac{-\tau}{\mu}\right)$$

- absorpce i emise: řešení se nazývá **formální** - pro χ i η předpokládáme, že to jsou konkrétní fce \vec{r} a ν ; ve skutečnosti ale oba koeficienty mohou záviset na poli záření, tj. nemusí být dané a priori bez předchozího řešení obecného přenosu záření

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) \exp\left[\frac{-(\tau_2 - \tau_1)}{\mu}\right] + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t) \exp\left[\frac{(-t - \tau_1)}{\mu}\right] \frac{dt}{\mu}$$

- polonekonečná atmosféra: speciální případ formálního řešení pro $\tau_1 = 0, \tau_2 = \infty$

$$I(0, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} S(t) \exp\left(\frac{-t}{\mu}\right) dt$$

- pro případ polonekonečné atmosféry je specifická intenzita v podstatě Laplaceovou transformací zdrojové fce, intenzita v τ_2 se neprojeví přímo (vše je absorbováno), ale ovlivňuje $S(t)$

- polonekonečná atmosféra s lineární zdrojovou fci:

$$S(\tau) = a + b\tau \quad \rightarrow \quad I(0, \mu) = a + b\mu = S(\tau = \mu) \dots \text{Eddingtonův-Barbierův vztah}$$

- pro \perp směr ($\mu = 1$) je $I =$ hodnotě zdrojové fce S v jednotkové optické hloubce, hodnoty vystupující intenzity pro úhly μ mezi 0 a 1 odpovídají hodnotám zdrojové fce mezi opt. hloubkami 0 a 1, tj. směrem do tečného směru $I \searrow \rightarrow$ okrajové ztemnění - v praxi není S lin. fci τ , přesto se jedná o dobrou aproximaci v okolí $\tau = 1$

- homogenní konečná vrstva: $\tau_1 = 0, \tau_2 = T < \infty, S(t) = S = const.$, pak pro $\mu = 1$

$$I(0, 1) = S(1 - e^{-T}),$$

speciálně pro

$$T \gg 1 \dots I(0, 1) = S \qquad T \ll 1 \dots I(0, 1) = S.T$$

(víme, že S vyjadřuje počet fotonů emitovaných na 1 optické hloubky:

- pro opt. tenkou vrstvu ($T \ll 1$) máme malou absorpci, tj. prakticky všechny fotony z unikají; protože optická hloubka je T , celková odcházející intenzita je $S.T$
- pro opticky tlustou vrstvu ($T \gg 1$) lze říci, že fotony vytvořené hlouběji než $\tau = 1$ jsou většinou absorbovány, tj. do vystupující intenzity přispívají pouze fotony emitované v $\tau \leq 1$, tj. celková intenzita je $1.S$)

- *model obláčku*: podobně jako předchozí, jen zesponu dopadá záření

$$I(0) = I_{inc} e^{-T} + S(1 - e^{-T})$$

- pokud je tam nějaký pohyb, projeví se Dopplerův posuv a $T = T(v)$, $\Delta\lambda/\lambda = v/c$; problém je, že se míchá posunuté záření obláčku a neposunuté $I_{inc} \rightarrow$ asymetrie

• Momenty RTE

- analogicky hmotným částicím lze definovat momenty fotonové distribuční fce, tj. specifické intenzity: hustota energie, tok a tensor tlaku záření ... ²⁴

$$\begin{pmatrix} c E_\nu \\ \vec{F}_\nu \\ c P_\nu \end{pmatrix} = \oint \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \\ \vec{n} \vec{n} \end{pmatrix} I_\nu d\omega$$

Přenosení RTE tvaru (Δ) výrazy 1, \vec{n} , ... a \oint přes prostorový úhel \rightarrow momentové rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}_\nu &= \eta_\nu - \chi_\nu c E_\nu, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + c \nabla \cdot P_\nu &= -\chi_\nu \vec{F}_\nu, \\ &\dots \end{aligned}$$

... první dvě momentové rce mají obecnou strukturu moment. rovnic pohybové rce:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{hustota veličiny}) + (\text{grad jejího toku}) = (\text{zdroje} - \text{úbytky})$$

... v astro literatře se však spíše zavádějí momenty úhlově zprůměrované (než integrované), první tři momenty se obvykle značí J , H , K :

$$\begin{pmatrix} J_\nu \\ \vec{H}_\nu \\ K_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} c E_\nu \\ \vec{F}_\nu \\ c P_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \oint \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \\ \vec{n} \vec{n} \end{pmatrix} I_\nu d\omega$$

... konkrétně pro planparalelní aproximaci máme

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu$$

střední intenzita ²⁵

²⁴ viz dříve
²⁵

$$\frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\omega) d\omega = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\omega) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{2\pi}{4\pi} \int I_\nu(\omega) \sin \vartheta d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = \mu \\ \sin \vartheta d\vartheta = d\mu \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int I_\nu(\mu) d\mu$$

$$H_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu I_\nu(\mu) d\mu$$

tok záření ²⁶

$$K_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\nu(\mu) d\mu$$

souvisí s tlakem záření

⇒ momentové rce

1.

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_\nu}{d\tau} &= I - S_\nu & / \cdot \int d\mu \\ \frac{dH_\nu}{d\tau} &= J_\nu - S_\nu \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_\nu}{d\tau} &= I - S_\nu & / \cdot \mu \int d\mu \\ \frac{dK_\nu}{d\tau} &= H_\nu \end{aligned}$$

... protože systém momentových rovnic není uzavřený, je nutné mít „uzavírací“ vztah; v teorii hvězdných atmosfér se užívá tzv. Eddingtonův faktor $f_\nu^K \equiv K_\nu/J_\nu$, pomocí něhož lze obě rce zkombinovat

$$\frac{d^2(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu.$$

Tímto jsme z problému eliminovali proměnnou μ . Nahradili jsme RTE, tj. lin. dif. rov. 1. řádu pro $I_{\nu\mu}$, lin. dif. rov. 2. řádu pro střední intenzitu J_ν . Obecně však tato rce nemůže být užita samotná (dokonce i když známe S_ν), neboť obecně až do úplného vyřešení RTE neznáme Edd. faktor. Nicméně tento tvar RTE je užitečný u některých numerických iteračních metod. ²⁷

8.3 Spektrální čáry

§ Základy kvantové teorie rozšíření spektrální čáry

Profil spektrálních čar obsahuje informaci o fyzikálních podmínkách i zastoupení jednotlivých chemických prvků ve hvězdných atmosférách; studium profilů spektrálních čar tak hraje při výzkumu hvězdných atmosfér klíčovou roli. Pro podrobné zkoumání spektrálních profilů potřebujeme vědět, jak závisí rozdělení opacity s frekvencí na lokálních podmínkách (teplota, hustota ...) Toto je charakterizováno tzv. **absorpčním profilem** = fce popisující závislost χ_ν na ν .

²⁶ všechno záření ve všech směrech procházející ploškou

²⁷ Pro izotropní záření $I_\nu \neq I_\nu(\mu)$ máme $f^K = 1/3$, hovoříme pak o Eddingtonově aproximaci

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu.$$

Pro určení tvaru spektrální čáry je tedy určující průběh **čarového absorpčního koeficientu**, který může být ovlivňován u různých čar v různých podmínkách různými efekty. Všechny efekty mající vliv na šířku (rozšíření) spektrální čáry mají svůj vlastní absorpční koeficient; výsledný čarový abs. koef. je dán konvolucí dílčích koeficientů a vystupuje implicitně v rovnici přenosu záření.

V následujícím předpokládáme vázaně-vázaný přechod $i \rightarrow j$.²⁸ Zavedeme frekvenčně závislý **čarový absorpční koeficient**

$$\kappa(\nu) = n_i \alpha(\nu),$$

kde n_i je počet atomů ve stavu i a $\alpha(\nu)$ absorpční koeficient na 1 atom (rozměr cm^2 na absorbující atom). Normální absorpční koeficient χ zahrnuje i absorpci v kontinuu!²⁹

Pomocí zjednodušené představy harmonického oscilátoru se dá po poměrně složitých výpočtech nalézt vztah pro energii absorbovanou v celé čáře z jednotkového svazku I_ν

$$\int_0^\infty \alpha(\nu) d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c},$$

kde integrál $0 - \infty$ je míněn přes celou čáru, výraz e^2/mc je tzv. klasický poloměr elektronu. Skutečná měření ukázala, že hodnoty předchozího výrazu jsou ve skutečnosti o něco menší, a to sice o faktor, který se mění od čáry k čáře. Kvantově mechanický přístup ukazuje, že platí

$$\int_0^\infty \alpha(\nu) d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{ij} = \alpha_0,$$

kde f_{ij} je síla oscilátoru = celková pravděpodobnost absorpce ve spektrální čáře, tj. obecně se jedná o veličinu úměrnou pravděpodobnosti přechodu mezi 2 hladinami energie v atomu; dá se počítat ze Schr. rce nebo měřit v laboratoři. Tento integrál se také musí rovnat součinu pravděpodobnosti absorpce B_{ij} a energie přechodu mezi hladinami

$$\int_0^\infty \alpha(\nu) d\nu = h\nu B_{ij},$$

$$f_{ij} = \frac{m_e c}{\pi e^2} h\nu B_{ij}.$$

Vezmeme-li v úvahu definiční vztahy pro Einsteinovy koeficienty³⁰ můžeme též psát

$$f_{ij} = \frac{m_e c^3}{2\pi e^2 \nu^3} \frac{g_i}{g_j} A_{ij}.$$

²⁸ Přechody v atomu obecně mohou být:

- vázaně-vázané (excitace/deexcitace)
- vázaně-volné (ionizace)
- volně-vázané (zachycení volných elektronů atomy)
- volně-volné (volný elektron změní v blízkosti iontu energii)

²⁹ To je vlastně i důvod proč vznikají absorpční čáry - absorbující prostředí je opticky tlustší pro čáru, kde je celkový absorpční koeficient $= \kappa_\nu + \kappa$, kde první je abs. koef. v čáře, druhý pak koef. spojitého záření v okolí ν .

³⁰

$$A_{ij} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ij}, \quad B_{ij} = \frac{B_{ji}g_j}{g_i}, \quad j\nu\rho = N_i A_{ij} h\nu,$$

N_i je hustota atomů excitovaných do hladiny i , g_i a g_j jsou statistické váhy z Boltzmannovy excit. rce

Absorpční profil v čáře $\phi(\nu)$ je pak definován jako

$$\alpha(\nu) = \alpha_0 \phi(\nu), \quad (*)$$

platí normalizace

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1.$$

Vývoj pravděpodobnosti výskytu atomu ve vázaném stavu j je dán vztahem

$$P_j(t) = \psi_j^* \psi_j e^{-\Gamma t},$$

jež charakterizuje kvantový oscilátor; záření pochází z přechodu atomu ze stavu excitovaného (s konečnou dobou života) do stavu základního \rightarrow viz Heisenbergovy relace neurčitosti: ³¹ stav j nemá přesně definovanou energii, ale je superpozicí stavů s energiemi okolo $E_j \dots$

\Rightarrow **Lorentzova fce, Lorentzovský profil spektrální čáry**: popisuje Lorentzovské rozšíření dané útlumovým faktorem Γ

$$L(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma}{4\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2}.$$

Profil tedy závisí výhradně na převrácené hodnotě životní doby oscilátoru ($1/\Gamma$ je charakteristický časový interval, ve kterém „oscilátor“ kmitá $\doteq 10^{-8}$ s \rightarrow přirozená šířka čáry cca $\Delta\lambda = 10^{-5}$ nm).

Parametr přirozeného útlumu můžeme vyjádřit jako

$$\Gamma_N = \Gamma_i + \Gamma_j, \quad \Gamma_i = \sum_{l < i} A_{il}, \quad \Gamma_j = \sum_{l < j} A_{jl},$$

kde A_{il}, A_{jl} jsou Einsteinovy koeficienty pro přechod $i \rightarrow l, j \rightarrow l$ (l jsou všechny hladiny nižší než i resp j). Šířka čáry vzniklé přechodem mezi 2 stavy bude tedy odrážet „šířku obou stavů“; rozdělení pravděpodobnosti do jednotlivých podstavů daného stavu má Lorentzovský tvar, kombinací 2 Lorentzovských profilů vznikne opět Lorentzovský profil. Z definice absorpčního profilu (*) pak plyne

$$\alpha(\nu) = \underbrace{\frac{\pi e^2}{mc} f_{ij}}_{\alpha_0} \underbrace{\frac{\frac{\Gamma}{4\pi^2}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2}}_{\phi(\nu)}.$$

Přirozený (zářivý) útlum může mít velký význam v astrofyzikálních situacích, hlavně pro silné čáry vznikající v oblasti nízké hustoty, např. L_α . Obvykle je však hustota větší, projevuje se tlakové aj. rozšíření \dots

§ Celkové rozšíření spektrální čáry ...

... je dáno rozšířením

- **přirozeným**
- **Dopplerovským** (termální, turbulentní)
- **tlakovým** = souhrnný název pro rozšíření dané obecně srážkami, zahrnuje se sem rozšíření **Starkovo** (dáno elektrickým polem okolních částic, můžeme ho dále rozdělit na dynamické a statistické) a **van der Waalovo** (způsobené vlivem neutrálních atomů na daný atom); souhrně lze říci, že poruchová fce energie je závislá na R , což je vzdálenost mezi absorbující a rušivou částicí, a může být aproximována mocninným vztahem

$$\Delta E = a/R^n,$$

kde a je konstanta a n celé číslo závislé na typu interakce ...

n	typ interakce a její vliv	rušivé částice
2	lineární Starkův jev, vodíkové čáry	protony, elektrony
4	kvadratický Starkův jev, většina čar horkých hvězd	elektrony
6	van der Waals, většina čar studených hvězd	neutrální H

- + případně Zeeman ³², rotační rozšíření ...

• Dopplerovské rozšíření

Jedná se o rozšíření dané termálními pohyby atomů a mikroturbulentními pohyby v plazmatu. Je-li plazma charakterizováno Maxwellovským rozdělením rychlostí s teplotou T a je-li ξ rychlost atomu ve směru k pozorovateli, pak pravděpodobnost nalezení atomu s rychlostí $(\xi, \xi + d\xi)$ bude

$$W(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi_0} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right)d\xi.$$

Výraz $\langle \xi^2 \rangle^{1/2}$ charakterizuje střední rychlost v jedné směrové komponentě. Komponenty jsou nezávislé, celková střední rychlost tedy bude $3\langle \xi^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$. Jelikož víme, že platí $\langle v^2 \rangle = 3kT/m \rightarrow \xi^2 = kT/m$. Přesným výpočtem dostaneme

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 W(\xi)d\xi = \xi_0^2/2$$

⇒ střední termální rychlost

$$\xi_0 = \xi_0^{th} = \frac{2kT^{1/2}}{m} = 12,85 \left(\frac{T}{10^4 A}\right)^{1/2} \text{ km/s},$$

kde A značí atomovou hmotnost. ³³ Odpovídající Dopplerovský posun tedy bude

$$\Delta\lambda_D = \frac{\xi_0}{c}\lambda = \frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}} = 4,301 \cdot 10^7 \lambda \sqrt{\frac{T}{A}}.$$

³² $\Delta\lambda = 4,7 \cdot 10^{-5} \lambda^2 H$, kde H je intenzita magnetického pole v gaussích; toto rozštěpení čar lze pozorovat pouze v oblastech, kde je intenzita magnetického pole cca 4000 gaussů, směřující radiálně ke slunečnímu povrchu ... vzhledem k tomu, že na Slunci je běžná intenzita magnetického pole kolem 2 gaussů a čára H_α je málo citlivá na magnetické pole, můžeme na Slunci pozorovat Zeemanovo rozštěpení pouze u čar kovů a v místech s vysokou intenzitou magnetického pole ...

³³ Např. pro vodík ($A = 1$) při 10000 K bude $\xi_0^{th} = 12,85$ km/s.

Celkové Dopplerovské rozšíření je konvolucí dvou Gaussovských fcí (tj. výsledek bude opět Gauss) od termálního a mikroturbulentního rozšíření; střední rychlost pak bude dána

$$\xi_0 = [(\xi_0^{th})^2 + (\xi_0^{mt})^2]^{1/2} = \left[\frac{2kT}{m} + (\xi_0^{mt})^2 \right]^{1/2}.$$

Mikroturbulentní rychlostí se míní rychlost nerozlišitelných zhustků plazmatu, o kterých předpokládáme, že se rovněž pohybují Maxwellovsky.

Mějme Dopplerovský posuv

$$\nu' = \nu(1 - \xi/c).$$

α_ν tedy v souř. sous. spojené s atomem bude

$$\alpha(\nu - \xi\nu/c),$$

konvoluce atomárního (přirozeného, Lorentzova) a Gaussova profilu bude

$$\alpha(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\nu - \xi\nu/c)W(\xi)d\xi.$$

Zavedeme dále frekvenční rozdíl v jednotkách Dopplerovské šířky (tj. škálování frekvence v Dopplerovských šířkách)

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D},$$

$\Delta\nu_D = \xi_0 \nu_0/c$ je tedy dopplerovský posuv/dopplerovská šířka čáry, $\nu' = \nu(1 - \xi/c)$. Konstanta útlumu v jednotkách Dopplerovské šířky bude

$$a = \frac{\Gamma}{4\pi\Delta\nu_D},$$

absorpční profil

$$\begin{aligned} \phi_\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\nu - \xi\nu/c)W(\xi)d\xi, \\ \phi_\nu &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} H(a, x) = \frac{U(a, x)}{\Delta\nu_D}, \end{aligned}$$

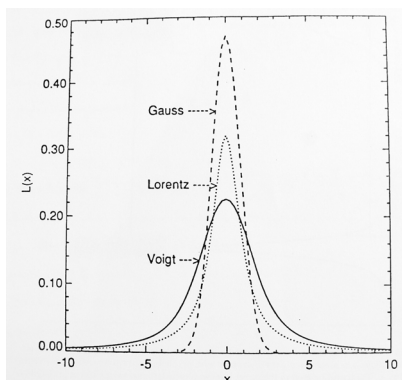
kde $H(a, x)$ je **Voightova fce**

$$H(a, x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(x - y)^2 + a^2}.$$

Nejde spočítat analyticky. $U(a, x)$ pak je normalizovaná Voightova fce ($\int_{-\infty}^{\infty} U(a, x)dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} H(a, x)dx = \sqrt{\pi}$). Absorpční koeficient tak nakonec bude ve tvaru

$$\alpha_\nu = \alpha_0 \phi_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f_{ij} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} H(a, x)$$

... jelikož zpravidla $a \ll 1$ a $G \sim e^{-x^2}$, $L \sim 1/x^2 \Rightarrow$ pro Voightův profil platí, že v jádře čáry dominuje Gauss, v křídle pak Lorentz.



• Starkovské rozšíření

V následujícím uvažujeme lineární Starkův jev pro atomy vodíku v el. poli blízkých iontů a volných elektronů ...

... degenerované podhladiny se posouvají úměrně síle pole → čarový profil se bude sestávat z několika Starkovských komponent daných přechody mezi spodními a horními podhladinami stavů, tj. rozšíření závisí na komponentách/subhladinách - musíme uvažovat síly oscilátorů pro jednotlivé subhladiny.

$I_k = f_k/f_{ij}$ bude intenzita pro přechod k -té komponenty. Platí samozřejmě $\sum_k I_k = 1$. Posuv dané komponenty bude $\Delta\lambda = C_k F$, kde C_k je interakční konstanta, F síla daného pole. Celkový absorpční profil v $\Delta\lambda$ tedy bude

$$S(\Delta\lambda) d(\Delta\lambda) \simeq \sum I_k W\left(\frac{F}{F_0}\right) \frac{dF}{F_0} = \sum I_k W\left(\frac{\Delta\lambda}{C_k F_0}\right) \frac{d(\Delta\lambda)}{C_k F_0},$$

kde W je distribuční fce, jež říká s jakou pravděpodobností naměříme v místě atomu danou intenzitu pole, F_0 je nominální hodnota pole závisející na hustotě částic, F je pak aktuální hodnota pole. Jestliže zavedeme parametr $\alpha = \Delta\lambda/F_0$, dostáváme normalizovaný profil

$$S(\alpha) d\alpha = \sum I_k W\left(\frac{\alpha}{C_k}\right) \frac{d\alpha}{C_k}$$

s normalizací $\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) d\alpha = 1$. Absorpční koeficient odpovídající tomuto profilu je

$$\alpha_\nu(\Delta\lambda) = \frac{\pi e^2}{mc} f_{ij} S\left(\frac{\Delta\lambda}{F_0}\right) \left(\frac{10^8 \lambda^2}{c F_0}\right),$$

ve frekvenčních jednotkách (přechod $\alpha \rightarrow \Delta\nu$) dostaneme

$$S(\Delta\nu) = \frac{10^8 \lambda^2}{c F_0} S(\alpha),$$

a konvoluce s Voightovým profilem dává

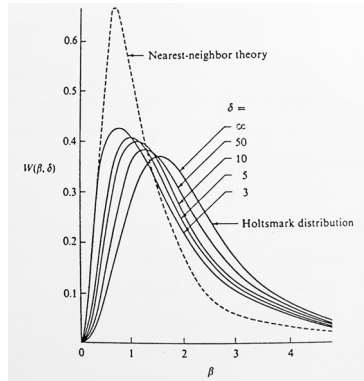
$$\alpha(\Delta\nu) = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{mc} f_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Delta\nu + v\Delta\nu_D) H(a, v) dv.$$

Fce $S(\Delta\nu + v\Delta\nu_D)$ obecně není Lorentzovská.

Obvykle počítáme se 2 typy Starkovského rozšíření:

- **impact broadening** - atom je zářivý oscilátor, k jehož narušení dochází při blízkém průletu částice. Nepružná srážka: mění se energetický stav atomu, přechod z hladin. × Pružná srážka: hladina se rozšíří polem prolétající částice, rozmaže se. Způsobují ho zejména elektrony a je popsáno Lorentzovským profilem (máme-li zářivý útlum se šířkou Γ_r a impaktní se šířkou Γ_i a jsou-li tyto nekorelované, pak výsledek bude dán konvolucí těchto dvou profilů, tj. opět bude Lorentzovský profil s $\Gamma = \Gamma_r + \Gamma_i$).

- **statistical broadening** - díky působení okolních iontů, nemá Lorentzovský profil. Zářící atom se nachází ve statisticky fluktuujícím poli „narušitelů“, jejichž pohyb je zanedbáván.³⁴ Hlavním problémem je určení pravděpodobnostního rozložení porušeného pole, k čemuž se užívají různé stupně aproximace, např. **nearest neighbor** = nejsilnější porucha (a tedy i frekvenční posun) je dána přítomností „nejbližšího souseda“. Lepší přiblížení poskytuje **Holtzmarkova teorie** = výsledek je dán superpozicí polí všech narušitelů.³⁵



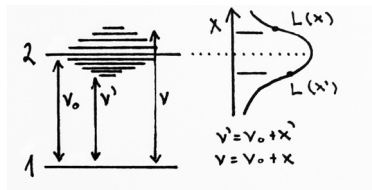
§ Redistribuční funkce

V dalším uvažujme otázku redistribucí, tj. přerozdělení v úhlu a frekvenci u fotonů rozptýlených mezi vázanými stavy v atomu.

Rozptyl záření: dojde k pohlcení fotonu (ν', \vec{n}') a vzápětí se v důsledku zářivé de-excitace vyzáří jiný foton (ν, \vec{n}); prakticky tak nedochází k výměně energie mezi polem záření a plazmatem.³⁶

Otázky: Jaká je změna frekvence při rozptylu fotonu? Jaký bude frekvenční rozdíl u fotonu v rámci tepelné emise vyzářeného a fotonu pohlceného?

Víme, že všechny excitované atomární hladiny jsou určitým způsobem rozšířeny - mají profil $L(x)$, který charakterizuje pravděpodobnost excitace atomu ze základního stavu do určité podhladiny x_i horního stavu.



³⁴ = kvazistatická aproximace dobrá pro popis efektů způsobených relativně pomalu se pohybujícími nabitými jádry ...

³⁵ Ze statistického rozložení elektrických polí narušitelů v souř. soust. spojené s atomem dostaneme

$$W(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty \exp(-y^{3/p}) y \sin(\beta y) dy,$$

kde $p = 2$ pro lineární Starkův jev, $\beta = F/F_0$, kde $F_0 = 2,603eN^{2/3}$ = tzv. normální pole, F je síla rušícího pole, N hustota částic ...

³⁶ Obecně tedy máme **absorpci** (při následné termalizaci = pravá absorpce), **emisi** (při předchozí srážkové excitaci = termální emise) a **rozptyl** ...

- a) pro srážkovou excitaci nebo ozáření frekvenčně nezávislým polem dochází k takovému stavu excitace, kdy atomy souboru budou do jednotlivých podhladin rozděleny s pravděpodobností $L(x) =$ přirozená excitace; následkem spontánní emise vznikne čára s profilem $L(\nu_0 + x)$ - např. Lorentzův profil
- b) při ozáření souboru atomů frekvenčně závislým polem záření (tj. např. ve tvaru spektrální čáry odpovídající přechodu $1 \leftrightarrow 2$) budou jednotlivé podhladiny stavu 2 obsazeny nerovnoměrně ...

... přesto ale existuje mechanismus schopný zajistit, že i přes „nerovnoměrnou“ excitaci bude mít emisní profil tvar $L =$ **pružné srážky** (nejčastěji s rychlými elektrony) - díky nim se vzbuzený elektron může vychýlit do jiné podhladiny, z níž vzápětí dojde k emisi ... tato redistribuce vede k emisi s profilem $L =$ **úplná redistribuce** (CRD) ³⁷ \times nedojde-li během rozptylu ke srážce = **koherentní rozptyl** (tj. $\nu' = \nu$)

V reálné plazmě se uplatňuje koherentní rozptyl i rozptyl s úplnou redistribucí \Rightarrow **částečná redistribuce** (PRD) záření ve spektrální čáře. Jinými slovy pokud je emitovaný foton kompletně nekorelovaný s předchozím absorbovaným fotonem, tj. absorbovaný foton je znovu vyzářen/redistribuován bez jakékoliv „vzpomínky“ na frekvenci, na které byl předtím pohlcen, hovoříme o CRD. (Pak lze užít ten samý profil pro absorpci, stimulovanou emisi i emisi spontánní.) Přesnější popis beroucí v úvahu korelaci mezi fotony pak poskytuje PRD. Tento přístup je důležitý např. pro silné rezonanční čáry (L_α) či při nízké hustotě.

PRD můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci předchozích případů

$$r(\nu', \vec{n}'; \nu, \vec{n}) = (1 - \alpha) r^{koh} + \alpha r^{kr},$$

kde $r(\nu', \vec{n}'; \nu, \vec{n})$ je výsledná pravděpodobnost přechodu $(\nu', \vec{n}') \rightarrow (\nu, \vec{n})$ při rozptylu, r^{koh} odpovídá koherentnímu rozptylu, r^{kr} kompletní redistribuci. Parametr α závisí na četnosti srážek; roste s ρ a T plazmatu.

V předchozím uvažujeme „osamocené“ atom - redistribuce pak záleží na struktuře hladin a přítomnosti „rušitelů“. Ovšem hvězdná atmosféra je soubor atomů pohybujících se náhodně s určitým rozdělením rychlostí. Pozorujeme-li výsledek v laboratorní soustavě, Dopplerův jev způsobený pohyby atomů také povede k redistribuci frekvencí (dochází k transformaci redistribučních funkcí, viz dále) \rightarrow celková redistribuční fce je kombinací těchto dvou efektů ...

Uvažujme RTE pro 2-level atom v následujícím tvaru

$$dI = \left(\underbrace{-n_1 B_{12} \phi(\nu) I}_{\text{absorpce}} + \underbrace{n_2 A_{21} \psi(\nu)}_{\text{spont. emise}} + \underbrace{n_2 B_{21} \psi(\nu) I}_{\text{stim. emise}} \right) \frac{h\nu_0}{4\pi}, \quad (\diamond)$$

kde $\psi(\nu)$ je emisní profil, $\phi(\nu)$ absorpční profil, n_1 počet atomů v základním stavu, jež jsou potenciálně schopné emitovat ... Profily udávají normovanou hustotu pravděpodobnosti pohlcení/vyzáření fotonu v intervalu frekvencí $(\nu, \nu + d\nu)$, v rámci spektrální čáry, která vzniká přechodem mezi stavy 1 - 2. (Platí normalizace $\int_0^\infty \psi(\nu) d\nu = 1$, $\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1$.) Pravděpodobnost absorpce v $(\nu, \nu + d\nu)$ bude úměrná $\phi(\nu) d\nu$, pravděpodobnost emise pak $\psi(\nu) d\nu$.

³⁷ Přináší velké zjednodušení, reálně odpovídá např. jádru čáry s čistě Dopplerovským rozšířením nebo pokud je čára silně tlakově rozšířena.

Obecně platí $\psi(\nu) \neq \phi(\nu)$; rozdíl mezi těmito dvěma profily je způsoben rozptylem záření s částečnou redistribucí. Pro úplnou redistribuci je emisní profil stejný jako absorpční (což je důsledek srážkového „přerozdělení“ vázaných elektronů v jednotlivých atomárních podhladinách). Jestliže k takovému přerozdělení nedojde (např. v řídké plazmě s nečetnými srážkami) \rightarrow rozptyl bude víceméně koherentní, emisní profil bude v sobě zahrnovat info o frekvenční závislosti dopadajícího záření (dochází k selektivní excitaci jednotlivých podhladin).

Rovnici (\diamond) lze přepsat na

$$\underbrace{\cos \vartheta}_{\mu} \frac{dI(\nu, \vec{n})}{d\tau_\nu} = I(\nu, \vec{n}) - S,$$

kde $d\tau_\nu = -(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})(h\nu_0/4\pi)\phi(\nu)ds$. Zdrojová fce je pochopitelně ve tvaru

$$S_\nu^L = \frac{\overbrace{A_{21}n_2\psi(\nu)}^{\eta_\nu}}{\underbrace{B_{12}n_1\phi(\nu)}_{\chi_\nu} - \underbrace{B_{21}n_2\psi(\nu)}_{\text{stim. emise}}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\left(\frac{g_1n_2}{g_2n_1}\rho(\nu)\right)}{1 - \left(\frac{g_1n_2}{g_2n_1}\rho(\nu)\right)},$$

kde $\rho(\nu) = \psi(\nu)/\phi(\nu)$, S^L znamená v čáře (Line);

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

jsou **Einsteinovy koeficienty**, fenomenologické konstanty zavedené pro popis pravděpodobnosti spontánních a stimulovaných zářivých přechodů (např. $B_{12}\varphi(\nu)$ vyjadřuje pravděpodobnost absorpce v dané frekvenci vztáženou na 1 atom); g_1 a g_2 jsou statistické váhy atomárních hladin. Vidíme, že stimulovaná emise se počítá do absorpce, ale s mínus!!!

Za předpokladu úplné redistribuce ze zdrojové fce dostáváme

$$S = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} \rightarrow S = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right]^{-1} \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1},$$

což platí přibližně se zanedbáním stimulované emise.

Jsou-li populace hladin rovnovážné, tj. platí LTE, pak $S_\nu = B_\nu$, neboť

$$S^L = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\left(\frac{g_1n_2}{g_2n_1}\rho(\nu)\right)}{1 - \left(\frac{g_1n_2}{g_2n_1}\rho(\nu)\right)} = \left| \text{LTE} : \frac{n_2^*}{n_1^*} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right| = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = B_\nu(T).$$

Pokud tedy $\psi = \phi$, pak S^L nezávisí na frekvenci, ale pouze na teplotě.

Emisní profil lze zapsat

$$\psi(\nu) = \frac{\int_0^\infty R(\nu', \nu) J(\nu') d\nu'}{\int_0^\infty \phi(\nu') J(\nu') d\nu'} = \frac{\int_0^\infty R(\nu', \nu) J(\nu') d\nu'}{\bar{J}},$$

kde $R(\nu', \nu)$ je **redistribuční funkce**.

Mějme klidovou soustavu atomu. Redistribuční fci lze zapsat jako výsledek frekvenční redistribuce $p(\xi', \xi)$, která udává pravděpodobnost, že foton absorpovaný v $(\xi', \xi' + d\xi')$

je rozptýlen do $(\xi, \xi + d\xi)$, a úhlové fázové funkce $g(\vec{n}', \vec{n})$ popisující pravděpodobnost rozptylu z prostorového úhlu $d\omega'$ ve směru \vec{n}' do prostorového úhlu $d\omega$ ve směru \vec{n} .³⁸

Nechť $f(\xi')$ je absorpční profil (v klidové soustavě atomu), nezávislý na směru a s normalizací $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi') d\xi' = 1$. Pravděpodobnost, že foton (ξ', \vec{n}') bude absorpován je

$$f(\xi') d\xi' \frac{d\omega'}{4\pi}.$$

Pravděpodobnost, že za podmínky, že máme absorpován foton (ξ', \vec{n}') , bude vyzářen foton (ξ, \vec{n}) je

$$p(\xi', \xi) d\xi g(\vec{n}', \vec{n}) \frac{d\omega}{4\pi}.$$

Spojená pravděpodobnost, že foton (ξ', \vec{n}) je absorpován a foton (ξ, \vec{n}) emitován je

$$f(\xi') p(\xi', \xi) g(\vec{n}', \vec{n}) d\xi' d\xi \frac{d\omega'}{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi}.$$

⇒

$$R(\nu', \vec{n}'; \nu, \vec{n}) d\nu' d\nu \frac{d\vec{n}'}{4\pi} \frac{d\vec{n}}{4\pi}, \quad (*)$$

charakterizuje pravděpodobnost přerozdělení frekvencí a směrů z $(\nu', \nu' + d\nu'; d\omega')$ do $(\nu, \nu + d\nu; d\omega)$ (v lab. soustavě).

$$\int_0^{\infty} \oint R(\nu', \vec{n}'; \nu, \vec{n}) d\nu' d\nu \frac{d\vec{n}'}{4\pi} \frac{d\vec{n}}{4\pi} = 1$$

Redistribuční fce tedy popisují úhlovou i frekvenční redistribuci záření; sledovat ale všechny detaily je mnohdy složité - v teorii formování spektrální čáry je důležitější frekvenční redistribuce → zavádí se úhlově vystředovaná r. fce

$$R(\nu', \nu) = 8\pi^2 \int_0^{\pi} R(\nu', \nu; \theta) \sin \theta d\theta,$$

kde θ je úhel mezi \vec{n}' a \vec{n} . Integrace přes frekvence pak probíhá jako

$$\int_0^{\infty} d\nu' \underbrace{\int_0^{\infty} R(\nu', \nu) d\nu}_{\phi(\nu')} = \int_0^{\infty} d\nu' \phi(\nu') = 1.$$

• Typy redistribučních funkcí (D.Hummer, 1962)

V následujícím označují r_I až r_V pravděpodobnost rozptylu různého typu v s. s. spojené s atomem.

$$r_I(\xi', \xi) = \underbrace{\delta(\xi' - \nu_0)}_{\text{prav. abs.}} \underbrace{\delta(\xi - \xi')}_{\text{prav. em.}}$$

... **koherentní rozptyl** (nulová přirozená šířka čáry), ξ je emisní frekvence v s. s. spojené s atomem, ξ' je absorpční frekvence ...

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi', \xi) d\xi' = 1, \quad \oint g(\vec{n}', \vec{n}) \frac{d\omega'}{4\pi} = 1.$$

$$r_{II}(\xi', \xi) = L_j(\xi' - \nu_0) \delta(\xi - \xi')$$

... zářivý útlum s koherencí (v s. s. atomu)

$$r_{III}(\xi', \xi) = L_j(\xi' - \nu_0) L_j(\xi - \nu_0)$$

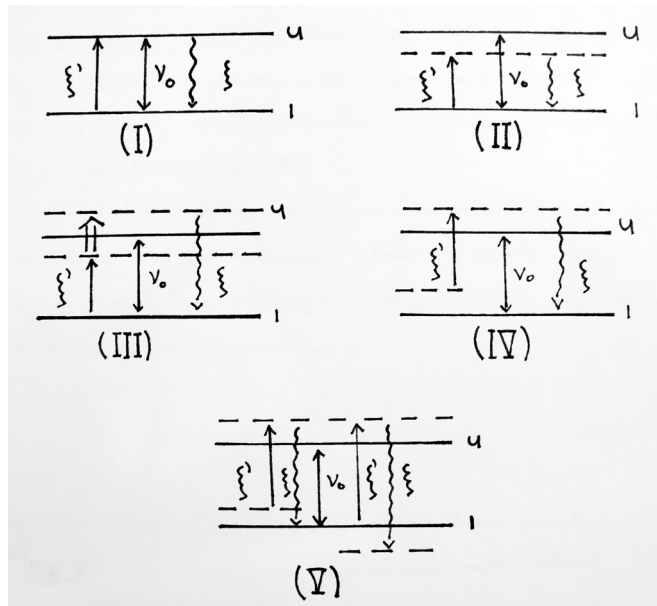
... CRD (v s. s. atomu)

r_{IV} je irelevantní, nemá fyzikální základ, rezonanční rozptyl

$$r_V(\xi', \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} L_j(\xi' - t) L_j(t - \nu_0) L_i(\xi - t) dt,$$

kde

$$L_j(\xi' - \nu_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta_j}{(\xi' - \nu_0)^2 + \delta_j^2}, \quad \delta_j = \frac{\Gamma_j}{4\pi}.$$



Obrázek schematicky znázorňuje podhladinu 2-level atomu při rozptylu. ξ' a ξ jsou absorpční a emisní frekvence, ν_0 je střední frekvence čáry. Dvojitá šipka znázorňuje srážkové rozmazání podhladin.

- I V podstatě nereálné. Idealizovaný atom se 2 nekonečně ostrými hladinami s přechodovou/rezonanční frekvencí ν_0 . V atomové s. s. žádná redistribuce.
- II Dolní hladina nekonečně ostrá, horní s konečnou dobou života, a tedy rozšířená (Lorentz). Bez srážek s okolními atomy, tj. žádné další rozmazání horní hladiny. Emitovaný foton tak bude mít stejnou frekvenci jako foton absorbovaný. Odpovídá přirozenému útlumu - fyzikálně reálné pro rezonanční čáry v látce s nízkou hustotou (L_α).³⁹

³⁹ **Rezonanční** čáry vznikají přechodem mezi základním a excitovaným stavem (Lyman), **subordinární** čáry vznikají přechodem obecně mezi dvěma excitovanými hladinami (Balmer, Paschen ...)

III Podobné jako II, ale horní podstavy rozmazány díky srážkám, což vede k likvidaci koherence mezi absorpovaným a emitovaným fotonem. Budou-li *pouze* srážky, pak elektrony budou kompletně náhodně rozděleny, nebude korelace mezi absorpovaným a emitovaným zářením, pravděpodobnost emise na dané frekvenci \sim obsazení podstavů = CRD.

II a III jsou tedy dva limitní případy, realita je někde mezi ...

Pro lepší vystižení reality dále musíme uvažovat efekty Dopplerova pohybu, dané pohybem atomu vzhledem k laboratorní soustavě, na fotonovou redistribuci.

Víme, že redistribuce je popsána vztahem (\star). Nyní uvažujme pohyb atomu s \vec{v} . Chceme popsat absorpci fotonu (ν', \vec{n}') měřenou v laboratorní soustavě s následnou emisí (ν, \vec{n}) opět měřenou v laboratorní soustavě. Zanedbáním aberace směrů při změně klidová s. atomu \leftrightarrow laboratorní s. s. dostaneme

$$\nu' = \xi' + \frac{\nu_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{n}, \quad \nu = \xi + \frac{\nu_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Spojená pravděpodobnost v klidové s. atomu je dána (viz dříve)

$$f(\xi') p(\xi', \xi) g(\vec{n}, \vec{n}') d\xi' d\xi \frac{d\omega'}{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi},$$

po transformaci dostaneme

$$R_v(\nu', \vec{n}'; \nu, \vec{n}) = f(\nu' - \frac{\nu_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{n}') p(\nu' - \frac{\nu_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{n}', \nu - \frac{\nu_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{n}) g(\vec{n}', \vec{n}),$$

kde index v značí, že redistribuce se vztahuje k atomu s \vec{v} .

Pro nalezení celkového efektu celého souboru atomů ale musíme průměrovat přes rozdělení rychlostí, tj. po zprůměrování přes Maxwellovské rozdělení rychlostí dostaneme laboratorní redistribuční fci, se kterou už lze v praxi dále pracovat:

$$R(\nu', \vec{n}'; \nu, \vec{n}) = g(\vec{n}', \vec{n}) \underbrace{\langle r(\xi', \xi) \rangle_{th}}_{atom. r. f.}.$$

Zde tedy $\xi' \rightarrow \nu'$ a $\xi \rightarrow \nu$.

• **Obecná redistribuční funkce**

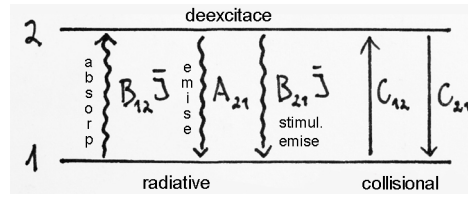
$$R(\nu', \nu) = \gamma R_V(\nu', \nu) + (1 - \gamma) R_{III}(\nu', \nu),$$

$$\gamma = \frac{P_j}{P_j + Q_E},$$

kde P_j je pravděpodobnost přechodu z hladiny pryč, Q_E odpovídá elastickým srážkám. Pro rezonanční čáry máme kombinaci extrémních případů

$$R = \gamma R_{II} + (1 - \gamma) R_{III}.$$

V reálu se na Slunci γ blíží 1 \rightarrow podstatná PRD \rightarrow v praxi se ukazuje, že s redistribucemi musíme počítat, nejsou zanedbatelné! Jinak vycházejí profily úplně jinak ...



§ 2-level atom

V následujícím budeme uvažovat idealizovaný případ dvouhladinového atomu, jenž nám poslouží jako základní model pro ukázání non-LTE line formation. V reálu jde o poměrně dobrou aproximaci např. pro silnou rezonanční čáru, která není příliš ovlivněna ostatními hladinami.

Schematická reprezentace procesů v 2-level atomu je na obrázku. Vidíme tedy, že celková pravděpodobnost zářivé deexcitace je $P_{21} = A_{21} + B_{21} \bar{J}$. P_{12} je dána fotoexcitací a je tedy \sim hustotě fotonů v okolí atomu; $P_{12} = B_{12} \bar{J}$, kde $\bar{J} = \int \phi_\nu J_\nu d\nu \dots$ viz předchozí části \dots

Absorpční a emisní koeficienty jsou dány

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu),$$

$$\eta_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu),$$

kde ν_0 je střední frekvence čáry, B_{12} , B_{21} , A_{21} jsou Einsteinovy koeficienty pro absorpci, stimuloanou a spontánní emisí pro zářivé přechody $1 \leftrightarrow 2$, n_1 , n_2 jsou populace hladin a $\phi(\nu)$ absorpční profil vyjadřující pravděpodobnostní hustotu, že je-li foton absorpován (emitován) v čáře 1 – 2, tak že jeho frekvence je v rozsahu $(\nu, \nu + d\nu)$; $\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1$.

Uvažujme podmínku CRD, tj. $\psi = \phi$, místo ψ máme ϕ . Je výhodné zavést bezrozměrnou frekvenci

$$x \equiv \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D},$$

kde $\Delta\nu_D$ je Dopplerovská šířka daná výrazem $(\nu_0/c)v_{th}$, kde v_{th} je termální rychlost daná výrazem $(2kT/m)^{1/2}$, kde m je hmotnost zářícího atomu \dots

Pro čistě Dopplerovský profil (tj. žádné další rozšíření, jediné rozšíření je díky tepelnému pohybu zářičů) máme Gaussovský absorpční profil

$$\phi(x) = \exp(-x^2)/\sqrt{\pi},$$

kde $1/\sqrt{\pi}$ je normovací faktor.

Pro obecnější případ s vnitřním rozšířením (přirozené, Starkovské \dots) popsaným Lorentzovským profilem dostaneme výsledný profil popsaný Voightovou fcí

$$\phi(x) = H(a, x)/\sqrt{\pi},$$

$$H(a, x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2 + a^2} dy,$$

kde a je útlumový parametr vyjádřený v Dopplerovských jednotkách $a = \Gamma/4\pi\Delta\nu_D$, kde Γ je útlumový parametr atomu (např. pro přirozené rozšíření čáry v 2-level atomu je $\Gamma = A_{21}$) \dots

Z předchozího tedy máme

$$S_\nu \equiv \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} \equiv S^L.$$

V dalším kroku se budeme zajímat o poměr n_2/n_1 , který vstupuje do zdrojové funkce. Z rovnice statistické rovnováhy (tj. počet přechodů $1 \rightarrow 2 =$ počet přechodů $2 \rightarrow 1$) dostaneme

$$n_1(R_{12} + C_{12}) = n_2(R_{21} + C_{21}),$$

kde R jsou zářivé „rates“ (četnosti, rychlosti: počty přechodů za 1s na 1 atom), C pak srážkové „rates“.

$$R_{12} = B_{12} \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \equiv B_{12} \bar{J},$$

$$R_{21} = A_{21} + B_{21} \int_0^\infty \bar{J} \phi(\nu) d\nu \equiv A_{21} + B_{21} \bar{J},$$

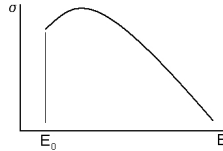
kde $\bar{J} = \int \phi(\nu) J_\nu d\nu$ je střední integrovaná (váhovaná intenzita). Celkem tak pro zářivé přechody dostáváme: $n_1 B_{12} \bar{J}$ a $n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J}$.

Srážkové členy lze napsat jako fce elektronové hustoty a teploty. Celková kolizní frekvence \sim rychlosti kolidujících částic; v LTE máme $(m_{proton}/m_{elektron})^{1/2} \sim 43 \rightarrow$ uvažujeme pouze elektrony

$$C_{12} = n_e \Omega_{12}(T),$$

$$\Omega_{12}(T) = \int_{v_0}^\infty \sigma_{12}(v) f(v) v dv,$$

kde σ_{12} značí účinný průřez srážky atomu s volným elektronem [cm^2]. Účinný průřez závisí na energii nalétající částice, viz obr.: E_0 odpovídá energii přechodu z 1. do 2. hladiny, v_0 odpovídá této energii dle $E_0 = v_0^2 m_e / 2$.



• **TE:** Počet kolizních přechodů směrem 1 = počtu kolizních přechodů směrem 2 (a tyto nezávisí na zářivých přechodech):

$$n_1^* C_{12} = n_2^* C_{21},$$

kde $(n_1/n_2)^*$ označují LTE poměr populací.

$$\frac{n_2^*}{n_1^*} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

tj.

$$c_{21} = c_{12} \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{h\nu}{kT}}. \quad (\dagger)$$

(Toto lze použít i pro NLTE, ale musí být Maxwellovské teplotní rozdělení.)

V TE samozřejmě také platí $n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 (A_{21} + B_{21} \bar{J})$, kde $\bar{J} = B(T) \dots$

- **NLTE:** Zde platí tzv. **statistická rovnováha**, kterou můžeme vyjádřit rovnicí

$$\frac{dn_i}{dt} = 0,$$

$$n_1 B_{12} \bar{J} + n_1 C_{12} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J} + n_2 C_{21},$$

tj. $n_1 C_{12}$ a $n_2 C_{21}$ už se nerovnají. Pro celkový počet atomů máme navíc pomocnou rci $N = n_1 + n_2$, \bar{J} se musí určit za současného řešení RTE \Rightarrow

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S^L$$

$$S^L = \frac{\eta}{\kappa} = \frac{n_2 A_{21} \psi(\nu)}{n_1 B_{12} \phi(\nu) - n_2 B_{21} \psi(\nu)},$$

ovšem platí předpoklad CRD, tj. $\psi(\nu) = \varphi(\nu)$,

$$S^L = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}},$$

tj. $S^L \sim n_2/n_1$. S uvážením relací pro Einsteinovy koeficienty dostaneme

$$S^L = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1 \right)^{-1}.$$

Nyní uijeme rci statistické rovnováhy

$$n_1 (B_{12} \bar{J} + C_{12}) = n_2 (A_{21} + B_{21} \bar{J} + C_{21}),$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{A_{21} + B_{21} \bar{J} + C_{21}}{B_{12} \bar{J} + C_{12}}.$$

Za použití $B_{12} = B_{21} g_2/g_1$ a (†) pro C_{21} a C_{12} tedy dostaneme

$$\frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} = \frac{A_{21} + B_{21} \bar{J} + C_{21}}{B_{21} \bar{J} + C_{21} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Po dosazení do výrazu pro S^L

$$S^L = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{A_{21} + B_{21} \bar{J} + C_{21}}{B_{21} \bar{J} + C_{21} e^{-\frac{h\nu}{kT}}} - 1 \right)^{-1},$$

$$S^L = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{B_{21} \bar{J} + C_{21} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{A_{21} + B_{21} \bar{J} + C_{21} - B_{21} \bar{J} - C_{21} e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \right), \quad / \cdot A_{21}/A_{21}$$

$$S^L = \frac{\frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{B_{21}}{A_{21}} \bar{J} + \frac{C_{21}}{A_{21}} \cdot \frac{2h\nu}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 + \frac{C_{21}}{A_{21}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)},$$

$$S^L = \frac{\bar{J} + \frac{C_{21}}{A_{21}} \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 + \frac{C_{21}}{A_{21}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)},$$

$$S^L = (1 - \varepsilon) \bar{J} + \varepsilon B_\nu(T), \quad (\spadesuit)$$

kde

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'}, \quad \varepsilon' = \frac{C_{21}}{A_{21}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right).$$

V rámci spektrální čáry, která je úzká, lze závislost B na ν zanedbat. V typickém případě je $h\nu/kT \gg 1$ ⁴⁰ → lze psát

$$\varepsilon \cong \frac{C_{21}}{A_{21} + C_{21}},$$

což lze interpretovat jako tzv. pravděpodobnost zničení (destruction probability) = pravděpodobnost, že absorpovaný foton je zničen kolizním deexcitačním procesem dřív, než je znovu vyzářen ...

(♠) je fundamentální rovnice problému. První část pravé strany reprezentuje fotony vytvořené rozptylem (emise následující předchozí absorpci), druhá část pak tepelné vytvoření fotonu (emise následující předchozí srážkové excitaci). Matematicky je to lin. fce střední intenzity. Platí pro 2-level, ne obecně pro multilevel.

1. n_e je „malá“

$C_{21} \ll A_{21}$, tj. deexcitace hlavně zářením

$\varepsilon \rightarrow 0$ a $S^L \rightarrow \bar{J}$ (pole záření determinuje poměr hladin, tj. i zdrojovou fci)

⇒ silné NLTE

2. n_e je „velká“ (např. sluneční fotosféra)

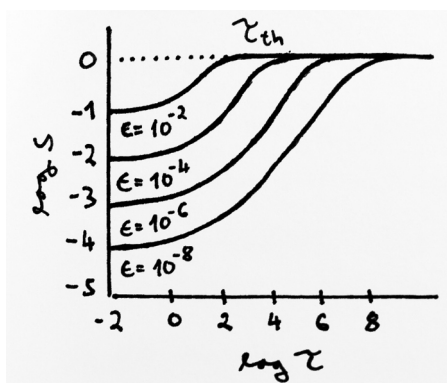
$C_{21} \gg A_{21}$

$\varepsilon \rightarrow 1$ a $S^L \rightarrow B(T)$

⇒ podmínka LTE

V dalším uvažujme polonekonečnou vrstvu, která je homogenní (tj. T , ρ resp. ε , B a $\phi(x)$ jsou nezávislé na hloubce).

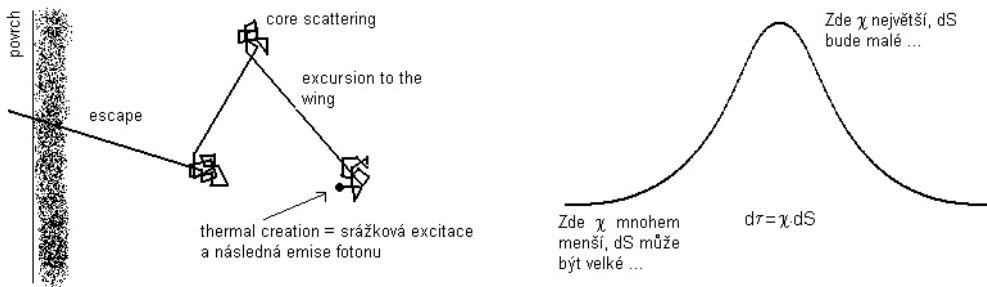
Povrchová hodnota zdrojové fce bude $S(0) = \sqrt{\varepsilon}B$. V jisté hloubce se však začíná odklánět od $B =$ **termalizační hloubka** (tradičně značena jako Λ nebo τ_{th} ; hodnota závisí na profilu - např. pro Dopplera $\Lambda \approx 1/\varepsilon$, pro Voighta $\approx a/\varepsilon^2$...) Tj. S klesá k povrchu; klesá od B tím více, čím je menší ε . Na obrázku je zdrojová fce pro 2-level atom v polonekonečné atmosféře pro různé hodnoty destrukčního parametru, B je normalizováno na 1.



⁴⁰ Typické rezonanční čáry, pro které je 2-level aproximace adekvátní spadají do UV → ν je velká ...

Proč zdrojová fce k povrchu klesá? Víme, že máme-li homogenní medium, tak že odchylky od LTE rostou díky přítomnosti hranice přes kterou fotony unikají. Tam kde „necítí“ hranici jsou mikroskopické procesy v detailní rovnováze. Jakmile „ucítí“ hranici, tak fotoexcitace není vyrovnána zářivou deexcitací. Jelikož absorpce záleží na počtu přítomných fotonů, zatímco spontánní emise nikoliv (stimul. zanedbáváme), tak počet zářivých excitací začne proti počtu deexcitací klesat. Spodní hladina bude mít nadměrnou populaci, horní naopak nedostatečnou (ve vztahu k LTE). Jelikož zdrojová fce měří počet fotonů vytvořených na jednotku optické hloubky, a protože počet vytvořených fotonů je úměrný populaci horní hladiny → zdrojová fce klesá pod Planckovu fci.

Jak to, že hloubka kde se zdrojová fce odklání od Planckovi je tak velká? (např. $\tau \sim 10^6$ pro $\varepsilon = 10^{-6}$) Jak to, že foton „cítí“ hranici už v takové hloubce? Vysvětlení závisí na tom, že „průměrný“ foton není ten, který je zodpovědný za transport a únik fotonů. Uvažujme foton, jenž byl vytvořen ve velké optické vzdálenosti od hranice. Tento foton bude mít s velkou pravděpodobností frekvenci blízko středu čáry (neboť pravděpodobnost je dána tvarem abs. profilu $\phi(x)$, jenž má max. okolo $x = 0$) → monochromatická optická hloubka je velká → fyzická vzdálenost, kterou foton urazí před další absorpcí bude malá! Následuje mnoho podobných rozptylů, kdy foton prakticky zůstává na místě. Občas ovšem foton může být reemitován v křídle „čáry“ → může urazit velkou vzdálenost. To, co tedy „zodpovídá“ za přenos, jsou ne příliš časté „exkurze do křídla“. Termalizační hloubka je tedy velká, neboť je dána fotony z křídla čáry, které mají velkou střední volnou dráhu.



Z předchozího též plyne závislost termalizační hloubky na pravděpodobnosti zničení $1/\varepsilon$ - celkový počet rozptylů je řádu $1/\varepsilon$, neboť jestliže foton „neuteče“ než absolvuje $1/\varepsilon$ rozptylů, tak je zničen srážkovým procesem, tj. „necítí“ hranici ...

8.4 Modelování atmosfér

Model atmosféry = specifikování všech atmosférických stavových parametrů jako fci hloubky (geometrické nebo optické ev. jako fci sloupcové hmoty $dm = -\rho dz$). Problém je ovšem velmi složitý → nelze sestavit analytické řešení → diskretizujeme hloubkové souřadnice a uvažujeme konečný počet hloubek (typicky desítky až stovky). Výsledkem je „tabulka“ hodnot stavových parametrů v různých hloubkách. Ovšem jedná se pouze o stavové parametry hmotných částic, ne záření ... Ovšem záření je samozřejmě důležité pro konstrukci, intenzita je zásadní parametr; máme-li ale všechny potřebné materiálové vlastnosti, pole záření je jednoduše určitelné formálním řešením RTE ...

Základní typy modelů hvězdných atmosfér:

- **statické modely** jsou konstruované za podmínky hydrostatické rovnováhy, tj. makroskopická rychlost je malá ve srovnání s termální rychlostí atomů; vrstvy, kde to platí se tradičně nazývají hvězdné fotosféry. Základní vstupní parametry jsou efektivní teplota T_{eff} , povrchová gravitace g resp. $\log g$ a chemické složení. Kromě toho mohou existovat přídavné vstupní parametry jako mikroturbulentní rychlost ...
 - **LTE grey:** jsou nejjednodušší, opacita je nezávislá na frekvenci ($\chi \neq \chi(\nu)$), dnes užívány pouze pro prvotní odhady a z pedagogických důvodů ...
 - **LTE:** $T(z)$ z podmínky zářivé rovnováhy a $\rho(z)$ z podmínky hydrostatické rovnováhy popisují stav atmosféry v jakékoliv hloubce
 - **NLTE:** popisují cokoliž jež má odchylky od LTE, existují dva základní typy:
 - modely řešené pro celou strukturu atmosféry
 - omezený NLTE problém, kdy předpokládáme, že struktura atmosféry je známa z předchozích kalkulací, tj. pouze se zároveň řeší přenos záření a statistická rovnováha pro vybraný atom/ion
 - **NLTE line-blanketed models:** v podstatě patří k předchozí části, ovšem zde je NLTE uvažováno pro prakticky všechny energetické hladiny a přechody mezi nimi - tyto ovlivňují strukturu atmosféry; počty čar mohou jít do miliónu → extrémně náročné na hardware a výběr výpočetních metod ...
- **unifikované modely** uvažují i záření hnaný hvězdný vítr, počítá se fotosféra i vítr dohromady (zmírňují a priori předpoklad hydrostatické rovnováhy - zacházejí s celou atmosférou od statických fotosfér po vysoce dynamický vítr; selfkonzistentně se řeší hydrodynamické rce a RTE, což je značně obtížné ...)
- **semiempirické modely** např. VAL model pro Slunce (1981) ...

• Základní rovnice klasických hvězdných atmosfér

Classical stellar atmosphere problem = případ horizontálně homogenní planparalelní a statické atmosféry.

- **RTE** → J_ν : nevhodnější je tvar rce 1. řádu

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu,$$

nebo tvar rce 2. řádu s Eddingtonovým faktorem

$$\frac{d^2(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu.$$

Máme tedy střední intenzitu J_ν , což je fce frekvence a hloubky, ne specifickou intenzitu, jež je navíc fce úhlu μ . Do ostatních strukturních rovnic vstupuje střední intenzita, jež je tedy stavovým parametrem a pro nás podstatná, ne specifická ...

• **Rce hydrostatické rovnováhy** $\rightarrow N$:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

kde p je celkový tlak. Zavedeme-li sloupcovou (Lagrangeovu) hmotu (hmota sloupce o průřezu 1 cm^2 nad daným bodem)

$$dm = -\rho dz,$$

dostaneme

$$\frac{dp}{dm} = g.$$

Protože g je v planparalelní atmosféře konstantní, řešení této rce je jednoduše

$$p(m) = mg + p_0$$

(což je také důvod, proč obvykle bereme m jako základní hloubkovou proměnnou v 1D planparalelní atmosféře). Nicméně celkový tlak se skládá ze tří částí - tlaku plynu p_{gas} , tlaku záření p_{rad} a turbulentního tlaku p_{turb} , tj.

$$p = p_{gas} + p_{rad} + p_{turb} = NkT + \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty K_\nu d\nu + \frac{1}{2} \rho v_{turb}^2$$

\rightarrow rci hydrostatické rovnováhy tedy lze zapsat (se zanedbáním p_{turb})

$$\frac{dp_{gas}}{dm} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dm} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu d\nu,$$

kde výraz $g - (4\pi/c) \int_0^\infty (dK_\nu/dm)$ představuje efektivní gravitační zrychlení ...

• **Rce zářivé rovnováhy** $\rightarrow T$: celkový zářivý tok se zachovává, tj.

$$\int_0^\infty H_\nu d\nu = const = \frac{\sigma}{4\pi} T_{eff}^4.$$

S pomocí RTE lze psát

$$\int_0^\infty (\kappa_\nu J_\nu - \eta_\nu) d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu (J_\nu - S_\nu) d\nu,$$

což je podmínka zářivé rovnováhy. (Předchozí rce obsahuje termální absorpční koeficient κ_ν , ne celkový χ_ν ; je to proto, že příspěvky od rozptylu záření nezapočítáváme (absorpce následovaná okamžitě reemisí fotonu nemění energetickou rovnováhu látky, nemůže přispívat do rce zář. rovnováhy).)

- **Statistické rce** $\rightarrow n_i$: jde o explicitní vyjádření srážkového členu

$$n_i \sum_{j \neq i} (R_{ij} + C_{ij}) = \sum_{j \neq i} n_j (R_{ji} + C_{ji}),$$

kde R_{ij} , C_{ij} jsou zářivé a srážkové rates pro přechod z hladiny i do j . Tj. počet všech přechodů z hladiny i ven (levá část) = počtu všech přechodů do hladiny i ze všech ostatních hladin (pravá část).

Obecně máme **Equations of Statistical equilibrium** (ESE) pro dynamickou atmosféru

$$\frac{\partial n_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{ik} \vec{v}) = \sum_{j \neq i} (n_{jk} P_{ji} - n_{ik} P_{ij}),$$

kde vlevo 1. člen popisuje vývoj populací, 2. hustotu rychlosti tj. tok stavů; k je index chemického prvku ($N_k = \sum_i n_{ik}$ je počet všech atomů ve všech možných stavech), $P_{ij} = R_{ij} + C_{ij}$ značí „total rate“. Po vysčítání přes stavy i a pak správně přes prvky (váhované atomární hmotností) dostaneme rci kontinuity

$$\underbrace{\frac{\partial N_k}{\partial t} + \nabla \cdot (N_k \vec{v}) = 0 \quad \rho = \sum_k m_k N_k}_{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.}$$

+ soustava rate equations pro všechny hladiny atomu není nezávislý systém, tj. jedna rce systému musí být nahrazena jinou, aby byl systém uzavřený, a to např.

- **total number conservation equation** (abundance definition equation)

$$\sum_i n_i = N_{atom}$$

nebo **rcí zachování náboje**, jež vyjadřuje celkovou elektrickou neutralitu látky

$$\sum_i n_i Z_i - n_e = 0,$$

kde Z_i je náboj i -té hladiny, sumace probíhá přes všechny hladiny všech prvků.

Kromě toho je zde několik pomocných rovnic, např. definiční rce absorpčního a emisního koeficientu.

Absorpční koeficient

$$\begin{aligned} \chi_\nu = & \sum_i \sum_{j>i} [n_i - (g_i/g_j)n_j] \sigma_{ij}(\nu) + \sum_i (n_i - n_i^* e^{-h\nu/kT}) \sigma_{ik}(\nu) + \\ & + \sum_k n_e n_k \sigma_{kk}(\nu, T) (1 - e^{-h\nu/kT}) + n_e \sigma_e, \end{aligned}$$

kde 1. část charakterizuje příspěvek vázaně-vázaných přechodů (tj. absorpce v čarách), 2. příspěvek vázaně-volných přechodů (tj. ionizace, kontinuum), 3. příspěvek volně-volných přechodů a poslední rozptyl na volných elektronech. Negativní části výrazů 1-3 odpovídají stimulované emisi, $\sigma(\nu)$ jsou odpovídající účinné průřezy, index k značí kontinuum.

Emisní koeficient

$$\eta_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\sum_i \sum_{j>i} n_j (g_i/g_j) \sigma_{ij}(\nu) + \sum_i n_i^* \sigma_{ik}(\nu) e^{-h\nu/kT} + \sum_k n_e n_k \sigma_{kk}(\nu, T) e^{-h\nu/kT} \right],$$

což odpovídá emisi v čarách + emisi v kontinuu + free-free emisi ...

Rce	Odpovídající stavový parametr
- přenos záření	- střední intenzita, J_ν
- zářivá rovnováha	- teplota, T
- hydrostatická rovnováha	- celková hustota částic, N
- statistická rovnováha	- populace, n_i
- zachování náboje	- elektronová hustota, n_e

• Opakovací příklad: Modelování profilů čar ve slunečních erupcích

Z důvodu nízké hustoty plazmatu v erupcích je nutné k modelování čar z těchto oblastí použít NLTE model, tedy model který nepočítá s lokální termodynamickou rovnováhou.

Tento model vychází ze tří základních rovnic. Je to rovnice přenosu záření

$$\frac{dI}{ds} = \eta(\nu) - \chi(\nu)I(\nu),$$

kde specifická intenzita $I(\nu)$ závisí především na frekvenci ν , směru šíření záření n , pozici r a čase t . Explicitně je vyjádřena pouze závislost na ν , protože je v NLTE nejpodstatnější. Změna $I(\nu)$ podél diferenciální optické dráhy ds je výsledkem vlastností plazmatu, které jsou v daném místě popsány emisním koeficientem $\eta(\nu)$ a absorpčním koeficientem $\chi(\nu)$.

Dále je třeba řešit rovnici statistické rovnováhy, která popisuje excitační a ionizační rovnováhu v dané směsi atomů. Řešení této rovnice udává populaci atomárních hladin pro všechny kvantové stavy. Základní tvar rovnice statistické rovnováhy je

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum [n_j(R)ij + C_{ij}] - n_i(R_{ij} + C_{ij}),$$

kde n_i a n_j jsou populace atomárních hladin i, j , R_{ij} jsou „radiative rates“, které závisí na poli záření a C_{ij} jsou „collisional rates“ pro neelastické srážky. Většina modelů předpokládá stacionární stav, tj. že člen dn_i/dt je roven nule.

Pro každou hladinu v atomu máme jednu rovnici statistické rovnováhy. Abychom však mohli tento systém rovnic uzavřít, potřebujeme o ještě jednu tzv. uzavírací rovnici. Můžeme použít rovnici zachování počtu částic ve tvaru

$$\sum n_i + n_e = N = \frac{p_g}{kT}$$

kde N je celkový počet částic (atomů, iontů a elektronů), p_g je tlak plynu a T je teplota plazmy. Počet elektronů (n_e) můžeme určit ze zákona zachování náboje a teplotu T je teoreticky možno odhadnout ze zákona zachování energie. Největším problémem je určit tlak plynu ve slunečních erupcích, je to možné pouze řešením rovnic magnetohydrodynamické rovnováhy. Z důvodu zjednodušení se proto počítá s izobarickými a izotermickými modely.

Řešení nelineárních NLTE rovnic pro vícehladinový atom je numericky složitý problém. V současné době se k řešení používá metoda urychlených lambda iterací.

Je zřejmé, že vlastnosti NLTE modelu nejsou dány pouze výše uvedenými rovnicemi. Je třeba přidat okrajové podmínky, jako je např. geometrie modelovaného jevu, pole rychlostí a dopadající pole záření.

Nejjednodušší model, který si můžeme představit je jednodimenzionální vrstva plazmy s geometrickou tloušťkou D , která je kolmá ke slunečnímu povrchu, což znamená že dopadající pole záření je symetrické.

V nejjednodušším případě předpokládáme, že erupce je osvětlena klidným Sluncem, pro nějž je jednoduché získat přesná data. Pro přesnější model by však bylo nutné, abychom brali v úvahu aktuální situaci na slunečním povrchu pod pozorovaným jevem. Je to nutné z toho důvodu, že výsledná intenzita záření v čáře H_α je velice citlivá na množství dopadajícího záření, což platí zejména v řídké plazmě, kde rozptýlené záření hraje velice významnou roli v porovnání s excitací atomů srážkami.

Literatura a zdroje

- Harmanec P., Základy astronomie a astrofyziky II, interní materiál k přednášce AST007, AU MFF UK, 2005
- Hubeny I., Stellar Atmospheres Theory: An Introduction. Studijní text k lekcím na 9th European Astrophysical Doctoral Network Summer School
- Mihalas D., Stellar Atmospheres. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1970
- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002
- Mikulášek Z., Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav, Skripta kurzu, PřF MU, Brno 2000
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Hvězdné atmosféry, Doc. RNDr. Petr Heinzl, DrSc., 2004

Kapitola 9

Stavba a vývoj hvězd

Hvězdy - přehled observačních výsledků: Fotometrické systémy, magnitudy. Určování hmotností kosmických objektů, dynamická paralaxa, funkce hmotnosti. Určování rozměrů hvězd, efektivní teplota, úhlové průměry. Teploty hvězd, spektrální klasifikace. Hertzsprungův-Russellův diagram (HRD). Vztah hmotnost - zářivý výkon.

Vnitřní stavba hvězd: Jaderné reakce ve hvězdách, přenos energie, stavové rovnice hvězdné látky. Rovnice modelů vnitřní stavby hvězd. Vývoj hvězd, vývojové stopy v HRD, závěrečné fáze hvězdného vývoje. Pulsace hvězd. Příčiny proměnnosti hvězd.

- Hertzsprungův-Russellův diagram v různých souvislostech (velikosti a hmotnosti hvězd, vývojové stopy hvězd, klasifikace a rozmístění proměnných hvězd v HRD)
- Nitro hvězd – jaderné reakce (typy reakcí, podmínky pro jejich zahájení a udržování, závislost na stavových veličinách)
- Střední částicová hmotnost, stavová rovnice hvězdné látky a její limitní případy
- Nitro hvězd – přenos energie (zářivý, konvektivní, Schwarzschildovo kritérium ...), opacita (příčiny, teplotní závislost ...)
- Rovnice modelů vnitřní stavby hvězd, jednoduché modely vnitřní stavby hvězd
- První tři rovnice vnitřní stavby hvězd – rovnice zachování hmoty, pohybová rovnice a rovnice hydrostatické rovnováhy jako její limitní případ
- Řešení rovnic vnitřní stavby, ne/závisle proměnné, okraj. podm., Heneyova metoda
- Vývoj hvězd v HR diagramu v závislosti na hmotnosti hvězd, základní testy shody teorie vývoje hvězd s pozorováním
- Pozdější vývojová stadia hvězd – stavba a vývoj v oblasti obrů a veleobrů, role nukleárního hoření ve slupkách, hvězdný vítr, pulsace hvězd a hlavní typy pulsujících hvězd, novy, supernovy, planetární mlhoviny, bílí trpaslíci, pulsary

9.1 HRD ve fyzikálních souvislostech

Absorpci či emisi záření v astrofyzikálních úlohách obvykle omezujeme na děje, které probíhají v atomu/molekule při pohlcení/vyzáření kvanta o $E = h\nu$; tyto děje lze označit jako přechody elektronů mezi různými hladinami energie resp. přechody atomů/molekul mezi různými stavy = **excitace** a **ionizace**.

§ Excitace, Boltzmannova rovnice

Udává rozdělení atomů v jednotlivých stavech při TDM rovnováze, můžeme zjistit poměr počtu atomů v základním stavu k počtu atomů jež jsou excitovány na vyšší energetické hladině.

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n} \exp \left[- \frac{E_m - E_n}{kT} \right]$$

g_n, g_m jsou tzv. statistické váhy (udávají kolika způsoby se do daného stavu lze dostat), tj. vlastně degenerace (pro vodík je $g = 2n^2$, kde n je číslo hladiny, pro ostatní prvky platí $g = 2j + 1$, kde j je celkový moment hybnosti atomu); T je tzv. excitační teplota. Viz též část Obecná fyzika.

§ Ionizace, Sahova rovnice

Pohltní-li atom kvantum, jehož energie se rovná nebo převyšuje energii nutnou k uvolnění elektronu, který je v jisté hladině, nastává ionizace. Sahova rovnice udává rozdělení ionizovaných a neutrálních atomů při TDM rovnováze (udává stupeň ionizace, který můžeme očekávat v plynu v tepelné rovnováze).

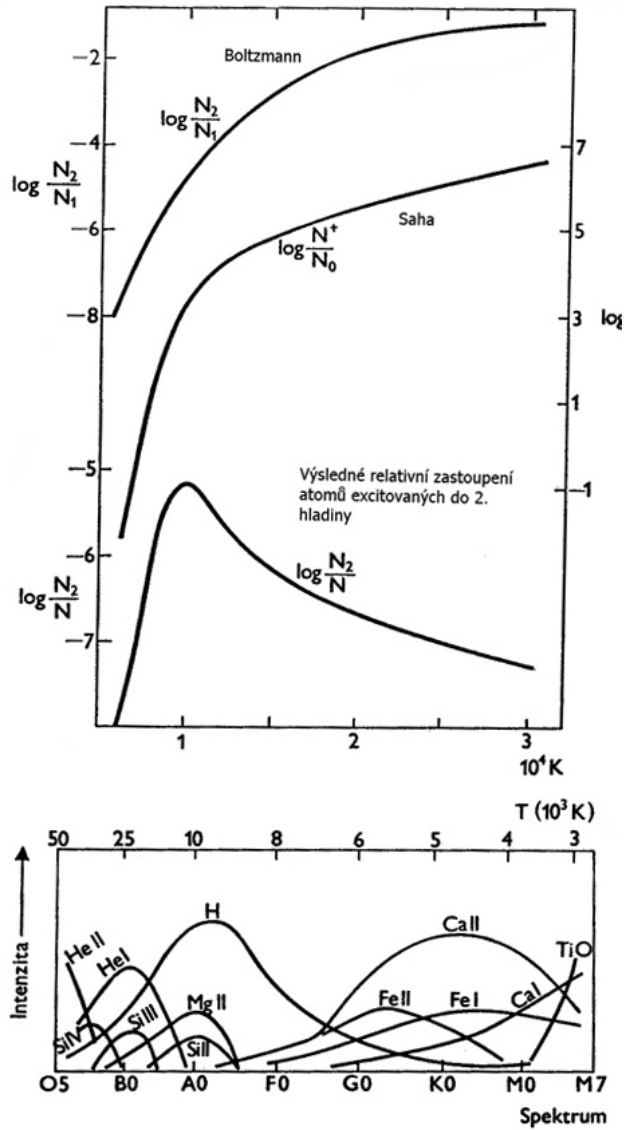
$$\frac{N_i}{N_0} = \frac{(kT)^{5/2}}{N_e} \exp \left[- \frac{E_i}{kT} \right]$$

E_i ionizační potenciál (energie potřebná k odtržení vnějšího elektronu od atomu, např. pro vodík 13,6 eV), N_e je hustota volných elektronů (\sim elektronovému tlaku $P_e = N_e kT$). Relativní zastoupení těžších prvků v atmosférách hvězd je oproti vodíku a heliu nízké, tj. při výpočtu poměru počtu ionizovaných atomů k neutrálním je vhodné počítat tak, že se vytvoří 4 skupiny: v první je helium, v druhé vodík, ve třetí a čtvrté jsou ostatní hojněji zastoupené prvky s přibližně stejným ionizačním potenciálem (Fe, Si, Mg, Ni a Al, Ca, Na).

§ Excitace a ionizace vodíku, vztah ke spektrální klasifikaci

Velmi důležitým kritériem pro zařazení hvězdy do určité spektrální třídy je výskyt Balmerovy série vodíku ve spektru hvězdy. Aby vznikla čára Balmerovy série, musí být elektron přenesen z druhé hladiny do nějaké vyšší. Ve hvězdných atmosférách s teplotou nižší než cca 10000 K lze ionizaci zanedbat, k výpočtu obsazení hladin použijeme Boltzmannovy rovnice; výsledek: poměr N_2/N_1 stoupá v závislosti na T od 10^{-10} při cca 5000 K do $3 \cdot 10^{-5}$ při 10000 K.

Se stoupající teplotou ale současně stoupá počet ionizovaných atomů, od určité teploty se přihlásí ionizace, která naexcitované atomy „likviduje“ (viz obr.) \rightarrow maximum intenzity čar vodíku někde u 10000 K, pak pokles (absorpční čáry Balmerovy série jsou skutečně nejvýraznější u hvězd typu A0 s teplotou atmosféry cca 10000 K).



Podobně to funguje pro další prvky, jen maxima jsou posunuta k různým teplotám (viz obr). Na tom je založena spektrální klasifikace!!!

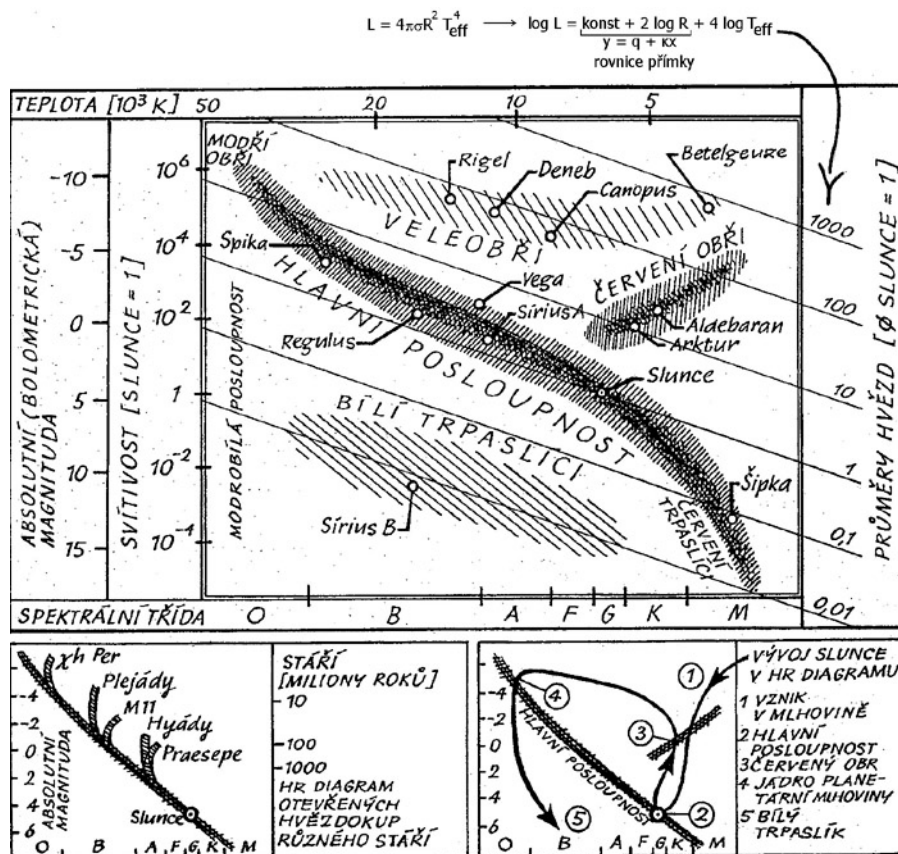
	O	B	A	F	G	K	M
Barva	modro bílá	modro bílá	bílá	žluto bílá	žlutá	oranž.	červ.
B-V	-0,45	-0,20	0	+0,4	+0,6	+1,0	+1,5
M_V	-6	-3,7	+0,7	+2,8	+4,6	+5,2	+8,9
T_{eff} [K]	35 000	21 000	10 000	7 200	6 000	4 700	3 300
Pozorováno v %	2,5	26,7	11,0	16,7	16,7	35,4	7,6
Skutečné rozděl. v %	0,03	0,6	0,2	9,3	9,3	39,1	50,0
Spektra	HeII HeI	HeI HI	HI (Balmer)	HI, CaII Ti, Fe	CaII HI	CaI HI	TiO CaI

§ HRD

Hertzsprungův-Russelův diagram = spektrální typ vs. svítivost (v původní publikaci), stavový diagram = T_{eff} vs. L , barevný diagram = B-V vs. M

Vyjadřuje vztah mezi povrchovou teplotou hvězdy a jejím výkonem/zářivostí. Pokrytí diagramu není rovnoměrné, neboť libovolnému bodu nemusí odpovídat skutečná hvězda – zákony fyziky nepřipouštějí všechny dvojice.

Body v diagramu, z nichž každý představuje jednu hvězdu, se seskupují podél dvou zřetelných větví, odpovídajících dvěma velkým skupinám: první, v níž se svítivost postupně zmenšuje od třídy O ke třídě M, a druhé, v níž je svítivost vždy vysoká a mírně se mění se spektrálním typem. První tvoří **hlavní posloupnost** (na ní asi 90% hvězd z našeho okolí), druhá je **větev obrů**. (Tyto dvě skupiny jsou zcela zřejmě odděleny ve třídách K a M, zde jsou pouze velmi jasné hvězdy a velmi slabé hvězdy s poměrem svítivosti nejméně 10000:1.) Ve všech spektrálních třídách se rovněž nalézá malý počet hvězd ještě mnohem jasnějších než jsou obři = veleobři. Jednu nebo dvě magnitudy pod hlavní posloupností se nachází podtrpaslíci a velmi daleko pod hlavní posloupností se nalézá několik velmi slabých, ale hmotných hvězd = bílí trpaslíci.



HRD pro hvězdokupy viz též str. 259. Proměnné hvězdy v HRD, viz str. 267.

Podrobný popis jednotlivých typů hvězd etc. viz část „Typy pozorovaných hvězd“ ...

9.2 Nitro hvězd – Úvod, obecné fyzikální zákonitosti

Proč hvězdy vydrží bez viditelné změny dlouho zářit? Ještě v 19. století existovaly úvahy o tom, zda je možné, aby Slunce získávalo svou zářivou energii chemickými reakcemi. Lékař J.R. Mayer uvažoval r. 1846 o tom, že by Slunce mohlo získávat energii dopadem meteoritů. Bylo ale odhadnuto, že by k dosažení potřebného zářivého výkonu muselo na Slunce každou sekundu dopadat $2 \cdot 10^{12}$ tun hmoty a takový přírůstek hmoty by se musel měřitelně projevit na změně drah planet. H. von Helmholtz u Slunce uvažoval uvolňování energie gravitačním smršťováním. Odhadl, že by to Slunci zajistilo zářivou stabilitu na cca 40 milionů let. Nicméně zlepšující se odhady stáří Země vyloučily i tuto možnost. Teprve koncem třicátých let dvacátého století byl nalezen hlavní zdroj stabilního záření hvězd: jaderná syntéza prvků, zejména slučování vodíku na helium. Tím byla otevřena cesta ke konstrukci realistických modelů stavby a vývoje hvězd.

Téměř celá dosavadní teorie stavby a vývoje hvězd je vybudována a propočtena za pomoci jednorozměrných modelů sféricky symetrických hvězd. Toto zjednodušení má své oprávnění. Ukazuje se totiž, že hmota hvězd má vysoký stupeň koncentrace směrem ke středu. Všechny stavové veličiny lze proto pro daný model hvězdy považovat za funkce jediné proměnné, např. vzdálenosti R od středu hvězdy či hmoty M_R obsažené v kouli o poloměru R . Základní předpoklady jednoduchých modelů – v celé hvězdě platí známé fyzikální zákony; látka uvnitř hvězdy se chová jako plyn bez ohledu na vysoké tlaky, které tam existují (opodstatněno vysokými teplotami a tudíž úplnou ionizací veškerých atomů); stabilita hvězdy \leftarrow hydrostatická rovnováha.

Další činěná zjednodušení:

- Zanedbává se rotace hvězd (odstředivá síla, změna tvaru hvězdy, diferenciální rotace).
- Zanedbávají se možná magnetická pole a jejich vliv na stavbu hvězdy.
- Používá se nedokonalá teorie konvekce; předpokládá se, že termodyn. procesy v nitru hvězdy probíhají adiabaticky, což je ale dobrá aproximace. U hmotnějších hvězd zůstává zdrojem nejistoty i jev, kterému se říká konvektivní přestřelování (convective overshooting), totiž možnost, že konvekce díky setrvačnosti konvektivních elementů zasáhne i do vrstev nad konvektivní zónou.
- Přetrvává jistá nepřesnost v hodnotách extinkčních/opacitních koefic. hvězdné látky.
- Přetrvává i nejistota v určení účinných průřezů jaderných reakcí, což vede obecně k větším chybám v časové škále, než v povrchových charakteristikách modelových hvězd.
- Pro velmi chladné hvězdy a pro velmi husté hvězdy přetrvávají určité nejistoty ve stavové rovnici.
- Pro některé hvězdy jsou atmosféry nestabilní a dochází z nich ke ztrátě hmoty formou tzv. hvězdného větru. To se při modelování buď zcela zanedbává nebo je použit jednoduchý parametrický popis ztráty hmoty hvězdným větrem.
- Problémem z hlediska modelování zůstávají i ta stadia vývoje, kdy dochází k dramatickým změnám na dynamické škále, které nelze korektně popsat stacionárními modely.

Ukázka modelování: Model našeho Slunce, obvykle se začíná s homogenním modelem, kontrahujícím k hlavní posloupnosti nulového věku, který je ještě ve stavu před započítáním slučování deuteria. Zkusmo se volí:

1. poměr l/H_p mezi střední volnou dráhou a tlakovou škálou
2. počáteční hmotnostní procento vodíku X
3. počáteční hmotový poměr obsahu těžkých prvků vůči vodíku Z/X ,

a to tak, aby výpočet pro vývojový model o hmotě Slunce v čase 4,6 mld let od hlavní posloupnosti nulového věku správně reprodukoval současný pozorovaný poloměr Slunce,

zářivý výkon a poměr Z/X . Do nedávna přetrvávala neshoda v předpovědi toku neutrin ze Slunce, 2001 potvrzena hypotéza oscilací neutrin \rightarrow teorie hvězdné stavby je OK.

Teplota T – V klasickém pojetí se vychází ze zjištění, že jsou-li teplejší a chladnější těleso či látka v kontaktu, tepelný rozdíl mezi nimi rychle zmizí a ustaví se tepelná rovnováha. Dále je z pozorování zjištěno, že čím je látka teplejší, tím větší je její objem. Teplota látky se proto může definovat jako míra objemu nějaké standardní látky a kalibrovat. Z hlediska kinetické teorie plynů je ovšem možné teplotu látky chápat jako veličinu **přímo úměrnou střední kinetické energii částic**.

Střední hmotnost částic směsi plynu – Relativní hmotnosti atomů jednotlivých chemických prvků či isotopů se nazývají **atomovými hmotnostmi**. Za jednotku relativní atomové hmotnosti se přijímá $1/12$ klidové hmotnosti nuklidu uhlíku $^{12}_6\text{C}$. Skutečná hmotnost jednotky atomové hmotnosti pak činí $m_u \doteq 1,66 \cdot 10^{-24}$ g.

Gramatomem nebo grammolekulou se nazývá takové množství nějakého chemického prvku, molekuly či částice, jehož hmotnost v g je číselně rovna atomové či obecně částicové váze ve výše uvedených relativních jednotkách. Sama molekulová hmotnost je bezrozměrná, skutečná hmotnost jednoho gramatomu látky o molekulové hmotnosti μ činí μ g. (Objem gramatomu tedy je $V = \mu/\rho$.)

Avogadrův zákon: Gramatom libovolné látky obsahuje vždy stejný počet částic dané látky, obvykle označovaný N_A . Číslo N_A se říká Avogadrovo číslo = $6,022 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$.

Předpokládejme, že 1 g směsi plynu obsahuje w_E gramů elementu (prvku) E a 1 g elementu E obsahuje $\alpha_E N_A$ částic. Pak 1 g směsi obsahuje $\alpha_E w_E N_A$ částic elementu E a celkový počet částic v 1 g směsi $n = N_A \sum_E \alpha_E w_E$. Často se uvažuje počet částic v objemové jednotce (particle density) N . Platí zřejmě $N = \rho n = \rho N_A \sum_E \alpha_E w_E$. Označíme-li Z_E náboj elementu E , při úplné ionizaci pak vznikne z 1 atomu Z_E elektronů a 1 iont, tj. $Z_E + 1$ částic, a bude tedy $\alpha_E = \frac{1+Z_E}{A_E}$, pro čistě elektronový plyn $\alpha_E = \frac{Z_E}{A_E}$.

Jestliže n_e , n_i a n_n jsou počty elektronů, iontů a neutrálních částic v jednotkovém objemu, platí $n = n_e + n_i + n_n$. Jelikož v nitrech hvězd jsou všechny atomy plně ionizovány a většinou je zde zastoupen vodík, chovají se protony a elektrony jako částice na sobě nezávislé a s přibližně poloviční hmotností protonů ($\mu = 1/(1+1)$). Pro střední částicovou hmotnost μ tak při úplné ionizaci můžeme psát vztah $\mu = (\text{hmotnostní číslo prvku})/(\text{počet elektronů} + 1) = A/(Z+1)$. V atomu, jehož hmotnostní číslo je $A \gg 4$, je počet elektronů přibližně $\frac{1}{2}A$, a proto $\mu \sim \frac{A}{\frac{1}{2}A} \sim 2$. Střední molekulová hmotnost $\bar{\mu}$ směsi úplně ionizovaných plynů, ve které je relativní zastoupení prvků H:He:ostatní v poměru X:Y:Z, je poměrně přesně určena vztahem $\bar{\mu} = \left(\frac{X}{\mu_H + \frac{Y}{\mu_{He}} + \frac{Z}{2}} \right)^{-1} = \frac{4}{6X+Y+2}$, kde $X + Y + Z = 1$

§ Stavová rovnice

Funkční závislost mezi stavovými veličinami popisujícími vlastnosti nějaké směsi plynu či plazmatu, tedy vztah mezi tlakem, hustotou (či objemem) a teplotou.

• Stavová rovnice ideálního plynu

Ideálním plynem se nazývá soubor dokonale elastických, hladkých a sférických částic, splňujících následující tři podmínky:

1. Rozměry částic jsou mnohem menší než jejich střední volná dráha mezi srážkami, takže je lze považovat za hmotné body.
2. Trvání srážky je mnohem kratší než doba volného pohybu mezi srážkami.
3. Částice na sebe navzájem mimo srážky nepůsobí žádnými přitažlivými či odpudivými silami, to znamená, že mimo srážky se pohybují konstantní rychlostí a po přímce, jejich energie je výlučně kinetická.

Protože tlak P v látce závisí pouze na jejím vnitřním stavu (nikoliv na tvaru, který zaujímá) resp. její celkové hmotě M , závisí tlak zřejmě na teplotě T a hustotě ρ resp. specifickém objemu v (objem, který zaujímá jednotková hmota). Je tedy $P = f(v, T)$ a $v = \rho^{-1}$.

Stavová rovnice ideálního plynu má tvar ¹

$$P = \frac{\mathcal{R}T}{V} = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T.$$

Stavovou rovnici lze též odvodit ze stat. fyz. z klas. Maxwellova rozd.; výsledný tvar:

$$P = \frac{N_V}{V} kT,$$

kde N_V je počet částic v objemu V a k je Boltzmannova konstanta. Platí $\mathcal{R} = kN_A$.

• **Stavová rovnice hvězdné látky**

Prostředí ve hvězdách je tvořeno směsí plazmatu, plynu a záření. Zcela ionizovaná látka tvoří obvykle zhruba 95% celkové hmoty hvězdy. Pouze vrstvy v blízkosti povrchu hvězdy jsou ve stavu neúplné ionizace.²

Zajímáme-li se o stavovou rovnici hvězdné látky, můžeme uvažovat jednotlivě tlak iontů P_i , tlak volných elektronů P_e a tlak záření P_r . Podle **Daltonova zákona** bude

¹ „Odvození“: Dle **Boyleova-Mariottova zákona** je součin tlaku a specifického objemu plynu při konstantní teplotě rovněž konstantní, což znamená, že stavová rovnice musí mít tvar $Pv = h(t)$, kde $h(t)$ je nějaká funkce teploty. Již roku 1877 bylo dohodnuto, že teplotní škála bude zavedena jako lineární závislost na tlaku vodíku při konstantním objemu, přičemž se použije bod tání ledu 0 °C a varu vody 100 °C ke kalibraci. Pro $v = konst.$ tedy platí $P(t) = P(0)(1 + \alpha t)$, kde $P(0)$ je tlak při teplotě 0 °C a α je konstanta, jejíž hodnota při zvolené kalibraci teplotní škály je $\alpha = 273,15^{-1}$.

Podle empiricky odvozeného **Gayova-Lussacova zákona** zvětší všechny plyny při zahřátí z 0 °C na 1 °C svůj objem o α a platí pro ně následující vztahy:

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0)(1 + \alpha t) \quad \text{pro } P = konst. \\ P(t) &= P(0)(1 + \alpha t) \quad \text{pro } v = konst. \end{aligned}$$

G.-L. zákon platí pro reálné plyny pouze přibližně, ale přesně pro plyn ideální.

Je výhodné zavést **škálu absolutní teploty** T následovně:

$$T = t + 273,15 \quad \text{resp.} \quad t = T - \alpha^{-1}.$$

Dosažení do předchozích rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0)\alpha t & \text{pro } P = konst. & \quad (*) \\ P(t) &= P(0)\alpha t & \text{pro } v = konst. & \quad (**) \end{aligned}$$

Nyní tedy můžeme přistoupit k nalezení stavové rovnice pro ideální plyn, tedy konkrétní funkční závislosti $h(t)$. Předpokládejme, že stav plynu se změní z výchozích hodnot P_1, v_1 a T_1 na nové hodnoty P_2, v_2 a T_2 , a to ve dvou krocích. Nejprve plyn zahřejeme na teplotu T_2 při konstantním tlaku. Objem plynu se tak dle (*) změní na hodnotu $v(T_2) = v_1 T_2 T_1^{-1}$. Poté isotermicky změním jeho tlak na hodnotu P_2 , dle Boyleova-Marriottova zákona, tj. $P_1 v(T_2) = P_2 v_2$, což lze s využitím vztahu (**) ještě upravit na

$$\frac{P_1 v_1}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{T_2} = c,$$

kde c je pro daný plyn konstanta. Pokud místo specifického objemu v budeme uvažovat objem 1 gramatomu V , který pro všechny plyny obsahuje stejný počet částic, bude ve stavové rovnici místo c konstanta $\mathcal{R} = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ stejná pro všechny ideální plyny – **universální plynová konstanta**.

² Zejména u méně hmotných hvězd je navíc v centrálních částech tak vysoká koncentrace hmoty, že tam dochází ke stavu degenerace. Při hustotách nad asi 10^9 kg m^{-3} , nabývá tato degenerace relativistického charakteru. To nastává až v nitrech bílých trpaslíků. Vzhledem k tomu, že např. podle klasického Maxwellova rozdělení je nejpravděpodobnější rychlost částice v_M dána vztahem $v_M = \sqrt{2kT/m}$, je zřejmé, že kinetické rychlosti částic jsou klesající funkcí jejich hmotnosti. Stupeň degenerace iontů je proto mnohem menší než pro elektrony. Ukazuje se, že alespoň v oblastech nerelativistické degenerace lze ionty považovat za nedegenerované, chovající se jako částice ideálního plynu. Iontová degenerace nastupuje až při hustotách nad $10^{12} \text{ kg m}^{-3}$.

totiž výsledný tlak aritmetickým součtem jednotlivých příspěvků, tedy $P = P_i + P_e + P_r$. S vysokou přesností lze považovat nitro hvězdy za AČT, pro tlak záření tak máme

$$P_r = \frac{a}{3}T^4,$$

kde a je konstanta hustoty záření (viz str 192). Označíme-li tlak plynu P_g , můžeme dále zavést parametr β vyjadřující poměr tlaku plynu ku celkovému tlaku, tj. $\beta = P_g/(P_g + P_r)$. Hodnota β se blíží 0 při velmi vysokých teplotách a ve velmi řídkých plynech. Naopak pokud jde β k 1, lze tlak záření zanedbat. Srovnáním stavové rovnice ideálního plynu a výrazu pro tlak záření vidíme, že podíl zářivého na celkovém tlaku uvnitř hvězdy stoupá s 3 mocninou teploty, nicméně u hvězd podobných našemu Slunci (a tedy u většiny) převládá tlak plynu nad tlakem záření.

Vzhledem k tomu, co jsme si řekli o stavové rovnici ideálního plynu, víme, že v ne-degenerovaných oblastech hvězdy můžeme tlak plynu popsat pomocí střední atomové hmotnosti a **stavová rovnice hvězdné látky** bude mít tvar

$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T + \frac{a}{3}T^4.$$

V oblastech elektronové degenerace je situace složitější a musíme uvažovat ionty a elektrony zvlášť.³

Ionty zůstávají i za velmi extrémních podmínek prakticky nedegenerované, takže **stavová rovnice iontového plynu** zůstává ve tvaru

$$P_i = \frac{\rho}{\mu_i} N_A kT.$$

Pro degenerovaný elektronový plyn je nutno použít kvantovou statistiku. Výslednou stavovou rovnici platnou pro oblasti úplné ionizace včetně oblastí nerelativistické degenerace lze zapsat ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T\lambda + \frac{a}{3}T^4,$$

³ Degenerovaný plyn: bude-li centrální hustota hvězdy řádu 10^8 , budou se volné elektrony chovat podobně jako v kovech. Neplatí klasická stavová rovnice. Dle Pauliho principu platí, že pouze jeden elektron může obsadit jednotlivý energetický stav. Počet těchto stavů je dán počtem jednotlivých cel o rozměru h^3 (Planckova konstanta), které lze umístit do šesti-rozměrného fázového prostoru daného třemi prostorovými rozměry a odpovídajícími impulsy.

Částice se spinem $1/2$ (fermiony) mohou fázový prostor o rozměru h^3 obsadit jen tak, že mají odlišně orientovaný spin. Nejvýše dva elektrony s rozdílným spinem se tak mohou nalézat v jednotlivé cele. V degenerovaném plynu jsou všechny cely plně obsazeny až do určité maximální energie, odpovídající impulsu p_m . Blíží-li se počet obsazených stavů maximálnímu možnému počtu, pak se nemůže rozdělení rychlostí elektronů řídit běžnými zákony termodynamiky, nýbrž statistikou Fermiho-Diracovou, viz část Obecná fyzika ...

... Můžeme ovšem předpokládat, že elektronová degenerace se uplatňuje pouze v situacích, kdy je plyn již plně ionizován, takže pro atomovou hmotnost iontů μ_i a volných elektronů μ_e lze psát

$$\mu_i^{-1} = \sum_E \frac{w_E}{A_E} \quad \text{a} \quad \mu_e^{-1} = \sum_E \frac{Z_E w_E}{A_E}.$$

Pro střední molekulovou hmotnost plazmatu tedy platí

$$\mu^{-1} = \mu_i^{-1} + \mu_e^{-1}.$$

Pro počty iontů a elektronů v objemové jednotce tak můžeme psát

$$N_i = \rho \frac{N_A}{\mu_i} \quad \text{a} \quad N_e = \rho \frac{N_A}{\mu_e}.$$

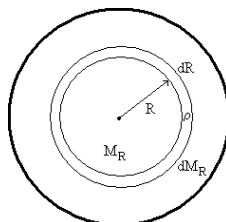
kde parametr λ lze vypočítat z hustoty a teploty pomocí vztahů odvozených kvantovou statistikou.

Pro limitní stav úplné elektronové degenerace plyne z Fermiho-Diracova rozdělení stavová rovnice ve tvaru $P_e = K_1(\frac{\rho}{\mu_e})^{5/3}$, kde $K_1 = \frac{1}{20}(\frac{3}{\pi})^{2/3} \frac{h^2}{m_e m_p^{5/3}}$. Pro zvláště vysoké hustoty se uplatní relativistické Fermiho-Diracovo rozdělení (je-li kinetická energie volných elektronů v degenerovaném plynu větší než jejich klidová energie $E_0 = m_e c^2$, nastává relativistická degenerace a limitně platí stavová rovnice ve tvaru $P_e = K_2(\frac{\rho}{\mu_e})^{4/3}$, kde $K_2 = (\frac{3}{\pi})^{1/3} \frac{hc}{8m_p^{4/3}}$. Tlak je v degenerovaném plynu závislý na jeho hustotě, teplota ve vztazích již nevystupuje).

Při hustotách nad asi 10^{14} kg/m^3 jsou volné elektrony jakoby natlačeny na protony, vzniká plně degenerovaný neutronový plyn.

9.3 Základní rovnice stavby hvězd

§ Rovnice zachování hmoty



Nechť M_R je hmota obsažená v kouli o poloměru R a ρ_R je hustota hvězdné látky ve vzdálenosti R od středu hvězdy. Pro případ sférické symetrie zcela zřejmě platí diferenciální vztah $dM_R = 4\pi R^2 \rho dR$, který vede na diferenciální **rovnici zachování hmoty**

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}.$$

§ Pohybová rovnice a její limitní případ: rovnice hydrostatické rovnováhy

Vzhledem k zanedbání rotace a elektromagnetických sil stačí uvažovat pouze gravitaci a gradient tlaku. Protože orientace souřadné soustavy míří na rozdíl od působící síly směrem od centra k povrchu a tlak směrem od centra k povrchu klesá, bude mít pohybová rovnice tvar

$$dM_R \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R dM_R}{R^2} - 4\pi R^2 dP,$$

kde dP a dM_R jsou změna tlaku a přírůstek hmoty mezi místy s poloměrem R a $R + dR$. S použitím rovnice zachování hmoty lze pohybovou rovnici rovněž přepsat do tvaru

$$\rho \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{G\rho M_R}{R^2} - \frac{dP}{dR},$$

který popisuje pohyb jednotkového objemu. Pro dynamicky stabilní hvězdy lze člen popisující zrychlení zanedbat a uvažovat pouze tzv. **rovnici hydrostatické rovnováhy**, t.j. situaci, kdy změna tlaku od místa k místu právě vyrovnává váhu vrstev nad oním místem:

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}.$$

Všechny síly působící na malý objem ve hvězdném tělese se vzájemně vyrovnávají, takže jejich výslednice je nulová.

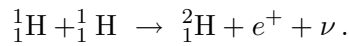
§ Rovnice tepelné rovnováhy

Hlavním dlouhodobým zdrojem zářivé energie hvězd jsou syntetické jaderné reakce, tedy spojování dvou či více jader lehkých prvků na těžší, při kterém se uvolňuje velké množství zářivé energie.

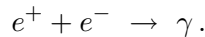
Pro zažehnutí je třeba velké energie, aby došlo k překonání coulombovského potenciálového valu mezi dvěma jádery. Jestliže vzdálenost mezi dvěma jádery, při níž může nastat jaderná reakce, je R_0 (cca 10^{-15} m), pak energie potřebná k překonání valu je

$E_c = Z_1 Z_2 e^2 / R_0$. Tepelná energie je dána vztahem $E_T = 3kT/2$. Je-li $T = 10^7$ K, $Z_1 = Z_2 = 1$, pak $E_c = 1$ MeV a $E_T = 1$ keV, tj. $E_T/E_c \sim 10^{-3}$. Jak to, že jaderné reakce nastanou? Viz Maxwellovo rozdělení, vždy existuje jistý počet částic pohybujících se rychlostmi většími než odpovídá E_T . Současně existuje jistá nenulová pravděpodobnost k překonání bariéry, uplatňuje se tunelový jev. Tato pravděpodobnost prudce roste s rychlostí částic. Pro lehké prvky, které mají Z malé a tudíž i E_c nízkou jsou hodnoty této pravděpodobnosti při dané rychlosti vyšší než pro těžké prvky s „vyšším valem“. Tím je dán výběr probíhajících reakcí – nejčastěji se musí vyskytovat reakce při níž se mění nejlehčí a nejpočetněji zastoupený prvek.

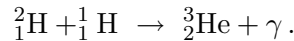
Energeticky zdaleka nejvydatnější slučovací jadernou reakcí je přeměna vodíku na helium. Známý jsou celkem čtyři způsoby této přeměny. První tři se shrnují pod název **proton-protonový cyklus** (dále $p-p$). Jejich společnou vlastností je, že se postupně čtyři protony, tj. nuklidy ${}^1_1\text{H}$ transformují ve stabilní nuklid helia ${}^4_2\text{He}$. Schematicky lze postupné reakce zapsat následovně:



Positron anihiluje s nejbližším volným elektronem a vznikne kvantum elektromagnetického záření, tedy foton:

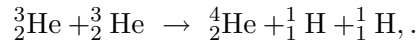


Při další reakci

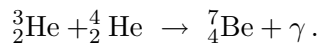


se opět uvolní kvantum elektromagnetického záření.

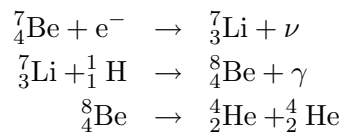
Až dosud uvedené reakce jsou shodné pro všechny tři možné verze $p-p$ cyklu. Poté mohou nastávat různé alternativy. Nejjednodušší je $p-p$ I, při kterém reagují dva nuklidy ${}^3_2\text{He}$:



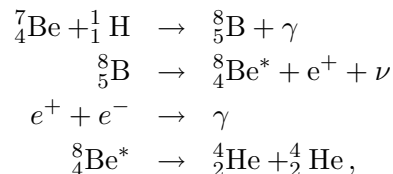
Dvě další varianty $p-p$ cyklu mají následující reakci společnou



Poté nastane buď cyklus $p-p$ II



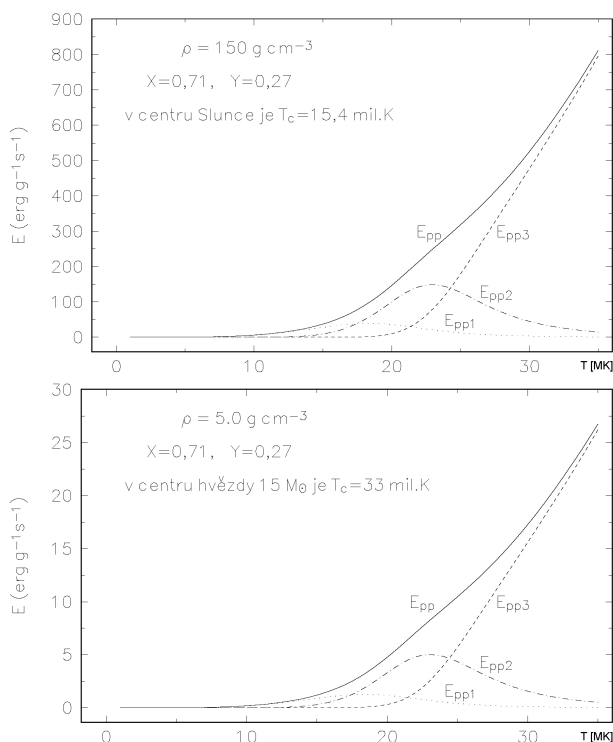
nebo cyklus $p-p$ III



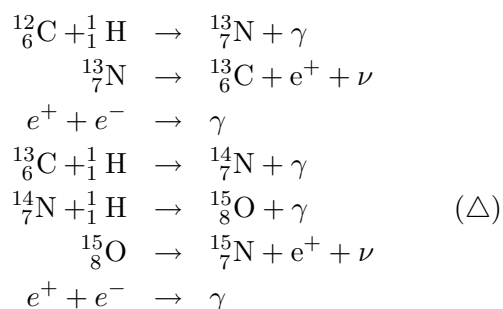
kde hvězdička u nuklidu berylia označuje energeticky vyšší, excitovaný stav, vedoucí k rychlému rozpadu jádra.

Bilance všech 3 verzí $p-p$ cyklu je stejná: zaniknou čtyři jádra H a vznikne stabilní nuklid He, přičemž se uvolní několik kvant elmag záření a dvě neutrina.

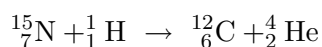
Množství energie, které se těmito reakcemi uvolní v 1 g hvězdné látky za 1 s lze spočítat dle složitých vztahů jako funkce teploty T , hustoty ρ a relativního obsahu vodíku X a helia Y . Na obrázku je znázorněno, jak se energeticky uplatňují jednotlivé varianty $p - p$ cyklu v závislosti na teplotě.



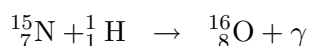
Čtvrtý způsob jaderné přeměny vodíku na helium, který se významně uplatňuje pro vyšší teploty než $p-p$ cykly, je tzv. **CNO cyklus**. Do něj v roli jakéhosi katalyzátoru vstupují nuklidy dusíku nebo uhlíku. Schematicky lze reakce CNO cyklu popsat takto:

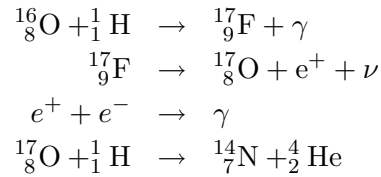


Poté může reakce pokračovat dvojím způsobem. Buď vznikne přímo heliové jádro a uhlík, který vstoupil do reakce, se opět vyloučí, tj.



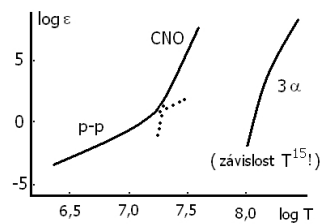
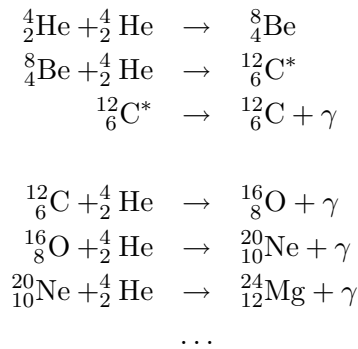
nebo proběhne několik dalších reakcí a dojde k vyloučení nuklidu dusíku:





Průběh této syntézy závisí kriticky na reakci (Δ), která je „nejpomalejší“ tj. nastává velmi nesnadno.

Při teplotě vyšší než 10^8 K dochází v oblastech s vyšším obsahem helia k další významné slučovací reakci, nazývané **3 α proces**. Při ní se postupně tři heliová jádra přemění na jádro uhlíku a další heliová jádra se poté řetězovitě dále slučují na těžší prvky:



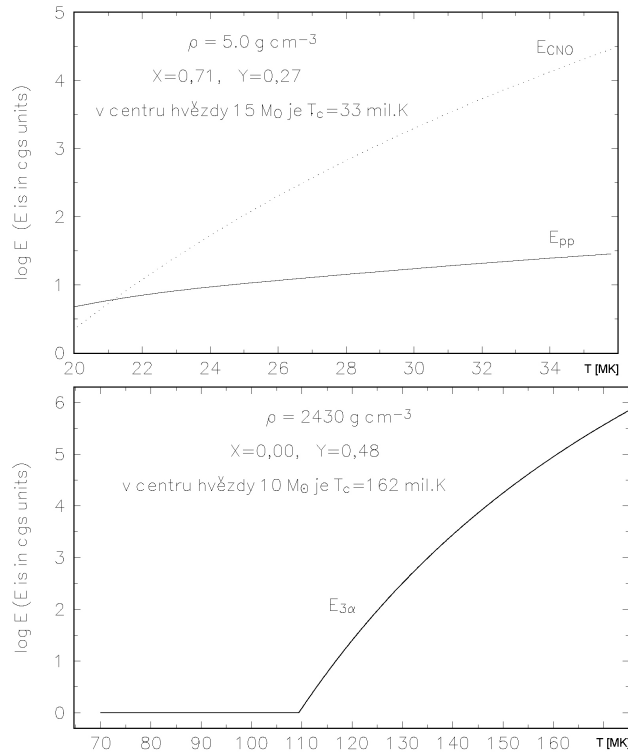
Na následujícím straně je na obrázku znázorněna energetická vydatnost CNO cyklu v závislosti na teplotě (v MK) a pro hustotu v nitru hvězdy o hmotnosti $15 M_{\odot}$ na začátku nukleárního vývoje (horní panel) a energetická vydatnost 3α reakce jaderné přeměny helia na uhlík v závislosti na teplotě a pro hustotu v nitru hvězdy o hmotnosti $10 M_{\odot}$ ve stadiu spalování helia v jádru (dolní panel).

Při ještě vyšších teplotách nad $6 \cdot 10^8$ K dochází k řadě dalších, ale energeticky stále méně významných reakcí až dojde ke vzniku stabilních nuklidů skupiny železa.

Kromě jaderných reakcí a poklesu ionizace v podpovrchových vrstvách nemá hvězda žádné další aktivní zdroje energie a lze ji považovat za izolovaný termodynamický systém. Označíme-li L_R množství energie procházející za jednotku času povrchem koule o poloměru R od centra směrem k povrchu a budou-li dL_R a dM_R označovat změnu této energie a přírůstek hmoty mezi koulemi o poloměrech R a $R + dR$, pak lze pro celkovou změnu tepelné energie Q v 1 g hvězdné látky, jež se nachází ve vzdálenosti R od centra hvězdy za čas dt psát

$$dQ = TdS = (E_{nuk} - \frac{dL_R}{dM_R})dt,$$

kde dS je změna entropie za čas dt a E_{nuk} je produkce energie jadernými reakcemi v 1 g hvězdné látky v daném místě za jednotku času.



Po úpravě tedy

$$\frac{dL_R}{dM_R} = E_{nuk} - T \frac{dS}{dt}.$$

To je **rovnice tepelné rovnováhy v základním tvaru** (též rovnice uvolňování energie). Při skutečném výpočtu je ovšem třeba specifikovat časové změny entropie konkrétně. Zahrnují totiž změny potenciální i vnitřní energie, včetně změn ionizace v podpovrchových vrstvách.

Naznačení postupu: dle 1. věty termodynamické lze psát (s uvážením že objem 1 g látky $V = 1/\rho$)

$$T dS = dU + P dV = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho.$$

Veličina U označuje vnitřní energii, která je obecně funkcí stavových veličin a střední hmotnosti částic μ , takže její změnu lze rozkládat do tvaru

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu.$$

Diferenciál $d\mu$ představuje takto samostatně pouze změny způsobené změnami chemického složení (buď v důsledku nukleární přeměny elementů nebo vlivem konvekce zasahující hluboko do oblastí s gradientem chemického složení, který vznikl v důsledku nukleárních změn během předchozího vývoje hvězdy). Nejde naopak o změny vyvolané ionizací ve vrstvách blíže k povrchu hvězdy. Ty jsou totiž funkcí teploty a nejsou proto nezávislé.

Je třeba si ještě uvést konkrétní výrazy pro vnitřní energii hvězdné látky. Statistická fyzika a teorie záření dávají pro jednotlivé složky tyto výrazy:

$$U_i = \frac{3}{2} n_i k T \quad U_e = \frac{3}{2} n_e k T \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} \quad U_r = \frac{a T^4}{\rho}$$

kde n_i a n_e představují počet iontů a počet elektronů v 1 g hvězdné látky. F_k jsou funkce závislé na tzv. parametru degenerace (čím vyšší hodnota, tím vyšší stupeň degenerace).

Celková energie plazmatu je dána součtem příspěvků jednotlivých složek. S užitím vztahů $P_r = aT^4/3$ a $P = \rho RT\lambda/\mu + aT^4/3$ dostaneme

$$U_i + U_e = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mu} T\lambda = \frac{3}{2} \frac{\beta P}{\rho},$$

$$U_r = 3(1 - \beta) \frac{P}{\rho},$$

$$U_i + U_e + U_r = \frac{3}{2} \frac{\beta P}{\rho} + 3(1 - \beta) \frac{P}{\rho} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} (2 - \beta).$$

V podpovrchových vrstvách je třeba navíc uvažovat i příspěvek ionizační energie U_{ion} . Označíme-li χ_j^r ionizační potenciál j -tého prvku pro r -tý stupeň ionizace můžeme pro podpovrchové vrstvy psát

$$U_{ion} = \frac{N_0}{\mu_i} \sum_{j=1}^N \nu_j \sum_{r=0}^{M_j} x_j^r \sum_{s=0}^{r-1} \chi_j^s.$$

§ Rovnice přenosu energie

Změna teploty od místa k místu je ve hvězdném nitru určována způsobem přenosu energie ve hvězdě. V principu existují tři způsoby přenosu energie: **zářením** (zářivou difusí), **vedením tepla** (kondukcí, částicovou difusí), a **konvekcí** (prouděním). První dva způsoby jsou mikroskopické, poslední je makroskopický. Tepelná vodivost hvězdného materiálu je ve většině případů zanedbatelná, roli hraje pouze v podmínkách extrémních hustot (degenerovaný plyn – bílí trpaslíci, neutronové hvězdy), kde se uplatňuje elektronová degenerace. (Formálně lze ovšem záření a vedení popisovat velmi podobně.)

• Rovnice zářivého přenosu energie

Příčin difuze je mnoho, od absorpce na negativních iontech vodíku až po rozptyl na volných elektronech. Míra neprůhlednosti hvězdného materiálu, **opacita**⁴, je velmi složitou funkcí hustoty ρ , teploty T , chemického složení a vlnové délky. Numericky tedy koeficient opacity udává, kolik zářivé energie je zachyceno v jednotce hmoty o dané hustotě, teplotě a chemickém složení.

Výpočet opacitního koeficientu představuje samostatný a náročný úkol. Pro hvězdná nitra, kde se zvažuje jen celková energetická bilance, se používají koeficienty opacity středované přes všechny vlnové délky. Tyto koeficienty bývají v samostatných studiích obvykle tabelovány a při výpočtech modelů hvězdných niter se v takových tabulkách numericky interpoluje.

Popis zářivého přenosu energie musí vycházet z rovnice přenosu. Záření se charakterizuje především **intenzitou**, což je množství zářivé energie procházející kolmo jednotkovou plochou v jednotkovém intervalu frekvencí do jednotkového prostorového úhlu za jednotku času.⁵ Označme $I = I(R, \vartheta)$ **intenzitu záření** ve vzdálenosti R od centra hvězdy do směru, který se spojnici s centrem svírá úhel ϑ . Budiž dále j **koeficient emise**

⁴ Opacita = míra schopnosti látky pohlcovat záření; způsobena interakcí fotonů s ostatními částicemi (přechody vázaně-vázané, vázaně-volné a volně-volné), rozptylem. Při vysokých teplotách závisí opacita především na volných elektronech (Thompsonův rozptyl). Pokud by ostatní způsoby absorpce a rozptylu byly zanedbatelné, pak opacita $\bar{\kappa} = \kappa_1$, kde κ_1 je konstantní nezávislá na teplotě. Při nižších teplotách se vázaně-volné a volně-vázané přechody stanou významné a od určité teploty opacita roste s rostoucí hustotou a klesá s rostoucí teplotou, což lze vyjádřit aproximací $\bar{\kappa} = \kappa_2 \rho T^{-3,4}$ (Kramerův zákon pro opacitu, viz též str. 269). S dále klesající teplotou se mění opacita přibližně dle vztahu $\bar{\kappa} = \kappa_3 \rho^{1/2} T^4$, neboť dominují vázaně-vázané přechody.

⁵ Zde budeme uvažovat opět intenzitu integrovanou přes celý rozsah vlnových délek.

záření do jednotkového prostorového úhlu za jednotku času a na jednotku hmoty a κ **koeficient opacity** na jednotku hmoty.

Uvažujme o energetické bilanci infinitesimálního válečku o výšce dx a podstavě $d\sigma$. Záření, vstupující do válečku z prostorového úhlu $d\omega$, bude $I(R, \vartheta)d\sigma d\omega$. Na druhém konci z něj bude do prostorového úhlu $d\omega$ vycházet záření $-I(R+dR, \vartheta+d\vartheta)d\sigma d\omega$. Uvnitř válečku se pohltí energie $-I(R, \vartheta)\rho\kappa dx d\sigma d\omega$. Vlastní záření válečku do prostorového úhlu $d\omega$ bude $j\rho dx d\sigma d\omega$.

Má-li být zachována energetická rovnováha, musí tedy platit

$$I(R, \vartheta)d\sigma d\omega + j\rho dx d\sigma d\omega = I(R, \vartheta)\rho\kappa dx d\sigma d\omega + I(R+dR, \vartheta+d\vartheta)d\sigma d\omega.$$

Použijeme-li rozvoj

$$I(R+dR, \vartheta+d\vartheta) = I(R, \vartheta) + \frac{\partial I}{\partial R}dR + \frac{\partial I}{\partial \vartheta}d\vartheta$$

a geometrické vztahy

$$dR = dx \cdot \cos \vartheta \quad a \quad d\vartheta = -\frac{1}{R}dx \cdot \sin \vartheta$$

lze **rovnici přenosu záření** (pro sféricky symetrickou atmosféru) zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial I}{\partial R} \cos \vartheta - \frac{1}{R} \sin \vartheta \frac{\partial I}{\partial \vartheta} + \kappa \rho I - j\rho = 0.$$

V této chvíli je užitečné zavést některé integrální veličiny (viz část 8.1); hustotu zářivé energie $u = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I d\omega$, tok záření $H = \int_0^{4\pi} I \cos \vartheta d\omega$, a tlak záření $P_r = \frac{1}{3} \int_0^{4\pi} I \cos^2 \vartheta d\omega$. Nyní se můžeme vrátit k RTE a zkusit s ní cvičit, abychom dostali vyjádření pomocí integrálních veličin, výsledkem poměrně složitých úprav je **rovnice zářivé rovnováhy**

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{3\kappa L_R}{64ac\pi^2 T^3 R^4}.$$

Integraci RTE přes celý prostorový úhel a s využitím integrálních vztahů dostáváme

$$\frac{dH}{dR} - \frac{1}{R} \int_0^{4\pi} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\omega + \kappa \rho c u - 4\pi j\rho = 0.$$

Zřejmě platí

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\omega = \int_0^{4\pi} \frac{\partial(I \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} d\omega - \int_0^{4\pi} I \cos \vartheta d\omega = \int_0^{4\pi} \frac{\partial(I \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} d\omega - H.$$

Jestliže dále uijeme geometrický vztah (plynoucí z def. sférických souřadnic, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\vartheta \in (0, \pi)$) $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ můžeme dále psát

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial(I \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial(I \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Jelikož

$$\frac{\partial(I \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \sin \vartheta = \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin^2 \vartheta + 2I \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{\partial(I \sin^2 \vartheta)}{\partial \vartheta} - I \sin \vartheta \cos \vartheta$$

(poslední rovnost platí díky vztahu $\frac{\partial(I \sin^2 \vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin^2 \vartheta + 2I \sin \vartheta \cos \vartheta$), můžeme psát

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial(I \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} d\omega = \overbrace{\int_0^{2\pi} [I \sin^2 \vartheta]_{\vartheta=0}^\pi d\varphi}^{=0} - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I \cos \vartheta \overbrace{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}^{d\omega} = -H$$

RTE tak můžeme upravit do konečného tvaru

$$\frac{dH}{dR} + \frac{2H}{R} + \kappa\rho cu - 4\pi j\rho = 0. \quad (\text{h})$$

Analogicky můžeme integrovat RTE násobenou faktorem $\cos\vartheta$:

$$\int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial R} \cos^2 \vartheta d\omega - \frac{1}{R} \int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\omega + \kappa\rho \int_{\omega} I \cos \vartheta d\omega - j\rho \int_{\omega} \cos \vartheta d\omega = 0,$$

$$= 0 \quad \left(\frac{\partial \sin^2 \vartheta}{\partial \vartheta} = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right)$$

$$c \frac{dP_R}{dR} - \frac{1}{R} \int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\omega + \kappa\rho H - 2j\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi = 0,$$

Zbývá upravit druhý člen poslední rovnice. Protože

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (I \sin \vartheta \cos \vartheta) = \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + I \cos^2 \vartheta - I \sin^2 \vartheta = \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + 2I \cos^2 \vartheta - I,$$

můžeme psát

$$\frac{1}{R} \int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\omega = \frac{1}{R} \left(\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (I \sin \vartheta \cos \vartheta) d\omega - 2cP_r + cu \right).$$

Integrál na pravé straně lze přepsat na

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (I \sin \vartheta \cos \vartheta) d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (I \sin \vartheta \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} [I \sin^2 \vartheta \cos \vartheta]_0^{\pi} d\varphi - \int_{\omega} I \cos^2 \vartheta d\omega$$

(poslední rovnost platí díky vztahu $\frac{\partial}{\partial \vartheta} ([I \sin \vartheta \cos \vartheta] \sin \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (I \sin \vartheta \cos \vartheta) \sin \vartheta + I \sin \vartheta \cos^2 \vartheta$). Dosazením tak dostáváme druhý vztah

$$\frac{dP_r}{dR} + \frac{1}{R}(3P_r - u) + \frac{\rho\kappa}{c}H = 0. \quad (\text{b})$$

K řešení je třeba ještě třetí vztah. Protože pole záření uvnitř hvězdy je velmi blízké isotropnímu, lze intenzitu rozvinout v řadu

$$I = I_0 + I_1 \cos \theta + I_2 \cos^2 \theta + \dots$$

a lze dokázat že již člen I_2 je o 20 řádů menší než I_0 , takže jej lze pro všechny praktické účely zcela zanedbat. Dosadíme-li proto do definic pro hustotu, tok a tlak záření výraz $I = I_0 + I_1 \cos \theta$, dostáváme

$$u = \frac{1}{c} \int_{\omega} I_0 d\omega + \frac{1}{c} \int_{\omega} I_1 \cos \vartheta d\omega = \frac{4\pi}{c} I_0 + \frac{\pi}{c} I_1 \quad \overbrace{\int_0^{\pi} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}^{\text{vystředuje se přes prost. úhel}} = \frac{4\pi}{c} I_0,$$

$$H = \int_{\omega} I_0 \cos \omega d\omega + \int_{\omega} I_1 \cos^2 \vartheta d\omega = I_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta d\varphi = I_1 \frac{2\pi}{3} [-\cos^3 \vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi} = \frac{4\pi}{3} I_1,$$

$$P_r = \frac{1}{c} \int_{\omega} I_0 \cos^2 \vartheta d\omega + \frac{1}{c} \int_{\omega} I_1 \cos^3 \vartheta d\omega = \frac{4\pi}{3c} I_0 \quad \text{tj.} \quad P_r = \frac{1}{3} u.$$

Protože v nitru existuje lokální termodynamická rovnováha, lze pro vyjádření emisního koeficientu využít **Kirchoffův zákon** a psát

$$j = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \kappa + E,$$

kde $E = E_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}$ představuje součet nukleární, gravitační a vnitřní energie uvolňované za jednotku času v jednotce hmoty do všech směrů, zatímco emisní a absorpční koeficienty jsou vztaheny k jednotkovému prostorovému úhlu. Pro celkový tok energie povrchem koule obsahující hmotu MR zřejmě platí

$$L_R = 4\pi R^2 H,$$

$$\frac{dL_R}{dR} = 8\pi R H + 4\pi R^2 \frac{dH}{dR}$$

a tedy

$$\frac{dH}{dR} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dL_R}{dR} - \frac{2H}{R} = \rho \frac{dL_R}{dM_R} - \frac{2H}{R}.$$

Rovnici (†) tak s pomocí rovnice tepelné rovnováhy ($\frac{dL_R}{dM_R} = E_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}$) můžeme přepsat do tvaru

$$\rho E - \frac{2H}{R} + \frac{2H}{R} + c\kappa\rho u - 4\rho\sigma T^4\kappa - \rho E = 0,$$

což po úpravě vede na

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4.$$

Dosazením do (b) dostaneme

$$\frac{4a}{3} T^4 \frac{dT}{dR} + \frac{1}{R} (aT^4 - aT^4) + \frac{\rho\kappa}{4\pi c R^2} L_R = 0,$$

tedy

$$\frac{dT}{dR} = - \frac{3\rho\kappa L_R}{16\pi a c R^2 T^3},$$

což lze s využitím rovnice zachování hmoty $\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}$ přepsat na cílový tvar

$$\frac{dT}{dM_R} = - \frac{3\kappa L_R}{64 a c \pi^2 T^3 R^4}.$$

(Navíc dosazením do $P_r = u/3$ dostaneme $P_r = aT^4/3$.)

Výpočet koeficientu zářivé difuze vhodně středovaný přes všechny frekvence, tzv. **Rosselandova střední opacita**: z (b) a $P_r = u/3$ plyne vztah

$$H = - \frac{c}{3\rho\kappa} \frac{du}{dR} \quad (\diamond),$$

a je možno uvážit, že celý postup, který jsme k odvození použili, by bylo možno provést i pro monochromatické veličiny intenzity, hustoty a toku záření. Je proto možno analogicky psát

$$H = - \frac{c}{3\rho\kappa_\nu} \frac{du_\nu}{dR}.$$

Vzhledem k tomu, že v nitrech hvězd je velmi přesně splněna podmínka lokální termodynamické rovnováhy, lze monochromatickou hustotu záření velmi dobře aproximovat Planckovou funkcí a psát

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Celkový, integrální tok záření můžeme získáme integrací přes všechny frekvence, tj.

$$H = - \frac{c}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{du_\nu}{dR} d\nu = - \frac{c}{3\rho} \frac{du}{dR} \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{du_\nu}{dR} d\nu}{\int_0^\infty \frac{du_\nu}{dR} d\nu}.$$

Chceme-li, aby tato rovnice odpovídala rovnici (\diamond) pro integrální tok záření, pak zřejmě musí pro integrální koeficient opacitu platit

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{du_\nu}{dT} \frac{dT}{dR} d\nu}{\int_0^\infty \frac{du_\nu}{dT} \frac{dT}{dR} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}.$$

Toto je výraz pro Rosselandovu střední opacitu.

Díky velmi malé střední volné dráze lze na zářivý přenos energie pohlížet jako na **difuzi**. Víme, že pro difuzní tok částic f_p mezi místy s různou částicovou hustotou ρ_n platí vztah

$$f_p = D \nabla \rho_n,$$

kde difuzní koeficient D souvisí se střední rychlostí částic v a jejich střední volnou dráhou l_p vztahem

$$D = \frac{1}{3} v l_p.$$

Pro záření lze ovšem za „částicovou hustotu“ považovat hustotu energie danou vztahem $u = aT^4$ a za střední rychlost rychlost světla ve vakuu. Střední volná dráha je dána rovnicí $l_f = 1/\kappa\rho$. Budeme-li uvažovat samostatně zářivé pohlcování energie, platí, že prochází-li záření o intenzitě I v daném směru

infinitesimálním válečkem hvězdné látky o jednotkové podstavě a výšce dx , bude z něj pohlceno záření dI dané vztahem $dI = -I\kappa\rho dx$. To znamená, že za střední volnou dráhu fotonů ve hvězdné látce můžeme označit vzdálenost l_f , během které dojde k pohlcení veškerého záření, kdy tedy bude $|dI| = I$. Z těchto dvou rovnic plyne $l_f = 1/(\kappa\rho)$. Gradient se v jednorozměrném pojetí redukuje na derivaci podle R a rovnice pro zářivou difuzi tak nabude tvar

$$H = -\frac{16}{3\rho\kappa}\sigma T^3 \frac{dT}{dR},$$

což je opět rovnice zářivého přenosu energie, identická s tou, kterou jsme odvodili řešením rovnice přenosu záření.

Postup přenosu energie z nitra na povrch se děje pomalu, postupným pohlcováním a opakujícím se vyzářením fotonů, odhady doby „putování fotonu“ cca 10^6 let.

• Rovnice konvektivního přenosu energie

Kdy je zářivá rovnováha stabilní, a kdy se změní v rovnováhu konvektivní? Předpokládejme, že v nějakém elementu hmoty ve vzdálenosti R od centra hvězdy vzroste náhodnou fluktuací teplota z hodnoty T na T' , rozdíl teplot označme ΔT . Dále předpokládejme, že element bude v důsledku zvýšení teploty adiabaticky expandovat, bude nadnášen směrem vzhůru, až se přemístí o vzdálenost dR do místa, kde se jeho hustota a tlak vyrovnají s okolním prostředím. Element bude v tom okamžiku mít teplotu

$$T'' = T' + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} dR = T + \Delta T + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} dR.$$

Jestliže v daném místě ve hvězdě dosud panovala zářivá rovnováha, můžeme teplotu prostředí ve vzdálenosti $R + dR$ od centra vyjádřit jako

$$T_r = T + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} dR.$$

Mohou nastat tři případy.

1) Po přemístění elementu o vzdálenost dR bude $T'' = T_r$. V tom případě element splyne s okolím. Podmínkou pro to je vztah

$$0 < \Delta T = \left[\left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} - \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad}\right]dR \quad \text{resp.} \quad -\left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} < -\left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad}.$$

2) Druhou možností je, že po přemístění elementu o dR bude $T'' < T_r$. V tom případě se element bude adiabaticky⁶ smršťovat, klesne zpět, počáteční náhodná fluktuace zanikne a zářivá rovnováha se v daném místě udrží.

3) Po přemístění elementu o dR bude $T'' > T_r$, tj.

$$\Delta T + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} dR > \left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} dR \quad \text{resp.} \quad -\left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} \geq -\left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad}.$$

Element bude tedy nadále adiabaticky expandovat a jeho nadnášení směrem vzhůru bude pokračovat, nastane konvektivní pohyb, vytvoří se ustálené konvektivní proudy.

Pokusme se tuto podmínku vzniku konvektivní rovnováhy vyjádřit pomocí známých stavových veličin. Konkrétní výraz pro levou stranu nerovnosti lze získat přímo z rovnice zářivé rovnováhy $\frac{dT}{dM_R} = -\frac{3\kappa L_R}{64ac\pi^2 T^3 R^4}$. Výraz pro pravou stranu nerovnosti lze odvodit pomocí 1. věty termodynamické:

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2}d\rho.$$

⁶ bez změny tepla (\rightarrow rozpínání = teplota klesá, smršťování = teplota stoupá) ...

Při rozkladu změn vnitřní energie podle vztahu $dU = \frac{\partial U}{\partial T}dT + \frac{\partial U}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial U}{\partial \mu}d\mu$ (viz rovnice tepelné rovnováhy) můžeme předpokládat $d\mu = 0$, neboť podmínka konvektivní rovnováhy odvozená bez ohledu na změny střední molekulové hmotnosti částic je silnější než podmínka odvozená obecně. Toto zanedbání se ovšem nečiní v rovnici tepelné rovnováhy.) Diferenciály v 1. větě TDM tak můžeme rozepsat pomocí tlaku P a teploty T , dostaneme

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP, \quad d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP.$$

Po dosazení

$$dS = \left(\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial U}{\partial P} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{T}. \quad (\aleph)$$

Využijeme faktu, že entropie má úplný diferenciál, napíšeme podmínku záměnnosti derivací, tj.

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial P} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \right),$$

což lze ještě za předpokladu záměnnosti druhých derivací vnitřní energie a hustoty upravit na tvar

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P.$$

Označíme-li ještě

$$\delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P,$$

přejde rovnice (aleph) do tvaru

$$TdS = dQ = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + \frac{P\delta}{\rho T}\right)dT - \frac{\delta}{\rho}dP$$

S využitím definice specifického tepla

$$c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + \frac{P\delta}{\rho T}$$

konečně dostaneme

$$TdS = dQ = c_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP$$

Pro praktický výpočet je třeba pro veličiny c_P a δ použít konkrétní výrazy závisující m.j. i na použité stavové rovnici.

Pro adiabatický děj ($dS = 0$) přejde poslední rovnice na

$$c_P dT = \delta \rho^{-1} dP,$$

tj.

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_{ad} = \frac{\delta}{c_P \rho} \frac{dP}{dP}.$$

S pomocí rovnic hydrostatické a zářivé rovnováhy lze podmínkovou nerovnost psát ve tvaru

$$\frac{3\kappa\rho L_R}{16\pi a c R^2 T^3} \geq \frac{\delta G M_R}{c_P R^2}$$

resp. po zavedení symbolu $\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}$ lze psát

$$\nabla_{rad} \geq \nabla_{ad} \quad (\heartsuit).$$

Konkrétní výrazy jsou

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa P L_R}{16\pi a c G M_R T^4} \quad \text{a} \quad \nabla_{ad} = \frac{\delta P}{c_P \rho T}.$$

Výhodou tohoto zápisu je, že rovnice zářivé a konvektivní rovnováhy nabudou formálně stejného tvaru.

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{G T M_R}{4\pi P R^4} \nabla,$$

kde $\nabla = \nabla_{rad}$ v oblastech, kde není splněna podmínka (\heartsuit), a $\nabla = \nabla_{konv}$ tam, kde splněna je. Ze současné teorie konvekce plyne, že asi v 95-98 % hmoty hvězdy je konvekce adiabatická a tedy $\nabla_{konv} = \nabla_{ad}$. V podpovrchových vrstvách se používá semiempirická teorie konvekce, ve které vystupuje parametr charakterizující poměr mezi střední volnou dráhou konvektivního elementu a jeho rozměrem.

Tyto podmínky = **Schwarzschildovo kritérium**; vyjadřuje který způsob přenosu energie je pro hvězdu v daném místě účinnější, zda konvekce nebo záření.⁷

Na proudění hmoty hvězdy má vliv rotace. (Zploštění má vliv na rozložení teploty [tj. i jas] na povrchu hvězdy. Teplotní gradient na pólech je větší než na rovníku.) Mezi rovníkem a póly hvězdy vznikají poledníkové (meridionální proudy) unášející nejen materiál, ale i tepelnou energii. Rychlost tohoto proudění závisí přímo na úhlové rychlosti a svítivosti hvězdy, nepřímo úměrně na hmotnosti a grav. zrychlení ($v \sim \omega r^2 L / M g^2$). Viz též str. 261.

§ Matematická struktura rovnic hvězd. nitra, okrajové podmínky, Henye

V rámci sférických jednorozměrných modelů hvězdného nitra můžeme na celou úlohu hledět tak, že máme dvě nezávisle proměnné:

1) buď geometrická souřadnice nebo nějaká zobecněná souřadnice, např. hmota M_R obsažená ve sférické slupce o poloměru R , kterou jsme zde použili.

2) vývojový čas modelu t .

Vlastnosti hvězdné látky jsou vesměs funkcemi teploty, hustoty (resp. tlaku, který je s hustotou a teplotou svázán pomocí stavové rovnice) a chemického složení. Závislými proměnnými jsou tedy teplota, tlak, zářivý výkon, poloměr slupky o hmotě M_R a chemické složení.

Časová závislost se projevuje explicitně v rovnici tepelné rovnováhy. Chemické složení má určitým způsobem výjimečné postavení v tom, že jeho změny lze počítat explicitně. Omezíme-li se na nukleární přeměny vodíku a helia, lze např. pro časovou změnu helia psát $\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_i \alpha_i E_i$, kde koeficienty α_i označují převrácenou hodnotu množství energie vzniklé úplnou nukleární přeměnou 1 g látky v té které reakci a E_i jsou energetické vydatnosti jednotlivých reakcí. Pro každé místo ve hvězdě proto můžeme (při zanedbání vyšších členů) psát $Y(M_R, t + \Delta t) = Y(M_R, t) + \frac{\partial Y}{\partial t} \Delta t$. Protože v oblastech spalování vodíku musí všude zůstat konstantní součet relativního množství vodíku a helia, lze pomocí změn relativního obsahu helia Y všude snadno počítat i změny ostatních elementů.

⁷ Zkrácené odvození viz Mikulášek str. 73.

• **Okrajové podmínky**

Ukazuje se, že protohvězda po svém vzniku v molekulárním mračnu projde při smršťování stádiem, kdy je prakticky celá ve stavu konvektivní rovnováhy. To znamená, že jedna okrajová podmínka je nečekaně jednoduchá: můžeme předpokládat, že na počátku nukleárního vývoje je hvězda **chemicky homogenní**, a přijmout chemické složení pozorované v atmosféře normálních hvězd jako výchozí. Často se přijímá chemické složení Slunce, konkrétně $X = 0,70 - 0,71$, $Y = 0,27 - 0,28$, $Z = 0,02$.

Pro výchozí model je též možno předpokládat, že je zcela stacionární, a brát tudíž v rovnici tepelné rovnováhy

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

v celé hvězdě. Dále v centru je zřejmě

$$L_R = 0, \quad R = 0.$$

Tyto okrajové podmínky vedou k singularitě základních rovnic. V blízkosti centra hvězdy proto použijeme lineární aproximaci, v zásadě rozvoj se zanedbáním členů vyšších řádů. Pro hmotu v kouli o poloměru R lze v blízkosti centra přibližně psát $M_R = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_c$ takže místo rovnice zachování hmoty dostáváme

$$R = \left(\frac{3M_R}{4\pi\rho_c} \right).$$

Rovnice tepelné rovnováhy přejde zřejmě do tvaru

$$L_R = \left(E_{nuk,c} - T_c \frac{dS_c}{dt} \right) M_R.$$

Zbývající dvě rovnice pak přejdou do tvaru

$$P = P_c - \int \frac{GM_R}{4\pi} \frac{dM_R}{R^4} = P_c - \int \frac{GM_R}{4\pi} \left(\frac{4\pi\rho_c}{3} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{dM_R}{M_R^{\frac{4}{3}}},$$

$$T = T_c - \frac{G}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} M_R^{\frac{2}{3}} T_c \nabla_c P_c^{-1}.$$

Konstrukce okrajových podmínek na povrchu hvězdy je poněkud složitější, protože by bylo příliš hrubé předpokládat na povrchu hvězdy nulový tlak a teplotu. Obvykle se místo toho počítá zjednodušený model povrchových částí hvězdy, přičemž se uvažují dvě různé vrstvy: fotosféra a podfotosférické vrstvy, ve kterých je materiál ještě ve stavu neúplné ionizace a kde nelze konvekci považovat za adiabatickou. Podfotosférické vrstvy obsahují obvykle pouze 2 - 5 procent hmoty hvězdy, ale často více než polovinu jejího celkového objemu.

• **Henyeva metoda integrace vnitřních částí hvězdy**

V současnosti se k řešení rovnic vnitřní stavby hvězd nejčastěji užívá metoda kompletní linearizace rovnic. Princip celého postupu je následující: celé nitro hvězdy rozdělíme na dostatečný počet koncentrických slupek a v každé na počátku zvolíme nějaké přibližné hodnoty veličin R , L , P a T . Předpokládejme, že budeme tyto slupky číslovat směrem od povrchu do centra. Iterační výpočet pak probíhá následovně: povrchovou integraci až do místa, kde je $M_R/M_* = 0,97$, provedeme pro tři různé hodnoty efektivní teploty a svítivosti v okolí očekávané polohy modelu v HRD. Jestliže hodnoty závislých

proměnných v místě s $M_R/M_* = 0,97$ označíme indexem 1, lze z oněch tří integrací určit koeficienty α , β a γ lineární formy

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha_1 P_1 + \beta_1 T_1 + \gamma_1, \\ L_1 &= \alpha_2 P_1 + \beta_2 T_1 + \gamma_2, \end{aligned}$$

jimiž aproximujeme skutečné funkční závislosti

$$\begin{aligned} R_1 &= f_1(P_1, T_1), \\ L_1 &= f_2(P_1, T_1). \end{aligned}$$

Diferenciální rovnice stavby nahradíme rovnicemi diferenčními pro každou dvojici slupek, tj. místo derivací píšeme pro J -tou a $(J+1)$ -ní slupku $(R_{J+1} - R_J)/(M_{R,J+1} - M_{R,J})$, a výrazy na pravých stranách rovnic vypočteme pro průměrné hodnoty mezi J -tou a $(J+1)$ slupkou. Jestliže ony čtyři diferenční rovnice upravíme převedením všech členů na levou stranu do tvaru

$$G_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

pak tyto rovnice musí být splněny všude a můžeme proto pro opravy výchozích hodnot R , L , P a T napsat soustavu čtyř lineárních nehomogenních rovnic

$$\begin{aligned} G_i + dG_i &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ dG_i &= \frac{\partial G_i}{\partial R_J} \Delta R_J + \frac{\partial G_i}{\partial L_J} \Delta L_J + \dots + \frac{\partial G_i}{\partial T_{J+1}} \Delta T_{J+1} \end{aligned}$$

o osmi neznámých

$$\Delta R_J, \Delta L_J, \Delta P_J, \Delta T_J, \Delta R_{J+1}, \Delta L_{J+1}, \Delta P_{J+1}, \Delta T_{J+1}.$$

Analogickou úpravou a diferencováním rovnic lineárních forem dostaneme další dvě rovnice, které představují linearizované okrajové podmínky na horní hranici podpovrchových vrstev hvězdy:

$$\begin{aligned} \Delta R_1 &= \alpha_1 \Delta P_1 + \beta_1 \Delta T_1 - R_1 + \alpha_1 P_1 + \beta_1 T_1 + \gamma_1, \\ \Delta L_1 &= \alpha_2 \Delta P_1 + \beta_2 \Delta T_1 - L_1 + \alpha_2 P_1 + \beta_2 T_1 + \gamma_2, \end{aligned}$$

Pomocí těchto vztahů můžeme eliminovat neznámé ΔR_1 a ΔL_1 z rovnic $dG_i = \dots$ pro první a druhou slupku a získáme tak 4 rovnice pro 6 neznámých, tedy opět dvě z nich můžeme vyjádřit jako lineární funkci zbylých čtyř neznámých, dosadit do rovnic pro druhou a třetí slupku a tak postupovat až do centra hvězdy. Rovnice $dG_i = \dots$ pro $(N-1)$ -ní a N -tou (centrální) slupku budou ovšem obsahovat pouze 6 neznámých, neboť $R_c = 0$ a $L_c = 0$. Po dosazení dvou veličin z předchozí dvojice slupek proto v centru získáme soustavu 4 lineárních rovnic pro 4 neznámé. Po jejím vyřešení dosazujeme postupně získané veličiny oprav zpět do odpovídajících rovnic, ve kterých jsme vždy dvě neznámé z předchozí vyšší slupky učinili funkcemi čtyř neznámých ze slupky následující. Tak postupně získáme všech $4N+2$ neznámých. Tyto vypočtené opravy přičteme k příslušným veličinám v celém modelu. Ze vztahu $R_* = T_{eff}^{-2} \left(\frac{L_*}{\pi a c} \right)^{1/2}$ můžeme rovněž spočítat efektivní teplotu opraveného modelu. Pokud se efektivní teplota a zářivý výkon dostanou mimo meze dané třemi zkusnými integracemi z fotosféry až k horní hranici podpovrchových vrstev, musíme zvolit opravené hodnoty a jednu či dvě integrace opakovat. Poté

můžeme celý postup s opravenými hodnotami všech veličin opakovat, a to do té doby, než všechny opravy závisle proměnných ve všech slupkách neklesnou pod mez přesnosti, kterou budeme požadovat.

Pokud počítáme vývoj hvězdy t.j. časovou posloupnost modelů, zvolíme ještě časový krok mezi dvěma modely a před každou iterací ještě ve všech slupkách spočteme nové chemické složení podle vztahu $Y_i(t + \Delta t) = Y_i(t) + 0,5\left(\frac{\partial Y_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial Y_i(t+\Delta t)}{\partial t}\right)\Delta t$.

9.4 Jednoduché modely a odhady

Polytropní změna je taková změna stavu, při které zůstává specifické teplo konstantní, tedy

$$dQ/dT = C = konst.$$

Speciální případ, kdy $C = 0$ se nazývá **adiabatickým** dějem, případ, kdy $C = C_P$ se nazývá dějem **isobarickým**, případ $C = C_V$ dějem **isochorickým** a případ, kdy $C \rightarrow \infty$ je dějem **isotermickým**.

Jak jsme si již ukázali, závisí vnitřní energie ideálního plynu pouze na jeho teplotě a ne na hustotě, tedy $U_g = U_g(T)$. To není ovšem pravda pro směs ideálního plynu a záření ($U_r = aT^4/\rho$).

Vnitřní energii směsi ideálního plynu a záření můžeme ovšem zapsat s pomocí poměru tlaku plynu k celkovému tlaku β ve tvaru

$$U = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} + \frac{aT^4}{\rho} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \frac{2 - \beta}{\beta}.$$

V mnoha případech reálných hvězd představuje tlak záření jen asi dvě procenta celkového tlaku ve hvězdě a není proto pro orientační úvahy takovým „hříchem“, jestliže učiníme předpoklad, že β je v celé hvězdě konstantní. V tom případě bude i celková vnitřní energie směsi ideálního plynu a záření pouze funkcí teploty a první věta termodynamická nabude tvar

$$dQ = \frac{dU}{dT} dT + PdV \quad (**)$$

Připomeneme-li si ještě, že specifické teplo C je změna tepelné energie s teplotou, plyne odsud výraz pro specifické teplo při konstantním objemu ($dV = 0$)

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_{V=const}.$$

Za předpokladu konstantního β můžeme stavovou rovnici ve tvaru $\beta PV = \mathcal{R}T$ diferencovat a dostáváme

$$PdV + VdP = \mathcal{R}\beta^{-1}dT.$$

Dosazením do rovnice (**) dostáváme

$$dQ = \left(\frac{dU}{dT} + \mathcal{R}\beta^{-1} \right) dT - VdP,$$

takže pro specifické teplo při konstantním tlaku ($dP = 0$) dostáváme

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{P=const} = \frac{dU}{dT} + \mathcal{R}\beta^{-1}.$$

Platí tedy vztah

$$C_P - C - V = \mathcal{R}\beta^{-1}.$$

S využitím $dQ = \frac{dU}{dT} dT + PdV = C_V dT + \frac{\mathcal{R}T}{\beta V} dV = C dT$ a $(C - C_V)dT = \frac{\mathcal{R}T}{\beta V} dV$ tak pro polytropní děj dostáváme

$$(C_V - C)dT + \frac{\beta^{-1}\mathcal{R}T}{V} dV = 0 \quad \text{resp.} \quad (C_V - C) \frac{dT}{T} + (C_P - C_V) \frac{dV}{V} = 0. \quad (***)$$

Definujeme-li symbol γ vztahem $(C_P - C)/(C_V - C) = \gamma$, platí $(C_P - C_V)/(C_V - C) = \gamma - 1$ a rovnici (***) můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0.$$

Integrací této rovnice dále dostaneme

$$TV^{\gamma-1} = const.$$

Násobíme-li tuto rovnici stavovou rovnicí $\beta PV = \mathcal{R}T$ a předpokládáme-li nadále, že β je všude konstantní, dostáváme tedy

$$PV^\gamma = const.$$

Polytropní děje bývá zvykem charakterizovat indexem n , který souvisí s exponentem vztahem

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}.$$

Obecnou rovnici pro polytropní děj můžeme tedy ještě přepsat do tvaru

$$P = K\rho^{\frac{1+n}{n}},$$

kde konstanta K obsahuje i střední molekulovou hmotnost částic μ .

Konkrétní případ polytropie pro směs ideálního plynu a záření: celkový tlak lze formálně vyjádřit jednak pomocí tlaku plynu, jednak pomocí tlaku záření; bude

$$P = \frac{P_g}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu} \quad \text{a} \quad P = \frac{P_r}{1-\beta} = \frac{1}{1-\beta} \frac{aT^4}{3}.$$

Porovnáním obou vztahů pro celkový tlak můžeme tedy získat následující výraz pro teplotu

$$T^3 = \frac{3\mathcal{R}}{a\mu} \frac{1-\beta}{\beta} \rho.$$

Dosazením teploty do stavové rovnice pro směs plynu a záření tak dostáváme výraz

$$P = K\rho^{\frac{4}{3}}, \quad (\clubsuit)$$

kde konstanta K je dána výrazem

$$K = \left[\frac{3(1-\beta)}{a} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu\beta} \right)^4 \right]^{1/3}.$$

Vidíme tak, že výraz (\clubsuit) odpovídá polytropě s indexem $n = 3$ a formálně se shoduje s výrazem pro relativistickou elektronovou degeneraci. Výraz pro nerelativistickou elektronovou degeneraci lze analogicky popsat polytropou s indexem $n = 3/2$, (viz str. 232).

§ Laneova-Emdenova diferenciální rovnice, polytropní modely hvězd

Rovnici hydrostatické rovnováhy lze pro sférickou hvězdu psát pomocí gravitačního potenciálu Φ . Gravitační zrychlení čili síla působící na jednotku hmoty je záporně vzatým gradientem potenciálu, tedy

$$-\frac{d\Phi}{dR} = \frac{GM_R}{R^2} = \frac{G}{R^2} \int_0^R 4\pi R'^2 \rho dR'.$$

Tuto rovnici můžeme derivovat podle R s přihlédnutím k rovnici zachování hmoty ve tvaru $dM_R = 4\pi\rho R^2 dR$ a dostáváme tak

$$-\frac{d^2\Phi}{dR^2} = 4\pi G\rho - \frac{2G}{R^3} \int_0^R 4\pi R'^2 \rho dR' = 4\pi G\rho + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR},$$

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} + 4\pi G\rho = 0. \quad (\spadesuit)$$

Vzhledem k výše uvedenému můžeme rovnici hydrostatické rovnováhy (tj. $dP/dM_R = -(GM_R)/4\pi R^4$) psát také ve tvaru

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} = -\frac{d\Phi}{dR}, \quad \text{a tedy} \quad dP = \rho d\Phi.$$

S využitím obecné rovnice polytropie $P = K\rho^{\frac{1+n}{n}}$ tedy dostáváme

$$\rho d\Phi = dP = \frac{n+1}{n} K \rho^{\frac{1}{n}} d\rho \quad \text{tj.} \quad d\Phi = \frac{n+1}{n} K \rho^{\frac{1-n}{n}} d\rho.$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\Phi + konst = K(n+1)\rho^{\frac{1}{n}}.$$

Jestliže zvolíme nulový bod potenciálu na povrchu hvězdy, kde předpokládáme $\rho = 0$, bude konstanta v rovnici nulová a dostaneme

$$\rho = \left(\frac{\Phi}{K(1+n)} \right)^n.$$

Rovnici (¶) tak můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} + \frac{4\pi G}{[(1+n)K]^n} \Phi^n = 0.$$

Pokud označíme

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G}{[(1+n)K]^n} \Phi_c^{n-1} = \frac{4\pi G}{(1+n)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}},$$

a zavedeme nové proměnné φ a z pomocí vztahů

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_c} \quad \text{resp.} \quad z = \alpha R,$$

kde Φ_c je hodnota Φ v centru hvězdy, bude zřejmě

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dR} &= \Phi_c \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dR} = \alpha \Phi_c \frac{d\varphi}{dz}, \\ \frac{d^2\Phi}{dR^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{d\Phi}{dR} \right) \frac{dz}{dR} = \alpha^2 \Phi_c \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \\ \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} &= \frac{2\alpha^2}{z} \Phi_c \frac{d\varphi}{dz}. \end{aligned}$$

Výsledkem je **Laneova-Emdenova diferenciální rovnice**

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi^n = 0.$$

Řešením této rovnice (svazuje průběh potenciálu resp. hustoty se souřadnicí) pro jednotlivé zvolené indexy n lze získat polytropní modely hvězd. Rovnice L.-E. se obecně řeší numericky pomocí rozvoje v řadu. Analytická řešení existují pro polytropní indexy $n = 0$, $n = 1$ a $n = 5$.

Řešení pro $n = 0$ je

$$\varphi(z) = 1 - \frac{z^2}{6}.$$

Jelikož platí

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{\Phi}{\Phi_c} \right) = \varphi^n,$$

dostáváme pro toto řešení

$$\rho(R) = \rho_c \varphi^0 = \rho_c,$$

tj. hvězdu s konstantní hustotou.

Pro $n = 1$ má řešení tvar

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Pro $n = 5$ pak

$$\varphi(z) = \left(1 + \frac{z^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Důsledkem řešení pro $n = 5$ je, že povrch hvězdy, kde je podle naší volby $\Phi = 0$ a tedy také $\varphi = 0$, odpovídá nekonečně velké hodnotě z a tedy i R . Jinými slovy, hvězda stanovená podle polytropy $n = 5$ se rozprostírá do nekonečna – limitní případ.

Význam polytropních modelů spočívá v tom, že pomocí nich lze činit určité odhady vnitřní stavby hvězd. Můžeme např. spočítat hustotu v libovolném bodě hvězdy ze znalosti hustoty v centru.

Podobně lze odvodit odhad pro tlak, kombinací rovnic $P = K\rho^{\frac{1+n}{n}}$ a $\rho = \left(\frac{\Phi}{K(1+n)}\right)^n$ dostáváme

$$P = \frac{\rho\Phi}{n+1} \quad \text{resp.} \quad P = P_c\varphi^{n+1}.$$

Pro hmotu v kouli o poloměru R_0 můžeme psát

$$M_R(R_0) = \int_0^{R_0} 4\pi\rho R^2 dR = 4\pi\rho_c \int_0^{R_0} \varphi^n R^2 dR,$$

kde R_0 označuje nějakou uvažovanou vzdálenost od středu hvězdy. Protože podle zavedené transformace $z = \alpha/R$ je poměr R/z konstantní, můžeme poslední rovnici dále upravit na

$$M_R(z_0) = 4\pi\rho_c \frac{R^3}{z^3} \int_0^{z_0} \rho^n z^2 dz,$$

kde z_0 opět představuje hodnotu této proměnné v uvažované vzdálenosti R_0 od centra hvězdy. Integrál na pravé straně této rovnice lze ovšem vyjádřit z L.-E. rovnice, takže dostáváme pro hmotnost hvězdy o daném poloměru

$$M_R(z_0) = 4\pi\rho_c R_0^3 \left(-\frac{1}{z_0} \frac{d\varphi(z_0)}{dz} \right). \quad (§)$$

Význam má zejména model pro $n = 3$, nejlépe odpovídá reálné situaci, odpovídá stavové rovnici směsi plynu a záření; pro Slunce vede k centrální teplotě Slunce 12 milionů K, což je velmi slušný odhad vůči současným nejlepším modelům, které udávají centrální teplotu Slunce 15,4 milionu K.⁸

Jak lze konstruovat polytropní modely pro dané K a n ? Funkce $\varphi(z)$ a $\dot{\varphi}(z)$ lze získat integrací L.-E. rovnice. Z rovnice $\varphi^n = \rho/\rho_c$ pak dostáváme hustotu jako známou funkci z

$$\rho = \rho_c \varphi^n.$$

⁸ Navíc z rovnice (§) plyne, že $M_* \sim \rho_c R_*^3 \sim \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}$. Polytrópa s indexem $n = 3$ odpovídá stavové rovnici relativisticky degenerovaného elektronového plynu. Podle právě uvedené rovnice hmotnost takto konstruované hvězdy nezávisí na centrální hustotě a pro numerické hodnoty odpovídající relativisticky degenerovanému elektronovému plynu je dána vztahem $\frac{M_*(\text{mezní})}{M_\odot} = \frac{5,836}{\mu_e^2}$. To je slavná Chandrasekharaova mez. Pro kompaktní hvězdy, které již prodělaly nukleární vývoj, můžeme předpokládat $X = 0$ a tedy $\mu_e = 2$, což pro ni dává limitní hmotnost $1,459 M_\odot$.

9.5 Vývoj osamocené hvězdy

Podle současných představ vznikají hvězdy z náhodného zhuštění chladné mezihvězdné látky v obřích molekulových mračnecích. Je zřejmé, že se jedná o obecně nesférický problém a složitější fyziku, než jakou jsme při odvozování rovnic stavby hvězd předpokládali. Ale i poté, když již můžeme platnost rovnic hvězdné stavby předpokládat, je výklad hvězdného vývoje a jeho detailních příčin obtížný, protože se jedná o rovnice diferenciální a funkční závislosti stavových veličin na teplotě a tlaku jsou vesměs velmi komplikované.

V jisté chvíli se původně náhodné zhuštění začne dále smršťovat již díky vlastní gravitaci a vznikající protohvězda projde stadiem, kdy se v celém tělese ustaví konvektivní rovnováha, takže se chemické složení hvězdy homogenizuje. S rostoucí hustotou roste i opacita a teplota v nitru, až se v nitru zažehnou první nukleární reakce, nejprve energeticky málo významná slučování lithia, berylia a bóru, ale nakonec primární slučování vodíku na helium. Uvolňovaná jaderná energie je zčásti vyzářena, zčásti je pohlcena; to vede k růstu centrální teploty, hustoty a tlaku. Protože nukleární produkce energie je funkcí vysoké mocniny teploty a je přímo úměrná hustotě, vede rozdíl podmínek od místa k místu i k ustavení potřebného gradientu tlaku a k dosažení stavu hydrostatické rovnováhy. Pozor, je třeba vždy mít na paměti, že **je to gradient tlaku, nikoliv tlak sám, co působí proti síle přitažlivosti**.

Okamžik ustavení hydrostatické rovnováhy bývá obvykle ztotožňován s polohou hvězdy v HR diagramu na tzv. hlavní posloupnosti nulového věku. Poloha hvězdy je jednoznačně dána její hmotností a počátečním chemickým složením.

• Hvězdný vývoj:

- 1) vznik hvězdy
- 2) pobyt hvězdy na hlavní posloupnosti
- 3) přechod do oblasti obrů
- 4) závěrečné fáze hvězdného vývoje – bílý trpaslík WD nebo vzplanutí supernovy → neutronová hvězda NS nebo černá díra BH

1) Hvězdy se tvoří – často v celých skupinách – gravitačním smršťováním hmoty. Kulový oblak mezihvězdné hmoty se při kontrakci zahřívá až do okamžiku, kdy se v nitru takového útvaru zažehnou termonukleární reakce. Poté se nová hvězda ocitne v relativně krátké době na hlavní posloupnosti v místě, které je určeno její počáteční hmotou.

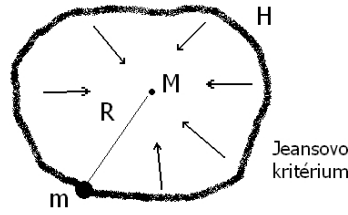
Podmínku vzniku hvězdy popisuje **Jeansovo kritérium**: v rozptýleném prachu a plynu jsou síly, které působí proti sobě – na jedné straně vlastní gravitace, na druhé straně pak jejich tepelný i turbulentní pohyb, rotace a magnetické pole. Jeansovo kritérium vyjadřuje zjednodušenou podmínku (zanedbání turbulence, rotace a mag. pole), kdy převládne vlastní gravitace nad tepelným tlakem.

Mějme oblak vodíku; ten se vlivem gravitace hroutí dovnitř, čas za který se smrští (odpovídá době volného pádu nejbližších částic do středu oblaku) ... $t_g \propto \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ × tlak plynu působí rozpínavě, čas za který se oblak rozplyne ... $t_z \propto \sqrt{\frac{R^3}{P}}$

Testovací částice m padá do středu, za jak dlouho dopadne? (není konstantní \vec{g} !) Z 3.KZ (úsečka = pohyb jakoby po extrémně výstředné elipse) dostaneme:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M + m) \quad a = \frac{R}{2}, \quad t_g = \frac{P}{2}$$

$$\frac{R^3}{8.4t_g^2} = \frac{GM}{4\pi^2},$$



$$4\pi \frac{R^3}{M} = \frac{32Gt_g^2}{\pi}.$$

Za M dosadíme z

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad \text{tj. } M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}.$$

Dostáváme tak

$$\frac{3}{\rho} = \frac{32Gt_g^2}{\pi},$$

$$t_g = \sqrt{\frac{3\pi}{32} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho G}}}.$$

Čas t_z souvisí s šířením rázové vlny (hustotní fluktuace se rozplyne zvukovými vlnami). Platí $v_z = \sqrt{dp/d\rho}$. Dosadíme-li za p ze stavové rovnice id. plynu $p = \frac{\rho}{m_H} kT$ ($pV = Na \cdot kT$, hustota plynu je $\rho = Na\mu m_H/V$ resp. bez μ , což je relativní molekulová hmotnost, neboť bereme jen vodík), dostaneme:

$$v_z = \sqrt{\frac{kT}{m_H}},$$

$$t_z = \frac{R}{v_z} = R / \sqrt{\frac{kT}{m_H}},$$

$$t_z = \sqrt{\frac{R^2 m_H}{kT}}.$$

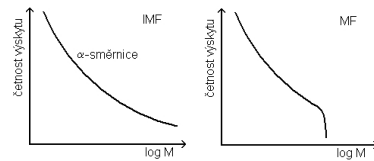
Aby oblak zkolaboval, musí platit $t_z > t_g$!!! Porovnáním zjistíme, že při konstantní hustotě by muselo být

$$R > \sqrt{\frac{kT}{\rho G m_H}} \quad \text{resp.} \quad M > \textit{konst.} \left(\frac{kT^{3/2}}{G m_H} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} = M_J.$$

Poslední výraz definuje **Jeansovu hmotnost** = kritická hmotnost pro mezihvězdný oblak, je funkcí teploty a hustoty, je to vlastně „stavová veličina“. Teplota je však zpravidla cca 10 K, tj. závisí především na hustotě. Konst = 5,45; např. pro $T = 10$ K, $\rho = 10^{10}$ atomů/ m^3 je $M_J = 10 M_\odot$. Rozměr mezihvězdného oblaku o dané kritické hmotnosti a hustotě je Jeansova délka.

Turbulence a magnetická pole ve skutečnosti nejsou zanedbatelné, tj. hmotnost daného oblaku (globule) musí být větší než vyjde z Jeansova kritéria. V okolí se může vyskytnout supernova, začne tlačit do látky („model sněžného pluhu“), ta bude lépe zhuštěna

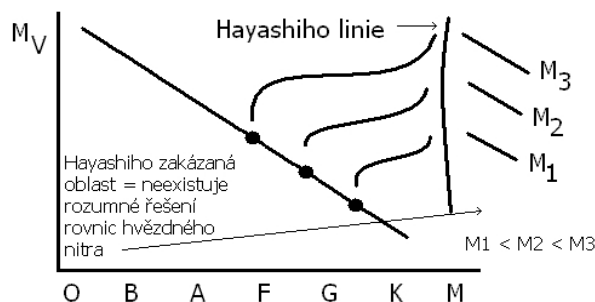
a hvězdy se budou lépe vyvíjet. Též mohou počáteční fluktuaci způsobit expandující bubliny hvězdného větru kolem O, B hvězd nebo průchod oblaku stacionární rázovou vlnou ve spirálním ramenu galaxie (četnosti průchodu a SN zhruba stejné, jednou za cca 10^8 let). Předchozí model by znamenal, že vzniká jedna velká hvězda z jednoho oblaku. Ve skutečnosti fragmentace, během vzniku rozpad oblaku na jednotlivé buňky, na které se opět aplikuje Jeans \rightarrow vznik hvězdokup a asociací. (Počáteční fce hmotnosti = Initial Mass function, IMF (též Salpeterova fce) = rozdělení hmotností konečných fragmentů v oblaku, podobá se rozdělovací fci hvězd v hodně mladých hvězdokupách, $N(M) \sim M^{-2,35}$. Hmotné hvězdy stárnou rychleji \rightarrow MF (mass function) se odklání od IMF, bod odklonu udává stáří hvězdokupy analogicky HRD.)



Raný vývoj hvězd ... vzniká protohvězda, která se posunuje v HRD doleva (roste její teplota). **Hayashiho linie/stopa** = téměř svislá čára v HRD, která představuje vývoj svítivosti a teploty protohvězdy při kontrakci směrem k hlavní posloupnosti. Počáteční stadium vývoje budoucí hvězdy je do značné míry ovlivněno tím, jak rychle je vyžárena energie vznikající kontrakcí hvězdného materiálu – na počátku jsou vnější vrstvy protohvězdy průhledné, se zmenšujícím se poloměrem roste průměrná hustota vnějších vrstev, opacita hvězdného materiálu se zvětšuje, vnitřní teplota roste. Svítivost sice nejdříve prudce roste, ale jakmile absorpce záření překročí určitou mez, růst svítivosti se zastaví a posléze pozvolna klesá. V této fázi dochází k disociaci molekul, rozpadu mezihvězdných pevných částic a postupné ionizaci atomů, což spotřebuje část tepelné energie a vede k sestupu svítivosti. Až je téměř veškerý materiál ionizován, zvolní se smršťování a protohvězda se pozvolna posouvá v diagramu spektrum-svítivost k hlavní posloupnosti. Dochází k zapálení termonukleárních reakcí, protohvězda se přestává smršťovat a její povrchová teplota stoupá, dochází k ustálení hydrostatické rovnováhy. Okamžik ustavení hydrostatické rovnováhy bývá obvykle ztotožňován s polohou hvězdy v HR diagramu na tzv. **hlavní posloupnosti nulového věku**, ZAMS (Zero Age Main Sequence). Poloha hvězdy je jednoznačně dána její hmotností a počátečním chemickým složením. Takovýto vývoj hvězdy v diagramu spektrum-svítivost = Hayashiho vývojová stopa, trvání cca od 10^4 let pro velmi hmotné hvězdy, přes 10^7 let pro hvězdy hmoty Slunce až po 10^8 let pro velmi lehké hvězdy ($0,3 M_{\odot}$).

Změna postavení hvězdy v diagramu spektrum-svítivost může být důsledkem buď změny chemického složení, nebo změny hmoty. Významnější je první příčina. Termonukleární reakce pomalu přeměňuje vodík na helium, avšak chemické složení vnějších vrstev není podstatně ovlivněno, neboť tyto vrstvy zůstávají v zářivé rovnováze. Jen ve středu se pomalu vyvíjí jádro zbavené vodíku. Hvězda zůstává v blízkosti hlavní posloupnosti, dokud určité kritické množství vodíku není přeměněno na helium. Když je dosaženo této hranice, dochází ke změně ve struktuře hvězdy – hvězda již není chemicky homogenní a její struktura nevyhovuje předpokladům, které musí být splněny, aby zůstala na hlavní posloupnosti. Již při změně několika procent vodíku na helium vzrůstá hustota nitra hvězdy, svítivost se zvyšuje, avšak současně roste poloměr hvězdy, tj. klesá její efektivní teplota. Hvězda se stává jasnější, avšak posouvá se směrem ke spektrálním typům s nižší

teplotou, tj. doprava ve směru žlutých obrů a opuštění hlavní posloupnosti. Průběh je tím rychlejší, čím má hvězda větší hmotnost, a tudíž i svítivost. (Změna svítivosti i poloměru hvězdy souvisí se změnou střední molekulové hmotnosti μ při procesu přeměny vodíku na helium. Pro ionizovaný vodík je $\mu = 1/2$, pro ionizované helium $\mu = 4/3$.)



4) Závěr: dohoří vodík, dochází ke smršťování až teplota dostatečně stoupne pro start 3α procesu \rightarrow rozepnutí a přechod (poměrně rychlý) mezi obry ... term nukleární reakce běží až po železo, hvězda pak připomíná cibuli, trochu vodíku zůstává na povrchu tj. do poslední chvíle nic nepoznáme ... Pak začne kolabovat, pro výsledek \exists různá kritéria hmotnosti: pod $8 M_{\odot} = \text{WD}$, pod $20 M_{\odot} = \text{NS}$... jde o hmotnost poč. se vším všudy!!!

Část vývojové stopy hvězd pro různé hmotnosti je vidět na obrázku, vývojová stopa Slunce viz též HRD, str. 227.

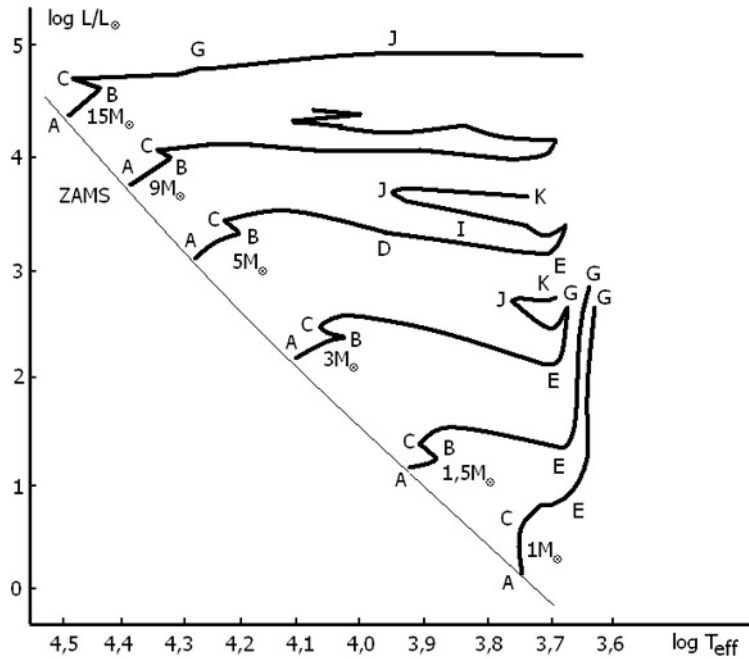
Ilustrativní příklad: vývoj hvězdy o hmotě $4 M_{\odot}$.

Popišme si jako ilustrativní příklad vývoj hvězdy s počátečním chemickým složením mladých hvězd v Galaxii, $X = 0,602$, $X_{\text{N}} = 0,014$ a $Z = 0,044$. U této hvězdy hraje již rozhodující roli CNO cyklus jaderné přeměny. V centru hvězdy a jeho okolí se již při dosažení hydrostatické rovnováhy vytvoří konvektivní zóna, která zahrnuje 18 % celkové hmotnosti hvězdy. Primární příčinou vývoje hvězdy je jaderné slučování vodíku. Díky němu postupně v centrálních částech ubývá vodíku a přibývá helia. Na produkci nukleární energie to má dlouho jen malý vliv díky účinnému promíchávání v konvektivní zóně, které do centra hvězdy přináší stále nový materiál bohatý na vodík. Úbytek vodíku má však za následek pokles opacity, která pro dané hustoty a teploty klesá s klesajícím obsahem vodíku. Pokles opacity znamená přirozeně i pokles ∇_{rad} (viz str 244) a v důsledku toho se tedy postupně zmenšuje hmotnost konvektivního jádra. Zmenšující se konvektivní jádro za sebou tak nechává v jisté oblasti hvězdy zónu plynule se měnícího chemického složení, s klesajícím obsahem vodíku směrem k centru.

Jiným důsledkem nukleárních přeměn v nitru hvězdy je postupný růst střední molekulové hmotnosti částic v konvektivní zóně, což vzhledem ke stavové rovnici vede k mírnému poklesu tlaku s časem. Klesá i gradient tlaku, vnitřní části hvězdy se smršťují a zahřívají, což ovšem zvětšuje výkon nukleární produkce a ve svých důsledcích i růst střední hmotnosti částic. Po 63 miliónech let převýší růst teploty růst střední hmotnosti částic a centrální tlak se počne zvyšovat. Po celou tuto dobu v důsledku růstu produkce energie roste i celkový zářivý výkon na povrchu hvězdy.

Vysvětlit důvody vývoje ostatních povrchových charakteristik je nesnadné, protože se zde kombinuje několik vlivů. Výpočet ukazuje, že rostoucí tok zářivé energie z centra hvězdy způsobuje po dlouhou dobu i pozvolnou expanzi vnějších vrstev, spojenou s poklesem teploty v nich. Klesá i teplota efektivní. Až po více než 84 miliónech let se pokles zastaví a teplota začíná znovu růst. „Krátce“ poté (v čase 86,1 miliónů let) dosáhne poloměr hvězdy lokálního maxima a začíná klesat. To ovšem jen urychlí růst teploty.

Prvotní příčina těchto změn spočívá opět v nitru hvězdy. V té době klesl již relativní hmotnostní obsah vodíku v konvektivní zóně pod 0,04, což se ukazuje jako kritická hodnota. Přitom spotřeba vodíku díky růstu teploty i hustoty stále roste. V čase 88,5 miliónů let klesne obsah vodíku v jádru na hodnotu $X = 0,0015$, což již vede k poklesu výkonu nukleární produkce a v důsledku toho pak i k poklesu centrální teploty. Pokles produkce je tak prudký, že celá hvězda se začíná smršťovat. To ale vede k růstu hustoty a teploty v oblastech pozměněného chemického složení, které po sobě zanechala k centru ustupující konvektivní zóna. V důsledku toho vznikne nad již téměř heliovým jádrem druhé energetické maximum nukleární přeměny vodíku na helium, vodíková slupka. Intenzita tohoto zdroje zpočátku velmi rychle



Obrázek 9.1: **A – B** = počáteční vývoj na hlavní posloupnosti, vodík je spotřebován v jádru, částečná kontrakce hvězdy, bod B odpovídá stavu, kdy je spotřebováno kritické množství vodíku a nastává hoření ve slupce kolem jádra, které je nyní složeno z helia; **C** = odsun z hlavní posloupnosti, vodík v jádru je vyčerpán, vytváří se heliové jádro s rovnoměrným rozložením teploty a vodík se spaluje ve slupce, celková svítivost hvězdy poněkud stoupla a povrchová teplota poklesla oproti ZAMS; **D – E** = přesun do oblasti obrů, rychlá kontrakce jádra, rozpínání vnějších vrstev a zeslabení vrstvy, ve které se spaluje vodík, povrchová teplota silně poklesla při nevelkém poklesu celkové zářivosti; **F – G – H** = období obrů, hvězda zvyšuje množství vyzařované energie, do vnější vrstvy se energie přenáší konvekcí a He v nitru se spaluje na těžší prvky; **I, J** = období nestabilit (v diagramu hovoříme o pásu nestabilit), smršťování konvektivní vrstvy

roste, takže do vrstev blíže k povrchu přichází více zářivé energie, než kolik se stačí vyzářit, a vnější části hvězdy začínají velmi rychle expandovat ($t=88,589$ milionů let). Následkem toho dochází k novému poklesu teploty a zpočátku i zářivého výkonu hvězdy. S poklesem energetické produkce v centru se zmenšuje L_R a tedy i ∇_{rad} , takže po velmi krátké době zanikne centrální konvektivní zóna ($t=88,618$ milionů let). Celá oblast se rychle přizpůsobí stavu zářivé rovnováhy a nastává krátké období relativní stability, ve kterém se do značné míry zastaví expanze hvězdy i smršťování jádra.

Jaderné reakce v centru brzo spotřebují i zbývající zásobu vodíku ($t=90,50$ miliónu let), takže dochází k novému prudkému smršťování jádra spojenému s růstem tlaku, hustoty, uvolňování gravitační energie a tedy i růstu centrální teploty. Růst teploty a hustoty naruší i relativně stabilizovanou vodíkovou slupku, ve které nastává nový rychlý růst produkce nukleární energie. To vede k nové expanzi a ochlazení obalu hvězdy. Pokles teploty je rychlejší než pokles hustoty, opacitní koeficient roste a po určitém čase vede i k postupnému poklesu zářivého výkonu hvězdy ($t=93,5$ miliónu let).

Vodíková slupka se neustále zužuje a posouvá směrem k povrchu. Souvisí to s úbytkem vodíku směrem k centru a poklesem teploty a hustoty směrem k povrchu. Produkce energie ve slupce proto zvolna klesá a snižuje se tím pádem i zářivý výkon celé hvězdy.

Pokračující pokles teploty vyvolá pokles ionizace v podfotosférických vrstvách, což vede ke vzniku konvektivní zóny, která se postupně rozšiřuje směrem k centru hvězdy. V tenké vrstvě nad touto konvektivní zónou navíc poklesne opacita, čímž je přenos energie směrem k povrchu usnadněn. Je třeba si připomenout, že zatímco v oblastech se zářivým přenosem energie dochází k expanzi zčásti na úkor

pohlcovaného záření, v oblastech konvekce probíhá expanze prakticky adiabaticky, tedy pouze na úkor vnitřní energie. Výsledkem je, že zářivý výkon hvězdy znovu roste a tento růst probíhá tak rychle, jak rychle se dolní hranice konvektivní zóny přibližuje k okraji hořící vodíkové slupky.

Tato nová změna struktury hvězdy vede k růstu teploty a tedy i produkce energie ve vodíkové slupce. To je pozoruhodná situace – poprvé za celý vývoj od hlavní posloupnosti nulového věku jsou pro chování celé hvězdy určující procesy probíhající v jejích podpovrchových vrstvách. Zářivý výkon hvězdy roste do té doby, než teplota v blízkosti centra hvězdy dosáhne hodnoty 10^8 K. Poté započne v centru hvězdy jaderné slučování helia na uhlík. V centru se opakuje podobná situace jako při zapálení vodíku během kontrakce hvězdy k hlavní posloupnosti nulového věku. Smršťování jádra se zastaví a v jádru se ustaví stabilní stav, postupně se ovšem vytvoří konvektivní zóna, která při svém zvětšování vede k diskontinuitě chemického složení na vnějším okraji zóny. Hlavním důsledkem však je, že zastavením kontrakce jádra se zhorší podmínky pro slučování vodíku na helium ve vodíkové slupce, která je i nadále nejvydatnějším energetickým zdrojem hvězdy. Ač se to zdá poněkud kuriózní, zářivý výkon hvězdy po zažehnutí dalšího zdroje nukleární energie proto začíná klesat a její poloměr se zmenšuje. Vzhledem k nižší energetické vydatnosti slučování helia na uhlík, trvá relativně stabilní období hoření helia v jádru hvězdy mnohem kratší dobu, než fáze pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti. Po vyčerpání helia v jádru dojde opět analogicky k hoření helia v heliové slupce. Nyní však dochází již ke dvojité vazbě: jak se nyní uhlíkové jádro smršťuje a zahřívá, dostává se heliová slupka do oblastí s vyšší teplotou a hustotou a zvýšený tok energie z ní vede k expanzi a ochlazení oblasti hoření vodíku ve slupce a tedy ke smršťování hvězdy a poklesu jejího zářivého výkonu. V těchto fázích vstupuje do hry další faktor, který námi uvažované modely dobře nepopisují: únik hmoty ve formě hvězdného větru. Hvězda v důsledku dalších nukleárních reakcí s menší a menší energetickou vydatností stále zrychluje svůj vývoj, což vede k tomu, že je nakonec třeba další vývoj již uvažovat dynamicky, s použitím pohybové rovnice místo rovnice hydrostatické rovnováhy. Dochází k pulsacím obalu hvězdy, v HR diagramu se hvězda pohybuje po velice složité trajektorii v blízkosti asymptotické větve obrů (viz obr. 9.1). Může dojít i k odvržení celého vnějšího obalu hvězdy.

Výsledným produktem jaderných reakcí je jádro složené z prvků skupiny železa, jejichž atomová struktura je velmi stabilní. Jeho další smršťování nakonec zastaví elektronová degenerace centrálních částí hvězdy.

Pozdní stádia vývoje vyžadují mnohem složitější modely. Pokud nedojde k odvržení obalu v důsledku dynamických nestabilit, spotřebuje se po zastavení kontrakce jádra v důsledku elektronové degenerace zbytek nukleárního paliva v hořících slupkách a celá hvězda se začne smršťovat a skončí jako více či méně kompaktní objekt v blízkosti hlavní posloupnosti čistě heliových hvězd.

§ Odlišnosti hvězdného vývoje v závislosti na hmotě hvězdy

Počáteční hmotnost hvězdy je pro celý její vývoj zcela určující. Je zřejmé, že hvězdy s vyšší hmotností budou díky větší vlastní gravitaci schopny dosahovat při počáteční kontrakci vyšších centrálních teplot. Vzhledem ke strmé závislosti energetické výtěžnosti jaderných reakcí na teplotě lze proto očekávat, že nukleární vývoj i ostatní fáze vývoje hvězdy se budou s rostoucí hmotností zkracovat. To výpočty také skutečně potvrzují. Navíc životní doby hoření vodíku v jádru jsou rostoucí funkcí počátečního obsahu vodíku i původního obsahu těžkých prvků.

Je-li hmotnost protohvězdy menší než asi $0,075 M_{\odot}$, nestačí její vlastní přitažlivost k tomu, aby v jejím jádru došlo k řádnému zapálení vodíkové syntézy. Hroucení jádra proto pokračuje, hvězda chabě září na úkor změn potenciální energie a nakonec je smršťování jádra zastaveno jeho narůstající elektronovou degenerací. Hvězdám v tomto stavu se v posledních letech začalo říkat **hnědí trpaslíci** a vyvíjí se velké úsilí je skutečně pozorovat.

U hvězd, jejichž hmotnost nepřevyšuje hmotnost Slunce, probíhá jaderné slučování vodíku na helium téměř výlučně formou proton-protonového cyklu, jehož energetická závislost na teplotě je méně strmá. V důsledku toho v takových hvězdách zaujímá oblast nukleárního slučování relativně větší objem než u hvězd hmotnějších. Kromě toho se u nich vůbec nevytvoří centrální konvektivní zóna a nedochází k žádnému výraznému

M/M _⊙ (hranice)	hoření H	He	„výsledek“
0,075	ne	ne	hnědý trp.
0,5	ano, pp cyklus, žádné konvektivní jádro	ne (el.degenerace)	dyn.oscilace, * vítr → WD
1,0	ano, postupně rostoucí konvektivní zóna	ano	–”–
2,0	ano: roste podíl CNO	ano	–”–
10,0	ano: CNO dominuje, semikonvekce, overshooting	ano	–”–
20,0	–”–	ano	NS vzácně BH

přechodu mezi hořením vodíku v jádru a ve vodíkové slupce. Dlouhé období klidného vývoje tak zahrnuje i dobu hoření vodíku ve slupce.

Pro hvězdy, jejichž hmotnost je menší než asi 0,5 M_⊙, navíc elektronová degenerace zastaví kontrakci jejich jádra po vyhoření vodíku dřív, než je dosažena teplota potřebná ke slučování helia na uhlík.

U hvězd s hmotností mezi 1 a 2 M_⊙ dochází k jinému zajímavému jevu: během jejich stabilního vývoje po zapálení vodíku v jádru se jejich centrální konvektivní zóna postupně zvětšuje v závislosti na tom, jak se spolu se zvolna rostoucí centrální teplotou stále více na produkci energie podílí i CNO cyklus.

Pro hvězdy s hmotností mezi 0,5 až asi 10 M_⊙ můžeme předpokládat, že v pozdějších fázích vývoje ztratí díky dynamickým oscilacím a vlivem hvězdného větru své vnější vrstvy a poté, co se v jejich jádru uplatní elektronová degenerace, končí jako bílí trpaslíci, horké a velmi husté hvězdy, skrblící svou zářivou energií a velmi zvolna chladnoucí.

Konečně u hvězd s hmotností větší než asi 10 M_⊙ dochází během hoření vodíku v jádru k rozšiřování konvektivní zóny v důsledku značného tlaku záření. Protože v uvažovaném rozsahu teplot a hustot je opacitní koeficient určován především rozptylem na volných elektronech, pro který platí vztah $\kappa = 0,19(1 + X)$, roste opacita s rostoucím obsahem vodíku a vrstvy nad konvektivní zónou se tak stávají vůči konvekci nestabilní. Vytváří se tzv. semikonvektivní zóna, oblast, ve které dochází pouze k částečnému promíchávání chemických elementů tak, aby v každém místě byla splněna podmínka $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$. Navíc v literatuře se rovněž vedou spory o tom, zda nedochází k jevu, který se v angličtině nazývá *convective overshooting*. Jde o to, že pokud je materiál hvězdy vztlakem nadlehčován a unášen konvekcí vzhůru, může kinetická energie velkých konvektivních elementů způsobit to, že se část materiálu dostane i do míst, kde již podmínka konvektivní rovnováhy splněna není.

Jak ukázal již **Chandrasekhar**(1938), pokud hmotnost jádra složeného z prvků skupiny železa překročí 1,4 M_⊙, stačí již jeho vlastní přitažlivost k tomu, aby překonala gradient tlaku vzniklý elektronovou degenerací, dochází k dezintegraci atomových jader a vzniká neutronové jádro. Kolaps jádra je provázen prudkým uvolněním obrovského množství energie, což vede k odmrštění celého obalu rychlostmi, které překonávají rychlost únikovou, do okolního prostoru.

V Galaxii extrémně vzácné hvězdy s počáteční hmotností nad asi 50 M_⊙ by mohly v závěrečných fázích vývoje dosáhnout v jádru tak velkou přitažlivost, že by došlo k uplatnění relativistických efektů a vzniku černé díry.

§ Jak srovnávat teorii hvězdného vývoje s pozorováním?

Je zřejmé, že všechny makroskopické veličiny, jež charakterizují hvězdy, a které můžeme ze Země pozorovat, se v důsledku hvězdného vývoje v naprosté většině vývojových fází mění příliš pomalu, než abychom je mohli během lidského života pozorovat. Kvantitativní pozorovací údaje o jasnostech či teplotách hvězd existují (až na několik čestných výjimek) pouze za období posledních asi 100 - 150 let. Nezbyvá proto, než se při srovnávání teorie s pozorováním uchýlit ke statistice a k jiným nepřímým metodám srovnávání a k hledání důkazů diferencovaného vývoje v důsledku různé počáteční hmotnosti hvězd.

Protože i **hvězdokupy**, patřící do naší Galaxie, jsou od nás vzdáleny nejméně desítky pc, můžeme díky jejich daleko menším vlastním rozměrům předpokládat, že všechny členy vidíme prakticky stejně daleko. Toto poznání se stalo základem pro jeden z nejlepších testů teorie hvězdného vývoje. Pro danou hvězdokupu totiž stačí provést měření jasnosti jejich členů v nějakém standardním fotometrickém systému a poté zkonstruovat diagram barevný index versus zdánlivá vizuální hvězdná velikost. Takový diagram je v zásadě jen jiným provedením HR diagramu. Protože všechny hvězdy kupy jsou zhruba stejně daleko, popisují zdánlivé jasnosti hvězd zcela správně jejich vzájemné jasnosti.

Zcela zásadním úspěchem teorie hvězdného vývoje je to, že dokáže velmi dobře vysvětlit nerovnoměrné rozložení hvězd v HR diagramu. Konkrétně hlavní posloupnost v HR diagramu se ukázala být identická s množinou bodů ($\log T_{eff}, M_{bol}$), které definují modely hvězd o různých počátečních hmotnostech pro fáze klidného slučování vodíku na helium v jejich jádrech. Teorie předpovídá, že tyto fáze vývoje trvají nejdéle, a proto máme statisticky největší šanci právě v nich hvězdy pozorovat. Navíc se velmi uspokojivě shodují předpovězená a pozorovaná poloha hlavní posloupnosti.

Hvězdy se vyvíjejí tím rychleji, čím je jejich počáteční hmotnost větší. Mimo to můžeme pokládat za velice pravděpodobné, že všechny hvězdy dané hvězdokupy vznikly současně. Každá hvězdokupa je tedy jako celek nějak stará a dá se čekat, že čím je starší, tím méně hmotné hvězdy k ní patřící stačily již spotřebovat ve svých jádrech zásobu vodíku a opustit hlavní posloupnost.

V HRD byla poskládána pozorování hvězd z 11 hvězdokup se známými absolutními vizuálními hvězdnými velikostmi a ukázalo se, že v dolní části hlavní posloupnosti se pozorování ze všech hvězdokup dobře shodovala, zatímco v horní části se jednotlivé hvězdokupy lišily podle svého stáří. Toto zásadní zjištění je dnes používáno již ne k důkazu správnosti teorie hvězdného vývoje, ale naopak k **určování stáří hvězdokup** a jejich vzdálenosti od nás. Při detailních studiích se postupuje tak, že se nejprve pomocí spektroskopických pozorování řady členů kupy určí její chemické složení, konkrétně obsah těžkých prvků Z a helia Y a poté se srovnává její pozorovaný HRD s předpovědí modelových výpočtů pro dané chemické složení. Z bodu, kde se pozorovaná sekvence hvězd kupy v HRD začíná vzdalovat od hlavní posloupnosti, lze velmi přesně odhadovat vývojový věk kupy (jak hvězdokupa stárne, zkracuje se hlavní posloupnost). Naopak pomocí konstanty, o kterou bylo třeba změnit pozorované zdánlivé vizuální hvězdné velikosti, opravené o mezihvězdnou absorpci, aby se hvězdy hlavní posloupnosti v pozorovaném a modelovém HR diagramu překrývaly, tj. pomocí modulu vzdálenosti, lze ihned spočítat vzdálenost hvězdokupy od nás. Turn off point = bod obratu, místo, kde se nejhmotnější hvězdy už vyvinuly a přechází do oblasti obrů.

Pokud s dobrou přesností určíme pro některou dvojhvězdu její základní fyzikální vlastnosti, můžeme se pokusit o srovnání s vývojovými modely spočtenými pro pozorované hmotnosti obou složek.

9.6 Poznámka o hvězdném větru a ztrátě hmoty

Hvězdný vítr = proud plynů unikajících z hvězdy. To, že hvězdné atmosféry nemusí být statické, a že z nich může docházet k úniku hmoty do okolního prostoru, naznačovala pozorování delší dobu. Již Biermann (1951) upozornil na to, že plynné ohony komet, mířící vždy směrem od Slunce, nasvědčují přítomnosti radiálního výtoku plynu ze Slunce do meziplanetárního prostoru, a odhadl výtokové rychlosti na 500 km s^{-1} v blízkosti Slunce. Od 50. let, kdy začaly být vypouštěny rakety a později i družice a meziplanetární sondy, bylo přímo možné tento tok plynu – **sluneční vítr** – a jeho vlastnosti měřit.

Z nebeské mechaniky a z řešení pohybových rovnic je známo, že má-li se hmotná částice dostat z nějakého centrálního gravitačního pole, musí na ni působící odstředivá síla v dané vzdálenosti dvakrát převyšovat přitažlivost centrálního tělesa. Pro únikovou rychlost od tělesa o hmotnosti M_* ve vzdálenosti rovníkového poloměru R_{rov} od jeho centra v_u tedy platí

$$2 \frac{GM_*}{R_{rov}^2} = \frac{v_u^2}{R_{rov}},$$

což vede na vztah

$$v_u = \sqrt{2} \left(\frac{GM_*}{R_{rov}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pokud hmotnost a rovníkový poloměr hvězdy budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti a poloměru Slunce, dostaneme rovnici

$$v_u = 617,61 \left(\frac{M_*/M_\odot}{R_{rov}/R_\odot} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Odhady: Slunce = 618 km/s, O7V = 1079 km/s, M0Ia = 110 km/s ... Za rok ztratí Slunce díky větru cca 10^{-14} své hmotnosti, ale např. u Wolfových-Rayetových hvězd či hvězd spektrálních tříd O by vítr za statisíce až miliony let mohl z hvězdy odnést tolik hmoty, že by se z ní mohla vytvořit hvězda podobná Slunci.

Základy teorie hvězdného větru formuloval Parker (1958). Ukázal, že potřebné únikové rychlosti lze dosáhnout řešením hydrodynamických rovnic, jestliže předpokládáme, že k výtoku plynu dochází ze sluneční koróny zahřáté na teplotu 3 000 000 K v důsledku vysokých tepelných rychlostí (viz Maxwellovo rozdělení). Podobný mechanismus můžeme předpokládat i u jiných chladných hvězd, které mají rozsáhlé podpovrchové konvektivní zóny a tedy i chromosféry a koróny. Horké hvězdy mají jen velmi malé podpovrchové konvektivní zóny a proto u nich existence horkých korón není příliš pravděpodobná. I kdyby však koróny z nějaké dosud neznámé příčiny měly, Parkerův mechanismus vzniku slunečního větru by nebyl pro horké hvězdy použitelný – k dosažení pozorovaných rychlostí hvězdného větru horkých hvězd (2000-3000 km/s) by v hypotetické koróně musely panovat teploty řádu 10 miliónů K, při kterých by ionty C IV, Si IV či N V musely dávno zaniknout v důsledku srážkové ionizace. Byl proto navržen jiný mechanismus: vznik hvězdného větru způsobený tlakem záření v důsledku selektivní absorpce záření právě v silných rezonančních čarách. Tato myšlenka pak byla zásadním způsobem vylepšena v klíčové práci Castora, Abbota a Kleina (1975), kteří ukázali, že síla, způsobující únik plynu z atmosfér horkých hvězd, vzniká díky selektivní absorpci velkými množstvími spektrálních čar v ultrafialových spektrech, ne pouze díky čarám rezonančním. Tj. silou, která rozdmýchává hvězdný vítr je tlak intenzivního UV záření.

U chladných obrů a veleobrů vane vítr hustý a mnohem pomalejší, hnačí silou jsou pulsace nejchladnějších veleobrů a tlak záření na prach, který se ve větru tvoří.

9.7 Poznámka o rotaci hvězd

Rotace se bezprostředně pozoruje pouze u Slunce. U ostatních hvězd buď z rozšíření spektrálních čar nebo z anomálií na křivkách radiálních rychlostí dvojhvězd – deformace křivky v okamžiku, kdy před zákrytem a po zákrytu svítí okraje zakrývané složky (viz část dvojhvězdy). Profil čáry je rotací rozšířen vlivem různého Dopplerova posuvu vlnových délek v různých částech hvězdného disku – spektrální čára je rozšířena složkou rotační rychlosti promítnutou do směru zorného paprsku, se kterým rotační osa svírá úhel i . Je-li rovníková rotační rychlost hvězdy v , pak pozorovaná složka je $v \sin i$.

§ Rocheův model

Hrubý odhad vlivu rotace na rozměry hvězdy poskytuje Rocheův model, který lze považovat za polytropní model pro $n = 5$. Pro rotující hvězdu můžeme uvažovat válcové souřadnice s osou z identickou s osou rotace a druhou souřadnicí l , která označuje kolmou vzdálenost od rotační osy. Rocheův model je založen na předpokladu, že všechna hmota hvězdy je soustředěna ve hmotném bodu v jejím centru, a na předpokladu tuhé rotace s úhlovou rychlostí ω . Z hlediska povrchových vrstev je tento předpoklad u reálných hvězd docela dobře splněn.

Na částici ve hvězdné atmosféře působí jednak gravitační síla daná $-GM_*r^{-2}$, kde $r^2 = l^2 + z^2$, jednak odstředivá síla $\omega^2 l$. Celkový potenciál je tedy

$$\Phi = \frac{GM_*}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2.$$

Ekvipotenciální plochy jsou zároveň plochami konstantní hustoty, takže rotující hvězda bude zaujímat tvar některé konkrétní ekvipotenciální plochy.

Zkoumejme, jaké budou vlastnosti kritické plochy, pro niž bude výslednice přitažlivé a odstředivé síly nulová. Podmínkou pro to je nulový gradient potenciálu. Konkrétně dostáváme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2}GM_*(l^2 + z^2)^{-3/2}2z = -GM_*r^{-3}z = 0,$$

což je zřejmě splněno všude v rovině rovníku hvězdy t.j. pro $z = 0$, a pro

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = -GM_*l(l^2 + z^2)^{-3/2} + l\omega^2 = 0.$$

Protože $z = 0$, je tato druhá podmínka splněna pro l_0 pro něž platí

$$GM_*(l_0^2)^{-3/2} = \omega^2.$$

Hodnota kritického potenciálu tedy je

$$\Phi_{krit.} = \frac{GM_*}{l_0} + \frac{1}{2}\omega^2 l_0^2 = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2.$$

Kritická ekvipotenciála je tedy množinou bodů (l, z) , pro něž platí

$$\omega^2 l_0^3 (l^2 + z^2)^{-1/2} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2 = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2.$$

Jestliže položíme $l = 0$ zjistíme hodnotu polárního poloměru takové kriticky rotující hvězdy z_{pol} :

$$\omega^2 l_0^3 = \frac{3}{2}z_{pol}\omega^2 l_0^2 \quad \text{resp.} \quad z_{pol} = \frac{2}{3}l_0.$$

Vidíme tedy, že hvězda rotující na mezi své dynamické stability má rovníkový poloměr o polovinu větší než poloměr polární.

U rotujících hvězd se můžeme setkat s projevy rychlé proměnnosti jasnosti nebo profilů spektrálních čar. Může se stát, že si budeme chtít učinit představu, v jakém rozmezí se může nalézat očekávaná rotační perioda hvězdy. Označíme-li v rovníkovou rotační rychlost hvězdy, R_{rov} její rovníkový poloměr a P_{rot} její rotační periodu, platí zřejmě

$$v = 2\pi R_{rov} / P_{rot}.$$

Bývá zvykem vyjadřovat obvodovou rotační rychlost v km/s, rotační periodu ve dnech a poloměry hvězd v jednotkách slunečního poloměru \rightarrow dostáváme užitečnou pracovní rovnici

$$v = 50,6025 \frac{R_{rov}/R_{\odot}}{P}. \quad (a)$$

Žádná hvězda nemůže rotovat rychleji, než kritickou rychlostí v_K , při které se přitažlivá a odstředivá síla vyrovnávají (Keplerova či oběžná rychlost), tedy

$$\frac{GM_*}{R_{rov}^2} = \frac{v_K^2}{R_{rov}},$$

což vede na vztah pro Keplerovu rychlost

$$v_K = \left(GM_* / R_{rov} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

§ Vliv rotace na hvězdný vývoj

Rotace může ovlivnit stavbu hvězdy v několika směrech:

1. Odstředivá síla všude mimo rotační osu hvězdy snižuje efektivní gravitaci.
2. Protože vektor odstředivé síly není mimo rovník hvězdy rovnoběžný s vektorem síly přitažlivé, ekvipotenciály přestávají být kulové, viz limitní případ Rocheova modelu.
3. Protože se zářivý tok mění s efektivní gravitací v tom kterém místě, není tok záření konstantní na daném ekvipotenciálním povrchu, což může změnit podmínky vzniku konvektivní rovnováhy.
4. Rotace může ovlivňovat konvekci několika dalšími způsoby: jednak může působit proti konvektivním pohybům, jednak může – v důsledku přerozdělování momentu hybnosti určité konvektivní pohyby vyvolat i v oblastech zářivé rovnováhy (v důsledku diferenciální rotace, meridionální cirkulace).
5. Rotace způsobí i meridionální cirkulaci, která vede na diferenciální rotaci, ta vyvolá „střih“ a efektivní promíchávání hvězdného materiálu a to vše též ovlivní přerozdělování úhlového momentu hybnosti a obecně způsobí, že rotační rychlost v různých částech hvězdy nebude odpovídat konservativnímu případu, tj. odstředivá síla nebude mít potenciál.

Výsledky vývoje rotujících hvězd, záleží na použitém modelu a přiblížení (tuhá rotace, zachování celkového momentu hybnosti ...). Např. Meynet&Maeder (2000) publikovali sít vývojových modelů rotujících hvězd v rozmezí hmotností 9 – 120 M_{\odot} pro sluneční chemické složení a různé počáteční rotační rychlosti. Předpokládali nekonzervativní odstředivou sílu, vývoj rotační rychlosti modelovali s uvažováním všech známých procesů a brali v potaz i ztrátu hmoty hvězdným větrem. Jejich výsledky lze shrnout následovně:

1. *Vývoj rotační rychlosti* Sekulární mechanismy přerozdělení úhlového momentu jako je konvekce či meridionální cirkulace se uplatňují v obdobích klidného vývoje, zatímco v rychlých vývojových stadiích nemají dost času se uplatnit a úhlová rotační rychlost se mění v zásadě tak, že se lokálně zachovává moment hybnosti. Pro modely na počátku hlavní posloupnosti byla předpokládána tuhá rotace. Vývoj

během hlavní posloupnosti pak vede k tomu, že úhlová rotační rychlost všude ve hvězdě postupně klesá, včetně centrálního konvektivního jádra. Zároveň se ustaví diferenciální rotace, s rotační rychlostí klesající směrem k povrchu hvězdy. (Tak tomu je především díky započtení ztráty hmoty hvězdným větrem.) Ke konci životní doby na hlavní posloupnosti, když relativní hmotnostní obsah vodíku klesne pod 0,05 a jádro se smršťuje, začne úhlová rotační rychlost v centrálních částech růst. Ve fázi celkové kontrakce hvězdy po spotřebování zásob vodíku v jádru roste úhlová rotační rychlost v celé hvězdě. Zejména pro méně hmotné hvězdy (ve studovaném rozsahu hmotností) dosáhne v této fázi krátkodobě rotační rychlost i více než 80% kritické rotační rychlosti na povrchu hvězdy.

2. *Vliv rotace na vývojové dráhy v HR diagramu* Vzhledem k tomu, že tok záření závisí na povrchu rotující hvězdy přibližně na lokálním gravitačním zrychlení, jsou polární oblasti hvězdy teplejší než oblasti rovníkové. Hvězda kromě toho nemá kulový tvar a pojem efektivní teploty podle původní definice proto ztrácí smysl. Aby i přesto bylo možno konstruovat teoretický HR diagram, byl zaveden pojem střední efektivní teploty rotující hvězdy vztahem $L = \sigma \bar{T}_{eff}^4 S$, kde S označuje plochu povrchu hvězdy. Srovnání vývoje rotujících a nerotujících hvězd ukazuje, že na hlavní posloupnosti nulového věku vede rostoucí rotace k poklesu jak efektivní teploty, tak zářivého výkonu hvězdy. Rotující hvězda se proto jeví jako nerotující hvězda s poněkud menší hmotností. Naproti tomu postupný vývoj vede k tomu, že rotující hvězdy mají větší zářivý výkon než hvězdy nerotující. Tento fakt spolu s působením odstředivé síly vedou také k tomu, že ztráta hmoty z rotujících hvězd je o 60 až 100% větší, než z hvězd nerotujících. Počáteční rotační rychlost 200 km/s vede rovněž k prodloužení životní doby na hlavní posloupnosti asi o 20–30% a pokud porovnááme isochrony, zvýší taková rotace odhad staří asi o 25%.

3. *Vliv rotace na povrchové chemické složení* Velmi zajímavým výsledkem vlivu rotace je to, že již během vývoje na hlavní posloupnosti dochází u hvězd v uvažovaném rozsahu hmotností k obohacování jejich atmosfér heliem a dusíkem a naopak k úbytku uhlíku a kyslíku. Tento efekt roste s rostoucí hmotností hvězdy.

9.8 Typy pozorovaných hvězd a jejich vývojová stadia

§ Horké hvězdy spektrálního typu O a Wolfovy-Rayetovy hvězdy

Fenomenologicky jsou **hvězdy spektrálního typu O** definovány přítomností ionizovaného helia He II v jejich čárových spektrech. To odpovídá efektivním teplotám zhruba nad 30 000 K. Pro objekty na hlavní posloupnosti se podle měření dobře pozorovaných dvojhvězd jedná o rozsah hmotností od 15 do více než 50 M_{\odot} a poloměrů od 6 do více než 10 R_{\odot} .

Většina pozorovaných O hvězd se nachází v blízkosti galaktické roviny, patří k první populaci⁹ a jedná se zřejmě o mladé hvězdy.

Wolfovy-Rayetovy hvězdy jsou definovány přítomností velmi silných a širokých emisních čar ve spektru, které svým rozložením energie odpovídá spektru hvězdy spektrálního typu O. Název těchto hvězd je odvozen od jmen dvou astronomů, kteří jako první pomocí vizuálního spektroskopu podobné spektrum pozorovali při přehlídce hvězd v souhvězdí Labutě. Čárové spektrum WR hvězd je patrně čistě emisní. WR hvězdy se též rozpadají do dvou paralelních skupin: První jsou označovány WC hvězdy a jsou pro ně charakteristické silné emisní čáry iontů uhlíku C a kyslíku O. Druhou skupinu tvoří WN hvězdy, v jejichž čárových spektrech dominují emisní čáry iontů dusíku N. Obě skupiny mají silné emisní čáry helia He II. WR hvězdy se podobně jako O hvězdy nacházejí v diskové složce Galaxie, hlavně ve spirálních ramenech. Odhady jejich základních fyzikálních vlastností naznačují rozsah efektivních teplot mezi 30 000 a 90 000 K a hmotností mezi 10 a 40 M_{\odot} .

§ Hvězdy spektrálního typu B

Hvězdy spektrálního typu B se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku a neutrálního helia, chybí již čáry He II a jsou přítomny čáry lehčích ionizovaných prvků jako C II, O II, N II atd. Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 2,2 do 15 M_{\odot} , poloměrů od 2,1 do 6 R_{\odot} a efektivních teplot od 9 400 do 30 000 K. Kromě normálních B hvězd se pozorují pulsující hvězdy, několik typů chemicky pekuliárních hvězd a též hvězdy se závojem, které se vyznačují přítomností emisních čar vodíku.

Chemicky pekuliární Bp hvězdy – mezi B hvězdami a hvězdami spektrálního typu A se pozorují hvězdy se zřetelně anomálním zastoupením některých chemických prvků. K označení chemicky pekuliárních hvězd horní části hlavní posloupnosti byly zavedeny zkratky CP, rozlišují se 4 základní typy:

- CP1... Am hvězdy (metalické),
- CP2... magnetické Bp a Ap hvězdy,
- CP3... HgMn hvězdy,
- CP4... B hvězdy se slabými čarami helia.

⁹ Dvě základní skupiny, do kterých mohou být zhruba rozděleny hvězdy a jiné objekty v galaxiích. Populace je skupina podsystémů. Populace I jsou ploché podsystémy, populace II jsou kulové podsystémy. Liší se od sebe prostorovým uspořádáním, chemickým složením a stářím. Zavedl Baade, 1944. Populace I = mladé hvězdy s vysokou svítivostí, bohaté na kovy, které se nachází ve spirálních ramenech. Naopak staré červené hvězdy v eliptických galaxiích a galaktickém halu spirálních galaxií označil jako populaci II.

Hvězdy se závojem – Hvězdy se závojem (anglicky: Be stars) jsou hvězdy spektrálních typů O, B či A, v jejichž spektru byly alespoň někdy za dobu jejich spektroskopických pozorování zjištěny emise v čarách vodíku Balmerovy serie. Jejich charakteristickou vlastností je velká časová proměnnost na nejrůznějších časových škálách. V současné době lze pokládat za dobře prokázané, že emisní čáry v jejich spektrech vznikají v rozsáhlých obálkách - závojích - které je obklopují a které zřejmě nepravidelně mizí a po čase se obnovují. Jde o plynné obaly, jejichž rozměry alespoň o řád převyšují rozměry samotných hvězd. Příčina vzniku závoje a některé typy zjištěné proměnnosti hvězd se závojem zůstávají i po půldruhém století jejich studia záhadou.

Vznik obálek = ?

- *Model rotační nestability*, obálky díky rotační nestabilitě na rovníku hvězd.
- *Dvojhvězdný model*, závoje jsou ve skutečnosti akrečními disky a vznikají přítokem plynu z druhé složky ve dvojhvězdách. Jejich hypotéza vysvětluje přirozeným způsobem vysoké rotační rychlosti hvězd se závojem jako důsledek přenosu úhlového momentu dopadající hmoty, dále střednědobé změny a může vysvětlit i změny dlouhodobé. Podvojnost mnoha hvězd se závojem se ale nepodařilo prokázat a u některých dobře studovaných objektů lze dokonce přítomnost sekundáru, který by zaplňoval Rocheovu mez, zcela vyloučit.
- *Hypotéza rotací stlačovaného hvězdného větru*, závoje vznikají z hvězdného větru, který je u rychle rotujících hvězd stlačován do roviny rovníku.

Vývojové stadium hvězd se závojem není vyjasněno. Zdá se dokonce, že celý jev není vázán na konkrétní vývojové stadium. Hvězdy se závojem se vyskytují jak mezi mladými hvězdami v blízkosti hlavní posloupnosti nulového věku, tak mezi vyvinutými obry a veleobry.

§ Hvězdy spektrálního typu A a F

Hvězdy spektrálního typu A se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku, chybí již čáry helia a jsou přítomny čáry mnoha ionizovaných kovů (Fe II, Ti II, Cr II atd.). Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 1,5 do 2,2 M_{\odot} , poloměrů od 1,6 do 2,1 R_{\odot} a efektivních teplot od 6950 do 9400 K.

Hvězdy spektrálního typu F se vyznačují optickými spektry, u nichž jsou čáry vodíku podstatně slabší, než u A hvězd, i když stále ve spektrech dominují. V jejich spektrech se pozoruje oproti A hvězdám také daleko více čar kovů. Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 1,15 do 1,5 M_{\odot} , poloměrů od 1,25 do 1,6 R_{\odot} a efektivních teplot od 5900 do 6950 K.

Mezi hvězdami typu A nalézáme kromě „normálních“ hvězd hlavní posloupnosti, hvězdy výrazně chemicky pekuliární a také významné třídy pulsačně nestabilních hvězd, které mají přesah i do spektrálního typu F.

Am hvězdy (CP1 hvězdy) – metalické A hvězdy představují jednu z významných skupin chemicky pekuliárních hvězd. Jejich výskyt je omezen právě na spektrální typ A a jejich charakteristikou je, že zatímco čáry ionizovaného vápníku Ca II odpovídají rané spektrální podtřídě A, ostatní čáry kovů odpovídají pozdní A podtřídě nebo dokonce spektrálnímu typu F a čáry vodíku odpovídají nějaké střední podtřídě mezi oběma extrémami. (Jedná se o hvězdy chemicky pekuliární a to takové, které mají ve svých atmosférách buď nedostatek Ca (či také Sc) nebo přebytek prvků skupiny železa a těžších.) Nepozoruje se přítomnost magnetického pole. Jedná se zásadně o objekty na hlavní posloupnosti a bylo rovněž zjištěno, že u nich nedochází k žádným fyzikálním změnám jasnosti → ideální standard. Většina, a možná i všechny Am hvězdy jsou dvojhvězdami.

δ Scuti hvězdy – jednotné označení pro skupinu pulsujících hvězd spektrálních typů A a F, které se nacházejí v pásu nestability v HR diagramu a mají pulsační periody kratší než $0,^d3$. Amplitudy změn jasnosti se pohybují v širokém rozmezí od prahu detekce (asi $0,^m01$) až po $0,^m8$. Světelné křivky jsou buď zhruba sinusové nebo s více maximy. δ Sct hvězdy na hlavní posloupnosti mají periody kolem 1 hodiny a amplitudy jejich světelných křivek jsou malé, $0,^m02$ nebo menší. δ Sct hvězdy s větší svítivostí, podobří a obří, mají delší periody a často i větší amplitudy světelných změn. Celkově můžeme říci, že δ Sct hvězdy lze při současných znalostech kvalitativně dobře vysvětlit jako objekty vyvíjející se od hlavní posloupnosti v dolní části pásu nestability, který souvisí s ionizačními zónami vodíku a helia. Jistou část z nich mohou tvořit i hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku.

Li a Be u F a G hvězd: Lithium a berylium jsou velmi citlivým indikátorem toho, jak hluboko směrem do centra hvězdy zasahují podpovrchové konvektivní zóny u F a G hvězd. Slučovací reakce lithia probíhají již při teplotě asi $2,5 \cdot 10^6$ K, berylia při asi $3,5 \cdot 10^6$ K. Pokud tedy konvektivní zóna dosahuje až do hloubek, kde jsou ve hvězdě dostatečně vysoké teploty, bude obsah Li a Be v atmosférách takových hvězd značně nízký.

§ G,K,M hvězdy + proměnné hvězdy

Společným znakem chladných hvězd spektrálních typů G, K a M je existence hlubokých podpovrchových konvektivních zón, které vedou m.j. ke vzniku chromosfér a korón. Rozsah základních charakteristik pro hvězdy hlavní posloupnosti je následující (statistické hodnoty, ne absolutní rozsahy):

G hvězdy: $M = 0,91 - 1,16M_{\odot}$, $R = 1,01 - 1,25R_{\odot}$, $T_{eff} = 5200 - 5900$ K

K hvězdy: $M = 0,45 - 0,91M_{\odot}$, $R = 0,52 - 1,01R_{\odot}$, $T_{eff} = 3900 - 5200$ K

M hvězdy: $M = 0,10 - 0,45M_{\odot}$, $R = 0,12 - 0,52R_{\odot}$, $T_{eff} = 2600 - 3900$ K.

Chromosféra byla objevena nejprve u Slunce a později na základě různých typů pozorování i u chladných hvězd. Jedná se o poměrně řídkou - a alespoň v případě Slunce i nepříliš rozsáhlou - vrstvu, která se vyznačuje vyšší teplotou, než je teplota pod ní ležící fotosféry. Tloušťka sluneční chromosféry činí asi 10^4 km. Vzhledem k vyšší teplotě se chromosféra projevuje podobně jako rozsáhlé plynové závoje horkých hvězd: přítomností emisních čar ve spektru. Nad chromosférou se nachází ještě mnohem řidší a geometricky rozsáhlejší koróna, která plynule přechází do meziplanetárního prostoru. Záření koróny je nepatrné proti záření slunečního disku a proto lze korónu přímo pozorovat buď při úplných slunečních zatměních nebo z družic. V části sluneční koróny se pozorují emisní čáry železa a dalších prvků ve velmi vysokých stupních ionizace, což svědčí o tom, že ionizační teplota v koróně dosahuje teploty až 10^6 K. Existence teplotní inverze s rostoucí vzdáleností od středu hvězdy se vysvětluje dynamickým zahříváním v důsledku mohutných konvektivních pohybů. Konvektivní proudy vyvolávají rázové zvukové vlny, jejichž kinetická energie je úměrná hustotě a čtverci rychlosti. Hustota se vzdáleností klesá, rychlost roste a do chromosféry a koróny se tak dostává velké množství kinetické energie, z níž se jen nepatrná část vyzáří a většina se použije na silné zvýšení teploty. V poslední době se spíše uvažuje o ohmickém ohřevu v magnetických silotrubicích vystupujících nad fotosféru . . .

Experimentální důkazy existence chromosfér a korón: např. trojice čar Ca II v infračervené oblasti u 849,8, 854,2 a 866,2 nm. V této trojici absorpčních čar se u hvězd s chromosférami pozorují asymetrie či slabé zaplnění jader čar emisí. Dále se u chladných hvězd s chromosférami pozorují nečekaně silné a široké čáry vodíku, odpovídající vyšší teplotě než je efektivní teplota příslušných hvězd. Též čáry ionizovaného vápníku jsou

u chladných hvězd silné a široké a v jejich jádru lze pozorovat emisní složku – u hvězd spektrálního typu F a chladnějších. Dále např. emisní profily čáry Ly α u 121.6 nm. Ukazuje se, že patrně všechny chromosféry jsou časově proměnné na časových škálách od minut po staletí, viz 11-letý cyklus.

Výskyt chromosférické aktivity lze posuzovat např. podle typu hvězd, pro něž se pozoruje. Jedná se o následující třídy hvězd:

Hvězdy typu RS CVn – dvojhvězdy s oběžnými periodami od 1 do 14 dnů se synchronizovanými periodami rotace a oběhu a s teplejšími složkami spektrálních typů F či G v blízkosti hlavní posloupnosti, u kterých se aspoň mimo zákryty pozorují silné emisní čáry Ca II a světelné změny s rotační periodou dané skvrnami na povrchu.

Těsné dvojhvězdy typu W UMa – dotykové dvojhvězdy s krátkými oběžnými periodami a se složkami obvykle podobných a pozdních spektrálních typů a se světelnými křivkami, které se mění plynule během celé oběžné periody.

Hvězdy typu FK Com – osamocené hvězdy spektrálních typů G - K s promítnutými rotačními rychlostmi kolem 100 km s^{-1} , což je u tak chladných hvězd velice vysoká hodnota. Jejich hlavní charakteristikou je přítomnost emisních čar, často silnějších, než jaké se pozorují pro RS CVn dvojhvězdy.

Hvězdy typu T Tau – jedná se o osamocené hvězdy spektrálních typů F5 - G5, u nichž se pozorují chromosférické emisní čáry (zejména Ca II) a rychlé a zcela nepravidelné změny jasnosti s amplitudami až 3^m0 . Mají nízký zářivý výkon a zpravidla se vyskytují uvnitř zářící či temné mlhoviny. Hvězdy T Tau jsou mladé hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku a dosud u nich probíhá i akrece hmoty z okolní mlhoviny. Jejich nepravidelné světelné změny se vysvětlují nehomogenitami v rozsáhlých obálkách, které je obklopují = nepravidelné eruptivní hvězdy. Často spojeny s Herbigovými-Harovými objekty = malé jasné mlhoviny nepravidelného tvaru, který se rychle mění, k záření buzeny prahvězdami (např. právě T Tauri), slabé spojitě spektrum s intenzivními emisními čarami, excitace je zářením nebo výtryskem z prahvězdy, který HH zahřívá prostřednictvím rázové vlny.

Vsuvka o proměnných hvězdách

... základní typy proměnných hvězd:

- **pulsující PH** = periodické rozpínání/smršťování atmosfér, obří, nadobří; Cefeidy, Miridy, RR Lyrae = „krátkoperiodické cefeidy“ [0,05 - 1,2 dne], konstantní $M_V = 0,5$ mag, nezávislá na periodě; hvězdní obří obvykle typu A, v kulových hvězdokupách a poblíž středu Galaxie, amplituda změn jasnosti až 2 mag ...

- **eruptivní PH** = vyvrhují nepravidelně část hmoty (občas „finální“), novy, supernovy, T Tau ...

... tyto jsou *fyzické proměnné*, jejich proměnnost je důsledkem porušení rovnovážného stavu během vývoje

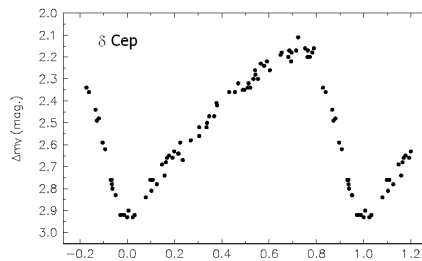
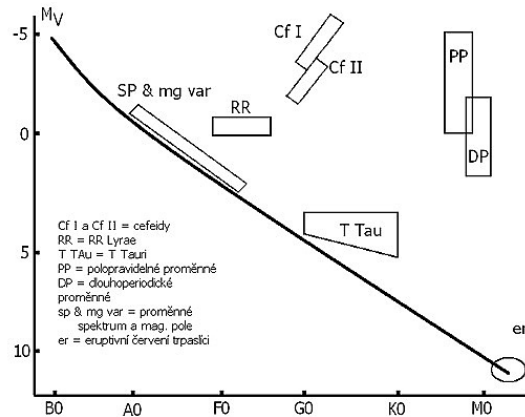
- **zákrytové proměnné** = dvojhvězdy (např. β Per = Algol)

- občas udávány **rotační PH** = k poklesu jejich jasnosti dochází vlivem velkých temných skvrn na povrchu hvězdy, které se objevují a mizí při jejím otočení

... tyto řazeny mezi *optické proměnné*

• Pulsující hvězdy:

Cefeidy – cefeidy dostaly svůj název podle druhé objevené proměnné tohoto typu, δ Cep, jejíž změny jasnosti objevil roku 1784 anglický amatér John Goodricke. Jsou to veleobří spektrálních tříd F, G a K s periodickými změnami jasnosti a radiálních rychlostí.



Jejich periody se pohybují v rozmezí od několika dní do skoro 100 dní a amplitudy světelných změn činí $0,^m1-2,^m0$. Jedná se o vyvinuté hvězdy v pásu pulsační nestability, které již spálily i helium ve svých jádrech. Podle stáří se rozlišují cefeidy třídy I a II, což odpovídá objektům první a druhé populace hvězd. Typickým představitelem třídy I je právě δ Cep (spektrální typ F5Iab), cefeidám typu II se podle typické představitelky říká také hvězdy typu W Vir. Vztah perioda - zářivý výkon se pro cefeidy typu I a II liší, cefeidy typu I jsou pro danou pulsační periodu asi o $1,^m5$ jasnější než cefeidy typu II.

Míry – míry patří k nejnápadnějším proměnným hvězdám. Jejich periody změn jasnosti a radiálních rychlostí jsou vesměs delší než 100 dní a amplitudy světelných změn jsou větší než $1,^m0$ a nezřídka dosahují i více než $10,^m0$. Ve spektrech těchto hvězd se vyskytují i silné emisní čáry. Klasické vysvětlení je, že se jedná o obří hvězdy v pozdních vývojových stádiích. Prototyp skupiny Mira Ceti (omikron Ceti) je hvězdou spektrální třídy M7IIIe, jejíž jasnost se mění s periodou $331,^d65$ od $2,^m0$ do $10,^m1$. Sekundární složkou Míry Ceti je bílý trpaslík a snímky z Hubbleova kosmického dalekohledu naznačují interakci mezi oběma hvězdami a vedou k odhadu poloměru Míry: $700 R_{\odot}$.

Hvězdy asymptotické větve obrů (Asymptotic Giant Branch Stars) – jedná se o relativně krátké pozdní vývojové stádium cyklických tepelných pulsů souvisejících s hořením helia v heliové slupce a s hluboko zasahující podpovrchovou konvektivní zónou. Tímto stádiem projdou hvězdy o počátečních hmotnostech asi $0,8$ až $8 M_{\odot}$. Vyvine se u nich i silný hvězdný vítr, který vede k odvrhování hmoty do prostoru rychlostmi $10^{-8} - 10^{-4} M_{\odot}$ za rok a v chladných obálkách kolem nich se tvoří komplexní molekuly. Následující vývoj vede ke vzniku planetárních mlhovin a končí stádiem bílého trpaslíka. Existuje ale i domněnka, že jev souvisí s podvojností těchto objektů a konkrétně s pohybem sekundární složky uvnitř atmosféry obra. Mezi AGB hvězdy se zahrnují Míry, polopravidelné a nepravidelné proměnné.

Mechanismus pulsujících hvězd: během oscilace se termodynamický stav elementu hmoty v pulsující hvězdě periodicky mění a po jednom úplném cyklu se vždy vrací do původního stavu. Dle 1. věty TDM je

$$dQ = dU + dW$$

a protože vnitřní energie je funkcí stavových veličin, bude její celková změna při cyklickém procesu nulová. Práce W vykonaná při jednom cyklickém procesu bude tedy integrálem změn pohlceného tepla

$$W = \oint dQ$$

a k pulsacím bude opakovaně docházet tehdy, bude-li celková práce na úkor pohlceného tepla kladná, tj. $W > 0$.

Nejčastějším mechanismem, který může způsobit pulsační nestabilitu, je **mechanismus opacitní**, který ovšem funguje pouze v oblastech měnící se ionizace některého dostatečně zastoupeného iontu, nejčastěji vodíku či helia.

Uvažujme nejprve úplně ionizovaný plyn. Opacitu hvězdné látky lze obecně popsat pomocí funkční závislosti

$$\kappa = c\rho^k T^{-m},$$

kde c je konstanta a k a m jsou kladná čísla. Poměrně dobrou aproximaci pro volně-vázané a volně-volně přechody představují *Kramersovy opacity*, které lze zapsat ve tvaru

$$\kappa = c\rho T^{-3,5}.$$

Pro adiabatický děj je $P \sim \rho^{5/3}$ a tedy $T \sim \rho^{2/3}$, což vede na

$$\kappa = c\rho^{-\frac{4}{3}}.$$

To ovšem znamená, že při kompresi s rostoucí hustotou klesá opacita a tedy pohlcování tepla. Jinými slovy, plně ionizované části hvězdy jsou stabilní a ke stabilním pulsacím v nich nemůže docházet. Jiná je ovšem situace v oblastech měnící se ionizace, kde je energie stlačování spotřebována na růst ionizace a teplota roste mnohem pomaleji. Pokud budeme předpokládat závislost teploty na hustotě ve tvaru $T \sim \rho^\lambda$, pak pro Kramersovu opacitu platí

$$\kappa = c\rho^{1-3,5\lambda}$$

a podmínkou vzniku pulsací je tedy nerovnost

$$1 - 3,5\lambda > 0.$$

To bývá v oblastech měnící se ionizace často splněno. Záleží ovšem na tom, kde se ta která ionizační zóna ve hvězdě nachází. Je-li příliš hluboko uvnitř hvězdy, dojde disipaci k utlumení kmitu, zatímco je-li příliš blízko povrchu, je tepelná kapacita příliš malá na to, aby došlo ke globálním oscilacím.

Pulsace můžeme v prvním přiblížení chápat jako akustické hustotní kmity s vlnovou délkou rovnou průměru hvězdy. Taková vlna se šíří rychlostí zvuku v_z a perioda radiální pulsace je tak dána výrazem $\Pi = 2R/v_z$. Konkrétní výraz pro periodu v závislosti na M resp. R lze pro aproximaci hvězdy plynou koulí, šíření zvukových vln a pro polytropní modely odvodit pomocí věty o viriálu, výsledky poměrně dobře souhlasí s pozorováním. Výsledné vztahy též vysvětlují existenci empirického vztahu perioda-zářivý výkon pro cefeidy a jiné typy radiálních pulsujících hvězd.

§ Hvězdy v pozdních vývojových stadiích

Bílí trpaslíci a ZZ Ceti hvězdy – bílí trpaslíci se v dvourozměrné klasifikaci popisují luminositivní třídou VII, mnohem častěji se však v astronomické literatuře objevuje označení DA, DB, DO a podobně, označující bílé trpaslíky se spektry spektrálních tříd A, B, O atd.

Třída DA je charakterizována přítomností čar vodíku v atmosféře příslušných hvězd, u třídy DB jsou přítomny čáry neutrálního helia. Podrobnějším studiem se ukázalo, že DA a DB trpaslíci tvoří dvě odlišné skupiny objektů a dvě sekvence v HR diagramu. Relativní

obsah helia v atmosférách DA trpaslíků je nepatrný. Naopak v atmosférách DB hvězd prakticky chybí vodík. Pomocí modelů atmosfér složených buď z čistého vodíku nebo helia byl odhadnut rozsah efektivních teplot DA trpaslíků v rozmezí od 7000 do 30000 K, pro DB hvězdy je to 12000 až 30000 K.

Rozložení prostorových rychlostí ukazuje, že naprostá většina bílých trpaslíků pochází ze starší populace II. Existence dvou sekvencí souvisí pravděpodobně s různou účinností zářivé difuze.

ZZ Cet hvězdy jsou bílí trpaslíci typu DA, u nichž dochází k měřitelným změnám jejich jasnosti. Změny jasnosti jsou zřejmě periodické a často multiperiodické, a velmi rychlé. Periody známých ZZ Cet hvězd jsou mezi 100 a 1200 sekundami, což je ale o hodně delší, než by odpovídalo jejich radiálním pulsacím, takže se dosti všeobecně soudí, že pozorované změny jasnosti jsou projevem pulsací neradiálních. V posledních desetiletích je pulsacím ZZ Cet hvězd věnovaná značná pozornost, neboť existuje oprávněná naděje, že se s jejich pomocí lze dozvědět hodně o skutečné vnitřní stavbě bílých trpaslíků, podobně jako v případě našeho Slunce. Soudí se, že možná všichni bílí trpaslíci typu DA se stávají pulsačně nestabilními, když se během svého vývoje a postupného chladnutí dostávají do oblasti s efektivní teplotou mezi 13000 a 11000 K.

Novy – pokud je bílý trpaslík složkou dvojhvězdy a dojde k přenosu hmoty bohaté na vodík z druhé složky na povrch bílého trpaslíka, může docházet k velmi nápadným zjasněním soustavy (v krátkém čase náhlý vzrůst jasnosti o 7 - 16 mag). Na povrchu bílého trpaslíka může nastat velmi bouřlivé jaderné slučování vodíku na helium, což vede k výbuchu a odvržení obálky do okolního prostoru. Pohyb hmoty velkými rychlostmi (až 2000 km/s) se skutečně u nov po výbuchu pozoruje. Rekurentní novy - pravidelně se opakují, nejde ale do ∞ – nakonec trpaslík překročí kritickou hodnotu maxima m ($1,44 M_{\odot}$ pro trpaslíka původem z vodíku), pak zhroucení na neutronovou hvězdu a zážeh SN I. (klidné období = prenova, pak prudký nárůst jasnosti, pozvolný pokles, nakonec = postnova)

Známy jsou rovněž **trpasličí novy** = rekurentní novy, dvojhvězdy složené z bílého trpaslíka a červeného trpaslíka (normální hvězdy), jejichž oběžné periody činí jen několik hodin a u nichž dochází k opakovaným zjasněním o 3 až 5 hvězdných velikostí během týdnů až několika let. Soudí se, že i tyto objekty se zjasňují v důsledku přenosu hmoty mezi složkami, mechanismus ale patrně nesouvisí s nukleárním hořením, ale s nestabilitou akrečního disku kolem bílého trpaslíka, jehož opacita se v důsledku akrece po dosažení určité kritické hodnoty může velmi prudce změnit.

Zdá se jisté, že výbuchy nov vedou jen k relativně malé ztrátě hmoty ze soustavy poměřováno celkovou hmotností hvězd, množství vyvržené hmoty cca $10^{-9} - 10^{-3} M_{\odot}$. Vyvržená hmota – plyn – se rozpíná ve formě obálky, která je v ojedinělých případech pozorovatelná za desítky let po vzplanutí jako slabá mlhovina obklopující hvězdu. U některých trpasličích nov s mnoha pozorovanými zjasněními byla nalezena korelace mezi mohutností zjasnění a dobou do následujícího zjasnění.

Supernovy – supernovy představují jeden z nejnápadnějších jevů na obloze, zjasnění o 20 mag i více. Jedná se o hvězdy, které se během krátké doby zjasní o mnoho magnitud, takže pokud k takovému zjasnění dojde u objektů nepříliš vzdálených od sluneční soustavy, je možno po určitý čas pozorovat supernovu na obloze i ve dne. Následující pozvolný pokles jasnosti může trvat i dva roky. Celková energie při výbuchu uvolněná je cca $10^{41} - 10^{45}$ J, část jako záření, poměrně velká část na kinetickou energii rychle se pohybujících zbytků vnějších částí hvězdy po vyvržení, jsou pozorovány ve formě rozsáhlých mlhovin, Krabí ...

Supernovy bývají klasifikovány podle vzhledu spekter v maximu jasnosti do dvou základních typů. **Supernovy typu I** neobsahují ve spektrech čáry vodíku, **supernovy typu II** ano. Supernovy typu I bývají dále děleny podle přítomnosti či nepřítomnosti čar křemíku a helia ve spektrech. Typ II se dále dělí podle vzhledu světelné křivky. Spektra v maximu jasnosti jsou často téměř jen spojitá, bez spektrálních čar. Později se objevují emisní čáry vodíku a ještě později zakázané čáry kovů.

Pro supernovy typu I bylo zjištěno, že se vyskytují v kulových složkách galaxií a že nejsou vázány na spirální ramena. Protože hmotné hvězdy se vyskytují právě ve spirálních ramenech, svědčí to o tom, že supernovy typu I nejsou výsledkem vývoje velkých osamocených hvězd, ale produktem dvojhvězdného vývoje. V současnosti se soudí, že tyto supernovy vznikají v důsledku akrece nadkritického množství hmoty na bílého trpaslíka složeného převážně z uhlíku a kyslíku, který je hmotu přijímající složkou ve dvojhvězdě, viz překročení kritické hodnoty $m \rightarrow$ všechny jsou si podobné, dobré standardní majáky pro určování vzdáleností.

O supernovách typu II se soudí, že jsou výsledkem dynamické nestability v závěrečných stádiích vývoje jednotlivé (velmi hmotné) hvězdy. Při jejich výbuchu dojde k rozmetání většiny hvězdného materiálu do prostoru a zbude jen malé degenerované jádro, neutronová hvězda. Explozi předchází zhroucení jejich jádra, na které padají hořejší vrstvy a za teploty cca $2 \cdot 10^{11}$ K v nich explozivně vzplanou různé termonukleární reakce. Nová přesnější pozorování postupně odhalují značnou individualitu supernov (liší se v hmotnosti, tj. světelné křivky jsou všelijaké) a lze se nadít toho, že i teoretické představy o jejich vzniku se budou ještě značně vyvíjet.

Konečná stadia hvězdného vývoje, podrobně viz Relativita ...

Literatura a zdroje

- Harmanec P., Stavba a vývoj hvězd, interní materiál k přednášce Astrofyzika II, AU MFF UK, 2005
(převážná většina této kapitoly doslova převzata právě z tohoto zdroje ...)
- Harmanec P., Základy astronomie a astrofyziky II, interní materiál k přednášce AST007, AU MFF UK, 2005
- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Příhoda P., Průvodce astronomií, HaP Praha, 2000
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002
- Mikulášek Z., Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav, Skripta kurzu, PřF MU, Brno 2000

Kapitola 10

Dvojhvězdy

Dvojhvězdy: Fotometrie a spektroskopie dvojhvězd, určování elementů. Zvláštnosti vývoje těsných dvojhvězd. Kataklyzmické proměnné.

- Vývoj dvojhvězd ve stadiu výměny hmoty mezi složkami a metoda výpočtu modelů, vysvětlení vývojového paradoxu polodotykových soustav
- Dvojhvězdy – fotometrie, spektroskopie. Určování elementů. ¹
- Zvláštnosti vývoje těsných dvojhvězd, přetok hmoty mezi složkami. Kataklyzmické proměnné. ¹

¹ pro absolventy přednášky Dvojhvězdy

10.1 Pojem dvojhvězdy, klasifikace

Dvojhvězdou nazýváme dvojici hvězd, které jsou k sobě gravitačně vázány a obíhají kolem společného těžiště po eliptické nebo kruhové dráze. Hvězdám, které takovou dvojici tvoří, říkáme **složky** dvojhvězdy. Pojmem **primární složka** nebo jednoduše primár se obvykle označuje jasnější z obou hvězd. V teoretických úvahách se však označuje tímto pojmem hvězda hmotnější. Její partnerce se pak říká **sekundární složka** nebo sekundár.

Někdy jsou na obloze pozorovány v těsné blízkosti u sebe dvě hvězdy, pro něž však podrobnější studium ukáže, že jde o dvě tělesa ve zcela různých vzdálenostech od nás a nijak spolu nesouvisejících. Těm se říká **optické dvojhvězdy**. Z hlediska našeho výkladu jsou nezájímavé a za dvojhvězdy je nebudeme považovat.

Ačkoliv dosavadní znalosti musíme stále pokládat za značně neúplné, je zřejmé, že ve dvojhvězdách se vyskytuje velké procento hvězd. Vzácné nejsou ani trojhvězdy, čtyřhvězdy a vícenásobné systémy.

Pozorování dvojhvězd a určování jejich fyzikálních vlastností ukazuje, že se mohou vyskytovat velmi pestré a snad skoro všechny myslitelné kombinace. Za teoretickou dolní mez můžeme na základě našich současných znalostí považovat v této době kombinaci dvou podobných neutronových hvězd o hmotnostech $1,4 M_{\odot}$ a poloměrech 10 km, které obíhají po kruhové dráze tak, že se jejich povrchy prakticky dotýkají, tedy, že vzdálenost jejich středů $a = 20$ km. Jestliže vyjdeme ze 3. Keplerova zákona ve tvaru

$$a^3 = \frac{G}{4\pi^2} P^2 (M_1 + M_2)$$

a upravíme jej numericky tak, abychom mohli hmotnosti primáru M_1 a sekundáru M_2 udávat v hmotnostech našeho Slunce, oběžnou periodu P ve dnech a velkou poloosu dráhy a ve slunečních poloměrech, dostaneme užitečný pracovní vztah

$$a^3 = 86400^2 \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}^3} \frac{G}{4\pi^2} P^2 (M_1 + M_2) = 74,48358 P^2 (M_1 + M_2)$$

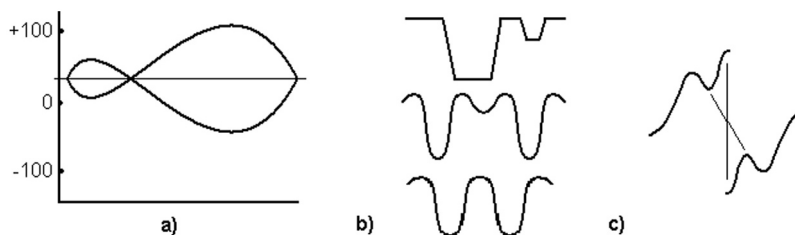
a můžeme si snadno spočítat, že oběžná perioda výše uvažované dvojhvězdy by činila pouhých 0,0009 sekundy. Prohlídkou katalogu kataklyzmických dvojhvězd a rentgenovských dvojhvězd o malé hmotnosti zjistíme nejkratší oběžnou periodou cca 5,35 minuty.

Maximální dosud zjištěná hmotnost složek se pohybuje někde kolem $60 M_{\odot}$, povrchové teploty jsou od asi 1000 K do teplot řádu 100 000 K a nejdelsí oběžná perioda je asi 32 000 let. V zásadě lze říci, že dvojhvězdy se mohou vyskytovat v kombinacích od těles, která se dotýkají, až po vzdálenosti, souměřitelné se středními vzájemnými vzdálenostmi hvězd v dané části prostoru od sebe.

§ Klasifikace dle metody pozorování

Vzhledem k obrovským vzdálenostem mezi jednotlivými hvězdami v Galaxii vidíme v dalekohledu jen malé procento dvojhvězd jako dva oddělené světelné body. Jde obvykle o tělesa hodně vzájemně vzdálená, s oběžnými periodami nejméně několik let. Takovým dvojhvězdám se říká **visuální dvojhvězdy** a při jejich trpělivém pozorování můžeme časem přímo vidět v průmětu na oblohu jejich vzájemný oběžný pohyb.

Pokud je sekundární složka visuální dvojhvězdy mnohem méně jasná než složka primární, její světlo nepozorujeme a na přítomnost druhého tělesa můžeme usoudit pouze z rozboru periodických poruch jejího prostorového pohybu za delší období, hovoříme o **dvojhvězdě astrometrické**.



Většina dvojhvězd však zůstává i v nejsilnějších dalekohledech nerozlišena a jeví se jako jediný světelný bod. Jejich dvojhvězdnou povahu pak nejčastěji zjistíme ze spektroskopických pozorování, neboť v důsledku oběžného pohybu dochází k periodickým změnám radiální rychlosti čar (spektrální čáry oscilují kolem jisté klidové hodnoty radiální rychlosti, odpovídající radiální rychlosti těžiště soustavy vzhledem k pozorovateli). Takovým dvojhvězdám se říká **spektroskopické dvojhvězdy**. V ideálním případě jsou ve spektru pozorovatelné spektrální čáry obou složek (hvězdy dvoučarové), které se pravidelně od sebe vzdalují a zase se k sobě přibližují. V grafu radiální rychlosti v závislosti na čase definují dvě protínající se sinusovky, které se mění v protifázi, jde-li o dvojhvězdu v kruhové dráze, nebo o dvě asymetrické, ale jednoduše periodické křivky, jde-li o eliptický pohyb. Hodnota radiální rychlosti odpovídající průsečíku obou křivek pak definuje radiální rychlost pohybu celé soustavy vůči nám, a). Pokud jsou složky dvojhvězdy hodně odlišné jasností či povrchovou teplotou, vidíme ve spektru obvykle pouze čáry jasnější z obou hvězd (hvězdy jednočarové). Někdy se čáry druhé slabší složky podaří nalézt v jiném spektrálním oboru, např. v červeném či infračerveném, jde-li o chladný sekundár, nebo naopak v UV oboru, jde-li o malou horkou sekundární složku.

Pokud je oběžná rovina dvojhvězdy v prostoru orientována tak, že v ní naše sluneční soustava zhruba leží, budeme pozorovat vzájemné zákryty obou složek dvojhvězdy a hovoříme o **dvojhvězdě zákrytové**. Zákryty se projeví především při fotometrických pozorováních, a to pravidelně se opakujícími poklesy jasnosti. Historicky byly rozlišovány tři typy světelných křivek, b):

- *Světelná křivka typu Algol* se označuje podle první objevené zákrytové dvojhvězdy Algol (β Persei). Vyznačuje se zcela konstantním světlem mimo zákryty a během totálních částí zákrytu.
- *Světelná křivka typu β Lyrae* je shodou okolností nazvána podle druhé objevené zákrytové dvojhvězdy a je pro ni příznačné, že jasnost soustavy se plynule mění ve všech orbitálních fázích, i mimo vlastní zákryty, přičemž hloubka minim je výrazně odlišná.
- *Světelná křivka typu W UMa* je charakterizována dvěma podobnými minimy, krátkou oběžnou periodou a rovněž plynulými změnami ve všech fázích orbitální periody.

Efekty zákrytů ve spektrech jsou složitější. Budou-li se např. složky dvojhvězdy lišit svou povrchovou teplotou, může se stát, že během zákrytu zesílí čáry jedné nebo druhé složky a vzhled spektra se výrazně změní. Pokud některá z hvězd rychle rotuje, lze ve fázích na začátku a na konci zákrytu pozorovat tzv. **rotační efekt**, c). Při začátku zákrytu je totiž postupně zakrýváván disk jedné ze složek, takže nakonec vidíme světlo jen z jednoho okraje. Pokud je směr rotace shodný se směrem oběhu složek (a tak tomu zpravidla bývá), projeví se část nezakrytého disku rotující hvězdy na začátku zákrytu vzrůstem radiální rychlosti nad normální křivku radiální rychlosti. Na konci zákrytu vidíme naopak přibližující se část disku a pozorujeme anomální pokles radiální rychlosti.

V některých případech se stává, že pozorujeme nepříliš velké plynulé světelné změny definující dvojitou vlnu s oběžnou periodou dvojhvězdy, tedy něco jako světelnou křivku typu Lyrae, ale s malou amplitudou (pod $0,^m 1$). Ukazuje se, že to je případ hvězd, které jsou slapově deformovány a nemají sférický tvar, takže se během jejich vzájemného oběhu mění plocha jejich disků promítnutá na nebeskou sféru a tudíž i jejich jasnost. Takovým dvojhvězdám se říká **elipsoidální proměnné**. Nedochozí u nich ke geometrickým zákrytům a sklon jejich dráhy je zpravidla někde mezi asi 30° a 70° .

§ Klasifikace dle dynamické stability

K úvahám o dynamické stabilitě konkrétní dvojhvězdy se velmi dobře hodí **Rocheův model**. Bez toho, abychom v této chvíli zacházeli do podrobností, si zde pouze řekněme, že Rocheův model představuje nahrazení skutečného potenciálu dvojhvězdy, obíhající kolem společného těžiště, potenciálem dvou hmotných bodů umístěných v centrech složek dvojhvězdy a potenciálem odstředivé síly oběžného pohybu. Tato aproximace je vzhledem k vysoké koncentraci hmoty hvězd směrem k centru zcela přípustná. Ukazuje se, že tvar ekvipotenciálních ploch Rocheova modelu závisí pouze na poměru hmotností obou hmotných bodů. Příslušné ekvipotenciální plochy jsou nejprve uzavřené kolem obou hvězd, ale pro určitou kritickou hodnotu potenciálu se slévají v jakési brýle s úhlem velmi přibližně 57° vůči spojnici obou center. Další ekvipotenciální plochy již obklopují obě hvězdy, poté se postupně otvírají nejprve za méně hmotnou a poté za hmotnější složkou, a ve velké vzdálenosti se limitně blíží sférickým plochám kolem celé dvojhvězdy. Ona kritická „brýlovitá“ ekvipotenciála se nazývá **Rocheova mez**. V oběžné rovině existuje celkem 5 bodů, nazývaných **Lagrangeovy body**, ve kterých je výsledná síla působící na testovací tělíčko nulová. Jeden z nich, L1, leží na spojnici mezi oběma hmotnými body, další dva leží také na spojnici obou hmotných bodů, ale vně méně hmotné (L2) a vně hmotnější (L3) složky, viz dále. Je jasné, že vzroste-li rozměr hvězdy tak, že hvězda zaplní Rocheovu mez, stane se dynamicky nestabilní a plyn z její atmosféry může volně přetékat směrem ke druhé složce. Dvojhvězdy se dělí na **oddělené systémy**, jejichž obě složky jsou spolehlivě uvnitř kritické Rocheovy meze, dále na **polodotykové systémy**, u kterých je jedna složka uvnitř Rocheovy meze a druhá ji právě vyplňuje, a na **kontaktní systémy**, pro něž obě složky vyplňují či spíše přesahují Rocheovu mez a mají společnou atmosféru. Navíc existují dvojhvězdy s dvojným kontaktem. Jedná se o to, že pokud jedna ze složek dvojhvězdy rychle rotuje, leží mez její dynamické stability někdy i velmi hluboko pod Rocheovou mezí. Může se proto stát, že rychle rotující hvězda ve dvojhvězdě je dynamicky nestabilní i přesto, že její poloměr je mnohem menší, než odpovídající Rocheova mez.

§ Klasifikace „živočichopisná“

Algoly – tento pojem je zvlášť zrádný, protože se historicky vyvíjel, a může znamenat několik zcela různých věcí. Kromě původní charakteristiky typu světelné křivky začal totiž být postupně užíván i k označení polodotykových soustav ve stádiu přenosu hmoty mezi složkami (často též nyní nazývaných „interagující dvojhvězdy“). „Algolem“ v tomto smyslu je pak i prototyp druhého typu světelné křivky, známá interagující dvojhvězda β Lyr. Odtud byl již jen krok k velmi nešťastnému termínu „nezákrytový Algol“, používaný některými astronomy pro spektroskopické dvojhvězdy, u nichž se lze podle nepřímých důkazů dohadovat také o probíhajícím přenosu hmoty mezi složkami, a jejichž sklon oběžné dráhy je takový, že vůči nám nedochází k zákrytům.

Dvojhvězdy s hvězdou se závojem – existují dvojhvězdy, v jejichž spektrech nacházíme obvykle časově proměnné emisní čáry, které ve většině případů souvisejí s jednou ze složek dvojhvězdy, obvykle hvězdou spektrálního typu O, B či A. Obecně se soudí, že emisní čáry svědčí o přítomnosti cirkumstelární hmoty ve dvojhvězdě. Čistě popisně a historicky bylo rozlišeno několik skupin emisních objektů. Asi nejznámější jsou dvojhvězdy typu *W Ser*, mezi něž se kromě zmíněného prototypu počítá i β *Lyr* a další. Jde vesměs o dvojhvězdy s oběžnými periodami delšími, než mají klasické Algoly. Typické periody jsou asi od 10 do 300 dní. Jedná se vesměs o polodotykové soustavy, u kterých sekundární složka vyplňuje Rocheovu mez.

Po objevu rentgenovských zdrojů záření se ukázalo, že mnoho z nich jsou hmotné dvojhvězdy, jejichž optickou primární složkou je právě hvězda se závojem, buď o vysoké svítivosti nebo hvězda hlavní posloupnosti.

Symbiotické dvojhvězdy – jedná se v zásadě o kombinaci obří chladné hvězdy, která často dominuje v optickém oboru spektra, s poměrně malou hvězdou horkou, buď normální nebo bílým trpaslíkem. Podmínkou je i přítomnost emisních čar včetně čar zakázaných. Obvykle se jedná o dvojhvězdy s dlouhými oběžnými periodami řádu několik stovek dní. I v těchto soustavách se pozorují emisní čáry, chladné složky někdy pulsují a mění při tom svou jasnost, dochází též k dlouhodobým výrazným spektrálním změnám.

Na Algoly, dvojhvězdy s hvězdou se závojem a symbiotické hvězdy lze pohlížet jako na podobné objekty, které se liší především délkou oběžné periody. U Algolů s kratšími oběžnými periodami není uvnitř Rocheovy meze dostatečné místo na vznik rozsáhlých obálek, proto se u nich nepozorují příliš silné emise. Naopak u symbiotických hvězd je Rocheova mez kolem chladné složky tak velká, že tato složka světelně dominuje již v optické oblasti spektra.

Kataklysmické proměnné (novy, trpasličí novy a rentgenovské dvojhvězdy o malé hmotnosti) – jedná se o dvojhvězdy, u nichž je přenos hmoty mezi složkami spojen s eruptivními jevy, zejména s nápadným zjasňováním celé soustavy v nepravidelných intervalech od týdnů až do desítek let. U těchto dvojhvězd se zpravidla pozorují i emisní čáry ve spektrech. Obvykle jsou tvořeny dvojicí chladné hvězdy zaplňující Rocheovu mez a horké, velmi kompaktní hvězdy. Důležitou charakteristikou je, že k celkovému zářivému výkonu těchto soustav přispívá podstatnou měrou záření akrečního disku kolem horké složky.

Dvojhvězdné pulsary – zdá se, že existují dva typy dvojhvězd s pulsary: V prvním případě je průvodcem pulsaru také neutronová hvězda nebo hmotný bílý trpaslík, oběžná perioda je krátká a dráha výstředná. V druhé kategorii jsou pulsary, jejichž druhou složkou je málo hmotná hvězda (0,2-0,4 M_{\odot}), patrně heliový bílý trpaslík. Oběžná dráha je kruhová a perioda je dlouhá.

10.2 Určování kvantitativních vlastností dvojhvězd

§ $O - C$ diagramy a změna oběžných period dvojhvězd

Samostatným a zpravidla prvním úkolem při studiu konkrétní dvojhvězdy bývá z pozorovaných změn její jasnosti nebo radiální rychlosti určit dostatečně přesnou a spolehlivou hodnotu její oběžné periody P . Je to přímočaré, pokud máme měření jasnosti zákrytové nebo elipsoidální proměnné. Pokud ale ve spektru pozorujeme čáry dvou složek dvojhvězdy podobných spektrálních typů, nemusí být celá věc jednoduchá, neboť na počátku nevíme, která čára které složce náleží. Pokud se již zdařilo nějaký odhad periody nalézt, můžeme zjištěnou periodu zpřesňovat pomocí dalších pozorování, případně s využitím starších, dříve publikovaných pozorování.

Klasickou metodou, jak zpřesňovat hodnotu oběžné periody (ostatně i periody fyzikálních proměnných hvězd) a jak se přesvědčit, že perioda je dlouhodobě stálá nebo se nějakým způsobem mění, je konstruovat tzv. $O - C$ (z anglického *observed - computed*; pozorovaný - vypočtený) diagram okamžiků minim či maxim, maxim radiální rychlosti a podobně.

Konstrukce $O - C$ diagramu je ovšem možná pouze tehdy, známe-li hodnotu periody s dostatečnou přesností a máme-li k dispozici dostatečně hustou řadu okamžiků minim. Jinak totiž narazíme na problém ročních aliasů a námi konstruovaný $O - C$ diagram může být chybný a zavádějící.

Pokud o dlouhodobém chování periody námi studované proměnné nemáme žádné dřívější informace, začínáme obvykle s lineární efemeridou

$$T_{min} = T_0 + P.E,$$

kde T_0 je zvolený referenční okamžik minima. Pro každý z pozorování určený okamžik minima O odhadneme odpovídající číslo cyklu neboli epochu E podle vztahu

$$E = \text{int}\left(\frac{O - T_0}{P}\right)$$

a očekávaný okamžik minima poté spočteme ze vztahu

$$C = T_0 + P.E.$$

Pro všechny okamžiky minim, které takto získáme, poté nakreslíme to, čemu se říká $O - C$ diagram, totiž průběh funkční závislosti $O - C = f(E)$ a ten vyhodnotíme.

Pokud je hodnota periody, kterou jsme při konstrukci $O - C$ diagramu použili, stálá a v mezích chyb pozorování i dostatečně přesná, budou body v $O - C$ diagramu ležet v okolí přímky rovnoběžné s osou X a rozptyl bodů bude odpovídat chybám určení jednotlivých okamžiků minim.

Je-li perioda stálá, ale je-li její hodnota poněkud delší než ta, kterou jsme při konstrukci diagramu použili, budou se pozorované body v $O - C$ diagramu kupit opět kolem přímky, která ale bude s rostoucím E stoupat, tj. bude mít kladnou směrnici.

Analogicky je-li skutečná perioda kratší než ta, kterou jsme použili, budou se body v $O - C$ diagramu kupit kolem přímky se zápornou směrnici. V obou těchto případech lze $O - C$ diagram využít ke zpřesnění hodnoty periody.

Předpokládejme pro jednoduchost, že určení okamžiků minim není zatíženo chybami a předpokládejme dále, že zatímco jsme $O - C$ diagram konstruovali pro periodu P , správná hodnota periody je $P + \Delta P$. Pro danou epochu E bude pak

$$O - C = (T_0 + (P + \Delta P).E) - (T_0 + P.E) = \Delta P.E.$$

Jinými slovy: směrnice přímků v $O - C$ diagramu, kterou můžeme určit třeba metodou nejmenších čtverců, je algebraicky rovna hodnotě opravy ΔP námi použité periody P .

Jiný $O - C$ diagram dostaneme, pokud se perioda studovaného objektu s časem mění. Typickým případem je parabolický průběh odchylek, přičemž osa paraboly je rovnoběžná s osou Y . Pokud má parabola minimum pro $E = O$, jedná se o prodlužování periody, dosahuje-li pro $E = O$ maxima, perioda se zkracuje. To je ovšem situace, se kterou se podle současných představ setkáváme u dvojhvězd ve stádiu výměny hmoty poté, co se již role složek vyměnila. Kvadratická efemerida je proto velmi dobrým popisem reálné situace v podobných případech.

Jinou možností je, že $O - C$ diagram ukazuje periodické změny. Z toho lze usoudit na přítomnost třetího tělesa v soustavě nebo na postupné stáčení výstředné oběžné dráhy v prostoru.

Posledním typem $O - C$ diagramu je nespojitý průběh odchylek s výrazným skokem, tj. situace, kdy se např. po období stability perioda v důsledku nějakého eruptivního procesu (třeba krátkodobé ztráty hmoty ze soustavy či chvilkové výměny hmoty mezi složkami) prakticky skokově změní.

§ Určování elementů spektroskopických dvojhvězd

a) Případ, kdy pozorujeme obě spektra

Pokud ve spektru pozorujeme spektra obou složek, získáme dvě křivky radiálních rychlostí a jejich poloviční amplitudy K_1 a K_2 . Z toho hned můžeme určit poměr hmotností obou těles, neboť platí, že

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{K_1}{K_2}.$$

Určení dalších veličin není už tak jednoduché. Poloviční pozorovaná amplituda křivky radiálních rychlostí je totiž součinem skutečné oběžné rychlosti příslušné složky dvojhvězdy se sinem sklonu oběžné dráhy i .

Pro obecný případ eliptické dráhy s excentricitou e se obvykle předpokládá, že složky dvojhvězdy obíhají kolem společného těžiště po drahách odpovídajících řešení problému dvou těles, tedy s průvodičem

$$r_{1,2} = \frac{a_{1,2}(1 - e^2)}{1 + e \cos v(t)},$$

z čehož lze pro radiální rychlost j -té složky dvojhvězdy jako funkci času t odvodit vztah

$$RV_j = \gamma + (3 - 2j)K_j(\cos(\omega_j + v(t)) + e \cos \omega_j),$$

kde γ je radiální rychlost celé soustavy vůči nám a ω je délka periastra j -té složky měřená od výstupného uzlu dráhy. Platí přirozeně, že $\omega_2 = \omega_1 + 180^\circ$. Pro pravou anomálii $v(t)$ jako funkci excentrické anomálie $E(t)$ platí

$$\operatorname{tg} \frac{v(t)}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E(t)}{2}.$$

Excentrickou anomálii vypočteme z času pozorování pomocí Keplerovy rovnice

$$E(t) = \frac{2\pi}{P}(t - T_0) + e \sin E(t) = M(t) + e \sin E(t),$$

kde T_0 je čas průchodu hvězd periastrum, P siderická oběžná perioda dvojhvězdy a $M(t)$ je střední anomálie.

Všechny parametry rovnic – konkrétně K_j , e , P , T_0 , ω_j a γ – se z pozorovaných měření radiálních rychlostí určí metodou nejmenších čtverců. Z nich pak už můžeme spočítat dolní odhad vzdáleností složek od těžiště soustavy a_j z 2. Keplerova zákona

$$a_j \sin i = \frac{P}{2\pi} K_j (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sečteme-li obě (tj. pro $j = 1, 2$) rovnice, užitíme-li definici těžiště a 3. KZ, dostaneme pro hmotnosti obou složek vztahy

$$M_j \sin^3 i = \frac{1}{2\pi G} K_{3-j} (K_1 + K_2)^2 P (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}$$

b) Případ, kdy pozorujeme pouze jedno spektrum

Pokud pozorujeme křivku radiálních rychlostí pouze jasnější složky dvojhvězdy, např. složky 1, můžeme z parametrů popisujících křivku získat pouze $a_1 \sin i$ a veličinu, které se říká **funkce hmoty** $f(M)$, a která je definována vztahem

$$f_j(M) = \frac{4\pi^2 a_j^3 \sin^3 i}{G P^2} = \frac{M_{3-j} \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{q^3}{(1 + q)^2} M_j \sin^3 i,$$

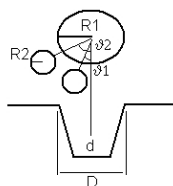
kde $q = M_{3-j}/M_j$ označuje poměr hmot.

Z veličin, které určíme přímo z křivky radiálních rychlostí primáru, se funkce hmoty vypočte pomocí vztahu $f_j(M) = \frac{1}{2\pi G} K_j^3 P (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}$. Platí tedy opět, že můžeme-li odhadnout hmotnost primáru ze spektra, lze pomocí funkce hmoty určit hmotový poměr a tedy i hmotnost sekundární složky.

Pozn. – V katalogu spektroskopických dvojhvězd se vyskytuje mnoho dvojhvězd s výstřednými drahami o velmi malé výstřednosti pod 0,1. To vedlo k podezření, že mnohé tyto dvojhvězdy mají ve skutečnosti kruhové dráhy, a že zjištěná výstřednost dráhy je jen důsledkem pozorovacích chyb v kombinaci s omezeným počtem pozorování. K odhalení slouží tzv. Lucyho a Sweeneyho test, zda je malá výstřednost dráhy reálná.

§ Určování elementů zákrytových dvojhvězd

Získáváme informace ze světelné křivky. Uvažujme pro jednoduchost dvojhvězdu se sklonem dráhy $i = 90^\circ$, tj. takovou jejíž oběžná rovina přesně prochází sluneční soustavou, a jejíž složky kolem sebe obíhají po kruhových drahách. Budeme-li uvažovat relativní dráhu složky 2 kolem složky 1, pak je zřejmé, že složka 2 urazí za jeden oběh dráhu $2\pi a$. Označme R_1 a R_2 poloměry obou hvězd, D celkovou dobu trvání zákrytu a d dobu trvání úplného zákrytu neboli totality, kdy hvězda 2 celou plochou svého disku zakrývá část disku hvězdy 1.



Budeme-li čas t měřit od středu primárního zákrytu a zavedeme-li tzv. fázový úhel $\vartheta = 2\pi t/P$ ($\vartheta = 0$ pro střed prim. zákrytu) pak zřejmě platí

$$R_1 + R_2 = a \sin \vartheta_2 = a \sin \left(\frac{2\pi D}{P} \frac{D}{2} \right) \quad \text{resp.} \quad R_1 - R_2 = a \sin \vartheta_1 = a \sin \left(\frac{2\pi d}{P} \frac{d}{2} \right).$$

Úpravou těchto vztahů dostáváme

$$r_1 = \frac{R_1}{a} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{\pi D}{P} \right) + \sin \left(\frac{\pi d}{P} \right) \right) \quad \text{resp.} \quad r_2 = \frac{R_2}{a} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{\pi D}{P} \right) - \sin \left(\frac{\pi d}{P} \right) \right)$$

Je tedy zřejmé, že z námi uvažované světelné křivky lze určit oběžnou periodu a dobu trvání totality a celého zákrytu a pomocí nich pak spočítat relativní poloměry složek, tj. poloměry vyjádřené v jednotkách vzdálenosti mezi středy obou hvězd.

Výrazně složitější je již případ, kdy sice ještě dochází k úplnému zákrytu hvězdy 1 hvězdou 2, kdy ale $i \neq 90^\circ$. Nyní již musíme uvažovat světelnou křivku po dobu celého trvání zákrytu. Budeme chtít nalézt modelovou funkci, která popisuje změnu jasnosti soustavy v závislosti na čase. Označme L_1 a L_2 svítivosti složek, L_0 svítivost celé soustavy v době úplného zákrytu, $L = L(t)$ celkovou svítivost soustavy v obecném okamžiku během zákrytu a $S = S(t)$ plochu té části disku hvězdy 1, která je v daném okamžiku během zákrytu zakryta složkou 2. Platí zřejmě

$$L = L_1 + L_2 - \frac{S}{\pi R_1^2} L_1.$$

V době úplného zákrytu platí vztah

$$L_0 = L_1 + L_2 - \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2} L_1.$$

Porovnáním obou rovnic a po zavedení relativní svítivosti, vyjádřené v jednotkách celkové svítivosti soustavy mimo zákryt $l = L/(L_1 + L_2)$ dostáváme vztah

$$1 - l = (1 - l_0) \frac{S}{\pi R_2^2}.$$

Zakrývanou plochu S lze vyjádřit pomocí vztahu (1))

$$S = \frac{\varphi_1}{\pi} R_1^2 - (R_1 \sin \varphi_1)(R_1 \cos \varphi_1) + \frac{\varphi_2}{\pi} \pi R_2^2 - (R_2 \sin \varphi_2)(R_2 \cos \varphi_2),$$

přičemž zřejmě platí $R_1 \sin \varphi_1 = R_2 \sin \varphi_2$. Označíme-li ještě poměr poloměrů $k = R_2/R_1 = r_2/r_1$ můžeme pro okamžitou zdánlivou vzdálenost středů obou složek v psát

$$v = R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 = R_1 (\cos \varphi_1 + k \cos \varphi_2).$$

Funkční závislost na čase můžeme zavést za pomoci fázového úhlu ϑ . Z geometrických úvah (2)) plyne vztah

$$v^2 = a^2 (\sin^2 i \sin^2 \vartheta + \cos^2 i).$$

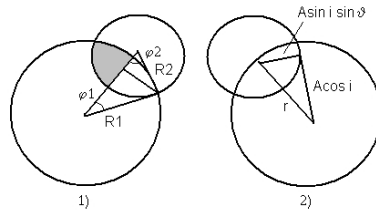
Kdybychom tedy znali relativní poloměry složek a sklon oběžné dráhy, mohli bychom teoretickou světelnou křivku během zákrytu počítat následovně: pro zvolený čas t bychom úhly φ_1 a φ_2 vypočetli z rovnic

$$r_1 (\cos \varphi_1 + k \cos \varphi_2) = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin \frac{2\pi t^2}{P}}, \quad \sin \varphi_1 = k \sin \varphi_2$$

a z nich již pomocí vztahu

$$1 - l = \frac{1}{\pi}(1 - l_0) \left(\frac{\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{k^2} + \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \right)$$

lze spočítat teoretickou světelnou křivku. Je samozřejmě možné tuto úlohu otočit a hledat parametry posledních rovnic, tedy relativní poloměry složek r_1 a r_2 a sklon dráhy i tak, abychom dosáhli co nejlepší shody pozorované a vypočtené světelné křivky.



Při skutečném moderním řešení světelné křivky se ovšem uvažuje celá řada dalších jevů: pohyb v obecně výstředné dráze, nesférický tvar hvězd, pokles jasu směrem od centra k okraji hvězdy, nazývaný okrajové ztemnění a další jevy. Výpočet je pak přirozeně mnohem složitější a také většinou náročný na výpočetní čas. Např. program FOTEL (FOTo metrické ELEmenty, Hadrava).

Z toho, co jsme si dosud pověděli, je ovšem již zřejmé, že pokud zákrytovou dvojhvězdu současně pozorujeme spektroskopicky jako dvojhvězdu spektroskopickou, můžeme kombinací obou řešení získat všechny základní fyzikální vlastnosti obou složek dvojhvězdy i celé soustavy: jejich hmotnosti, poloměry, relativní tok záření jednotlivých složek v jednotkách celkového toku soustavy v maximu jasnosti v efektivních vlnových délkách, ve kterých byla světelná křivka získána a přirozeně i parametry popisující dráhu a její orientaci v prostoru. Pokud získáme buď z barevných indexů jednotlivých složek nebo z modelování profilů spektrálních čar spolehlivý odhad efektivních teplot obou těles, můžeme určit i jejich zářivé výkony a zářivý výkon celé soustavy.

Zákrytové dvojhvězdy jsou proto zdrojem našich nejpřesnějších znalostí o hmotnostech, poloměrech a zářivých výkonech hvězd.

§ Periodické změny oběžné periody

Periodické změny periody mají v zásadě dvě příčiny:

1. Efekt rozdílné dráhy světla (light-time effect, LITE) – oběžná perioda zůstává stejná, pozorovaná perioda je ale různá podle toho, zda se dvojhvězda při oběhu kolem společného těžiště s další složkou od nás vzdaluje nebo se k nám přibližuje.

2. Rotaci přímky apsid, k níž dochází u dvojhvězd s nekruhovou drahou. Stáčení přímky je jednak relativistické, jednak je způsobeno odchylkou tvaru složek dvojhvězdy od kulového tvaru.

Rozlišit tyto příčiny je poměrně snadné: v prvním případě se primární i sekundární minima v $O - C$ diagramu chovají stejně, v druhém leží na různých křivkách.

Efekt rozdílné dráhy světla, teoreticky popsán koncem 19. století. Existence LITE tedy znamená, že „dvojhvězda“ není dvojhvězdou, ale trojhvězdou (nebo má složek více, např. třetí člen může být též dvojhvězdou). Oběžná perioda třetího tělesa kolem společného těžiště je přitom zpravidla mnohonásobkem periody dvojhvězdy, často

se proto mluví o „krátké“ a „dlouhé“ periodě či dráze. Nyní jsou známy asi dvě desítky proměnných hvězd, které vykazují LITE, s periodami od asi 100 dní do sta let; kratší periody prakticky nelze objevit, neboť amplituda je v takových případech příliš malá.

Rotace přímky apsid, test vnitřní struktury hvězd pomocí apsidálního pohybu

Byly již uvedeny oba důvody rotace přímky apsid. Je třeba uvažovat dvě různé hodnoty oběžné periody: siderickou P_S , což je doba mezi dvěma shodnými polohami obou složek vzhledem ke hvězdám, a anomalistickou P_a , což je doba mezi dvěma průchody periastrum. Vždy je $P_a > P_S$. Perioda rotace přímky apsid je $U = 360/\dot{\omega}$, kde je změna délky periastra ve stupních, např. za jeden rok - pak U je též v rocích. Snad obvyklejší je uvádět $\dot{\omega}$ v radiánech za dobu jedné periody, pak platí $P_s = P_a(1 - \dot{\omega}/2\pi)$.

Již dlouhou dobu je též známo, že některých dvojhvězd ve výstředných drahách lze využít k mapování vnitřní struktury jejich složek. Pokud by dvojhvězda ve výstředné dráze sestávala ze dvou hmotných bodů, bude její potenciál odpovídat Keplerově dráze a oběžný pohyb bude eliptický a ve stabilní dráze. Jakmile však hvězdy zaujímají konečný objem některé ekvipotenciální plochy nebo jakmile se uplatní relativistické efekty, dochází k narušení eliptického pohybu.

Podrobné modelování pomocí harmonických funkcí tedy vedlo ke zjištění, že rozložení hmoty ve hvězdě vede k postupnému stáčení přímky apsid ve směru oběžného pohybu, zatímco výstřednost oběžné dráhy se nemění. Celkový apsidální pohyb je dán součtem klasického a relativistického stáčení $\dot{\omega} = \dot{\omega}_{clas} + \dot{\omega}_{rel}$, kde $\dot{\omega}_{clas}$ závisí na slapové deformaci a rotační deformaci hvězdy a na tzv. konstantě vnitřní struktury $k_2 = \frac{16\pi}{5MR^5} \int_0^R \rho r^7 dr$ resp. na váhovaném středu těchto konstant pro obě hvězdy. Relativistický apsidální pohyb závisí na celkové hmotnosti dvojhvězdy. (U kompaktních objektů jako jsou binární pulsary nehraje klasický apsidální pohyb prakticky žádnou roli.)

§ Neperiodické změny periody

Takové změny vysvětlujeme procesy přenosu nebo ztráty hmoty z jedné či obou složek. Pokud se při přenosu z jedné složky na druhou žádná hmota ze systému neztrácí a neztrácí se ani úhlový moment, mluvíme o *konzervativním přenosu*. Ke konzervativnímu přenosu ale asi dochází zřídka. U isotropaní ztráty hmoty získá druhá složka jen malý díl hmoty, většina zmizí ze systému a oběžná perioda u tohoto typu ztráty hmoty trvale roste. Zřejmá je ztráta hmoty zářením, vliv na periodu je ale pod přesností pozorování. Výraznější je ztráta hmoty hvězdným větrem, k níž dochází hlavně u velmi hmotných hvězd. Ke ztrátě hmoty víceméně náhle dochází u nov a supernov. Při takové náhlé ztrátě hmoty jedné složky dochází k růstu excentricity, dráha se může změnit na hyperbolickou, tj. dojde k rozpadu dvojhvězdy. Druhá složka si přitom podrží svou orbitální rychlost, která může dosahovat stovky km/s; tímto procesem se vysvětluje existence některých rychle se pohybujících hvězd (mj. pulsarů).

§ Určování elementů visuálních dvojhvězd

K výpočtu dráhy je třeba mít měření (čas T - poziční úhel α - separace ϱ v úhlových vteřinách), která pokrývají pokud možno celou dráhu; pak je zřejmá perioda. Není-li dráha pokryta celá, je perioda nejistá a řešení může být víceznačné nebo neurčitelné.

Pozorovaná dráha je průmět skutečné dráhy do tečné roviny ke sféře. Běžná mikrometrická měření nebo měření skvrnkovou interferometrií poskytují relativní dráhu slabší složky kolem jasnější. Pokud lze měřit absolutní dráhy, dostane se i poměr hmotností.

Pozorovaná dráha je (obecně) elipsa, jasnější složka ale není v jejím ohnisku. V průmětu se zachovává zákon ploch, a zachová se i střed elipsy jako střed. Přímkou spojující střed a jasnou složku je zřejmě průmětem hlavní osy, z pozorované dráhy tedy lze určit okamžik průchodu periastrum. Z úseku na průmětu hlavní osy je také zřejmá excentricita. Zbývá tedy určit poziční úhel vzestupného uzlu, délku periastra a sklon dráhy. Z pozičních měření nezjistíme, zda jde o uzel vzestupný či sestupný (musela by existovat i měření radiální rychlosti), úhel je tedy neurčitý o 180° .

Existuje řada metod, jak určit zbývající prvky. Je jistě možné jejich hodnoty odhadnout a pak všechny parametry optimalizovat. Vztahy parametrů jsou dány vzorci plynoucími z geometrie skutečné a promítnuté dráhy. Pro pozorovanou vzdálenost složek (v úhl. vteřinách) platí

$$\varrho = \frac{r \cos \nu + \omega}{d \cos \alpha - \Omega},$$

kde

$$r = a \frac{1/e^2}{1 + e \cos \nu};$$

zde d je vzdálenost dvojhvězdy od Slunce v parsecích, a $a = a_1 + a_2$ v AU. Dále platí vztah pro poziční úhel $\operatorname{tg}(\alpha - \Omega) = \operatorname{tg}(\nu + \omega) \cos i$. Skutečná vzdálenost složek r je v AU, α je poziční úhel slabší složky a Ω poziční úhel uzlové přímky.

Při řešení dráhy vizuální dvojhvězdy se tedy získá úhlový rozměr hlavní poloosy a/d a sklon dráhy. Víme ovšem, že z řešení křivky radiální rychlosti se - při známém sklonu dráhy - nalezne hlavní poloosa v lineární míře. Pokud tedy je pro vizuální dvojhvězdu měřitelná křivka radiálních rychlostí, dostáváme i paralaxu objektu. Problémem ale je, že pro dráhy s dlouhou periodou nelze křivku radiálních rychlostí měřit příliš přesně (má malou amplitudu).

§ Shrnutí

Typ dvojhvězdy	Pozorované veličiny	Odvozené veličiny
vizuální	1. zdánlivá magnituda a paralaxa 2. perioda, zdánlivá velikost poloosy, paralaxa 3. relativní rychlost k těžišti	svítivost absolutní velikost poloosy, součet hmotností obou složek hmotnosti složek
spektroskopické	4. křivka rad. rychl. jedné složky 5. křivka rad. rychl. obou složek	f ce hmotnosti poměr hmotnosti složek; $(M + m) \sin^3 i$; $a \sin i$
zákrytové	6. tvar světelné křivky 7. časový interval minim 8. pokles jasů v okamžiku minima	sklon dráhy, relativní poměr poloměrů složek výstřednost dráhy poměr efektivních teplot
zákrytové spektroskopické	světelná křivka + křivka radiálních rychlostí + zdánlivá jasnost	absolutní rozměry, velikost poloosy dráhy, sklon dráhy, excentricity, hmotnosti složek, hustota, svítivost složek, efektivní teplota

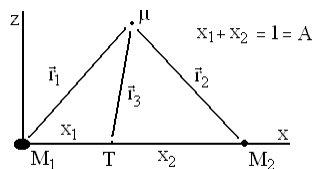
10.3 Vývoj dvojhvězd

Stručné shrnutí – Ukazuje se, že každá hvězda během svého nukleárního vývoje prodělá nejprve dlouhé, velmi stabilní období, kdy v jejím nitru dochází k přeměně vodíku na helium a kdy se její vlastnosti a zářivý výkon v čase mění jen nesmírně pomalu. Podstatné ale je to, že poloměr hvězdy s časem dlouhodobě roste, a tento růst se po vyčerpání zásob vodíku v jádru prudce zrychlí. Pokud je taková hvězda složkou dvojhvězdy s kratší oběžnou periodou, nemůže růst jejího poloměru pokračovat neomezeně. Hvězda totiž v určitém okamžiku zaplní celou Rocheovu mez a další narůstání jejího poloměru nezbytně vede k přenosu hmoty směrem ke druhé složce (již během vývoje na hlavní posloupnosti, pravděpodobněji ale při přechodu hvězdy z hlavní posloupnosti do oblasti obrů). Tento proces naruší tepelnou rovnováhu hmotu ztrácející hvězdy a výrazně změní její další vývoj. Výpočty ukázaly, že při takovém procesu předá hmotu ztrácející hvězda třeba i 80% své původní hmotnosti své partnerce. Celý proces se odehrává na škále desetitisíců až statisíců let, má ovšem jasné pozorovací důsledky. Mezi hvězdami existuje plynný proud, který je Coriolisovou silou strháván ve směru oběžného pohybu, takže často nedopadá na druhou hvězdu přímo, ale obléhá ji a vytváří kolem ní akreční disk, který se může projevit ve spektru přítomností emisních čar a dodatečných absorpčních čar v průmětu na disk hvězdy. U zákrytových dvojhvězd můžeme v oběžných fázích před začátkem zákrytu hvězdy, ke které proud plynu směřuje, pozorovat i absorpční čáry z tohoto proudu promítnutého na hvězdu. Protože průmět vidíme ve chvílích, kdy se plyn pohybuje směrem od nás, jsou čáry vznikající v plynném proudu posunuty i o několik set km/s do červené části spektra.

§ Výpočty ve stadiu výměny hmoty

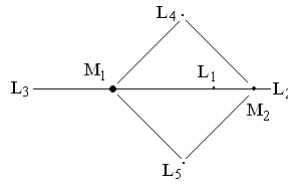
Vzhledem k výrazné koncentraci hmoty směrem k centru hvězdy lze i ke studiu dvojhvězd velmi úspěšně využít **Rocheův model**, který je ovšem komplikovanější, než v případě osamocené rotující hvězdy. Předpokládáme opět, že hmotnost primární i sekundární složky je soustředěna do hmotných bodů o hmotnostech M_1 a M_2 , ω označuje úhlovou oběžnou rychlost soustavy a $q = M_2/M_1$ je hmotový poměr.

Zvolme pravoúhlou souřadnou soustavu pevně spojenou se soustavou, která má počátek v bodě M_1 a jejíž osa X míří od M_1 k M_2 , osa Y je na ni kolmá a leží v oběžné rovině, a osa Z je kolmá na oběžnou rovinu; vzdálenost A mezi oběma hmotnými body zvolíme za jednotku vzdálenosti, viz obr. Na infinitesimální tělíčko o hmotnosti μ nacházející



se v obecném bodě (x, y, z) budou působit tři síly: přitažlivosti obou hmotných bodů a odstředivá síla oběžného pohybu. Tyto síly mají tvar:

$$\vec{F}_{M_1} = -G \frac{\mu M_1}{|\vec{r}_1|^3} \vec{r}_1, \quad \vec{F}_{M_2} = -G \frac{\mu M_2}{|\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2, \quad \vec{F}_\omega = \mu \omega^2 \vec{r}_3.$$



Další pomocné vztahy jsou

$$\vec{r}_1 = (x, y, z), \quad \vec{r}_2 = (x - 1, y, z), \quad \vec{r}_3 = \left(x - \frac{M_2}{M_1 + M_2}, y, 0\right).$$

(Vzdálenosti těžiště od bodů M_1 a M_2 jsou označeny jako x_1 a x_2 . Platí zřejmě $x_1/x_2 = M_2/M_1$ a $x_2 = 1 - x_1$, z čehož dostaneme $x_1 = M_2/(M_1 + M_2)$.) Označíme-li ještě $r_1 = |\vec{r}_1|$, $r_2 = |\vec{r}_2|$ a $r_3 = |\vec{r}_3|$ lze celkový potenciál oněch tří sil zapsat ve tvaru

$$U = \frac{GM_1}{r_1} + \frac{GM_2}{r_2} + \frac{1}{2}\omega^2 r_3^2.$$

Jestliže pro zjednodušení zápisu místo potenciálu U zavedeme potenciál $\Omega = U/GM$ a úhlovou oběžnou rychlost vyjádříme pomocí 3.KZ, tj. $\omega^2 = G(M_1 + M_2)A^{-3}$, bereme $A = 1$, tj. $\omega^2 = G(M_1 + M_2)$, dostáváme rovnici ekvipotenciálních ploch ve tvaru

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{r_2} + \frac{q}{r_2} + \frac{1}{2}(1 + q)r_3^2 =$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + q((1 - q^2) + y^2 + z^2)^{-1/2} + \frac{1 + q}{2}(x^2 + y^2) - qx + \frac{q^2}{2(1 + q)} = C,$$

kde C je konstanta odpovídající konkrétní ekvipotenciální ploše. Tvar ekvipotenciálních ploch je funkcí jediné proměnné, poměru hmot q .

Můžeme se opět ptát po místech, ve kterých je výsledná síla působící na testovací tělíčko nulová. Pro ně platí

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0.$$

Z konkrétních výrazů pro uvedené derivace rovnice plyne, že uvedená podmínka je pro druhé dvě rovnice splněna na ose X . Z první podmínky dostáváme rovnici

$$\frac{\partial \Omega(x, 0, 0)}{\partial x} = -\frac{x}{|x|^3} + \frac{q(1 - x)}{|1 - x|^3} + (1 + q)x - q = 0.$$

V každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ lze odstranit absolutní hodnoty a přepsat tuto rovnici jako algebraickou rovnicí 5. stupně v x s parametrem q . Dá se ukázat, že v každém z uvedených intervalů existuje právě jedno reálné řešení, takže na ose existují tři místa s nulovou výslednou silou. Těm se obvykle říká **Lagrangeovy body** L_1 – bod $(x_1, 0, 0)$ na spojnici mezi oběma hmotnými body, L_2 – bod $(x_2, 0, 0)$ ležící vně méně hmotného bodu M_2 , a L_3 – bod $(x_3, 0, 0)$ ležící vně hmotnějšího bodu M_1 . Rozborem druhých dvou rovnic lze zjistit, že další dva Lagrangeovy body L_4 a L_5 leží pro libovolný poměr hmot v oběžné rovině na vrcholech rovnostranného trojúhelníka s oběma hmotnými body.

Jak jsme se již zmiňovali u jednotlivých hvězd, význam ekvipotenciálních ploch spočívá v tom, že rovnovážná hvězda zaujme tvar některé z nich. Zvláště významná je

kritická plocha obsahující bod L_1 – často zvaná **Rocheova mez** – která představuje mez dynamické stability dvojhvězdy.

Rocheův model byl využit při dodnes využívané fyzikální klasifikaci dvojhvězd na **oddělené** (obě složky mají rozměry menší než kritická plocha), **polodotykové** (jedna složka je uvnitř kritické plochy, druhá ji právě vyplňuje) a **dotykové** (obě složky zaplňují nebo překračují kritickou plochu a mají společnou atmosféru).

Je zřejmé, že problém vývoje dvojhvězd je úloha, která zcela zřejmě a zásadním způsobem narušuje předpoklad sférické symetrie, úspěšně použitý v případě modelů osamocených hvězd. Jak jsme si ukázali pomocí Rocheova modelu, projeví se narušení nejen sférické, ale i osové symetrie ve chvílích, kdy hvězda expanduje na mez dynamické stability. Následný přenos hmoty mezi složkami probíhá formou plynného proudu, který vytéká z okolí Langrangeova bodu L_1 a je v důsledku Coriolisovy síly nevyhnutelně strháván ve směru oběžného pohybu hmotu ztrácející složky, v řadě případů oblétně druhou hvězdu a při návratu složitě interaguje s původním proudem. Kolem hmotu přijímající složky se vytváří akreční disk a též sférická obálka a část plynu opouští dvojhvězdu a odnáší s sebou tedy jak část hmoty, tak i část úhlového momentu soustavy.

§ Některé výsledky modelování

Je třeba si uvědomit, že vývoj dvojhvězd nabízí mnohem více kombinací, než vývoj osamocené hvězdy. Začátek stadia výměny hmoty mezi složkami závisí na počáteční oběžné periodě soustavy a na hmotách obou složek, dalšími faktory jsou chemické složení a dosud ne dobře prostudovaná dynamika přenosu (množství hmoty a momentu unikajících ze soustavy). Z vývoje osamocených hvězd víme některá fakta.

- Během vývoje od hlavní posloupnosti nulového věku dosahuje hvězda postupně několika lokálních maxim svého poloměru. Ne každé následující maximum je nutně větší než poslední předchozí, avšak absolutním maximem je určitý okamžik ve stadiu veleobra na konci oné části vývoje, která je určována jadernými reakcemi.

- Životní doba pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti je klesající funkcí hmotnosti hvězdy. To pro dvojhvězdy znamená (při rozumném předpokladu, že obě složky dvojhvězdy vznikly současně), že dříve bude expandovat vždy hmotnější z nich. Často se pro ni volí termín primární složka či primár.

Z rovnice (Δ) je zřejmé, že kritická hodnota poloměru, přes niž hvězda nemůže dále expandovat, aniž by ztrácela hmotu směrem k druhé složce, závisí pouze na poměru hmotností obou složek a na jejich vzdálenosti. Jak jsme se už zmínili, je-li vzdálenost mezi složkami dosti malá, může k výměně hmoty dojít ještě během pobytu primární složky na hlavní posloupnosti – tato situace je označována jako *případ A* (*case A*) výměny hmoty. *Případem B* výměny hmoty se označuje situace, kdy k překročení Rocheovy meze primární složkou dojde teprve v období rychlé expanze poloměru hvězdy po vyhoření vodíku v jejím jádru.

Popíšme si průběh vývoje dvojhvězdy o původních hmotnostech $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$. Na počátku vývoje měla uvažovaná soustava oběžnou periodu $1,^d_{785}$ a ke kontaktu primární složky s mezí stability došlo po vyčerpání vodíku v jejím jádru, 93,5 milionů let od hlavní posloupnosti nulového věku. Poloměr primáru činil dvojnásobek poloměru na počátku hlavní posloupnosti, $4,78 R_{\odot}$. Obálka hvězdy v té době expandovala v důsledku tepelné nestability v jádru, a ztráta hmoty z povrchových vrstev tuto nestabilitu ještě urychlila. Přenos hmoty se proto v prvním stadiu prudce zrychluje. Tomu napomáhá i zmenšující se vzdálenost mezi složkami. Za 84 000 let od začátku odtoku mají obě složky stejnou hmotnost $3,6 M_{\odot}$ a vzdálenost mezi nimi dosahuje minima. Od toho momentu vede pokračující výměna hmoty k narůstání vzdálenosti mezi složkami, což přirozeně brzdí rychlost přenosu a po 110 000 letech od začátku odtoku

tento vliv převládne nad vlivem tepelné nestability, rychlost přenosu hmoty dosáhne svého maxima $9 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ za rok a počíná klesat. Hmotnost primární hvězdy činí v té chvíli $3,37 M_{\odot}$.

Po 127 800 letech se původní hmotový poměr mezi složkami vymění. Klesající efektivní teplota vede – podobně jako při vývoji osamocené hvězdy – k poklesu ionizace v podpovrchových vrstvách hvězdy a s tím souvisejícím vznikem konvektivní zóny. Asi po 400 000 letech od začátku odtoku začne tato konvektivní zóna prudce narůstat směrem do nitra hvězdy.

Je dobře si uvědomit, že vnitřní části hvězdy se téměř po celou dobu přenosu hmoty chovají značně autonomním a vcelku neměnným způsobem: rovnoměrně se smršťují, aby kompenzovaly nestabilitu vzniklou zánikem centrálního nukleárního zdroje energie. Určité změny jsou však patrné. Centrální teplota v poměru k centrální hustotě hned na začátku odtoku začíná narůstat prudčeji než před jeho začátkem. To je chování právě opačné, než jaké ukazují modely výměny hmoty v případě A. Tam totiž centrální teplotu určuje především produkce nukleární energie a ta s úbytkem hmotnosti hvězdy přirozeně klesá. Na začátku odtoku v případě A klesá proto i centrální teplota.

K pochopení průběhu přenosu hmoty je třeba povšimnout chování hlavního zdroje energie v daném případě: vodíkové slupky. Oblast, v níž probíhá slučování vodíku na helium se během celého odtoku absolutně i relativně zmenšuje. Maximum produkce se přitom během první části odtoku zvolna přesouvá směrem k centru, a to jak v poloměru, tak ve hmotě. To souvisí s rostoucí teplotou a hustotou centrálních částí hvězdy. Energetický výkon slupky ale současně klesá. To je způsobeno jednak tím, že klesá hustota a teplota vnějších částí slupky, neboť tyto vrstvy během ztráty hmoty expandují zčásti na úkor své vnitřní energie, a za druhé proto, že ve spodních částech slupky rychle ubývá vodíku. Úbytek vodíku nakonec způsobí, že se (klesající) maximum hoření vodíku ve slupce začne přesouvat směrem k povrchu ve hmotě.

Postupně prakticky zanikne původní tepelná nestabilita vnějších vrstev hvězdy, vyvolaná ztrátou hmoty, a další odtok hmoty již probíhá pouze pod vlivem tepelné nestability v jádru. Tím samozřejmě ubude i pohlcování zářivé a vnitřní energie v obalu a 472 900 let po začátku odtoku dosáhne zářivý výkon hvězdy minima a začíná opět narůstat. K tomuto růstu přispěly ještě další důvody. Přejít na konvektivní přenos energie ve vnějších částech hvězdy vytvořil (podobně jako u vývoje osamocené hvězdy) lepší podmínky pro hoření vodíku ve slupce, takže produkce energie v ní začíná růst. Mimo to se již hvězda v té době zbavila již všech vrstev s původním chemickým složením a u povrchu se proto mění i velikost rozptylu zářivé energie.

Konvektivní zóna má ještě jiný důsledek: rychlejší růst poloměru hvězdy a následkem toho i přechodné druhé maximum přenosu hmoty v čase 720 000 let od začátku odtoku, asi $2,5 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ za rok. Poté se rozloha konvektivní zóny i rychlost ztráty hmoty opět zmenšují a asi po 1 113 800 letech, kdy dosáhne minima i efektivní teplota, končí rychlá fáze odtoku. Další vývoj je určován již jen tepelnou nestabilitou jádra hvězdy. Rychlost odtoku hmoty v té době činí asi $4,10^{-7} M_{\odot}$ za rok a dále se zpomaluje. Efekty ztráty hmoty z povrchu hvězdy jsou v té době už tak malé, že se hvězda chová prakticky stejně jako osamocená hvězda původní hmotnosti v podobném vývojovém stadiu. Růst centrální teploty pokračuje a za 2 080 000 let od počátku odtoku začíná v jádru docházet k nukleární syntéze helia na uhlík a v čase 2 410 000 vzniká v centru nová konvektivní zóna. Narůstání produkce v jádru ovšem zhorší podmínky pro hoření ve vodíkové slupce, obal hvězdy přestane růst a 2 517 900 let po začátku odtoku fáze výměny hmoty končí. Původně primární hvězda má nyní hmotnost pouhých $0,53 M_{\odot}$, ale poloměr $25,0 R_{\odot}$ a obsah vodíku na povrchu činí pouze 0,256 proti původního 0,602. Oběžná perioda dvojhvězdy se prodloužila na $84,^d 2$ a poměr hmot se z původního poměru $M_2/M_1 = 0,8$ více než převrátil na $M_1/M_2 = 0,079$.

Konkrétní výpočet, který jsme použili jako ilustrační příklad, pokračoval i po skončení výměny hmoty. Původně primární složka v důsledku rostoucí produkce hoření helia v jádru rychle kontrahuje a zahřívá se, takže roste efektivní teplota, postupně mizí podpovrchová konvektivní zóna a hvězda se přesouvá v HR diagramu z oblasti obrů až do blízkosti hlavní posloupnosti heliových hvězd. V čase 11 599 800 let od začátku výměny hmoty hvězda konečně znovu dosáhne stavu tepelné rovnováhy a lokálního minima svého zářivého výkonu. Je zajímavé si uvědomit, že se tak stalo až v době, kdy obsah helia v jádru v důsledku nukleární přeměny již poklesl zhruba na polovinu ($Y = 0,484$). Původně hmotnější složka je v té době horkým trpaslíkem s poloměrem pouze $0,208 R_{\odot}$.

Výsledky vývoje ve dvojhvězdě mohou být velmi rozmanité. Konkrétní výpočty ukazují, že vývoj heliové hvězdy může vést k dalšímu přenosu hmoty ještě dříve, než se stačí k mezi nestability přiblížit původně sekundární složka, opačný případ je však častější. V tom případě se může stát, že se začne přenášet hmota na horkou kompaktní hvězdu, na

jejímž povrchu tak může dojít i k nukleárnímu hoření a k erupčním jevům.

Obecně lze ale uzavřít, že pokud k výměně hmoty dojde v kterékoliv fázi vývoje hvězdy, ve které z důvodů změn její vnitřní stavby dochází právě k růstu poloměru, vede překročení meze stability ve dvojhvězdě k fázi mohutné výměny hmoty mezi složkami, při které se původní hmotový poměr více než vymění.

Prvním problémem, který se výpočty výměny hmoty ve dvojhvězdách pokoušely vyřešit, byl tzv. vývojový paradox polodotykových soustav. Když totiž byly získány údaje o základních fyzikálních vlastnostech dostatečného počtu dvojhvězd a když začala být po roce 1950 využívaná klasifikace dvojhvězd na oddělené, polodotykové a kontaktní, ukázalo se, že ve všech případech zaplňovala Rocheovu mez u polodotykových soustav méně hmotná sekundární složka. V té době bylo už z teorie stavby hvězd jasné, že rychleji by se měla ve dvojhvězdě vyvíjet a k Rocheově mezi expandovat hmotnější z obou složek. A pozorování se zdála ukazovat pravý opak. Se skvělým fyzikálním citem navrhl možné vysvětlení zdánlivého paradoxu Crawford (1955). Postuloval, že rychleji se bude skutečně vyvíjet hmotnější složka a že dojde k výměně hmoty, která obrátí původní poměr hmot. Trvalo více než 10 let, než byla Crawfordova hypotéza výpočty výměny hmoty výtečně kvalitativně potvrzena. Vtip spočívá v tom, že rychlá počáteční fáze výměny hmoty, během níž se původní poměr hmot převrátí, probíhá vůči ostatním fázím vývoje tak rychle, že máme statisticky velmi malou šanci podobný systém pozorovat.

10.4 Dodatky

§ Dvojhvězdy v posledním tažení

Tak jako jednotlivá hvězda končí svou aktivitu v podobě kompaktního objektu – tj. jako WD, NS nebo BH – tak i ke konci vývoje dvojhvězdy se jedna složka stane takovým objektem (mohou se jí ovšem stát obě složky, nebo se dvojhvězda může rozpadnout). Už z možných kombinací je zřejmé, že konečná stadia vývoje dvojhvězd mohou být velmi různorodá. Existuje řada klasifikací pozdních stadií dvojhvězd. Základní dělení je podle typu kompaktního objektu:

- bílý trpaslík (WD)+ "normální" hvězda = **kataklysmická dvojhvězda** (CV)²,
- neutronová hvězda (NS)+ "normální" hvězda = **rentgenová dvojhvězda** (XRB),
- černá díra (BH)+ "normální" hvězda = rovněž rentgenová dvojhvězda.

To ale neznamená, že CV by nemohla být detekována jako rentgenový zdroj. Dvojhvězdy se ovšem projevují jako CV nebo XRB jen dochází-li k akreci na kompaktní objekt. Navíc i druhá složka může být kompaktní objekt, takže možných kombinací je řada. Některé dvojhvězdy spadají do více kategorií.

Většina dvojhvězd s kompaktním objektem má oběžné periody pod jeden den. Znamená to, že původní periody běžných dvojhvězd – obvykle vícedenní – musely být ovlivněny nějakým procesem. Takovým uznávaným procesem je *vývoj ve společné obálce*. Jestliže z jedné složky uniká více hmoty než je druhá složka schopna zachytit, atmosféra té druhé složky se zahřeje a rozšíří, až vyplní Rocheovu mez, a přetéající hmota se dostává do obálky obklopující obě složky. Tření při pohybu složek v plynu obálky vede ke spirálovitému vzájemnému přibližování složek a část uvolněné energie pak odnáší hmotu i rotační moment obálky mimo dvojhvězdu.

CV lze rozdělit na řadu podtypů:

- novy (CN, classical nova)
- trpasličí novy (DN, dwarf nova)
- novám podobné proměnné (NL, nova like) – U CV typu NL ztrácí hvězda hlavní posloupnosti pozdního typu hmotu na WD hlavně přes RLOF (přetokem Rocheovy meze, Roche lobe overflow). WD je bez silného magnetického pole a proud dopadá na disk, tam je jasná skvrna; na rozdíl od DN nemají NL kvaziperiodické výbuchy.
- magnetické CV (MCV) – zpravidla silná kruhová i lineární polarizace záření ve vizuálním a blízkém IR oboru

Soudí se, že některé dvojhvězdy CV jsou předchůdci supernov. Supernovy typu Ia ve spektru nemají vodík (ani helium) a jejich absolutní vizuální magniduta v maximu dosahuje velmi podobných hodnot – supernova vzniká zhroucením bílého trpaslíka, jehož hmotnost akrecí vzrostla nad Chandrasekharovu mez. Jiná verze, splynutí dvou bílých trpaslíků, by sotva mohla vysvětlit shodnost jasností v maximu. Navíc SN Ia se vyskytují ve spirálních i eliptických galaxiích, tj. vznik z hvězd s vyšší hmotností nepřipadá v úvahu. Ovšem existují problémy: předně, při pomalé akreci vodíku dojde ke vzniku novy, a při tomto výbuchu se ztratí více hmoty než se v cyklu získalo; při rychlé akreci by pak mělo dojít k trvalému hoření, takový systém by ale byl jasný a pozorovatelný.

² Viz novy: jde o nukleární výbuch v atmosféře bílého trpaslíka, k němuž dochází – v různých dlouhých intervalech – díky akreci vodíku z atmosféry druhé složky. U trpasličích nov je mechanismus zjasnění jiný: zjasnění souvisí s nestabilitou akrečního disku po dosažení určité kritické hustoty, kdy se v oblastech měnící se ionizace velmi prudce změní opacita disku.

XR Při identifikaci zdrojů rentgenového záření s optickými objekty bylo často zjištěno, že jde o dvojhvězdu. Složkou, která září v rentgenovém oboru, je ovšem neutronová hvězda nebo černá díra; získává hmotu akrecí, a září přeměnou gravitační potenciální energie (což je proces o řád účinnější než nukleární hoření).

Existují i dvojhvězdy zářící v rentgenovém oboru, kde obě složky jsou "normální" hvězdy, kdy příčinou rentgenového záření jsou rázové vlny ve hvězdném větru či atmosférické procesy (korona). Svítivost je v těchto případech o několik řádů menší.

Zásadní rozlišení je podle typu složky: *LMXRB* (low mass X-ray binary; složka s malou hmotností, přesněji spektrálního typu pozdějšího než A, event. bílý trpaslík), a *HMXRB* (high mass XRB, kdy u složky jde o typ O nebo B). V prvním případě má na optické záření podstatný vliv ohřev složky a akrečního disku rentgenovým zářením, a přenos hmoty se děje přetokem Rocheovy plochy (RLOF). V druhém případě je pro přenos hmoty důležitý hvězdný vítr z O či B složky - jeho značnou část zachytí kompaktní složka. I zde ovšem může nastat RLOF. Při RLOF se přenáší významný rotační moment, vznikne tedy akreční disk.

Pulsary Mezi pulsary se dosti často nacházejí objekty s periodicky proměnnou frekvencí pulsů, v takovém případě jde tedy o složky dvojhvězd. Oběžné periody jsou přitom od hodin po roky. Sledování okamžiků pulsů vede k velmi přesně určitelné dráze. V některých případech je složka pulsaru viditelná v optickém oboru, případně je pulsar i rentgenovou dvojhvězdu. Milisekundové pulsary jsou složkami dvojhvězd vždy (ovšem až na výjimky - soudí se, že ve dvou případech, kdy je milisekundový pulsar samostatný, došlo ke zničení druhé složky). Podporují OTR, viz zkracování periody v důsledku vyzařování gravitačních vln. Známe jich cca 1000, většina objevena na Arecibu.

§ Dodatek o vzniku dvojhvězd

1. Zachycení jedné hvězdy druhou: aby k němu došlo, musilo by být setkání velmi těsné, aby slapové síly ovlivnily keplerovskou (hyperbolickou) dráhu, nebo by muselo spoluúčinkovat třetí těleso, uvažováno dříve.
2. Rozštěpení (fission) hvězdy rychlou rotací.

Prvá možnost je nanejvýš nepravděpodobná při prostorových hustotách hvězd podobných té v okolí Slunce, vážně se však uvažuje u hustot podstatně vyšších (centrum Galaxie, kulové hvězdokupy). Při setkání hvězd ale dochází i k rozpadu dvojhvězd, při prvé možnosti jde proto o vytvoření určitého rovnovážného stavu.

Přes značné úsilí teoretiků realnost druhé možnosti nebyla prokázána, zřejmě nepřípadá v úvahu u hvězdy na MS či pozdější. Je ale otázka, zda podobný proces nenastává při vzniku hvězd, kdy násobné systémy vznikají z prvotního prachoplynového mračka. Zdá se ovšem, že vícenásobné soustavy vznikají spíše zhroucením disku kolem hlavního jádra gravitačního zhuštění.

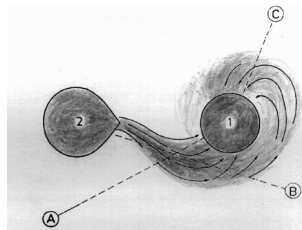
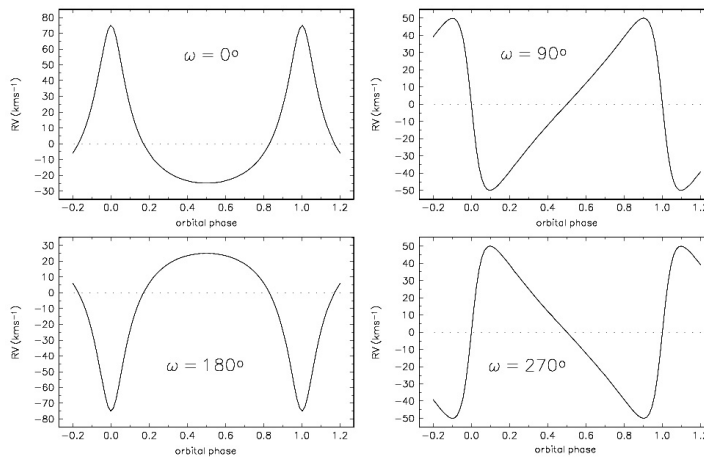
§ Dvojhvězdy s komplikacemi

Spolehlivé určení základních fyzikálních vlastností dvojhvězdy a jejích složek se stává problémem ve chvíli, kdy je v soustavě přítomna cirkumstelární hmota. Jak křivky radiálních rychlostí, tak světelné křivky jsou v takových situacích několika vzájemně souvisejícími vlivy deformovány a neodpovídají čistému dráhovému pohybu. Pokud se nám nezdaří podobná zkusit správně identifikovat a vhodně korigovat, mohou formální

řešení světelné křivky a křivky radiálních rychlostí vést k určení zcela nesprávných charakteristik soustavy.

Falešná výstřednost dráhy z křivek radiálních rychlostí

Některé typické struktury v mezihvězdné hmotě ve dvojhvězdě mohou způsobovat charakteristická zkreslení křivky radiální rychlosti, pravidelně se opakující s fází oběžné periody. Abychom podobným jevům dobře porozuměli, je užitečné si nejprve uvědomit, jak vypadají křivky radiálních rychlostí pro čtyři typické orientace výstředné dráhy vůči pozorovateli, viz obr.



Nejlépe a nejdéle známý případ zkreslení křivky radiálních rychlostí je **Barrův jev** (1908). Barr upozornil jako první, že se pozoruje mnohem více dvojhvězd s hodnotami ω mezi 0° a 120° než dvojhvězd s hodnotami ω mimo tento interval. Barr vyjádřil názor, že je krajně nepravděpodobné, že by existovala skutečná privilegovaná orientace výstředných drah v prostoru. Dnes je obecně přijímáno vysvětlení, které jako první vyslovil Struve (1944): protažení křivky radiálních rychlostí v blízkosti maxima je způsobeno dodatečnou absorpcí v plynovém proudu mezi složkami, který se v těch oběžných fázích promítá na disk hmotu přijímající hvězdy. Vzniklé zkreslení skutečné křivky radiálních rychlostí dvojhvězdy v kruhové dráze pak připomíná křivku výstředné dráhy pro hodnoty ω v blízkosti 0° . Jak je schematicky ukázáno v obrázku 8, průmět plynového proudu na disk hvězdy nastává někde mezi elongací, při které se hmotu přijímající složka od nás vzdaluje a mezi konjunkcí (směr A v obrázku). Protože plyn se v té chvíli pohybuje směrem od pozorovatele, jeho radiální rychlost zvyšuje pozorovanou radiální rychlost a tím právě vzniká protažení křivky v blízkosti maximální rychlosti. Charakter celého jevu přirozeně závisí i na sklonu dráhy.

Literatura a zdroje

- Harmanec P. & Mayer P., Dvojhvězdy, interní materiál k přednášce Dvojhvězdy, AU MFF UK, 2003
- Harmanec P., Astrofyzika II, interní materiál k přednášce Astrofyzika II, AU MFF UK, 2005
(převážná většina této kapitoly doslova převzata z předchozích dvou zdrojů ...)
- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Příhoda P., Průvodce astronomií, HaP Praha, 2000
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002

Kapitola 11

Galaxie a mezihvězdná látka

Mezihvězdná látka: Rozložení prachu a plynu v Galaxii, typy útvarů mezihvězdné látky, metody pozorování. Atomy a molekuly v mezihvězdném prostoru - spektra, chemické reakce. Oblasti ionizovaného vodíku (HII) a jejich fyzika. Prachová zrna, fyzikální vlastnosti a optické projevy. Dynamika mezihvězdné látky. Vícesložkový model mezihvězdného plynu, role supernov, fyzika rázových vln. Stabilita oblaků mezihvězdné látky, Jeansovo kritérium, fragmentace, tvoření hvězd.

Galaxie, hvězdné soustavy: Stavba Galaxie, hvězdné populace. Rotační křivky galaxií, Oortovy konstanty. Dráhy hvězd a jejich stabilita. Gravitační potenciál Galaxie. Pohybové integrály, ergodické chování drah, třetí integrál, distribuční funkce, Boltzmannova rovnice, Jeansova věta. Čára 1420 MHz, rozložení a rychlosti vodíku HI. Hmotnost galaxií a skrytá hmota. Molekulární vodík, molekuly CO, molekulární oblaka, anomálie v rozdělení HI. Relaxační časy hvězdných soustav. Morfologická klasifikace galaxií.

Stavba vesmíru: Metody určování vzdáleností kosmických objektů a jejich návaznost. Rozložení galaxií ve vesmíru. Hubbleův zákon, funkce expanze, decelerační parametr. Robertson-Walkerova metrika. Einsteinovy rovnice. Friedmannovy modely vesmíru. Kosmologická konstanta. Inflační modely. Rané fáze vývoje vesmíru. Reliktní záření. Skrytá hmota a vývoj vesmíru.

- Pohyby hvězd v Galaxii, rotace galaxií, Oortovy konstanty, stabilita kruhové dráhy, epicykl. ¹
- Stavba Galaxie - hvězdné populace, rozložení mezihvězdného plynu a prachu, HI oblasti. H₂, CO a další molekuly v mezihvězdném prostoru, chemický vývoj látky v Galaxii. Morfologická klasifikace galaxií. ¹
- Prostorové rozložení a pohyby galaxií. Pozorování reliktního záření (dipólová anizotropie ...) ¹
- Dynamika mezihvězdné látky a tvorba hvězd, Jeansovo kritérium, Jeansovy rovnice, věta o viriálu
- Metody studia fyzikálních podmínek v různých útvarech mezihvězdné látky (interpretace pozorování optických, rádiových, infračervených spekter; elektronové, vibrační a rotační přechody a s nimi spojená spektra a definice teplot ...)
- Zářivé a srážkové procesy v mezihvězdném plynu (excitace, ionizace, rovnice statistické rovnováhy, funkce ohřevu a ochlazování ...)
- Mezihvězdný prach – metody pozorování, rozložení v Galaxii, role prachu při tvorbě hvězd ...
- Kosmologický rudý posuv, modely vesmíru
- Nukleosyntéza (v raném vesmíru, ve hvězdách, supernovy ...)

¹ !!!Otázky z části astronomie!!!

11.1 Fyzika mezihvězdné látky

Prostor mezi hvězdami není prázdný. Je vyplněn velmi zředěnou mezihvězdnou látkou v různých podobách. Nacházíme zde elementární částice všeho druhu, atomy, molekuly anorganických i organických látek, někdy i velice složitě strukturované prachové částice. Do mezihvězdné látky by se měly zahrnout i velice rychle putující částice kosmického záření a fotony nejrůznějších energií. V této podobě látky je soustředěno cca 10% hmotnosti všech hvězd v Galaxii. Spojitou povahu zřejmě má i hypotetická skrytá hmota (temná) ve vesmíru, která nezáří ani nepohlcuje světlo, takže o její existenci se dovídáme pouze zprostředkovaně podle jejích gravitačních účinků na hmotu viditelnou. Hmotnost ukrytá v této látce dosud neznámé povahy by mohla až o řád převýšit hmotnost běžné, tzv. baryonové látky.

Existenci mezihvězdné látky projevující se extinkcí světla prokázal nade vši pochybnost teprve v roce 1930 americký astronom švýcarského původu Robert Julius Trümpler. Na základě studia úhlových rozměrů a hvězdné velikosti stovky reprezentativního vzorku otevřených hvězdokup ukázal, že tzv. „fotometrické“ vzdálenosti, určené z pozorované jasnosti soustav, a „úhlové“ vzdálenosti odhadnuté podle pozorovaného úhlového průměru hvězdokupy se od sebe systematicky liší, přičemž hodnota podílu obou vzdáleností roste se vzdáleností. Jediným kloudným vysvětlením je existence mezihvězdné extinkce, která způsobuje zeslabení světla studovaných objektů (dle Trümpfera) v průměru o 0,5 magnitudy na 1 kpc.

§ Vztah mezihvězdné látky a hvězd, rozložení v prostoru

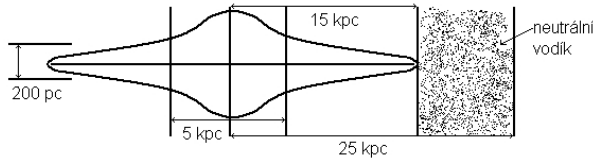
Gravitačním zhroucením hustějších a relativně chladných oblastí mezihvězdné látky vznikají nové hvězdy. Právě narozené hvězdy bouřlivě interagují se svým mezihvězdným prostředím, jejich krátkovlnné záření a hvězdný vítr nezřídka způsobí i rozpad zárodečného molekulového oblaku. Neustálým vznikáním nových hvězdných pokolení se zásoba mezihvězdné látky pozvolna vyčerpává. Celý proces však nepostupuje tak rychle, jak by se snad dalo očekávat, protože hvězdy samy během svého vývoje do prostoru různou cestou vracejí nejméně 50% své počáteční hmoty. Jedná se především o svrchní vrstvy těchto objektů, které jsou jen minimálně „znečištěny“ jaderným vývojem, který se děje především v centrálních oblastech hvězd.

Rozložení mezihvězdné látky v prostoru je krajně nerovnoměrné. V rámci naší Galaxie se většina této látky soustřeďuje v rovině Galaxie, vytvářejíc přitom velice silně zploštělý disk o poloměru více než cca 25 kpc (tj. až k nezářícímu okraji) a tloušťce pouhých 250 pc (zploštění 1:100!). Avšak ani v rámci onoho disku není rozložení homogenní - většinu látky nacházíme v tzv. spirálních ramenech Galaxie, a zde v oblacích o rozměrech několika parseků, tj. Galaxie má strukturu hustotních vln (pohyb v ramenech je pomalejší než pohyb mezi nimi, mezihvězdná látka se chová stejně). Průměrná hustota látky v disku obnáší $5 \cdot 10^{-21}$ kg/m³, což odpovídá koncentraci 10⁶ atomů/m³, tj. 1 atom na 1 cm³. Nejvyšší hustoty, s nimiž se setkáváme v jádrech obřích molekulových oblaků jsou o 5 až 6 řádů větší, zatímco v prostoru mezi nimi nacházíme cca 10⁵ atomů/m³.

Rozptýlená prachová složka mezihvězdné hmoty způsobuje **selektivní absorpci** světla hvězd, tj. absorpci závislou na vlnové délce světla (→ zčervenání), plynná složka pak absorpci v diskrétních oborech spektra (mezihvězdné čáry ve spektrech hvězd).

Svíčící oblaka mezihvězdné hmoty nesou název galaktické nebo difúzní mlhoviny, dělíme je na **emisní mlhoviny** obsahující více plyn (více než 10 atomů v cm⁻³) a **re-**

flexní mlhoviny složené z prachu. V obou případech je primární příčinou vyzařování těchto mlhovin záření blízkých hvězd. U emisních mlhovin je plyn zářením hvězdy ionizován, rekombinací dochází k záření vlastní mlhoviny. U reflexních mlhovin dochází k rozptylu světla hvězdy na částicích o rozměrech srovnatelných s vlnovou délkou světla. Zvájemnou kombinací jsou prachoplynné mlhoviny.



§ Mezhvězdný prach – extinkce

Ve složitě strukturovaných mikroskopických částicích mezihvězdné látky pevného skupenství – zrníčkách, čili v tzv. **mezihvězdném prachu** je obsaženo asi 1% celkové hmotnosti mezihvězdné látky. Po chemické stránce v něm převládají prvky těžší než helium, které se tu vyskytují jak v čisté formě (uhlík), tak ve sloučeninách.

Jakkoliv mezihvězdný prach hmotnostně představuje jen malý přívažek v mezihvězdné látce, jeho role v současném vesmíru je velmi významná – bez jeho přispění by kupříkladu stěží mohly vznikat nové generace hvězd spolu s jejich planetárními systémy. I když je koncentrace prachových zrn z pozemského hlediska nepředstavitelně malá (i v těch nejzaprášenějších částech Galaxie – v globulích – činí průměrná vzdálenost sousedních prachových částic desítky metrů), je to též právě mezihvězdný prach, který v rozhodující míře zeslabuje světlo hvězd a dalších svítících objektů, který je příčinou tzv. **mezihvězdné extinkce**. Prach způsobuje mezihvězdnou absorpci cca 2^m na kpc ve viditelném oboru.

• Mezhvězdná extinkce

Předpokládejme, že v jistém zorném poli prozkoumáváme závislost logaritmu počtu hvězd $N(m)$ o hvězdné velikosti m a jasnějších v závislosti na oné zvolené hvězdné velikosti. Je zřejmé, že musí jít o monotónně rostoucí funkci, jejíž průběh bude záviset na rozložení hvězd v prostoru. Nejjednodušší situace nastane, pokud budou hvězdy v prostoru rozloženy rovnoměrně. Lze ukázat, že pak bude grafem závislosti přímka o směrnici:

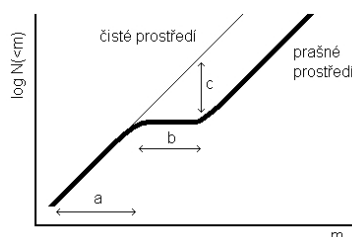
$$\frac{d(\log N)}{dm} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{N(m+1)}{N(m)} = 10^{0,6} = 3,981.$$

Uvedenou závislost lze ověřit na tzv. **Wolfově diagramu**, který závislost $\log(N)$ na m (tj. statistiku počtu hvězd v závislosti na magnitudě) zachycuje.² V některých částech oblohy, zejména pak v blízkosti pásu Mléčné dráhy budeme konstatovat značné odchylky

² Viz obr. V kouli o průměru r je N hvězd, $N(< m)$ je počet hvězd se zdánlivou magnitudou $< m$, n je prostorová koncentrace hvězd; navíc předpokládáme, že hvězdy mají M konstantní. Pak

$$N(< m) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot n,$$

$$\log N(< m) = \overbrace{\log\left(\frac{4}{3}\pi n\right)}^{\text{konst.}} + 3\log r.$$



od předpokládaného ideálního průběhu diagramu - všeobecně se ukazuje, že slabších hvězd je méně, než by se čekalo. Vysvětlení spočívá v tom, že prostor mezi hvězdami není úplně průzračný, že se v něm nachází mezihvězdná látka, která procházející světlo účinně zeslabuje – dochází zde k tzv. **mezihvězdné extinkci** (rozptyl světla do různých směrů + jeho pohlcování).³

Předpokládejme, že studujeme extinkci světla o původní hustotě zářivého toku vstupujícího do prostředí, v němž jsou rovnoměrně rozptýleny částice s koncentrací N o účinném průřezu σ . Nechť záření o původní hustotě toku I_0 vstoupí do prostředí a urazí zde malou dráhu ds . Součin ($n\sigma ds$) je bezrozměrná veličina, která vyjadřuje jaká část prostupujícího záření je na dráze ds „odstíněna“ částicemi (pohlčena nebo odchýlena z původního směru - tj. „rozptýlena“). Odstíněním, neboli zeslabením či extinkcí ubude z procházejícího toku I jistá malá část dI (tj. máme RTE bez přítomnosti zdroje záření):

$$dI = -I(n\sigma ds) \quad \rightarrow \quad dI/I = -n\sigma ds = -d\tau,$$

kde $d\tau$ je přírůstek tzv. **optické tloušťky** prostředí. Zintegrujeme-li tuto rovnici:

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\int_0^s n\sigma ds = \tau \quad \rightarrow \quad I = I_0 e^{-\tau}.$$

Je-li $\tau < 1$, hovoříme o tom, že vrstva je **opticky tenká**, u $\tau > 1$ mluvíme o vrstvě **opticky tlusté**. V případě, že se v rámci sledované vrstvy materiálu extinkční vlastnosti prachových částic nemění, pak lze ve výrazu pro optickou tloušťku účinný průřez vytknout před integrál a psát:

$$\tau = \sigma \int_0^s n ds = \sigma N_d,$$

Jelikož $m - M = 5 \log r - 5$, je $\log r = (m - M)/5 + 1$. Po dosazení tedy

$$\log N(< m) = \text{konst.} + \frac{3}{5}m - \overbrace{\frac{3}{5}M + 3}^{\text{konst.'}},$$

$$\log N(< m) = \text{konst.}'' + 0,6m.$$

Používá se k určování rozlohy a hustoty oblaků mezihvězdné hmoty. Graf je sestaven jednak pro normální oblast oblohy vedle oblaku (a)), jednak pro oblast stíněnou oblakem (b)). Z průběhu křivek resp. z toho, u jaké magnitudy se křivky začínají rozcházet, o kolik se liší v počtu hvězd (c)) a u které hvězdné velikosti obě křivky začnou postupovat souběžně, lze odvodit vzdálenost oblaku, velikost absorpce, kterou způsobuje, a jeho rozlohu.

³ Prach představuje jen malou část mezihvězdné hmoty, avšak jeho vliv na extinkci je velký. Prach v disku Galaxie je příčinou, že ve světle nevidíme její středovou oblast. Velikost extinkce, jež se měří v magnitudách je tedy různá v různých směrech, nejmenší směrem k pólům, největší v galaktické rovině. Extinkce závisí na vlnové délce záření, je tím menší, čím delší je vlnová délka záření. Proto se hvězdy jeví načervenalé, pokud je mezi nimi a námi vrstva prachu. Proto se k nám také IR záření a rádio vlny mohou snadno dostat až ze středu galaxie.

kde N_d je celkový počet prachových částic obsažených ve sloupci o základně 1 m^2 a výšce s orientovaném ve směru pozorování. V případě, že je rozložení prachových částic podél zorného paprsku víceméně homogenní, pak lze před integrál vytknout i koncentraci prachových částic:

$$\tau = \sigma n \int_0^s ds = (\sigma n)s,$$

z čehož plyne, že optická hloubka v tomto homogenním přiblížení je přímo úměrná délce sloupce, tj. vzdálenosti pozorovaného zdroje.

Extinkci světla lze ovšem též popsat i přírůstkem hvězdné velikosti A vyjádřeným v magnitudách, tj. pomocí Pogsonovy rovnice:

$$A = 2,5 \log(I/I_0) \text{ mag} = 2,5 \log(e^{-\tau}) \text{ mag} = (2,5 \log e)\tau \text{ mag} = 1,086\tau \text{ mag}.$$

Extinkce je tedy přímo úměrná optické tloušťce, při orientačních úvahách dokonce můžeme brát, že obě veličiny jsou si číselně rovny.⁴

Už první pozorování mezihvězdné extinkce ukázala, že její velikost výrazně závisí na vlnové délce λ v níž ji sledujeme. Z hlediska mikroskopického to znamená, že účinný průřez prachových částic $\sigma(\lambda)$ není totožný s jejich geometrickým průřezem S , neboť ten je jistě na vlnové délce nezávislý. Zjednodušeně lze pak pro určitý typ částic předpokládat, že jejich účinné průřezy lze vyjádřit ve tvaru:

$$\sigma(\lambda) = f(\lambda)S,$$

kde funkce $f(\lambda)$ závisí na mechanismu extinkce, který se u tohoto typu částic uplatňuje.

Ukazuje se, že:

a) pokud jsou rozptylující částice mnohem menší než vlnová délka (velikostí jsou srovnatelné třeba s elektrony), pak způsobuje extinkci čistý **Thompsonův rozptyl**, jehož velikost nezávisí na vlnové délce. Funkce $f(\lambda)$ je pak konstanta.

b) jsou-li rozptylujícími centry shluky molekul o velikosti srovnatelné s vlnovou délkou prostupujícího záření, pak jde o tzv. **Rayleighův rozptyl**, jehož účinnost je nepřímo úměrná 4. mocnině vlnové délky. Tento rozptyl může za modrou barvu bezmračné pozemské oblohy. Funkce $f(\lambda) = a\lambda^{-4}$.

c) nicméně laboratorně i teoreticky bylo zjištěno, že pro částice o rozměrech mezihvězdného prachu (100 nm až $1 \mu\text{m}$) je ve viditelném oboru spektra účinný průřez nepřímo úměrný hodnotě vlnové délky rozptyl. světla; funkce $f(\lambda) = a\lambda^{-1}$. Rozptyl tohoto typu, který nastává na víceméně kulových dielektrických částicích teoreticky popsal Gustav Mie v roce 1908, proto se mu též říká **Mieův rozptyl**. Vyplývá z něj mj. i to, že velikost extinkce ve vlnové délce A bude nepřímo úměrná této vlnové délce, čili: $A(\lambda) \sim \lambda^{-1}$. Vysvětluje tak např. i velmi dlouho známý efekt tzv. mezihvězdného zčervenání světla hvězd.⁵

Rozložení energie ve spektru hvězd i jiných objektů nejčastěji studujeme pomocí tzv. barevných indexů, což jsou rozdíly hvězdných velikostí jednotlivých objektů pořízených v různých spektrálních oborech (barvách), charakterizovaných jistou efektivní vlnovou

⁴ Oslabením o 1 mag tedy dostaneme cca třetinu světla ($1/e \doteq e^{-A/1,086} \doteq e^{-A} \doteq 0,3$), pro 2 mag vychází cca 13%, pro 5 mag 1% (viz definice).

⁵ Mezihvězdná extinkce citelněji postihuje krátkovlnnou oblast elektromagnetického spektra hvězdy. Zeslabením modré části spektra se relativně zvýrazní jeho červený konec – barevné indexy se zvětšují. Druhou stranou mince je pak namodralá barva prašných mlhovin, které září rozptýleným světlem hvězd.

délkou λ . Z předchozího výkladu vyplývá, že barevné indexy nutně musejí být existencí mezihvězdné extinkce ovlivněny. Dosadíme-li do vztahu pro obecný barevný index

$$\begin{aligned} CI &= m(\lambda_1) - m(\lambda_2) = [M(\lambda_1) + 5 \log r - 5 + A(\lambda_1)] - [M(\lambda_2) + 5 \log r - 5 + A(\lambda_2)] = \\ &= [M(\lambda_1) - M(\lambda_2)] + [A(\lambda_1) - A(\lambda_2)] = CI_0 + E(\lambda_1, \lambda_2), \end{aligned}$$

vidíme, že k „nezčervenalemu“ barevnému indexu CI_0 se ještě přičítá člen $E(\lambda_1, \lambda_2)$, nazývaný **barevný exces** (ve vizuálním oboru > 0). Barevný exces hvězdy můžeme zjistit tak, že od pozorovaného zčervenaleho barevného indexu (tj. např. $B - V$) odečteme předpokládaný skutečný barevný index (tj. $B_0 - V_0$), který můžeme odvodit například ze vzhledu spektra (spektrum nezávisí na zčervenání). Barevný exces je tedy měřítkem diferenciální absorpce v různých spektrálních oborech.

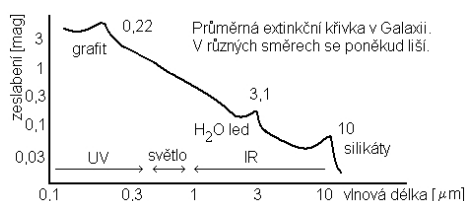
Za předpokladu, že extinkce je nepřímě úměrná vlnové délce, můžeme odvodit poměr mezi celkovou absorpcí vyjádřenou v magnitudách a barevným excesem. Definujeme poměr mezi extinkcí a barevným excesem

$$R_\lambda = \frac{A_\lambda}{A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1}} = \frac{A_\lambda}{E_{\Delta\lambda}} = \frac{\lambda^{-1}}{\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1}},$$

kde $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ a $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Dosadíme-li do vztahu efektivní vlnové délky barev B a V, jde-li nám tedy o nejužívanější barevný index (B-V), dojdeme k hodnotě 4,0. Reálná měření však ukazují, že tento poměr je v průměru o něco menší, činí $R(B-V) = 3,2 \pm 0,3$. (Tato hodnota dosti citlivě závisí na směru, v němž měření extinkce provádíme, někde koeficient R dosahuje až 5!) Získáme-li nyní hodnotu barevného excesu $E(B-V)$, můžeme pomocí R opravit naše data o extinkci.⁶

Řadu dalších možností nám skýtá vícebarevná fotometrie – třeba standardní fotometrie UB V , kde je možno barevný exces odečíst přímo z „trojbarevného“ diagramu ($U - B$) vs. ($B - V$).

V ultrafialovém a infračerveném oboru je závislost extinkce na vlnové délce (**extinkční křivka**) poněkud komplikovanější, zvláště charakteristické zde je strmé lokální maximum okolo vlnové délky 218 nm. Průběh závislosti tak mnohé vypovídá o materiálových vlastnostech mezihvězdného prachu.



⁶ Vztah absorpce a extinkce tedy je $E_{B-V} = B - B_0 - (V - V_0) = A_B - A_V$. Pro rektifikaci spektra potřebujeme znát normalizovanou extinkci pro všechny vlnové délky:

$$F_\lambda = F(\lambda) = \frac{\Delta m_\lambda - \Delta m_V}{\Delta m_B - \Delta m_V} = \frac{A_\lambda - A_V}{A_B - A_V} = \frac{E_{\lambda-V}}{E_{B-V}}.$$

$F(\lambda)$ je extinkční křivka. Tj. aby se zjistila celková absorpce pro určitou vlnovou délku A_λ , je nutno získat měření barevného excesu $E_{\Delta\lambda}$ v různých spektrálních intervalech $\Delta\lambda$ sahajících od ultrafialové až do infračervené oblasti spektra a extrapolovat tato měření až do vlnové délky $\lambda = \infty$. Tím by se získala extinkční křivka, ze které lze odečíst celkovou absorpci A_λ v dané vlnové délce.

Maximum extinkce u 218 nm naznačuje, že významnou složku zrníček mezihvězdného prachu bude představovat grafit. Jakkoli je zatím záhadné, jakými procesy se uhlík uspořádal do relativně přísné grafitové struktury, výskyt „grafitové rezonance“ u 218 nm nikoho nenechává na pochybách, že právě grafit musí být v tělu zrníček mezihvězdného prachu obsažen. Existence temných absorpcí v blízké infračervené oblasti na druhé straně poukazuje na to, že mezihvězdný prach musí ještě obsahovat i krystalky křemičitanů. Emisní pásy v infračervené oblasti jsou pak připisovány nejčastěji plochým molekulám s organickým benzenovým jádrem známým jako polycyklické aromatické uhlovodíky. Vodní led zřejmě není povinnou součástí prachových částic – nacházíme jej jen v prachové složce mimořádně hustých molekulových oblaků, kde je tento led chráněn před destruktivními vlivy zvenčí.

Dalším důležitým faktem je skutečnost, že světlo procházející mezihvězdnými prašnými oblaky je mírně **polarizované**⁷ (pár procent [max 10%, cirkumstelární obálky hvězd až 30%] – závisí to na vlnové délce), tj. poloha elektrického vektoru není zcela náhodně orientována, ale jeví tendenci být rovnoběžná s rovinou Galaxie. To jasně ukazuje, že částičky prachu nejsou přísně sférickými útvary (jehličky = *prolate*). V prostoru jsou uspořádány tak, že jejich delší osa svírá pravý úhel se silokřivkami slabého magnetického pole (cca 10^{-10} T), které prostupuje celou Galaxii. Obvykle platí, že polarizace je úměrná zčervenání → „důkaz“, že polarizace je dána prachovými částicemi. Nejlépe polarizují částice s průměrem cca odpovídajícím vlnové délce daného oboru spektra. Pomocí polarizace lze získat „mapy mag. pole“.

I když mnoha detailům složení zrn mezihvězdného prachu dosud nerozumíme, zdá se, že máme silné argumenty pro to, že prachové částice jsou složeny zejména ze silikátů, amorfního uhlíku, v menší míře v nich nacházíme polycyklické uhlovodíky, grafit a vodní led. (Protáhlé částice (jehličky) znečištěného ledu, grafit, částice s grafitovým jádrem a ledovým obalem, silikátové částice, částice s grafitovým či silikátovým jádrem a obalem ze zmrzlých plynů [metan, formaldehyd, voda ...]. Rozměry cca 10^2 nm.)

Mezihvězdný prach nejspíš nevzniká samovolnou kondenzací atomů ve volném kosmickém prostoru. Látka je zde totiž příliš řídká rozptýlena a plastické/nep pružné srážky, po nichž by atomy zůstaly pospolu, jsou příliš vzácné. Příhodné podmínky pro růst zrn jsou v atmosférách chladných obřích hvězd spektrálních typů M, a zejména pak uhlíkových hvězd typu C (teplota musí být pod 2000 K). Zde se mohou kondenzovat páry uhlíku do podoby zrníček amorfního uhlíku (vznikají tedy monoclustery, které postupně narůstají), který je pak tlakem záření vymetán z atmosféry do okolního prostoru. Dalším možným zdrojem mezihvězdného prachu jsou výbuchy supernov všech typů.

Existuje řada důkazů, že mezihvězdný prach není v prostoru rozložen rovnoměrně, ale že vytváří jisté shluky – oblaky prachu. Jedná se však spíše o oblaky mezihvězdné látky s vysokým zastoupením prachu. Ty se projevují především extinkcí světla vzdálenějších objektů, ve výjimečných případech však mohou i samy zářit rozptýleným světlem pocházejícím z jasných hvězd, které tyto tzv. **reflexní mlhoviny** osvětlují. Spektrum reflexních mlhovin je v zásadě shodné se spektrem budících hvězd jen s tím rozdílem, že lépe je rozptylována krátkovlnná složka jejich záření.

Prašné oblaky se nacházejí takřka výhradně v rovině Galaxie, v níž ovšem leží i Slunce. Extinkce způsobena bližšími oblaky komplikuje průzkum vzdálenějších oblaků. Pozorování prašných oblaků v jiných spirálních galaxiích ukazují, že se tyto oblaky velice

⁷ Tj. budu-li mít dalekohled a polarizátor resp. analyzátor, kterým budu otáčet v rovině kolmé k zornému paprsku, pak v určité poloze bude maximální a v jiné minimální intenzita. Stupeň lineární polarizace je $p = (i_{max} - i_{min}) / (i_{max} + i_{min})$.

výrazně koncentrují v blízkosti spirálních ramen, zejména na vnitřní straně těch nejvývinutějších ramen.

Nejlépe prozkoumané prашné oblaky, s nimiž máme tu čest se v blízkosti Slunce setkat, mají hmotnosti několika stovek Sluncí a rozměry v rozmezí od těch největších o průměru 200 světelných let po drobné o průměru zlomků světelného roku. Právě ty nejmenší prашné oblaky bývají i nejhustější, což je zřejmě důsledkem jejich vývoje – s tím jak prашnový komplex kontrahuje stává se hustějším a méně průhledným. Nesmírně malé prашnové mraky jsou nazývány **Bokovy globule**, jedná se o kompaktní, takřka neprůhledné objekty o typickém průměru menším než 1 pc, s nízkou teplotou cca 10 K a hmotnostech od 1 do 1000 Sluncí. Nedávné výzkumy prokázaly, že uvnitř globulí se nacházejí právě narozené hvězdy, tj. globule se vlastní gravitací mění v prашvězdy.

Úplnější informaci o rozložení prachu v Galaxii nám poskytují infračervená pozorování. Zatímco optické přístroje jsou schopny odhalit prach jen tehdy, když stíní vzdálenější objekty nebo když je osvětlen blízkými hvězdami, infračervené dalekohledy jsou schopny registrovat vlastní dlouhovlnné záření, které prach (o teplotě někdy jen několika kelvinů) sám vyzařuje. Je třeba uvážit, že mezihvězdný prach v Galaxii pohltí celkem asi 30% zářivého výkonu Galaxie, aby jej pak znovu vyzářil v dlouhovlnnějším oboru spektra.

Kompletní přehled oblohy v infračerveném oboru poprvé provedla v osmdesátých letech pověstná družice IRAS (InfraRed Astronomical Satellite), která odhalila velké množství hustých prашnových oblaků v pásu Mléčné dráhy. Husté prашnové oblaky ale mohou být studovány i jinak – množství těchto objektů obsahuje nezanedbatelné množství molekul, jež jsou schopny vysílat rádiové záření na takové vlnové délce a v takové intenzitě, že je můžeme i na Zemi přijímat a analyzovat. V prашných mracích tak bylo objeveno na 50 různých molekul včetně oxidu uhelnatého, formaldehydu a nejrůznějších radikálů.

Organické molekuly v mezihvězdném prostoru též zřejmě budou původem tzv. DIB's (*Difuse Interstellar Bands*, mezihvězdné difúzní pásy, např. u 443 nm). Objev 1930, P.W. Merrill, neznámé široké absorpční čáry ve spektrech O, B hvězd. Jsou většinou mělké a hodně široké oproti spektrálním čarům. Jsou podobné laboratorním spektrům materiálů s vnitřním zamrzlým el. pole, které je rušeno.

Rozptyl záření na prachu: Nechtí záření dopadá jako monochromatická rovinná vlna na prашnovou částičku, pole pozorované po rozptylu = rovinná vlna (ta původní) + sférická vlna rozptýleného záření, jež je charakterizována pomocí indikatrix rozptylu. Ta je v podstatě totožná s anténní charakteristikou.

Podrobně včetně Mieho řešení a vlivu polarizace viz *Doplňky* ...

§ Mezihvězdný plyn – H I, H II, molekuly, ...

Pokud chápeme mezihvězdnou látku v užším slova smyslu, tj. nezapočítáváme do ní skrytou látku, pak v ní co do hmotnosti zcela jasně převládá její plynná, tj. atomární, případně molekulární složka. Chemické složení mezihvězdného plynu je obdobné jako chemické složení povrchových vrstev hvězd: na 1000 atomů vodíků připadá 80 atomů helia a 1 těžší atom. I hmotnostně nejvíce zastoupeným prvkem (70%) je vodík, s nímž se v prostoru mezi hvězdami setkáváme jako s neutrálním vodíkem (oblasti H I), ionizovaným vodíkem (oblasti H II) i v podobě běžné dvouatomové molekuly (H₂), v níž jej nacházíme zejména v molekulových oblacích. Dalším nejčastějším prvkem je helium, které se ovšem vyskytuje jen atomární podobě. Další prvky se v prostoru nacházejí rovněž ve své neutrální a ionizované podobě, některé prvky spolu s jinými vytvářejí molekuly. Z hlediska pozorovatele jsou velmi důležité optické projevy mezihvězdného plynu, pomocí nichž můžeme mezihvězdný plyn odhalit a diagnostikovat.

• Záření mezihvězdných molekul

Při srážkách jednotlivých atomů mezi sebou nebo za asistence prachových částic⁸ vznikají v mezihvězdném prostředí i různě složité molekuly (navíc se mohou formovat molekuly v atmosférách hvězd).⁹ Stejně jako v atomech, tak i v molekulách dochází k přechodům elektronů mezi jednotlivými hladinami, což je doprovázeno absorpcí nebo emisí fotonů zpravidla viditelného záření (avšak většina mezihvězdných molekul zůstává trvale v nejnižších energetických stavech [záření daleko od žhavých hvězd není natolik silné, aby excitovalo či dokonce ionizovalo atomy nebo molekuly v dostatečné míře] a pravděpodobnost, že se projeví absorpčními či dokonce emisními čarami je zanedbatelná). Kromě toho ovšem mohou molekuly zářit, protože mohou **rotovat** (do otáčení mohou být uvedeny zářivým kvantem nebo při změně momentu hybnosti zase mohou toto kvantum vyzářit) a **vibrovat**/kmitat podél spojnice atomů (jádra se vychýlí ze své rovnovážné polohy, spotřebují určitou energii, která jim ovšem musí být dodána zvenku; vracejí-li se atomy zpět do rovnovážné polohy, energii zase vydávají). Celková energie pohlcená nebo vyzářená molekulou je pak v podstatě součtem všech energií spotřebovaných nebo vydaných při zmíněných dějích.¹⁰ Avšak i v rotaci a vibraci molekul jsou zákony kvantové mechaniky povoleny jen určité stavy, rotační a vibrační energie molekul je kvantována. Pokud je molekula v excitovaném stavu, pak po jistém čase spontánně přechází do nižšího energetického stavu za současného vyzáření fotonu o energii odpovídající rozdílu energií výchozího a konečného stavu (u těchto přechodů jsou energetické rozdíly typicky 0,1 eV pro vibrační a 10^{-3} eV pro rotační).¹¹ Nejmenší kvantum je tedy vyzářeno při změně rotačního stavu molekuly – jde o mikrovlnné záření o vlnové délce řádově 10^{-2} m. Vyšší energii mají fotony vyzářené při změně vibračního stavu – ve spektru je najdeme v blízké IR oblasti. K nabuzení molekuly do jiného stavu (vyššího, ale i nižšího) dochází v důsledku nepružných srážek s jinou molekulou (nejčastěji H_2) či atomem (nejčastěji He).

Emise nebo absorpce mezihvězdných molekul se nejlépe odhalují v mikrovlnné oblasti spektra. V současnosti již byla odhalena více než stovka molekul složených z nejčastěji

⁸ Valná část molekul vodíku vznikla katalytickým přispěním prachových zrn. Zrna zde plní dvě užitečné role: a) představují místo, kde mohou ulpět vodíkové atomy a vyčkat na další, s nimiž by vytvořily stabilní molekulu, b) slouží jako podložka, která je schopna odvést z molekuly přebytečnou energii, která se uvolnila poté, co se molekula vytvořila. Tato energie poslouží k ohřátí prachové částičky a k vypuzení molekuly z místa jejího zrodu.

⁹ Životní doba molekul je omezena na maximálně 10^4 let (typicky desítky až stovky let; studují se rychlostní koeficienty daných reakcí, jež charakterizují množství částic, které se vytvoří v daném jednotkovém objemu za 1s, závisí na teplotě a částicové hustotě). Skutečnost že pozorujeme mezihvězdné absorpční pásy CH, CH^+ a CN znamená, že alespoň tyto molekuly musí vznikat v mezihvězdném prostoru, neboť by nemohli přežít cestu z atmosféry hvězd trvajících cca alespoň 10^5 až 10^6 let. Vznik molekul v prostoru bez prostředníka je velmi nepravděpodobný, nejpravděpodobnější tedy je vznik na částicích prachu... Navíc prachové částice zřejmě umožňují molekulám udržet se déle „při životě“, neboť pohlcují UV záření hvězd a zpomalují tak disociační proces.

¹⁰ Viz jemná struktura. Pozorujeme molekulární spektrální pásy (neboť celkově mohou molekuly vyzářovat 3 druhy spekter – rotační, vibračně-rotační [molekula může při vibrování i rotovat a výsledná frekvence bude dána kombinací různých rotačních vlností...], elektronově-vibračně-rotační [analogicky]). Např. rotační hladina dvouatomové molekuly může být rozštěpena na dvě složky lišící se nepatrným rozdílem energie, neboť momenty hybnosti elektronů a rotující molekuly se vzájemně ovlivňují. Změna momentu hybnosti elektronu vzhledem k rotaci molekuly je provázána vyzářením/pohlčením kvanta s velmi malou energií, odpovídající decimetrovým vlnovým délkám. Kromě toho, je-li např. jeden z atomů vodík, jsou možné dvě orientace spinu elektronu ke spinu jádra, což znamená opět další zdvojení rotační hladiny.

¹¹ V případě rotace a vibrace jsou povoleny přechody jen mezi sousedními energetickými hladinami (změna odpovídajících kvantových čísel: ± 1).

se vyskytujících prvků (s výjimkou netečného helia) – z vodíku, uhlíku, dusíku, kyslíku, síry a křemíku. Vedle nejvíce zastoupené dvouatomové molekuly vodíku H_2 , je nejsilněji zastoupena mimořádně stabilní molekula oxidu uhelnatého CO, dále voda H_2O , formaldehyd H_2CO (možno identifikovat na 2,1 a 2,0 mm) a další.¹²

• Molekulové oblaky

Mezihvězdné molekuly nejčastěji nacházíme v neprůhledných, relativně hustých a chladných molekulových oblacích. Molekulové oblaky jsou tvořeny především molekulárním vodíkem, dále též neutrálním vodíkem, heliem a dalšími prvky, spojenými občas i do dosti složitých molekul. Nezbytnou složkou molekulových mračen jsou zrníčka mezihvězdného prachu, která hrají důležitou roli v energetice mračen tím, že stíní vnitřní části oblaku před dezintegrujícím zářením přicházejícím zvnějšku a přebytečné teplo dokáží účinně vyzářit do prostoru, čímž celý oblak dlouhodobě udržují na velmi nízké teplotě několika K.

Nejvýznamnější složku molekulových oblaků – molekulární vodík H_2 – je velmi obtížné detekovat přímo, protože se neprojevuje žádnými emisemi ve vizuálním a rádiovém oboru spektra. Jako indikátoru molekulových oblaků se proto nejčastěji využívá záření jiné, relativně bohatě zastoupené molekuly oxidu uhelnatého CO ($10^{-4} H_2$); třebaže se nabízejí i jiné mezihvězdné molekuly jako CH, OH, CS a C_3H_2 . Tyto „indikační“ molekuly z molekulových oblaků se v důsledku nepružných srážek nabudí do vyššího energetického stavu a pak spontánně vyzáří fotony záření v takových oborech spektra, v nichž je můžeme pozorovat mnohem snadněji než fotony vyslané molekulárním vodíkem. To se týká zejména molekuly CO, která má svou nejsilnější čáru umístěnou na dobře detekovatelné vlně 2,6 mm. Pozorováním záření těchto indikátorových molekul lze diagnostikovat vnější části molekulových oblaků, zejména jejich hustotu a teplotu.¹³

Více než polovina mezihvězdné látky v Galaxii je soustředěna v tzv. obřích molekulových mračnách (GMC – Giant Molecular Clouds). Jsou to složitě strukturované, gravitačně vázané objekty složené z plynu a prachu o celkové hmotnosti od 10^5 do $10^6 M_\odot$, s rozměrem cca 160 světelných let, udržované v rovnovážném stavu vnitřním pohybem částí oblaku. V Galaxii existuje asi 2000 těchto obřích molekulových oblaků, které vesměs velice dobře sledují spirální strukturu soustavy.¹⁴

Typická vnitřní teplota GMC je asi 20 kelvinů, koncentrace atomů resp. molekul činí asi $(1 \text{ až } 3) \cdot 10^8$ částic na m^3 . Vnitřní stabilitu GMC zajišťují svým pohybem relativně „horké“ zhustky látky GMC, nazývané jádra, s charakteristickým rozměrem 0,2 až 3 světelné roky, $T \sim 100$ až 200 K, $n \sim 10^{13}$ až $10^{15} m^3$ s hmotností 10 až 1000 Sluncí. V chladnu a temnu obřích molekulových mračen kolapsem zvláště hustých částí mraku vznikají nové hvězdy. Jakmile se tyto nové hvězdy osamostatní, začnou do prostoru kolem sebe vysílat nejprve infračervené, ale pak stále kratkovlnnější paprsky, které začnou okolí molekulového oblaku nahřívat. Nejdříve to způsobí, že se zde přestanou tvořit nové hvězdy, při vyšší teplotě dojde k hromadné disociaci většiny z přítomných molekul. Hvězdná porodnice vezme za své. Jakkoliv by v celém GMC bylo dostatek látky pro miliony nových hvězd, nestihne se v něm v jednom cyklu vytvořit více než řekněme

¹² Izotopy v molekulách (zejména D, He^3 , Li^6) vypovídají mnoho o kosmologii, jejich zastoupení testuje jak probíhala nukleogeneze při Big Bangu. C^{13} vzniká v jedné vedlejší větvi CNO cyklu, tj. stává se hodinami jak dlouho probíhá CNO.

¹³ Nejčastější molekula H_2 je velmi symetrická, skoro nezáří; vyskytuje se asociována s CO a emisivita CO je $\sim H_2$ – čím více molekul, tím více srážek a tím více září ...)

¹⁴ Pozorování GMC na vlnové délce záření molekuly CO přináší nejspolehlivější informace o rozložení těchto oblaků v Galaxii a tím i o její spirální struktuře.

několik hvězd. V důsledku zvýšené teploty a hvězdného větru se prach v oblaku vypaří, plynné složky hvězdný vítr odvané. Dosud skryté mladé hvězdy vykuknou ze svého prашného úkrytu. Materiál z GMC zřídne a ohřeje se. Postupně však začne opět chladnout, aby se z něj za takových 100 milionů let vytvořil nový obří molekulový oblak, který opět porodí několik hvězd.¹⁵ Hmotné hvězdy se tvoří na okrajích oblaků, méně hmotné hvězdy uvnitř oblaků.

Obří molekulové oblaky ve srážejících se galaxiích však mohou dopadnout úplně jinak. Při nepružném střetu dvou oblaků může tlak náhle vzrůst až na tisícínásobek. Výpočty ukazují, že to může odstartovat famózní hromadný vznik i několika stovek tisíc i milionů hvězd. Takto zřejmě mohou i v dnešní době vznikat nové kulové hvězdokupy, soustavy, jež pohromadě drží svou vlastní gravitací.

• Interstelární čáry

Ve spektrech některých hvězd poblíž galaktické roviny byly už na počátku 20. století pozorovány velmi úzké absorpční čáry, které vznikly absorpcí záření hvězdy v mezihvězdném materiálu, který se nachází na spojnici hvězda – pozorovatel (takto byla vlastně odhalena existence mezihvězdného plynu; čáry byly odhaleny ve spektrech dvojhvězd, neúčastnili se periodického posuvu vznikajícího dopplerem; navíc jsou díky nízké teplotě velmi ostré). V některých případech může být těchto **interstelárních čar** několik. Jejich existence vypovídá o tom, že absorbující plyn se zpravidla nachází v podobě jednotlivých oblaků, které putují prostorem na svou pěst. Z hloubky čar lze usoudit na lineární počet absorbujících atomů v oblaku, z polohy čáry na jeho radiální rychlost vzhledem ke Slunci. Ve vizuální části hvězdných spekter již bylo identifikováno na padesát absorpčních čar atomů, iontů nebo i molekul (Ca, Ca⁺, Na, Ti⁺, K, Fe, CN, CH i CH⁺), které jsou nepochybně mezihvězdného původu. Vodík se ve vizuální oblasti spektra interstelárními čarami neprojevuje, čáry odpovídající přechodu ze základního stavu do stavů excitovaných se totiž nacházejí hluboko v ultrafialové oblasti spektra. Naproti tomu například sodík nebo vápník mají mezi základní hladinou a vyššími hladinami relativně malé energetické rozdíly, což pak podmiňuje skutečnost, že tyto atomy jsou schopny účinně absorbovat i viditelné světlo.

• Oblasti H I. Záření vodíku na 0,21 m

V relativně chladných oblastech H I, čili v oblastech neutrálního vodíku, s typickou teplotou cca 80 kelvinů, nacházíme atomy vodíku takřka výlučně v základním stavu. Za těchto okolností jsou opticky zcela neaktivní – nezáří ani nepohlcují záření, takže bychom se o jejich existenci nemuseli vůbec dovědět. Naštěstí však, by tento neutrální vodík v důsledku tzv. hyperjemného rozštěpení základní hladiny měl zářit v rádiové oblasti, a to na frekvenci 1420,4 MHz (vlnové délce 0,21105 m).¹⁶

¹⁵ Nebo lze uvažovat *postupné tvoření hvězd*, propagating [též triggered] star formation = počáteční impuls (SN) postupuje oblakem, na čele vzniká ionizační fronta s teplotou cca 10⁴ K, jež je vlastně také rázovou vlnou, žene/stlačuje (hvězdný vítr) chladný plyn, takto vznikají další a další generace hvězd, jejíž hmotnější hvězdy posunují linii dál a dál a vlna tak projde skrz celý oblak ... Šíření obálky/tlakové vlny pro případ náhlého výbuchu se zanedbáním chlazení ($dE_{th} = 0$) a pro případ statického a homogenního okolního prostředí popisuje Sedovovo řešení – vzorce pro R a \dot{R} obálky jako funkce E_{th} ($^{1/5}$), ρ_{ext} ($^{1/5}$) a t ($^{2/5}$) resp. ($^{-3/5}$) pro rychlost

¹⁶ Předpověď existence této rádiové spektrální čáry učinil v roce 1944 holandský astronom a radioastronom H. CH. van de Hulst. Předpovězené záření vodíku pak bylo sedm let poté skutečně objeveno při rádiovém průzkumu mezihvězdného plynu.

Neutrální vodík s elektronem v základním stavu má dvě možnosti vzájemné orientace spinu jádra/protonu a elektronu: paralelní (suhlasnou, $F = S(\text{spin } e^-) + I(\text{spin } p^+) = 1$) a antiparalelní (opačnou, $F = 0$). Stav s paralelním uspořádáním má energii o zhruba $5,87 \cdot 10^{-6}$ eV vyšší než stav, kde jsou spiny protonu a elektronu orientovány opačně. Energetická hladina odpovídající stavu, při němž jsou spiny obou částic v atomu namířeny do stejného směru, je metastabilní a elektron na ní setrvává několik milionů let, než se spontánně změní orientace spinu elektronu na opačnou a atom přejde do stavu s minimální energií. Při tomto přechodu, který se počítá mezi tzv. zakázané přechody (Einsteinův koeficient $A_{10} = 2,85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$, což je hodnota 10^{22} krát menší než pro dovolené přechody v optickém oboru, pravděpodobnost přechodu je 10^{-14} s, tj. jeden přechod za 11 mil. let. Emisní záření je tedy pozorovatelné při velmi malé hustotě, kdy excitovaný foton je velmi dlouho „nerušen“), se vyzáří foton o energii $5,87 \cdot 10^{-6}$ eV, což odpovídá kvantu o vlnové délce 0,211 metru či kmitočtu $\nu = 1420,4$ MHz. Příčinou, proč je v atomu vodíku vazba mezi protonem a elektronem pevnější v případě nesuhlasného směru jejich spinů než v případě opačném, je vzájemná interakce mezi magnetickými poli elektronu (magnetický moment $9,28 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$) a protonu ($1,41 \cdot 10^{-26} \text{ Am}^2$), jejichž orientace je určena spinem nabitě částice. Pokud si v této situaci elektron a proton představíme jako dva nestejně tyčové magnety, pak excitovaný stav odpovídá situaci, kdy jejich konce se suhlasnou polaritou jsou namířeny stejným směrem. I zde je tendence přejít do stabilnějšího uspořádání s opačně orientovanou polaritou.

K excitaci vodíkových atomů do metastabilní hladiny dochází zpravidla při nepružných srážkách mezi atomy, řidčeji pak pohlcením kvanta o vlnové délce 0,211 m. Foton o vlnové délce 0,211 m však může ještě vyvolat vynucený přechod z excitované hladiny do základní, při němž k němu přibude další foton se stejnou fází a směrem. V tomto případě hovoříme o tzv. stimulované emisi, kterou lze formálně popsat jako negativní absorpci (při interakci fotonu s atomem se foton nejen neztratí, ale přibude).

K tomu, aby atomy zářily v zakázaných čarách je nezbytné, aby se příliš často nesrážely. V opačném případě totiž dochází k tomu, že atom excitovaný do metastabilního stavu nestačí samovolně přejít do základního stavu vyzářením fotonu, ale je do základního stavu sražen prostřednictvím tzv. superpružné srážky s jiným atomem, při níž žádný foton vyslán není. Pokud bude doba mezi po sobě následujícími srážkami τ o mnoho řádů kratší než doba v níž atom setrvává v nabuzeném metastabilním stavu, záření v zakázaných čarách pozorovat nebudeme.¹⁷

Rádiové záření neutrálního vodíku vzhledem ke své vlnové délce volně prochází takřka celou Galaxií. Dopplerův posuv a obecně celý profil čáry 0,211 m se dá dobře proměřovat, a tak nám radioastronomie poskytuje cenné informace o stavbě a dynamice jak galaxie, tak i extragalaktických objektů. Příkladně lze prostřednictvím tohoto záření velmi dobře studovat spirální strukturu naší Galaxie (neboť právě oblasti H I jeví velmi silnou koncentraci ke spirálním ramenům); lze zjistit rotační rychlost cca ± 200 km/s; z integrálního profilu čáry 21 cm z různých směrů lze odhadnout, že celková hmotnost neutrálního vodíku v Galaxii je cca $5 - 7 \cdot 10^9 M_{\odot}$, tj. asi 4% celkové hmotnosti Galaxie.

¹⁷ Podle známého vztahu pro stupeň excitace atomů $(n_1/n_0) = (g_1/g_0) \cdot e^{-h\nu/kT}$ lze určit i relativní počet atomů s $F = 1$ a $F = 0$. Pro statistické rovnováhy platí $g = 2F + 1$, tj. $g_1/g_0 = 3$. Hodnota $h\nu/k = 0,07$ K, tj. $n_1/n_0 = 3e^{-0,07/T}$. Jelikož kinetická teplota mezihvězdného vodíku (která určuje vzájemnou rychlost srážejících se částic) je vždy vyšší než 0,07 K, lze očekávat, že $e^{-0,07/T} \simeq 1$ a poměr $n_1/n_0 = 3 : 1$ se bude měnit jen nepatrně s teplotou mezihvězdného plynu. Ve vyšším stavu tedy bude cca 75% atomů vodíku. Tento vysoký počet atomů není překvapující, neboť jen malá část kinetické energie se při srážce atomů spotřebuje na „přehození“ spinu z $F = 0$ na $F = 1$. Může se tak stát v důsledku magnetické interakce mezi oběma atomy, ale nejčastěji výměnou elektronů mezi dvěma atomy.

• Záření ionizovaného vodíku

Z fotosféry žhavých hvězd třídy O a B s teplotou nad 18 000 K vystupuje množství fotonů ultrafialového záření. Je-li jejich vlnová délka kratší než 91,2 nm, mají dostatek energie k tomu, aby atom vodíku v základním stavu rozbily na proton a elektron. Pohltí-li atom kvantum takového záření, pak se jeho energie spotřebuje na samu fotoionizaci (13,6 eV), čili na překonání vazby mezi elektronem a protonem, zbytek případně na kinetickou energii protonu a především elektronu.

Volné elektrony dříve nebo později rekombinují a znovu vytvářejí neutrální atomy. Většina z nich nesekočí do základní hladiny přímo, některé se zachytí na některé z vyšších energetických hladin a do nejnižšího stavu sestupují postupně. Tomuto ději se říká kaskádní přechod nebo fluorescence. Vždy přitom vyzáří foton o energii odpovídající energetickému rozdílu příslušných hladin. Z pozorovatelského hlediska je zvláště důležité, že při přeskokách do druhé hladiny vyzáří atomy vodíku záření ve spektrálních čárách Balmerovy série, tj. v oblasti viditelného světla. Tam, kde je v okolí žhavých hvězd přítomen mezihvězdný plyn, tak pozorujeme rozsáhlé plynné mlhoviny, v jejichž spektrech dominují mohutné emisní čáry Balmerovy série, zejména pak rudá čára H_α o vlnové délce 656,3 nm, vznikající při přechodu z 3. do 2. hladiny, intenzita vyšších členů Balmerovy série pak monotónně klesá.

Mezihvězdný plyn září ovšem též na milimetrových a centimetrových vlnách zachytitelných pozemskými radioteleskopy. Spojité záření zde vzniká při volně-volných přechodech, kdy se elektron k jádru jen přiblíží, ale nespojí se v atom, pouze se přitom poněkud přibrzdí. Pozorujeme zde však i emisní čáry vodíku, které vznikají při přechodech mezi velmi vysokými energetickými hladinami, kde rozdíl energií je velmi malý (řádově 10^{-3} eV i méně).¹⁸

• Oblasti H II

Svítící oblasti ionizovaného mezihvězdného vodíku s charakteristickou teplotou 8000 K se označují jako oblasti H II. Tyto emisní mlhoviny, kterých je v naší Galaxii několik tisíc, náležejí k nejatraktivnějším objektům na obloze.

Jednou z nejznámějších je M 42. Mlhovina je částí komplexu Orion A vzdáleného cca 450 pc, jež též zahrnuje obří molekulový oblak a hvězdokupu s velmi mladými hvězdami (hvězdokupa Trapez). První kandidáti na tzv. protohvězdy byli nalezeni rovněž právě zde.

Pokud je žhavá hvězda, jež vysílá krátkovlnné ionizující záření obklopena mezihvězdným (převážně vodíkovým) plynem, pak je toto záření dříve nebo později tímto plynem pohlceno. Plyn je v tomto oboru velice málo průhledný. Energie pohlcených kvant záření se vynaloží především na fotoionizaci atomů a k ohřátí plynu. Ionizované atomy pak opět rekombinují s volnými elektrony, přičemž jsou vyzářovány fotony i delších vlnových délek, pro něž už je mezihvězdný plyn průhledný (V, IR i rádio) – tyto fotony mohou

¹⁸ Při hustotách srovnatelných s hustotami hvězdných fotosfér tyto přechody nepozorujeme, protože efektivní rozměry takto nabuzených atomů jsou už téměř makroskopické a každá nepružná srážka s jiným atomem jej nutně buď ionizuje nebo srazí do základního stavu. Uvážíme-li, že v klasickém přiblížení (Bohrův model atomu) je energie elektronu nepřímo úměrná efektivnímu poloměru jeho dráhy $1/a$ a tato energie je úměrná $1/n^2$, kde n je hlavní kvantové číslo, pak platí pro poloměr dráhy $a(n) = a_0 n^2$, kde a_0 je Bohrův poloměr základní dráhy $5,25 \cdot 10^{-11}$ m. Stejné hladině pak odpovídá velikost $5,25 \cdot 10^{-7}$ m. Srážky by při standardních hustotách byly velice časté, vždyť jeho účinný průřez stonásobně převyšuje účinný průřez atomu vodíku v základní hladině. Přechody mezi vysokými energetickými hladinami jsou tak výsadou jen velice řídkého, avšak dostatečně nabuzeného plynu charakteristického pro oblasti ionizovaného vodíku.

toto prostředí opustit. Prostřednictvím mezihvězdného plynu tu dochází k transformaci neviditelného UV záření na viditelné záření. (Někdy mohou být H II oblasti ionizovány též díky rázové vlně či RTG.)

Vzhledem k tomu, že mezihvězdný plyn nemá žádné vlastní zdroje energie, musí platit, že v ustáleném stavu bude celkový zářivý výkon oblasti H II roven ultrafialovému výkonu budící hvězdy L_{uv} v oblasti vlnových délek menších než 91,2 nm.¹⁹ Tento výkon ovšem velmi citlivě závisí na teplotě hvězdy, což je též příčinou toho, proč oblasti H II pozorujeme takřka výhradně v okolí velmi hmotných hvězd spektrální třídy O a raných typů třídy B. V bezprostřední blízkosti žhavých hvězd panuje natolik vysoká teplota, že se veškerý mezihvězdný prach vypaří a v okolí hvězd se tak setkáváme jen s horkým plynem, v němž jednoznačně převládá vodík.

Ionizace vodíku v H II oblastech: Počet rekombinací za jednotku času v jednotkovém objemu je úměrný počtu volných elektronů v tomto objemu násobenému počtem ionizovaných atomů. Jelikož v plně ionizovaném vodíkovém prostředí se počet iontů rovná počtu elektronů, je počet rekombinací úměrný $N_e^2 = N_i N_e$. B.Strömgren dle tohoto principu dospěl k závěru, že intenzita H_α emise v každé části mlhoviny musí být úměrná integrálu $\int N_e^2 dr = \int N_i^2 dr$, který se nazývá **míra emise**. Z měření hodnot tohoto integrálu lze odhadnout hustotu volných elektronů v H II oblastech. Ukazuje se, že střední počet volných elektronů na cm^3 v slabě svítících mlhovinách je zhruba 10, v jasných mlhovinách je $\geq 10^4$. To znamená, že v oblastech ionizovaného mezihvězdného plynu je počet volných elektronů zhruba stejný jako počet atomů, tj. prakticky veškerý vodík je ionizován. Lze též odhadnout elektronovou teplotu v H II oblastech, cca 10^4 K, která je ostatně i mírou teploty plynu v těchto oblastech.

Volný elektron ale nemusí být zachycen iontem – může být pouze změněna jeho rychlost a směr pohybu. Pak jde o volně-volný přechod, jenž má za následek emisi spojitého záření, které je nesmírně slabé v optickém oboru spektra, ale znatelné v cm/dm vlnách.

Největší a nejjasnější oblasti H II představují z hlediska svého světelného výkonu v Galaxii absolutní špičku. Co do absolutní jasnosti mohou soupeřit i s otevřenými hvězdokupami. I když je většina jejich viditelného záření soustředěna do několika emisních čar, celkový výkon, který je zde vyzářen odpovídá zářivému výkonu desítek tisíc Sluncí. Jsou nepřehlédnutelné i pokud se týká jejich velikosti – dosahují rozměru až 1000 světelných let, ovšem typicky jsou jejich rozměry menší – cca 50 světelných let. Oblasti H II v sobě zahrnují plyn o celkové hmotnosti od 1 do 1000 hmotností Slunce. Nežádá se setkáváme se situací, že hmotnost budící hvězdy je menší než hmotnost oblasti H II, která ji obklopuje. Po chemické stránce se oblasti H II skládají převážně z vodíku, významně je v nich však obsaženo také helium, v menší míře pak uhlík, dusík a kyslík.

Tvary oblastí H II bývají občas dosti bizarní, vše zde záleží na rozložení hustoty a teploty v plynu, který žhavé hvězdy obklopuje. Pokud je okolohvězdné prostředí homogenní, pak nás nepřekvapí, že oblast ionizovaného materiálu má tvar koule. Poloměr koule R_S , nazývaný **Strömgrenovým poloměrem** (kde je rovnováha mezi ionizací a rekombinací) bude nepochybně záviset na počtu ionizujících fotonů, které hvězda vyše za jednotku času N_{UV} (tj. obecně na zářivém výkonu v UV oblasti) a též na koncentraci vodíkových atomů v okolí n_H . Čím vyšší tato koncentrace bude, tím dříve se ionizující fotony spotřebují a dosah ultrafialového záření vycházejícího z hvězdy bude menší. U hvězd s velkou zářivostí může být S.p. až několik desítek ly.

¹⁹ Pokud zářící mlhovina pohltí téměř všechno UV záření, pak z intenzity čar Balmerovy série (hlavně H_α) lze získat teplotu dané hvězdy – integrál Planckovy křivky v UV oblasti pro teplotu černého tělesa rovnou teplotě hvězdy musí být úměrný energii vyzářené mlhoviny v H_α .

Krátce po objevu existence rozsáhlých oblastí mezihvězdného vodíku v Galaxii, v roce 1939 astronom Bengt Strömngren ukázal, že poloměr R_S oblasti H II uspokojivě vyhovuje vztahu:

$$R_S = \sqrt[3]{L_{UV} n_H^{-2}}.$$

K výše uvedenému vztahu lze dojít i touto úvahou: V ustáleném stavu si bude v rámci celé Strömngrenovy zóny roven počet ionizujících fotonů a počet kaskádních rekombinací²⁰ za sekundu. Počet rekombinací k nimž dojde v objemové jednotce za 1 sekundu bude úměrný součinu koncentrace elektronů a protonů. V případě zcela ionizovaného vodíkového plynu pak bude úměrný koncentraci vodíkových atomů na druhou: n_H^2 . Počet rekombinací v celém objemu N_{rek} bude pak úměrný $n_H^2 R_S^3$ a tok ionizujících fotonů zase bude úměrný ultrafialovému zářivému výkonu L_{UV} , tj. QED.

• Planetární mlhoviny

Velmi podobně jako oblasti ionizovaného vodíku se chovají i tzv. planetární mlhoviny, které představují krátkodobou epizodu (cca $5 \cdot 10^4$ let) ve vývoji hvězd sluneční hmotnosti. Planetární mlhoviny jsou odvrženými plynnými obálkami hvězd o poloměru cca 0,1 pc, hmotností typicky 0,5 M a zářivým výkonem až 100 Sluncí, střední hustotou $10^9 - 10^{10}$ částic/m³. Planetární mlhoviny se zvolna rozpínají, a to rychlostí cca 20 km/s.

K záření jsou planetární mlhoviny buzeny centrálním elektronově degenerovaným zbytkem hvězdy o teplotě 10^4 až 10^5 K, který září v ultrafialovém oboru elektromagnetického záření. Viditelné záření planetárních mlhovin je tak rovněž výsledkem transformace ionizujícího záření budící hvězdy.

Ve spektru těchto mlhovin najdeme kromě emisních čar Balmerovy série četné emisní čáry zakázaných přechodů silně ionizovaných atomů [O II], [O III], [Ne III].²¹

V současnosti známe v naší Galaxii přes tisíc planetárních mlhovin, je však možné, že jsme jich určitý počet přehlédli v důsledku mezihvězdné extinkce.

• Koronální plyn

Kromě neutrálního a poměrně chladného plynu s teplotou několika desítek K, plynu ionizovaného, nacházejícího se v blízkosti horkých hvězd, s typickou teplotou 8000 kelvinů, se v mezihvězdném prostoru ještě setkáváme s nesmírně řídkým (cca 10^3 částic/m³) a velmi horkým plynem ($5 \cdot 10^5$ K až 10^6 K), který se svými vlastnostmi podobá vlastnostem látky v koronách hvězd – proto se též někdy označuje jako koronální plyn. Vzhledem ke své teplotě se projevuje zejména v krátkovlnném oboru spektra. Družice s detektory pro ultrafialové záření odhalily ve spektrech hvězd absorpční interstelární čáry vysoce ionizovaných prvků, jako např. pětikrát ionizovaného kyslíku. Pomocí RTG družic bylo registrováno rozptýlené měkké RTG záření pocházející z oblaků koronálního plynu.

Dvorními dodavateli tohoto velmi horkého plynu jsou patrně supernovy, které při svých vzplanutích do kosmického prostoru velkou rychlostí vyvrhují množství částic s vysokou energií. Pohyb vesměs ionizovaných atomů a elektronů je silně ovlivňován magnetickým polem Galaxie, v němž jsou tyto elektricky vodivé struktury natrvalo uvězněny.

²⁰ Myšleno tím takových rekombinací, při nichž jsou vyslány dva a více fotonů s energiemi menšími než 13,6 eV.

²¹ Vzhledu spektra se užívá při konstrukci speciálních filtrů užívaných pro hledání těchto emisních mlhovin, které jsou propustné jen v úzkém oboru viditelného spektra, kde se vyskytují emisní čáry charakteristické pro záření planetárních mlhovin.

Vzhledem k tomu, že mechanismy ochlazování takto horkého plynu jsou dosti neúčinné, podržuje si koronální plyn svou vysokou teplotu po řadu miliard let.

Zdá se, že nejen mezihvězdný, ale i mezigalaktický prostor je oblastmi horkého plynu doslova prostoupen.

Zbytky po supernovách – zvláštním typem plynných objektů jsou zbytky svrchních vrstev hvězd odhozených v minulosti při explozi tzv. supernov. Na první pohled se tyto objekty podobají planetárním mlhovinám, liší se však od nich nejméně ve třech zásadních ohledech:

1. Hmotnost odvrženého plynu bývá mnohem větší – odmrštěna zde bývá větší část hmoty vybuchnuvší hvězdy.
2. Rychlosti expanze dosahují i několika tisíc km/s a převyšují tak alespoň o dva řády rychlosti rozpínání planetárních mlhovin.
3. Díky rychlému rozpínání se zbytky po supernovách rozplývají a mizí o řád rychleji než planetární mlhoviny.

Po explozi supernovy, kdy je do prostoru velkou rychlostí vymrštěno obrovské množství látky se oblast výbuchu rychle šíří prostorem. Spolu s explodující hmotou expanduje i magnetické pole. Vše se děje vysoce nadzvukovou rychlostí, takže na čele expandující obálky vzniká mohutná rázová vlna. Ta se tvrdě střetává s okolní mezihvězdnou látkou, kterou uvádí do pohybu a zahřívá na teplotu několika milionů K. V místech střetu pak pozorujeme měkké rentgenové záření. Zahřátá látka pak v podobě horkého a řídkého koronálního plynu pozvolna chladne a pak se stává opět běžnou součástí mezihvězdné látky, z níž může povstat nové pokolení hvězd.

Vlastní obálka září nejvíce v důsledku synchrotronového záření volných elektronů, které vykonávají spirálovitý pohyb kolem siločar magnetického pole vmrzlého do nabitého plazmatu expandující obálky. Nejsilnější synchrotronové záření je pozorováno v tzv. filamentech, jejich vzhled diktuje lokální magnetické pole. Z hlediska vzhledu i energetiky rozeznáváme dva typy zbytků po supernovách – tzv. plné zbytky, čili pleriony. Zástupcem plerionů je známá Krabí mlhovina (M1), jež vznikla explozí supernovy typu II, jejíž výbuch jsme pozorovali v roce 1054. Vyznačují se tím, že mají nepravidelný tvar, obsahují látku i uvnitř a jejich zářivý výkon takřka výhradně zajišťuje aktivní pulzar, který je uvnitř mlhoviny. Zřejmě jde o pozůstatky po výbuchu supernov typu II a I b.

Častěji se však setkáváme s jiným, tzv. klasickým typem zbytků, které mají zhruba sférický tvar a z prostorového hlediska představují jakousi bublinu vyplněnou nesmírně zředěným žhavým plynem. Příkladem tu mohou být zbytky po supernovách z roku 1572 (Tychonova), a z roku 1604 (Keplerova). Zbytky nejsou tak nápadné – jejich výlučným zdrojem energie je pouze kinetická energie exploze.

Dynamika obálek supernov a jejich interakce s okolním mezihvězdným prostředím je důležitá přinejmenším ze dvou důvodů: (1) nepružné srážky expandujících obálek supernov (tj. průchod rázové vlny) s chladnými obřími molekulovými oblaky mohou představovat významný „spouštěcí“ mechanismus pro vznik nových hvězd, (2) v obálkách supernov je do galaktického prostoru vynášeno množství těžších prvků, z nichž většina vznikla v krátkém, ale velice bouřlivé údobí na konci jaderného vývoje v nitru vybuchnuvších hvězd.

• Shrnutí

Jednotlivým formám ISM se též říká fáze:

1) velmi horký koronální plyn, ionizovaný (SNR+hvězdný vítr) = Hot Ionized Medium; $T = 10^6$ K, $n = 10^{-3}$ cm⁻³, $f = 65\%$ (filling factor, udává podíl v Galaktickém objemu), podíl hmotnosti IS plynu $< 0,1\%$

2) horký ionizovaný plyn, hlavně H II oblasti kolem O, B hvězd = Warm Ionized Medium; $T = 8000 - 10000$ K, $n = 0,5$ cm⁻³, $f = 10 - 15\%$, podíl hmotnosti cca 1%

3) teplý částečně ionizovaný plyn = Warm Neutral Med.; $T = 6000$ K, $n = 0,3$ cm⁻³, $f = 20 - 30\%$, podíl hmotnosti IS plynu cca 20% (není přesně známo co tuto fázi zahřívá)

4) chladná oblaka, hlavně H I oblasti = Cold Neutral Med.; $T = 80 - 100$ K, $n = 20$ cm⁻³, $f = 2 - 4\%$, podíl hmotnosti IS plynu cca 25%

5) velmi chladný molekul. plyn, H₂, CO = Molecular M.; $T = 10 - 20$ K, $n = > 10^3$ cm⁻³, $f = < 1\%$, podíl hmotnosti IS plynu cca 45%

§ Dodatky – viriál, relaxační čas, fce ohřevu/ochlazování

Kolaps jednotlivého oblaku/fragmentu souvisí s **větou o viriálu** (R.J.E. Clausius, 1851), jež má mnohá použití – odhad hmotnosti hvězdokup, galaxií, kup galaxií, při gravitačním kolapsu objektu, tvoreni hvězd ... Určuje střední hodnotu kinetické energie obsažené v systému z tvaru energie potenciální.

Ukázkový příklad: Je-li soustava izolována, ustaví se po delší době rovnováha – střední energie. Existují střední hodnoty –
– časová: – přes soubor/prostorová:

$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \qquad \bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n$$

Navíc platí ergodický teorém (nedá se dokázat) $\bar{A} = \langle A \rangle$. Budeme-li tedy mít problém 2 těles, $m \ll M$, bude $\langle E_k \rangle = E_k$, $\langle E_p \rangle = E_p$. Pro pohyb m okolo M platí $F_{\text{dostř.}} = F_{\text{grav.}}$:

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \quad \rightarrow \quad 2 \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{mM}{R} = 0$$

$$2E_k + E_p = 0$$

Tj. dostáváme **větu o viriálu**

$$2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0.$$

Viriál systému je obecně definován jako záporně vzatý poloviční součet skalárních součinů síly (působící na částici či hvězdu) a průvodiče částice (sečteny jsou pak všechny částice, hvězdy či galaxie izolovaného systému). Viriál hvězdokupy či kupy galaxií umožňuje vypočítat jejich hmotnost (tj. ze vztahu $2.M\bar{v}^2/2 - GM^2/R = 0$) – viriálová hmotnost

$$M_{VT} = v^2 R / G,$$

kde v^2 je průměrný čtverec rychlosti všech hvězd či galaxií systému, R je poloměr systému. (Rychlosti lze zjistit z dopplera, průměr se počítá z úhlového průměru a vzdálenosti objektu.) Viriálová hmotnost hvězdokup je o řád větší než odpovídá zářivé hmotě.

Odtud lze též odhadnout **stabilitu hvězdokup** apod. Úniková rychlost z hvězdokupy je dvojnásobek průměrné rychlosti, tj. $2(GM/R)^{1/2}$. Protože se hvězda pohybuje ve hvězdokupě sem a tam pod vlivem gravitačních sil ostatních hvězd, může dosáhnout rychlosti únikové. Jestliže je hvězdokupa v rovnovážném stavu, pak to znamená rovnovážné rozdělení kinetické energie mezi jednotlivými hvězdami, tj. $m_1 v_1^2 / 2 = m_2 v_2^2 / 2 = \dots = m_i v_i^2 / 2$. Znamená to, že hmotnější hvězda se pohybuje pomaleji než hvězda méně hmotná. Jakmile je tato rovnováha narušena, je zapotřebí určitého času, aby opět nastala – **relaxační čas**. Porucha může nastat pokud nějaká hvězda unikne z hvězdokupy. Poté se musí hvězdokupa poněkud smrštít, aby se vyrovnala se sníženou kinetickou energií, tj. musí snížit potenciální energii. Relaxační čas je též jistým měřítkem možné existence hvězdokupy. Obecně platí, že čím větší je poloměr hvězdokupy a čím větší je počet hvězd v ní, tím delší je relaxační čas. Definice relaxačního času je následující: hvězdy si mezi sebou vyměňují vzájemnými setkáními kinetickou energii ΔE_k ; množství vyměněné energie (vlastně změna energie jednotlivé hvězdy) je závislé na čase a je to součet čtverců všech změn za interval Δt ; jestliže součet čtverců změny energie je $\Sigma \Delta E_k^2$, pak relaxační čas je definován

$$T_{rel} = \Delta t \frac{E_k^2}{\Sigma \Delta E_k^2},$$

tedy $T_{rel} = \Delta t$, jestliže $\Sigma \Delta E_k^2 = E_k^2$. Relaxační čas je doba nutná k tomu, aby součet všech změn kinetické energie, které postihnou jednotlivé hvězdy, se rovnal jejich původní kinetické energii. Pro ideální případ

teoretické soustavy, na kterou nepůsobí gravitační pole Galaxie, byly odvozeny teoretické vztahy, ze kterých plyne relaxační čas pro typickou kulovou hvězdokupu cca 10^{10} let, pro otevřenou hvězdokupu pak cca a few. 10^7 . Tj. otevřené hvězdokupy jsou útvary s relativně krátkou životností, jako staré se mohou zachovat pouze kulové hvězdokupy.

Viriál systému lze použít i pro prahvězdu, neboť ji můžeme považovat za systém obrovského množství atomů vázaných v jedno těleso gravitací. V prahvězdě jsou obě energie dány viriálovým teorémem:

- tepelná = celková kinetická energie všech atomů
- potenciální gravitační energie všech atomů

Platí tedy $2E_k = U$, tj. teplo prahvězdy se rovná poloviční gravitační energii. Pokud Δ je vyzářená energie, pak pro kolabující a zářící objekt dostaneme:

$$\text{– před vyzářením: } E_p + E_k = E \quad \text{a zároveň} \quad 2E_k + E_p = 0$$

$$\text{– po vyzářením: } E'_p + E'_k = E - \Delta \quad \text{a zároveň} \quad 2E'_k + E'_p = 0$$

Označíme $E_p - E'_p = \Delta E_p$, $E_k - E'_k = \Delta E_k$, tj. $\Delta E_p + \Delta E_k = \Delta$. Odečtením v.t. před a po dostaneme $\Delta E_p + 2\Delta E_k = 0$. Dohromady tak získáváme

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2}\Delta E_p, \quad \Delta = \frac{1}{2}\Delta E_p.$$

Tj. oblak se smrští, polovina uvolněné potenciální energie se vyzáří, polovina jde do vnitřní energie \rightarrow kolaps oblaku může probíhat jen tak rychle, jak rychle se oblak dokáže zbavovat energie vyzářováním!!! Tj. budeme-li mít čistě vodíkový oblak, který nemůže moc zářit, kolaps pomalý. Přidáme-li ochlazovač (C), který září, bude kolaps probíhat rychleji, přidáme-li prach (spojité spektrum), dojde k ještě rychlejšímu kolapsu. Nejlépe tedy mohou kolabovat mračna prachoplynná!!!

Pro mezihvězdnou hmotu se definují dvě funkce – **funkce ohřevu** (heating function, Γ) a **funkce ochlazování** (cooling function, Λ) ... plyn sám může vyzářovat v čarách nebo ve spojitém spektru, prach má samozřejmě spojitě spektrum. Pro ISM (interstellar medium) v dlouhodobé rovnováze musí platit

$$\Gamma_{\text{radiační}} + \Gamma_{\text{kolizní plyn}} + \Gamma_{\text{kolizní plyn-prach}} = \Lambda$$

Odhad teploty oblaku z Dopplerovského rozšíření čáry: za předpokladu Maxwellovského rozdělení rychlostí platí $m_H \bar{v}^2/2 = 3kT/2$, tj. $\bar{v} = \sqrt{3kT/m_H}$; dosadíme-li do vzorce pro dopplerův posuv $\Delta\lambda/\lambda = v_r/c$, zjistíme, že $T \sim \Delta\lambda^2/\lambda^2$.

Literatura a zdroje

- Mikulášek Z., Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav, Skripta kurzu, PřF MU, Brno 2000 (převážná většina této kapitoly doslova převzata z tohoto zdroje ...)
- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002
- Příhoda P., Průvodce astronomií, HaP Praha, 2000
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Astrofyzika I, Doc. RNDr. Martin Šolc, CSc., 2003

11.2 Galaktická a extragalaktická astronomie

Slunce, okem viditelné hvězdy i naprostá většina hvězd viditelných dalekohledem, spolu s mezihvězdnou látkou a skrytou hmotou, která se projevuje jen gravitačně, vytváří komplexní, bohatě strukturovaný a vysoce organizovaný gravitačně vázaný systém nazývaný (naše) Galaxie.²²

Hvězdy, jako nejnápadnější složka Galaxie, nejsou na pozemské obloze rozloženy rovnoměrně. V jistých směrech jich pozorujeme zřetelně více, než v jiných. Viditelně se koncentrují podél jisté hlavní kružnice, která s rovinou nebeského rovníku svírá úhel $62,6^\circ$. Útvary složenému z množství jednotlivých i nerozlišených hvězd slitých do jednoho stříbritého pásu se říká Mléčná dráha. Struktura pásu je nepravidelná; pozorujeme zde nejrůznější rozdvojení, přerušování, mosty i temné díry, které jsou důsledkem extinkce světla vzdálených hvězd prachovými oblaky mezihvězdné látky.

Fakt, že osou Mléčné dráhy je hlavní kružnice, nasvědčuje tomu:

a) že hvězdy i mezihvězdná látka se v Galaxii koncentrují poblíž jisté základní roviny, které říkáme rovina Galaxie

b) že i samo Slunce se nachází v bezprostřední blízkosti této roviny.

Ve starověku ani ve středověku neměli ještě pozorovatelé noční oblohy problémy se světelným znečištěním, a proto mlhavý pás Mléčné dráhy nemohl uniknout jejich pozornosti. Většina kulturních národů se snažila najít pro Mléčnou dráhu vysvětlení, a činila tak po svém – formou bájí, či spekulací.

Mezi naivními spekulacemi starověkých učenců však lze najít i názor Démokritův, který už před 24 stoletími tvrdil, že Mléčná dráha je seskupením velkého počtu hvězd, jejichž světlo se slévá dohromady, takže vidíme souvislý světlý pás obtáčeující celé nebe. Tento názor si na své potvrzení musel počkat až do roku 1609, kdy na Mléčnou dráhu namířil svůj primitivní dalekohled astronom a fyzik Galileo Galilei.

S prvním vědeckým výkladem příčin pozorovaného rozložení hvězd na obloze a fenoménu Mléčné dráhy přišel švédský filozof Emanuel Swedenborg, po něm též Immanuel Kant a Thomas Wright (2. pol. 18. stol.), kteří shodně tvrdili, že žijeme uvnitř rozsáhlého hvězdného systému diskového tvaru, přičemž Slunce i se sluneční soustavou leží poblíž roviny tohoto disku. Kant si též povšiml toho, že část mlhovin na obloze má rovněž diskovitý tvar, z čehož usoudil, že by mohlo jít o vzdálené „hvězdné ostrovy“.

První model Galaxie založený na pozorování sestavil v osmdesátých letech 18. století zakladatel hvězdné astronomie William Herschel. Hrubou prostorovou mapu Galaxie zkonstruoval na základě součtu počtů hvězd v 683 vybraných oblastech nebe. Při rozboru dat přitom vycházel z několika, tehdy přijatelných předpokladů:

a) všechny hvězdy mají přibližně stejnou hvězdnou velikost,

b) prostorová hustota hvězd v rámci Galaxie je zhruba stejně veliká,

c) neexistuje mezihvězdná extinkce, která by světlo hvězd zeslabovala,

d) je schopný svým dalekohledem dohlédnout až k okrajům Galaxie.

Na základě rozboru svých pozorování pak dospěl Herschel k náhledu, že Galaxie představuje soustavu se zploštěním zhruba 1:5, přičemž Slunce se nalézá v bezprostřední blízkosti jejího středu. I když lze mít ke všem výše uvedeným předpokladům vážné výhrady, nezdálo se, že by Herschlovu metodu nebylo možné v patřičně zdokonalené formě znovu využít.

Úkolu se počátkem 20. století ujal precizní holandský astronom Jacobus Cornelius Kapteyn, který již znal absolutní hvězdné velikosti různých typů hvězd a byl tak schopný

²² Z řeckého *Gallaxia hodos* = Mléčná dráha.

určovat i absolutní rozměry naší hvězdné soustavy. Tzv. **Kapteynův vesmír**, jak byl všeobecně jeho model Galaxie nazýván, představoval soustavu zploštělých sféroidů s postupně klesající hustotou hvězd a v zásadě se Herschelově modelu v mnoha rysech podobal. (Kapteyn studoval vlastní pohyby velkého počtu hvězd; zjistil [1904], že hvězdy se nepohybují náhodně jako třeba molekuly plynu, ale že se dají identifikovat 2 „hvězdné proudy“²³ [zhruba k centru galaxie a do směru opačného] – dnes vysvětlováno rotací Galaxie.) Hranice Galaxie Kapteyn položil do míst, kde prostorová hustota hvězd poklesla pod 1% hustoty centrální; disk Galaxie pak měl rozměry 8500 pc x 1700 pc.

Slunce se i zde vyskytovalo poblíž středu soustavy: 38 pc severně nad rovinou Galaxie a pouhých 650 pc od zjištěného centra. To jistě bylo poněkud podezřelé a Kapteyn si proto kladl otázku: Jak je možné, že jinak nepříliš význačné Slunce se nachází tak blízko centra hvězdného systému. Tušil, že by v této záležitosti mohla sehrát významnou zkreslující roli mezihvězdná extinkce, nicméně v té době to byla záležitost více než hypotetická.

Koncepce Galaxie se Sluncem uprostřed, tvrdošíjně přetrvávající od dob Herschelových, byla zpochybněna až v roce 1918, kdy se americkému astronomovi Harlowu Shapleyovi podařilo pomocí pulzujících proměnných hvězd typu RR Lyrae a W Virginis změřit vzdálenosti 93 kulových hvězdokup.²⁴

Harlow Shapley učinil, jak později sám přiznal, „troufalý a ukvapený předpoklad“, že systém kulových hvězdokup vytváří něco jako kostru Galaxie, jejíž střed pak souhlasí s centrem celé hvězdné soustavy. Dospěl tak k závěru, že centrum Galaxie leží ve směru souhvězdí Střelce ve vzdálenosti 15 kpc.²⁵ Z faktu, že nejvzdálenější kulová hvězdokupa je vzdálená 70 kpc od Slunce a 55 kpc od centra, usoudil, že průměr Galaxie činí cca 100 kpc, přičemž Slunce se nachází zhruba v jedné třetině vzdálenosti mezi centrem a okrajem systému. Proti sobě se tak postavil Kapteynův model se Sluncem uprostřed o průměru cca 8500 pc a Shapleyův model o průměru desetinásobném, s výstředně umístěným Sluncem.

Souběžně se vyhroutil spor o to, zda je naše hvězdná soustava - Galaxie - ve vesmíru jediná (zahrnuje v sobě celý vesmír) nebo zda existují i jiné, srovnatelné „hvězdné ostrovy“.

V roce 1920 došlo k tzv. **Velké debatě** o rozměrech naší Galaxie a povaze spirálních mlhovin, jejímiž hlavními protagonisty byli Harlow Shapley a americký astronom Heber Doust Curtis. Curtis sám přitom dával přednost kratší škále vesmírných vzdáleností a obhajoval Kapteynův model Galaxie s průměrem cca 8,5 kpc. Jako uznávaný odborník na spirální mlhoviny ovšem věřil, že tyto objekty jsou vzdálenými soustavami složenými

²³ Pohyby hvězd směřují k jistému bodu na obloze, a to v důsledku pohybu Slunce. Hvězdy se tak zdánlivě rozestupují z úběžného bodu – *apexu* (v Her), a směřují do druhého úběžného bodu na opačné straně – *antapexu*. Výsledný vlastní pohyb hvězdy se tak skládá ze zdánlivého pohybu hvězdy, který by hvězdy jevila pouze pod vlivem slunečního pohybu vzhledem k okolním hvězdám, a který směřuje k antapexu, a ze skutečného vlastního pohybu hvězd, který by bylo možno pozorovat, kdyby se Slunce k ostatním hvězdám nepohybovalo. Tyto skutečné vlastní (též nazývané pekuliární) pohyby nejsou náhodné, ale tvoří dvě skupiny, dva proudy ... Je zde ovšem značný rozptyl kolem směru, ve kterém pekuliární pohyby hvězd převažují. Také ne všechny hvězdy se účastní tohoto proudění. Hmotné a teplé hvězdy spektrální třídy B mají skutečné vlastní pohyby celkem náhodně rozloženy ve všech směrech ...

²⁴ Tyto obří hvězdné soustavy jsou totiž po hvězdné obloze rozloženy krajně nerovnoměrně. Takřka všechny se totiž nacházejí pouze v jedné polovině nebeské sféry a plná třetina z nich je pak k nalezení pouze v jediném ze souhvězdí - souhvězdí Střelce, tam kde je Mléčná dráha nejzářivější. V prostoru vytváří systém kulových hvězdokup sféricky symetrický systém s výraznou koncentrací směrem ke středu.

²⁵ Ke zhruba dvojnásobným rozměrům Galaxie Shapley došel z toho důvodu, že pro určení vzdáleností kulových hvězdokup používal pulzující proměnné hvězdy typu RR Lyrae a W Virginis. Těmto proměnným hvězdám přisoudil zhruba čtyřikrát větší jasnost, než mají ve skutečnosti. Tím se v jeho modelu Galaxie všechny vzdálenosti dvojnásobně zvětšily.

z milionů hvězd. Shapley byl v těchto dvou bodech opačného názoru: Galaxie je nejméně o řád větší a představuje celý vesmír.

Řešení přinesla až další měření a nová interpretace pozorovaných skutečností. Definitivní průlom znamenal objev Edwina Hubblea, jemuž se v roce 1923 podařilo 2,5 m reflektorem na Mt. Wilsonu na jednotlivé hvězdy rozlišit okraje nejbližších galaxií. Tyto hvězdy zde byly mnohem slabší, než se očekávalo. Spolehlivější odhad vzdálenosti soustavy získal o rok později, kdy mezi hvězdami našel též cefeidy, hvězdy, u nichž existuje velmi spolehlivý vztah mezi jejich absolutní hvězdnou velikostí a periodou. Galaxie se rázem odstěhovaly do vzdáleností několika stovek kpc a vyšších.

U galaxie M 31 Hubble došel k hodnotě vzdálenosti 285 kpc, což je 2,7krát méně než její skutečná vzdálenost. Ale i ona silně podceněná hodnota, více než bohatě postačila k tomu, aby se M 31 definitivně stala samostatným hvězdným ostrovem.

Náhly přerod našich představ o vesmíru a povaze spirálních mlhovin dovršil v roce 1927 Holanďan Jan Hendrik Oort, jenž objevil rotaci Galaxie. Na základě studia vzájemných pohybů Slunce a okolních hvězd dospěl k závěru, že hvězdy se pohybují zhruba po soustředných kružnicích, přičemž střed otáčení leží v souhvězdí Střelce. Ten však našel o mnoho blíže než Shapley – ve vzdálenosti asi 9 000 pc a přiblížil se tak k dnešnímu odhadu – 8 500 pc. Bitva o správný pohled na naši Galaxii byla dobojována.

Akurátní a všestranně připravený průzkum vedený Kapteynem selhal proto, že se při něm neuvažoval vliv mezihvězdné extinkce. Její existence ovšem byla prokázána až po Kapteynově smrti. Podotkneme ovšem, že relativně vítězný Shapley vliv extinkce rovněž nezapočítal. To že uspěl, bylo dáno tím, že vsadil na šťastnou kartu. Kulové hvězdokupy se totiž zpravidla vyskytují dosti daleko od zaprášené roviny Galaxie a jejich světlo tak není extinkcí příliš dotčeno.

§ Morfologie Galaxie

● **Velikost a hmotnost:** Naše Galaxie má skutečně tvar zploštělého disku. Slunce leží poblíž galaktické roviny, zhruba v jedné třetině mezi středem a okrajem soustavy. Střed Galaxie (přesněji určen až radioastronomicky) leží ve směru udaném rovníkovými souřadnicemi (ekvinokcium 1950) $\alpha = 17^h 42^m 29,3^s \pm 0,2^s$, $\delta = -28^\circ 59' 18'' \pm 3''$. Vzdálenost Slunce od centra se dnes nejčastěji kloní k hodnotě $R_0 = (8,0 \pm 0,5)$ kpc. Plný průměr galaktického disku tvořeného prachem, plynem a hvězdami je zhruba 50 kpc. Mnohem závažnější ovšem je naše nejistota v odhadu celkové hmotnosti soustavy. Ještě koncem 60. let 20. století se zdálo, že hmotnost Galaxie velice dobře souhlasí s celkovou hmotností hvězd a mezihvězdné látky – tj. $2 \cdot 10^{11} M_\odot$. Nová měření pohybu vzdálených součástí Galaxie provedená v sedmdesátých letech však ukázala, že její celková hmotnost je až o řád větší. Většina hmoty Galaxie je uložena v temném halu, jehož rozměry mnohonásobně převyšují rozměry viditelné části soustavy.

Podobné temné halo obsahující v sobě většinu hmoty systému vlastní zřejmě většina galaxií. Povaha látky, jež se projevuje pouze svou gravitací je dosud nejasná.

● **Statistika hvězd v Galaxii:** Moderní metody sčítání hvězd v Galaxii ukazují, že celková hmotnost látky uložená ve hvězdách dosahuje přibližně 175 miliard Sluncí, počet hvězd se přitom odhaduje na 400 miliard. Celkový zářivý výkon hvězd v Galaxii činí 20 miliard L_\odot ($7,7 \cdot 10^{36}$ W). Celkově několik poznatků

a) V Galaxii s převahou převládají chladné trpasličí hvězdy hlavní posloupnosti (K, M) a bílí trpaslíci, kteří představují 89% hvězdné populace.

b) Tatáž trpasličí skupina obsahuje i většinu hmotnosti hvězdné složky galaxie – 73%.

c) Bílí trpaslíci jsou ve hvězdné populaci zastoupeny cca 9%, hmotnostně představují možná až 20%, k zářivému výkonu Galaxie nijak nepřispívají.

d) Převážnou část iluminace Galaxie, 83% jejího zářivého výkonu zajišťují zhruba rovným dílem 1.) obří zhruba sluneční hmotnosti a 2.) hvězdy horní části hlavní posloupnosti, hmotnější než Slunce. Nezanedbatelný přínos znamená i výkon hmotných veleobrů.

Uvedené závěry se ovšem týkají Galaxie jako celku, zastoupení vzpomínaných typů se v různých částech Galaxie výrazně liší, stejně jako se odlišují další charakteristiky galaktické hvězdné populace, jako jsou věk, chemické složení apod.

● **Hvězdné populace:** Ještě počátkem čtyřicátých let 20. století si astronomové nebyli vědomi žádných vzájemných souvislostí mezi věkem hvězd, jejich povrchovým chemickým složením, hmotností a kinematickými vlastnostmi. Byl to Walter Baade, který pomocí tehdy největšího dalekohledu světa – 2,5 m reflektoru na Mt. Wilsonu – odhalil existenci určitých vývojových rodin, či hvězdných generací, které se od sebe v řadě ohledů liší. Později se ukázalo, že existence těchto hvězdných populací je důsledkem složitého a komplexního vývoje galaktické soustavy, který začal před více než 12 miliardami let. Hvězdné populace jsou tedy skupiny podsystémů (souhrny objektů, jež mají stejné astrofyzikální vlastnosti [např. proměnné typu RR Lyrae, kulové hvězdokupy ...]).

V okolí Slunce převažují hvězdy **populace I**, patří k nim i naprostá většina hvězd, které vidíme na obloze. Příslušníci populace I v Galaxii tvoří zploštělý disk, v němž nacházíme i plochá spirální ramena obsahující ty nejzářivější hvězdy soustavy – hmotné a horké hvězdy, bohaté na kovy²⁶, patří sem mlhoviny, novy ... Mimo tento disk se hvězdy populace I prakticky nevyskytují, nenacházíme je ani v centrálních částech Galaxie. Naproti tomu objekty náležející k Baadeho **populaci II** lze v Galaxii najít všude, tedy i v disku či v samotných spirálách. Jsou typickými obyvateli eliptických galaxií a centrálních částí spirálních galaxií. Vykazují silnou koncentraci k centru galaxií, jejich výskyt směrem od centra velmi rychle klesá. Nejjasnějšími hvězdami této hvězdné populace jsou staří červení obří.

V padesátých letech, kdy začala získávat pevnější obrysy teorie hvězdného vývoje, se podařilo vysvětlit základní rozdíly mezi jednotlivými hvězdnými populacemi. Zatímco u hvězd populace I jsou nejjasnějšími hvězdami velice hmotné hvězdy s krátkou dobou života čítající jen miliony let, nejjasnějšími hvězdami populace II jsou červení obří či obří asymptotické větve hvězd o hmotnostech Slunce.

Rozvoj hvězdné spektroskopie umožnil dělení doplnit o další pozoruhodnou charakteristiku – o povrchové chemické složení. V roce 1959 H. Lawrence Helfer, George Wallerstein a Jesse L. Greenstein ukázali, že chemické složení obrů v kulových hvězdokupách se velice výrazně liší od objektů populace I, k nimž konečně patří i naše Slunce. Hvězdy populace II vykazují deseti až stonásobný deficit prvků těžších než helium. Zatímco pro hvězdy populace I je typické zastoupení $Z = 0,04$, u hvězd v kulových hvězdokupách činí hmotnostní podíl těchto těžších chemických prvků Z cca 0,003.

Odlišné rozložení hvězd obou populací v Galaxii je důsledkem jejich rozdílných kinematických vlastností. Hvězdy populace I se pohybují kolem centra Galaxie všechny v jednom směru po více či méně kruhových trajektoriích a navíc v přibližně stejné rovině, v tzv. rovině Galaxie. To je pak příčinou toho, proč všechny tyto jeví tak zjevnou koncentraci ke galaktické rovině. Naproti tomu hvězdy populace II, které se kolem centra pohybují po neuzavřených a velice výstředných drahách, se galaktické rotace takřka neúčastní. V Galaxii se pohybují víceméně stochasticky a vzhledem k spóřadane cirku-

²⁶obecně prvky těžší než He

lujícím hvězdám populace I vysokými relativními rychlostmi.

Vysvětlení rozdílného zastoupení těžších prvků souvisí se stářím hvězd. Hvězdy populace II patří mezi nejstarší hvězdy v Galaxii, které povstaly z mezihvězdné látky, která byla jen velice málo znečištěna produkty jaderného vývoje v centrech hvězd. V jejich nitrech vznikly těžší prvky, jež se pak v závěrečných bouřlivých fázích vývoje dostaly do mezihvězdného materiálu, z něhož posléze vznikly další generace hvězd – hvězd populace I. Naproti tomu hvězdy populace I vznikly z mezihvězdné látky, jež z větší části již prošla těly hvězd předchozích generací. Příslušníci Baadeho hvězdných populací se tedy od sebe liší v těchto třech základních ohledech:

- a) svou kinematikou, a tím i rozložením v Galaxii
- b) obsahem těžších prvků Z
- c) stářím.

Už koncem 50. let se ukázalo, že původní Baadeho dělení hvězd v galaxiích pouze do dvou populací je příliš hrubé a schématické. V reálných galaxiích se setkáváme jak s vyhraněnými představiteli obou populací, tak i s objekty s přechodnými i extrémními charakteristikami. V současnosti se proto hovoří o několika vzájemně se překrývajících hvězdných populacích, či subsystémech Galaxie, z nichž se celá soustava Galaxie sestává.

Nejčastěji se nyní setkáváme s rozdělením hvězdné populace Galaxie a podobných galaktických soustav na diskové a sféroidální hvězdné populace/složky (resp. plochou, diskovou a kulovou).

Pro příslušníky diskových populací, je charakteristický vyšší obsah těžších prvků a zjevná koncentrace k rovině Galaxie. Nejplošší je **nejmladší disk**, neboli disk **extrémní populace I**, k níž počítáme hvězdy nacházející se takřka výlučně ve spirálních ramenech; méně plochý je tzv. **tenký** nebo též **mladý** disk (též přechodná populace I). Nejvíce hvězd (cca 75 %) v Galaxii najdeme v ještě starším tzv. **středním (přechodném)** disku (též disková populace) a ve **starém (tlustém)** disku (též přechodná populace II), který volně přechází ve sféroidální galaktické **halo** (též halová extrémní populace II).

Hvězdy sféroidálních populací jeví vesměs silnou koncentraci k centru Galaxie a lze je zařadit mezi objekty klasické Baadeho populace II. Rozeznáváme zde hvězdnou populaci **galaktického hala** (sférické složky Galaxie), populaci **galaktické výdutě** („central bulge“ – centrální oblast Galaxie) a populaci **galaktického jádra**. Sféroidální hvězdné populace v sobě obsahují cca 20% hvězd v Galaxii.

V Galaxii obecně platí, že čím je dotyčná hvězdná populace mladší, tím větší má zastoupení těžších prvků a větší vazbu na galaktickou rovinu. Poznamenejme, že tato korelace neplatí ani v samotné Galaxii absolutně, že z tohoto pravidla by bylo možno najít řadu výjimek. Ještě více to platí pro jiné galaktické soustavy, kde obdobné korelace mezi polohou, stářím a chemickým složením nemusejí být vyjádřeny vůbec.

• **Galaktické halo**, nebo též sférická či kulová složka obsahuje ty nejstarší hvězdy populace II. Nejzářivějšími hvězdami zde jsou červení obři a obři asymptotické větve o hmotnostech menších než je hmotnost Slunce. Hmotnostně nejdůležitější složkou jsou červení trpaslíci ještě menší hmotnosti a množství chladnoucích bílých trpaslíků s velmi malým zářivým výkonem.²⁷ Představují vůbec nejstarší pozorované hvězdy v Galaxii, jež jsou složeny zřejmě z prvotního vodíku a hélia s nepatrnou příměsí těžších prvků:

²⁷ Ke kulové složce patří některé proměnné typu RR Lyrae. Mají stejnou absolutní velikost, jež nezávisí na periodě, tj. jde o dobré standardní svíčky. Klasifikace proměnné do typu RR Lyrae a změření střední zdánlivé velikosti stačí spolu s výpočtem absorpce k určení vzdálenosti.

$Z \sim (0,03 - 1)\%$.²⁸ Populace galaktického hala je vůbec nejstarší aktivní hvězdnou populací v Galaxii, její stáří se odhaduje na 10-13 miliard let.

Trajektorie objektů hala představují neuzavřené křivky (stáčeující se elipsy), jejich sklony ke galaktické rovině jsou nahodilé, i když není vyloučeno, že mírně preferován je ten směr oběhu, který odpovídá směru galaktické rotace. Nicméně, vzhledem k silné excentricitě trajektorií musí být výsledná rotace hala tak jako tak mnohem pomalejší než rotace objektů diskových složek. Sféroid galaktického hala je poněkud zploštělý. Rozložení objektů galaktického hala v Galaxii jeví výraznou sférickou symetrii, jejich koncentrace klesá úměrně $r^{-3,5}$. Ve vnitřních částech spojitě přechází do tzv. galaktické výdutě.

Nejvýraznějšími objekty galaktického hala jsou **kulové hvězdokupy** obsahující v sobě dnes ovšem jen malou část z celkového počtu hvězd galaktického hala.

V současnosti známe v naší Galaxii celkem 160 kulových hvězdokup, jejich skutečný počet asi nepřesáhne 200.²⁹ Kulové hvězdokupy vytvářejí v prostoru Galaxie mírně zploštělý sféroid s výraznou koncentrací objektů k jejímu centru, běžně je nacházíme i v galaktické výduti. V minulosti bylo těchto soustav řádově více, většina z nich nepřežila opakované průchody kolem galaktického centra.

Kulové hvězdokupy jsou velice zářivé objekty, jejich střední zářivý výkon odpovídá 25 tisícům Sluncí, výkon těch nejjasnějších hvězd je až padesátkrát větší než výkon Slunce. Hmotnosti kulových hvězdokup měřené z disperze rychlostí hvězd v soustavě se pohybují v rozmezí od 10^5 do 10^6 Sluncí. Hvězdokupy jsou dosti rozměrné, jejich průměr činí od 10 do 300 ly. Většina hvězdokup je silně koncentrována ke svému středu. V minulosti byl počet hvězd ve hvězdokupách větší, ty s rychlým pohybem z nich již unikly. Nyní jsou to soustavy nesmírně stabilní s poločasem rozpadu o několik řádů převyšujícím jejich stáří. Určení stáří kulových hvězdokup, které se provádí většinou pečlivým rozbořem jejich HR diagramů, je nesmírně důležitým údajem, neboť představuje dolní mez pro stáří vesmíru. (Mají charakteristický HRD – hlavní posloupnost postrádá hvězdy spektrálních tříd O, B i A. U hvězd třídy F se zřetelně odklání a bez přerušení pokračuje ostrým ohybem k červeným obrům. Mezeru mezi nimi a hlavní posloupností vyplňují podobři. Nejcharakterističtější je tzv. horizontální větev, jež je odsazena hvězdami RR Lyrae a dalšími s absolutní magnitudou 0. V HR digramu mladších hvězd horizontální větev chybí, hvězdy jí procházejí ale rychle a krátkou dobu, takže tam naopak vzniká mezera.) Charakteristická je přítomnost proměnných typu RR Lyrae („krátkoperodické cefeidy“), jež tvoří 90% proměnných hvězd v kulových hvězdokupách. Klasické cefeidy se zde nevyskytují, ale najdeme zde cefeidy typu W Vir, které jsou 3,6 krát méně svítivé než klasické cefeidy téže periody a mají jinou světelnou křivku (vztah perioda-svítivost značně složitější, nevhodné pro určování vzdáleností).

• **Galaktická výduť** (bulge), je další, hmotnostně nejdůležitější sféroidální složkou Galaxie. Odhaduje se, že celková hmotnost objektů výdutě činí $4 \cdot 10^{10} M_{\odot}$. Výduť je mírně zploštělá, její efektivní poloměr činí cca 2000 parseků. Valná většina hmoty dotyčné složky je soustředěna v množství nepříliš hmotných hvězd, které náležejí ke starší hvězdné

²⁸ Pozoruhodné ovšem je, že se ani u těch nejextrémnějších hvězd kulové složky nesetkáme s čistě vodíko-héliovými hvězdami – obsah kovů v těchto hvězdách je vždy nenulový. Tyto těžší prvky ovšem nemohly vzniknout jinde, než v nitrech předcházejících hvězdných generací. Proto se předpokládá, že na samotném úsvitu hvězdných dějin Galaxie se objevila 0. hvězdná generace (předzdivaná někdy jako populace III) tvořená velice hmotnými hvězdami, které během několika milionů let prošly celým hvězdným vývojem, při němž vzniklo ono základní množství těžších prvků, které se pak, zřejmě výbuchy supernov, dostaly do mezihvězdné látky, z níž pak vznikly hvězdy dnešního galaktického hala.

²⁹ V některých galaxiích pozorujeme řádově mnohem více k.h., příkladně v gigantické eliptické galaxii M 87 bylo nalezeno několik set tisíc (!) těchto hvězdných soustav.

populaci, kterou bychom mohli charakterizovat např. obsahem těžších prvků: $Z \sim 1\%$ a průměrným stářím hvězd kolem 10 miliard let. Tyto charakteristiky ji staví na hranici mezi klasickou populací I a II. Rádiová, infračervená a rentgenová pozorování naznačují, že se zde i v současnosti tvoří nové hvězdy. Nově vznikající hvězdy však mají poměrně nízkou hmotnost, takže nejjasnějšími hvězdami zde jsou červení a oranžoví obři.

Jakkoli výduť sama neobsahuje příliš mnoho mezihvězdného plynu a prachu, je pro nás zcela skryta za prašnými závoji v galaktickém disku, takže ji nemůžeme přímo opticky pozorovat. Kdyby tomu tak nebylo, jevila by se nám výduť jako mírně eliptické naoranžověle zářící difúzní těleso o úhlovém průměru 25° , které by bylo po Slunci a Měsíci nejjasnějším objektem na obloze.

- **Jádro Galaxie:** Centrální výduť zahrnuje i jádro Galaxie, o němž se toho stále mnoho neví. Neoptická pozorování ukazují, že tato oblast je neobyčejně bohatá na hvězdy. Vzhledově připomíná kulovou hvězdokupu, její rozměry jsou však vpravdě obří – průměr je 300 pc a celková hmotnost cca miliarda Sluncí. V samotném centru jádra se nachází i disk tvořený vesměs neutrálním vodíkem. Rádiová pozorování zase naznačují, že se zde nachází též prstenec tvořený molekulovými oblaky, který má tendenci expandovat do prostoru. Přímo v centru Galaxie leží mocný rádiový zdroj Sagitarius A.

Infračervená pozorování nás informují, že hvězdy v jádru jsou od sebe vzdáleny v průměru jen pouhých 1000 AU. Plyn poblíž centra velice rychle rotuje, jeho rychlost dosahuje až 2000 km/s! (Též byly objeveny hvězdy ve vzdálenosti pouhé desetininy světelného roku od centra Galaxie, jež obíhají touto rychlostí) Tento fakt lze vysvětlit tím, vprostřed Galaxie musí existovat kompaktní těleso o hmotnosti cca 3 milionů Sluncí, což bude nejspíš supermasívní černá díra.

- **Hvězdný disk:**

Z větší dálky nejnápadnější, nejhmotnější a nejzářivější složkou Galaxie je její hvězdný disk, který z hlediska hvězdné populace dělíme na mladý, střední a starý. Disk se rozprostírá od jádra do vzdálenosti cca 25 kpc. Podobný plochý disk s množstvím hvězd nacházíme i u ostatních spirálních galaxií. Vlastní spirální ramena tvoří ještě plošší systém pevně se přimykající ke galaktické rovině.

V galaktickém disku nacházíme množství nepříliš početných hvězdných soustav zvaných **otevřené hvězdokupy**. Na rozdíl od kulových mají mnohem neuspořádanější tvar, což je ovšem dáno tím, že mají v průměru o několik řádů méně hvězd. Rozložení otevřených hvězdokup v Galaxii je velmi podobné rozložení mladých hvězd.

Silně se koncentrují ke galaktické rovině, a již méně výrazně klesá jejich počet se vzdáleností od centra Galaxie. Velkoškálové rozložení otevřených hvězdokup je však obtížné přímo sledovat v důsledku existence velkého množství neprůhledného mezihvězdného materiálu, který se rovněž váže ke galaktické rovině. Extinkce je zde tak velká, že nám umožňuje pohlédnout jen do hloubky několika tisíc světelných let. Z analogie s jinými spirálními galaxiemi však lze očekávat, že zhruba sledují rozložení jasu v Galaxii s tou výjimkou, že v centrálních oblastech se tak často nevyskytují. Existují navíc náznaky toho, že mladší otevřené hvězdokupy se více přimykají k spirálním ramenům než starší hvězdokupy, což tedy platí alespoň v okolí Slunce, kam naše přístroje dohlédnou.

I ty nejjasnější otevřené hvězdokupy jsou podstatně slabší než kulové. Rekordní zářivý výkon otevřené hvězdokupy činí 50 tisíc Sluncí, typický ovšem je cca 500 Sluncí. Hmotnosti soustav lze podobně jako u kulových hvězdokup odvodit z měřeného rozptylu rychlostí členů soustavy. Valná většina otevřených hvězdokup má menší hmotnosti, kolem $50 M_\odot$. Celkový počet hvězd bývá rovněž nevelký: od desítek po několik tisíc.

Průměry otevřených hvězdokup se pohybují v rozmezí od 2 či 3 ly do 20, přičemž nejčastější hodnotou, s níž se u nich setkáváme, je 5 ly. Otevřené hvězdokupy nejsou dostatečně pevně gravitačně vázané soustavy k tomu, aby dlouhodobě vzdorovaly slapovým účinkům Galaxie. V okolí Slunce pouze polovina z nich může odporovat slapům více než 200 milionů let, jenom 2% má životnost delší než miliardu let. Otevřené hvězdokupy tak musejí náležet k velmi mladým, nedávno vytvořeným hvězdným soustavám – většina z nich je mladších než $2 \cdot 10^8$ let, některé jsou mladší než 10^6 let. Stáří otevřených hvězdokup se určuje srovnáním vývojového stavu jejich členů podle teoretických vývojových modelů sestavených pro tentýž věk a pozorované počáteční chemické složení, konkrétně podle polohy tzv. bodu obratu v HRD. Vzhledem k tomu, že otevřené hvězdokupy patří k nejmladším galaktickým objektům, obsahují $2x$ až $3x$ více těžších prvků než Slunce.

• **Spirální ramena, extrémní populace I:** K plochým spirálním ramenům ležícím v rovině Galaxie se vážou extrémně mladé objekty, tj. hvězdné asociace O a T, mladé otevřené hvězdokupy, dlouhoperiodické (klasické) cefeidy, oblasti H II, molekulová oblaka a oblaka neutrálního vodíku. Zatímco spirální strukturu vzdálených galaxií můžeme zpravidla studovat přímo, u naší Galaxie to představuje mimořádný problém, protože sluneční soustava leží v bezprostřední blízkosti galaktické roviny. K tomu, abychom za těchto okolností mohli určit polohu ramen v Galaxii, je nezbytné, abychom dokázali spolehlivě měřit prostorové vzdálenosti objektů, které se k ramenům koncentrují.

K nejtýpčtějším objektům extrémní populace I náleží hvězdné **asociace** složené z hvězd, které spojuje společné místo i okamžik vzniku, avšak již se rozptýlily do okolního prostoru.³⁰ Členové asociace ovšem nejsou spolu dostatečně pevně gravitačně vázány tak, aby vytvořily stabilní systém typu hvězdokupy. Hvězdné asociace nacházíme výhradně tam, kde v současnosti dochází k hromadnému vzniku hvězd, čili zejména ve spirálních ramenech. Celkově jsou to velice jasné a nápadné objekty, což ovšem není ani tak dáno počtem hvězd (ten se počítá na desítky, nejvýše stovky kusů), jako spíše zářivým výkonem nejjasnějších členů asociací. Jsou jimi poměrně velmi hmotné hvězdy s výkonem až 10^6 Sluncí, tedy mnohonásobně větším, než je výkon i těch nejjasnějších členů kulových hvězdokup. Tyto hvězdy jsou poměrně zřehavé, takže náležejí vesměs k spektrálním třídám O a B. O asociacích, v nichž dominují hmotné hvězdy tohoto typu, se hovoří jako o asociacích O, B nebo též asociacích OB. Zmíněné hmotné hvězdy mají velice krátkou dobu života, která se počítá na milióny let a nemohly se tak příliš vzdálit od místa svého vzniku. Svou polohou tak indikují místa zrodu hmotných hvězd, která leží vesměs ve spirálních ramenech.

Kromě asociací OB pozorujeme též asociace T, kde se setkáváme s velkým množstvím proměnných hvězd typu T Tauri, o nichž je známo, že jde o mladé hvězdy ve stadiu gravitační kontrakce, které dosud ve svém nitru nezapálily vodík. Tyto soustavy nejsou tak nápadné jako asociace OB, protože v nich chybějí extrémně jasné hmotné hvězdy. Nicméně i ony jsou velice mladé a jsou tudíž dobrými indikátory spirální struktury. Hmotnosti hvězdných asociací činí několik stovek hmotností Slunce, střední průměr těchto soustav se odhaduje na 200 pc. V blízkosti Slunce nalézáme i řadu menších o průměru cca 60 pc. Vlastní gravitační vazba nestačí udržet členy asociace pohromadě, a ty se v průběhu několika málo milionů let rozptýlí do okolního prostoru a stávají se běžnými hvězdami galaktického pole.

³⁰ Asociace tak lze [na rozdíl od hvězdokup] zjistit až srovnáním fyzikálních vlastností ve větším hvězdném poli. Často je problém rozhodnout zda jde o asociaci – hlavní problém je nepravidelná struktura mezihvězdných mračen, jež mohou část zakrývat nebo zdánlivě dělit asociaci na dvě skupiny. Celkově: asociace jsou nejmladší s nejmenším počtem členů, kulové hvězdokupy nejstarší s největším počtem členů.

§ Dynamika Galaxie

Rozložení určitého typu objektů v Galaxii a jejich rychlostní pole nestudujeme přímo, ale pomocí měření prováděných ze Země a vztahovaných obvykle ke Slunci. Relevantními údaji v tomto ohledu je vzdálenost r (resp. paralaxa) dotyčného objektu, a dvojice údajů udávající polohu objektu na hvězdné obloze, neboli směr, v němž daný objekt pozorujeme. Tyto tři souřadnice ve sférické souřadnicové soustavě jednoznačně definují okamžitou polohu objektu v prostoru vzhledem ke Slunci. Pokud se zabýváme studiem rozložení objektů v Galaxii, je zvykem pracovat v **galaktickém souřadnicovém systému** – počátkem této souřadnicové soustavy je Slunce, základní rovinou je rovina Galaxie, základním směrem je směr k předpokládanému centru Galaxie. Galaktické souřadnice jsou galaktická šířka b a galaktická délka l . Severní pól galaktické soustavy se nachází ve směru $\alpha = 12^h 49^m$, $\delta = 27,4^\circ$ v souhvězdí Vlasu Bereniky, základní směr ($l = b = 0$) odpovídá $a = 12^h 42^m 24^s$, $\delta = 28^\circ 55'$ (skutečný střed se nachází velmi blízko, $\alpha = 12^h 42^m 29,3^s$, $28^\circ 59,3'$). Sklon galaktické roviny k rovníku je $62,6^\circ$, výstupný uzel (průsečnice galaktického a světového rovníku) má rektascenzi $\alpha = 18^h 49^m = 282,25^\circ$ a galaktickou délku $l = 33^\circ$. Vše je vztaheno k ekvinokciu 1950,0.

Dalším důležitým zdrojem informací o velkorozměrové struktuře Galaxie jsou pohyby hvězd v okolí Slunce. Pro studium kinematiky i dynamiky ovšem není výhodné polohy a zejména prostorové rychlosti vyjadřovat ve sférickém galaktickém souřadnicovém systému s počátkem ve Slunci, ale v systému válcovém s počátkem ve středu Galaxie. Kinematiku určitých skupin hvězd či jiných objektů studujeme rozbohem jejich polohy v Galaxii a prostorových rychlostí. Ty zjišťujeme na základě relativní prostorové rychlosti v_r vztahené ke Slunci pomocí spektroskopického určování radiálních rychlostí (pokud toto měření provádíme ze Země, nesmíme zapomenout naměřenou radiální rychlost opravit o příspěvek radiální rychlosti způsobený oběžným a rotačním pohybem Země). K stanovení tečné (tangenciální) složky relativní rychlosti v_t užíváme měření vlastního pohybu hvězd a jejich paralaxy.³¹

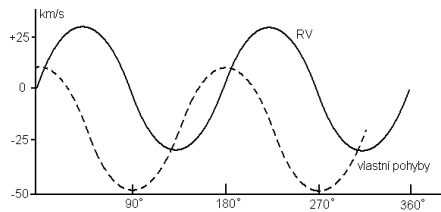
Měřítkem příslušnosti k té či jiné populaci je pak třeba střední absolutní vzdálenost určitého typu objektů od galaktické roviny \bar{z} . Z hlediska pohybového to může být tzv. disperze rychlostí vztahených ke Slunci σ , $\sigma^2 = \langle v_r^2 \rangle + \langle v_{t\alpha}^2 \rangle + \langle v_{t\delta}^2 \rangle$.

Při rozboch kinematických vlastností určitých skupin hvězd se často vztahují tyto relativní rychlosti nikoli ke Slunci samotnému, ale k Slunci idealizovanému, které se pohybuje kolem centra Galaxie rovnoměrně po přesně kruhové dráze. Této vztahné soustavě (neinerciální!) se říká **místní standard klidu** (local standard of rest – LSR). Její osy jsou standardně orientovány vzhledem k rovině a centru Galaxie. Skutečné Slunce se vůči místnímu standardu klidu pohybuje rychlostí cca 19,5 km/s s apexem v souhvězdí Herkula. Největší odchylku zde představuje složka ve směru galaktické rotace, což naznačuje, že se Slunce pohybuje kolem centra Galaxie po poněkud eliptické dráze.

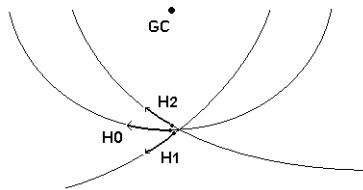
• **Rotace Galaxie:** Skutečnost, že se objekty diskové složky včetně Slunce účastní galaktické rotace kolem centra Galaxie, lze odhalit rozbohem závislosti pozorovaných radiálních rychlostí RV a vlastních pohybů μ běžných hvězd ve slunečním okolí na jejich galaktické délce l (tj. rozložíme relativní rychlosti hvězd vzhledem k Slunci [po oproštění od slunečního pohybu 20 km/s] na jednotlivé složky). Závislost má podobu dvojité sinusoidy, přičemž pozorovaná radiální rychlost je maximální v galaktické délce $l = 45^\circ$ a 225° , minimální ve směrech $l = 135^\circ$ a 315° , zatímco maximum tečné rychlosti pozoru-

³¹ Dle vztahů $v_{t\alpha}[km/s] = 4,74\mu_\alpha['']r[pc] \cos \delta$ a $v_{t\delta}[km/s] = 4,74\mu_\delta['']r[pc]$

jeme ve směru k centru a anticentru Galaxie, minimum ve směru a proti směru pohybu Slunce.



Pozorované chování se dá vysvětlit jako rotace okolo vzdáleného středu (Galaxie); protože hmota není koncentrována ke středu tak výrazně jako u planetární soustavy, charakter rotace je jiný: hvězdy se nepohybují po rovinných křivkách, málo výstředných elipsách, ale jejich dráhy jsou výstředné, neuzavřené křivky, které neleží v rovině. Tím lze vysvětlit existenci dvou proudů, které odhalil Capteyn. Uvažujme pohyb tří hvězd okolo galaktického centra, H_0 se pohybuje téměř po kruhové dráze, H_1, H_2 se naopak pohybují po drahách výstředných. Pozorovatel, který je na H_0 má možnost pozorovat a měřit pohyby hvězd jen do určité vzdálenosti – pozoruje hvězdy jen v blízkém okolí. Hvězda H_1 se právě vzdaluje od perigalaktika (místa nejbližšího centru Galaxie) do nejvzdálenějšího bodu své dráhy – apogalaktika. Naopak hvězda H_2 již apogalaktikem prošla a vrací se k centru. Vzhledem k rozměru Galaxie se na měřitelném úseku dráhy neprojeví žádné zakřivení. Pozorovatel tedy má dojem, že jedna hvězda proudí k centru, druhá od centra. Viz obr.



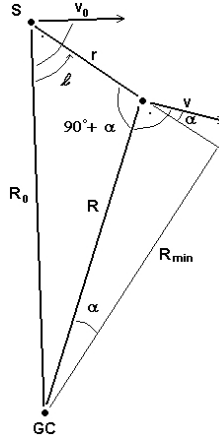
Prostorové rychlosti hvězd oproštěné od pohybu Slunce je možno popsat elipsoidem rychlostí. Pojem elipsoidu rychlostí lze vysvětlit na následujícím příkladu: oblak částic jako celek se pohybuje jistou průměrnou rychlostí (což může být kruhová rychlost kolem Galaxie), avšak jednotlivé částice mají relativní rychlosti vzhledem k těžišti oblaku (což jsou pekuliární rychlosti hvězd). Rozdělení těchto rychlostí je náhodné a lze jej přirovnat k Maxwellovskému rozdělení molekul oblaku plynu.

Umístí-li se počátky vektorů pekuliárních rychlostí do jednoho bodu, pak konce vektorů budou vytvářet kulový útvar. Průměr z jednotlivých vektorů v různých směrech bude koule se středem ve středu oblaku. Jestliže však bude převládat nějaké proudění uvnitř oblaku, pak konce vektorů vytvoří elipsoid, nikoli kouli.

Jsou-li tedy dráhy hvězd (vzhledem ke galaktickému centru) kruhové, pak poloosy elipsoidu jsou malé a jeho tvar se blíží spíše kouli, to je případ hvězd typu B. Naproti tomu skupina hvězd s velmi výstřednými drahami bude mít elipsoid rychlostí značně větší a jeho nejdelší poloosa bude přibližně rovnoběžná se směrem k centru Galaxie. Možno též říci, že nejdelší poloosy budou směřovat přibližně ve směru Kapteynových proudů.

Pro jednoduchost předpokládejme, že trajektorie Slunce i ostatních fiktivních hvězd jsou přesně kruhové se středem v centru Galaxie a že se nacházejí v rovině Galaxie. Pohyb hvězd i Slunce nechť je rovnoměrný, přičemž velikost jejich rychlosti vztažené k inerciální souřadnicové soustavě (nehybné vůči vzdáleným galaxiím) s počátkem v centru Galaxie nechť závisí pouze na vzdálenosti od centra.

Vzdálenost Slunce od centra necht' je R_\odot , vzdálenost libovolné hvězdy R a vzdálenost Slunce-hvězda r . Vektor rychlosti Slunce \vec{v}_\odot je kolmý ke spojnici Slunce - střed Galaxie, vektor rychlosti vybrané hvězdy $\vec{v}(R)$ je rovněž kolmý ke spojnici hvězda - střed Galaxie. Galaktická délka hvězdy necht' je l . Úhel mezi kolmicí spuštěnou z centra Galaxie k spojnici Slunce - hvězda o délce R_{min} a spojnicí hvězda - centrum Galaxie si označíme α . Úhel, který pak svírají spojnice Slunce - hvězda a spojnice střed Galaxie - hvězda je pak zřejmě $90^\circ + \alpha$.



Rozložme vektor rychlosti Slunce \vec{v}_\odot a zvolené hvězdy \vec{v}_r do složek rovnoběžných ke směru spojnice Slunce - hvězda o velikosti $v_{\odot r}$, v_r a kolmých na tuto spojnici $v_{\odot t}$, v_t . Je zřejmé, že pak platí:

$$v_{\odot r} = v_\odot(R_\odot) \sin l, \quad v_{\odot t} = v_\odot(R_\odot) \cos l, \quad v_r = v(R) \cos \alpha, \quad v_t = v(R) \sin \alpha.$$

Radiální rychlost vzhledem k idealizovanému Slunci RV vypočteme jako rozdíl radiálních složek rychlostí:

$$RV = v_r - v_{\odot r} = v(R) \cos \alpha - v_\odot(R_\odot) \sin l.$$

Za $\cos \alpha$ dosadíme ze sinové věty platné v trojúhelníku o vrcholech GC, S, hvězda:

$$\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{R_\odot} = \frac{\cos \alpha}{R_\odot} = \frac{\sin l}{R} \quad \rightarrow$$

$$RV = R_\odot \left(\frac{v(R)}{R} - \frac{v_\odot(R_\odot)}{R_\odot} \right) \sin l = R_\odot (\omega(R) - \omega_\odot) \sin l.$$

Obdobně dostaneme pro tečnou složku rychlosti TV :

$$TV = v_t - v_{\odot t} = v(r) \sin \alpha - v_\odot(R_\odot) \cos l$$

$$\frac{\sin l}{R} = \frac{\sin(90^\circ - l - \alpha)}{r} = \frac{\cos \alpha \cos l - \sin \alpha \sin l}{R_\odot} \quad \rightarrow$$

$$TV = R_\odot (\omega(R) - \omega_\odot) \cos l - r\omega.$$

Kdyby se Galaxie otáčela jako tuhé těleso, čili $\omega = \omega_\odot$, pak by střední radiální rychlost byla ve všech směrech nulová a střední hodnota tangenciální rychlosti by byla všude

konstantní, přičemž její velikost by byla úměrná záporně vzatému součinu vzdálenosti a úhlové rotační rychlosti. Hvězdné okolí Slunce se vůči Slunci točí jako tuhé těleso, jenže v opačném směru než rotuje Galaxie. Pozorování hvězd v širším okolí Slunce však nasvědčují tomu, že Galaxie v okolí Slunce jako tuhé těleso nerotuje, že zde lze vysledovat tzv. **diferenciální rotaci**, při níž se vzdálenější části Galaxie oproti vnitřním poněkud opožďují. Jinými slovy, funkce $\omega(R)$ je funkcí klesající, kterou lze pro bližší objekty (tj. pro $r \ll R_0$) rozvinout v Taylorovu řadu a omezit se na první dva členy rozvoje:

$$\omega(R) - \omega_{\odot}(R_{\odot}) = (R - R_{\odot}) \frac{d\omega}{dR} = -r \cos l \frac{d\omega}{dR}.$$

Dosadíme-li tento rozvoj do výrazu pro radiální rychlost, dostaneme:

$$RV = R_{\odot}(\omega(R) - \omega_{\odot}) \sin l = \left(-\frac{1}{2} R_{\odot} \frac{d\omega}{dR} \right) r \sin 2l = Ar \sin 2l,$$

kde A je tzv. **první Oortova konstanta**. Konstanta $B = A - \omega_{\odot}$ se pak spolu s konstantou A vyskytnou ve vztahu pro tangenciální rychlost TV:

$$TV = r(A \cos 2l + B).$$

K odvození tohoto vztahu je ještě potřeba $\cos^2 l = (1 + \cos 2l)/2$. B je tedy **druhá Oortova konstanta**. Oortovy konstanty jsou tedy vhodné parametry popisující kinematické vlastnosti Galaxie ve slunečním okolí, tj. popisující jednoznačně kruhové rychlosti hvězd (nikoliv ovšem jednotlivých hvězd).³² Mohou být odvozeny ze statistického zpracování radiálních rychlostí (A) a prostorových rychlostí nebo ještě lépe z vlastních pohybů (A i B). Měření kinematických vlastností okolních hvězd byly nalezeny následující přibližné hodnoty Oortových konstant: $A = 13 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, $B = -13 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Tj. úhlová rotační rychlost v místě Slunce $\omega_{\odot} = A - B$ je cca $26 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Odtud plyne, že oběžná perioda Slunce $T = 2\pi/\omega = 230 \text{ Myr}$ (galaktický rok). Slunce tedy za svou existenci (cca 4,5 Gyr) vykonalo cca 20 oběhů, a to „cestovní rychlostí“, kterou lze při vzdálenosti $R_{\odot} \sim 8,5 \text{ kpc}$ odhadnout na cca $v_{\odot} = 220 - 230 \text{ km s}^{-1}$. Pokles úhlové rychlosti lze odvodit přímo z konstanty A :

$$A = -\frac{1}{2} R_{\odot} \frac{d\omega}{dR} \quad \rightarrow \quad \frac{d\omega}{dR} = -\frac{2A}{R_{\odot}} \cong -3,1 \text{ km/s/kpc}^2,$$

takže úhlová rychlost rotace v okolí Slunce dle očekávání klesá, galaktická rotace je zde diferenciální. Na jeden kpc vzdálenosti od centra zde úhlová rychlost poklesne o 3,1 km/s:

$$\omega \cong \omega_{\odot} + \frac{d\omega}{dR}(R - R_{\odot}) = (26 - 3,1(\Delta R[\text{kpc}])) \text{ km/s/kpc}.$$

Dále je zajímavé, jak v okolí Slunce závisí postupná rychlost $v(R)$ na vzdálenosti:

$$v(R) = \omega R \cong \omega_{\odot} R_{\odot} + (R_{\odot} \frac{d\omega}{dR}) \Delta R = v_{\odot} - (A + B) \Delta R.$$

³² Možno též Taylorův rozvoj psát ve tvaru: $(\frac{d\omega}{dR})_0 = [\frac{d}{dR}(\frac{v}{R})]_0 = [\frac{1}{R} \frac{dv}{dR} - \frac{v}{R^2}]_0 = \frac{1}{R_0} (\frac{dv}{dR})_0 - (\frac{v}{R^2})_0$, z čehož vyjdou Oortovy konstanty ve tvaru $VR = \frac{1}{2} [\frac{v}{R} - \frac{dv}{dR}]_0 d \sin 2l$ a $VT = \frac{1}{2} [\frac{v}{R} - \frac{dv}{dR}]_0 d \cos 2l - \frac{1}{2} [\frac{v}{R} + \frac{dv}{dR}]_0 d$. Navíc není nutno předpokládat pohyb v rovině, pak tedy místo r máme ve výsledných vzorcích $d = r \cos b \dots$

Jelikož $A + B = 0$, zjišťujeme, že cestovní rychlost objektů v okolí Slunce kolem centra Galaxie vzhledem ke vzdáleným galaxiím zůstává konstantní, tj. rotační křivka je plochá.

Oortovy konstanty lze použít k hrubému odhadu hmoty Galaxie. Pokud bychom předpokládali, že hmotnost té části Galaxie, jež se nachází se uvnitř trajektorie Slunce je M , a že Slunce se pohybuje Keplerovsky, lze tuto hmotnost určit pomocí pozorované úhlové rychlosti a předpokládané vzdálenosti od centra:

$$R_{\odot}\omega_{\odot}^2 = G\frac{M(R_{\odot})}{R_{\odot}^2} \quad \rightarrow \quad M(R_{\odot}) = \frac{R_{\odot}^3\omega_{\odot}^2}{G}.$$

Dosazením dojdeme k odhadu vnitřní hmotnosti cca $10^{11} M_{\odot}$.

Ve velikosti Oortových konstant je navíc skryta i informace o povaze rozložení hmoty v okolí Slunce. Ze vzájemného poměru konstant A a B lze odvodit, že zde hmotnost Galaxie uzavřená pod poloměrem R roste zhruba úměrně R .

Oortovými konstantami je uspokojivě popsána galaktická rotace ve vzdálenosti Slunce $R_{\odot} \sim \pm 1 - 2$ kpc. Za těmito hranicemi již uvedená aproximace neplatí. Ke zjištění kompletního průběhu tzv. **rotační křivky**, což je závislost rotační rychlosti $v(r)$ na vzdálenosti od centra se již nemůžeme opírat o měření radiálních rychlostí a vlastních pohybů hvězd disku, neboť tyto nejsou v důsledku extinkce pozorování přístupny. Místo nich se s výhodou využívá pozorování oblaků neutrálního vodíku pozorovaného na vlnové délce 0,21 m. Zmíněné oblaky patří rovněž k velmi mladé diskové složce Galaxie a jejich dráhy jsou velice blízké kružnici.

Účinnou metodou, jak určit průběh rotační křivky ve vnitřních částech galaktického disku, je proměrování profilu čáry rádiového záření mezihvězdného vodíku v polorovině přivrácené ke galaktickému centru, s cílem nalezení oblaku s extrémní radiální rychlostí RV_{ext} . Stačí se vrátit k již výše odvozenému vztahu pro radiální rychlost objektu o vzdálenosti od centra R , o galaktické délce l , tj. $RV = R_{\odot}(\omega(R) - \omega_{\odot}) \sin l$. Bude-li l v intervalu od -90° do 90° , pak je zřejmé, že budeme-li v daném směru postupovat směrem od Slunce, bude se vzdálenost objektů od centra Galaxie stále zmenšovat, až nabude své minimální hodnoty $R_{min} = R_{\odot} \sin l$, pak se bude opět zvětšovat. Lze očekávat, že úhlová rychlost $\omega(R)$ bude funkcí monotónně klesající. Extrémní hodnota $\omega(R)$ v daném směru tak musí nastat v minimální vzdálenosti od centra Galaxie, čili pro $\omega(R_{min})$:

$$RV_{ext} = R_{\odot} \sin l (\omega(R_{\odot} \sin l) - \omega_{\odot}) = R_{min} (\omega(R_{min}) - \omega_{\odot}) \quad \rightarrow$$

$$\omega(R_{min}) = \omega_{\odot} + RV_{ext}/R_{min},$$

$$V(R_{min}) = \omega(R_{min})R_{min} = v_{\odot} \sin l + RV_{ext}.$$

Metoda by to byla zcela neproblematická, pokud by byl galaktický disk neutrálním vodíkem vyplněn rovnoměrně. Tak tomu však není, oblaka se vyskytují přednostně ve spirálních ramenech, což potom poněkud komplikuje a znejišťuje nalezenou rotační křivku. Existují však i další postupy, které tuto základní metodu doplňují a nejistoty minimalizují, takže dnes lze naměřeným rotačním křivkám docela důvěřovat.

Z průběhu zjištěné rotační křivky lze odvodit, jaké je rozložení hmoty v Galaxii, přesněji řečeno, jaký má chod závislost celkové hmotnosti galaktické látky $M(R)$ nacházející se uvnitř dráhy o poloměru R . Z rovnosti odstředivého zrychlení při rovnoměrném kruhovém pohybu a dostředivého gravitačního zrychlení plyne:

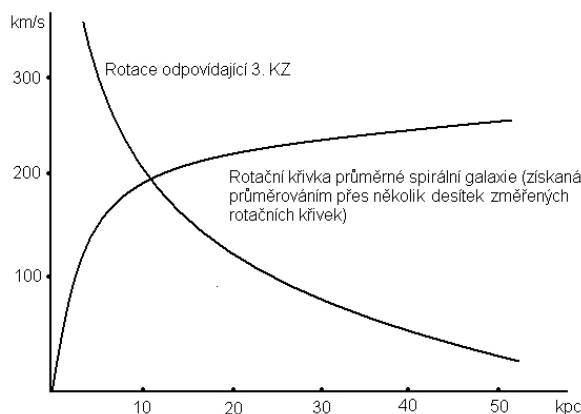
$$\frac{v^2(R)}{R} = G\frac{M(R)}{R^2} \quad \rightarrow \quad v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad \rightarrow \quad M(R) = \frac{v^2 R}{G}; \quad \frac{dM(R)}{dR} = \frac{v^2}{G}.$$

Diskutujeme nyní dvě krajní situace. V okolí centra, v tzv. centrální výduti se sférickou symetrií platí, že hustota látky je zhruba konstantní, tj. $M(R) \approx R^3$, $v(R) \approx R$. Rychlost rotace zde roste přímo úměrně vzdálenosti, úhlová rychlost oblasti je tedy konstantní. Říkáme pak, že se tato část Galaxie otáčí jako tuhé těleso.

Druhým extrémem je případ, kdy uvnitř oběžné dráhy je obsažena prakticky všechna hmota soustavy, podobně jako je tomu ve sluneční soustavě, kde je takřka veškerá hmota soustředěna v Slunci. $M(R) \approx M$, $v(R) \approx 1/\sqrt{R}$. Tomuto typu diferenciální rotace se říká Keplerova rotace. S rostoucí vzdáleností klesá nejen rotace, ale i úhlová rotace ω – ta podle zákona $\omega(R) \approx R^{-3/2}$.

Dalo by se tedy očekávat, že zpočátku bude v Galaxii rotační rychlost růst (vskutku se pozoruje), pak nabude svého maxima a začne opět pozvolna klesat, jak to odpovídá Keplerově rotaci. Zpočátku se zdálo, že tomu tak je, oblast „tuhé rotace“ sahá až do 500 pc, maximum rychlosti nastává v 700 pc od centra (± 260 km/s) a pak nastává „keplerovský pokles“. Hmotnost celé Galaxie byla odhadnuta na 200 miliard Sluncí.

Výzkumy z konce 70. let ukázaly, že pokles rotační křivky se na 3 kpc zcela zastaví, rotační rychlost pak začne znovu růst, aby se ve vzdálenosti Slunce (8 kpc) zhruba zastavila na konstantní hodnotě. To platí až do vzdálenosti, kam vůbec sahají testovací objekty. V těch místech je ovšem Galaxie natolik řídko osídlena hvězdami a mezihvězdnou látkou, že je zřejmé, že zde je dynamika Galaxie určována temnou, neviditelnou hmotou. Tj. to, že křivka ve velké vzdálenosti neklesá nasvědčuje existenci složky galaxie, jež je někdy označována jako galaktická koróna – obklopuje a nejspíše i prolíná disk i halo.



Pokud je tato látka tvořena baryony, pak se nejnadějnější zdá hypotéza, že jde o množství chladnoucích WD – pozůstatky vývoje hvězd první generace. Vzhledem k „zemským“ rozměrům a nízké teplotě (cca 4000 K) je zářivý výkon těchto objektů nízký. Přesto byly tyto hvězdy v okolí Slunce nalezeny (HST, 2000: až 50% hmoty galaxie může být v těchto velmi starých a málo svítivých WD). Je ovšem otázkou, zda je jejich prostorová hustota dostačující k vysvětlení temného hala Galaxie a zda se vyskytují i ve velmi velkých vzdálenostech od galaktického centra. Jistá část baryonové látky může být obsažena v rozsáhlých galaktických oblacích plynu.

Z řady dalších, víceméně nepřímých náznaků vyplývá, že podstatná část neviditelné hmoty v Galaxii bude mít nebaryonovou povahu. V této souvislosti se hovoří o reliktních neutrinech³³ s nenulovou klidovou hmotností.

³³ Částice, jež vznikly krátce po Big Bangu. Od ostatní látky se oddělily ve chvíli, kdy začala být pro ně průhledná. Koncentrace rel. n., stejně jako rel. fotonů, převyšuje koncentraci baryonů o 9 až 10 řádů.

Poznámka o **stabilitě kruhové dráhy** v gravitačním poli; potenciál $\phi(R, \vartheta, z, t)$ + předpoklady: pole konzervativní ($\phi \neq \phi(t)$), osová symetrie ($\partial\phi/\partial\vartheta = 0$), rovinná symetrie ($\phi(R, z) = \phi(R, -z)$).

Z těchto symetrií dostaneme integrály pohybu, tj. energii a moment hybnosti

$$E = [\dot{R}^2 + \dot{\vartheta}^2 R^2 + \dot{z}^2] + \phi, \quad h_z = \dot{\vartheta} R^2 = \Theta R,$$

tj. $\Theta = \dot{\vartheta} R$ (jde vlastně o vztah $v = \omega r$ neboť $\dot{\vartheta} = \omega$). Z výrazu pro E ještě dostaneme $\ddot{R} = R\dot{\vartheta}^2 - \partial\phi/\partial R$ a $\ddot{z} = -\partial\phi/\partial z$, z výrazu pro h_z dostaneme $d(R^2\dot{\vartheta})/dt = -\partial\phi/\partial\vartheta = 0$.

Předpokládáme, že potenciál je separovatelný, zajímá nás kruhová dráha, ignorujeme tedy z -složku a $R = R_0$, tj. $\ddot{R} = 0$, odtud

$$R_0 \dot{\vartheta}_0^2 = \frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{\Theta_0^2}{R}.$$

Mom. hyb. kruhové dráhy označme $h_0 = \Theta_0 R_0 = \dot{\vartheta}_0 R_0^2$, s využitím předcházejícího vztahu dostáváme

$$h_c^2 = \Theta_0^2 R_0^2 = \dot{\vartheta}_0^2 R_0^4 = R_0^3 \left(\frac{\partial\phi}{\partial R} \right).$$

Uvažujme blízké okolí kruhové dráhy $R = R_0 + R_1$, $R_1 \ll R_0$,

$$\ddot{R} = \ddot{R}_1 = (R_0 + R_1)\dot{\vartheta}^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial R} \right)_0 - R_1 \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} \right)_0 + \dots,$$

$$\ddot{R}_1 = (R_0 + R_1) \frac{h^2}{R_0 + R_1} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial R} \right)_0 - R_1 \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} \right)_0,$$

$$\ddot{R}_1 = \frac{h^2}{R_0^3} (1 - 3R_1/R_0) - \frac{\partial\phi}{\partial R} \Big|_0 - R_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} \Big|_0.$$

Dále pokračují v řešení pouze pro dráhy, $h = h_c$

$$\ddot{R}_1 = \frac{h_c^2}{R_0^3} (1 - 3R_1/R_0) - \frac{\partial\phi}{\partial R} \Big|_0 - R_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} \Big|_0,$$

$$\ddot{R}_1 = \frac{\partial\phi}{\partial R} \Big|_0 - \frac{\partial\phi}{\partial R} \Big|_0 - 3 \frac{\partial\phi}{\partial R} \Big|_0 \frac{R_1}{R_0} - R_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} \Big|_0,$$

$$\ddot{R}_1 = - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) \cdot R_1.$$

Pokud je výraz v závorce < 0 , je dráha nestabilní, pokud je > 0 je stabilní!

$$- \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) \Big|_0 > 0,$$

$$R^3 \frac{\partial}{\partial R} \left(R^3 \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) \Big|_0 > 0,$$

protože $R^3 > 0$ vždy \rightarrow pokud síla ($\partial\phi/\partial R$) klesá pomaleji než R^3 , tvrzení platí! Tj. v gravitujících systémech jsou kruhové dráhy stabilní! Označíme

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial\phi}{\partial R} \right),$$

κ je tzv. epicyklická frekvence, jde o frekvenci oscilací kolem kruhové dráhy ... Lze odvodit, že $\omega^2 = -4B(A - B) \doteq 36 \text{ km/s} \dots$ Viz doplňky ...

• **Spirální struktura Galaxie:** Na základě analogie s jinými galaxiemi již dlouho panovala domněnka, že i naše Galaxie jeví jistou spirální strukturu. Její skutečný výzkum začal vlastně až v roce 1953, kdy se podařilo hodnověrně určit vzdálenosti hvězdných asociací. Později byla poloha spirálních ramen stanovena i optickým pozorováním dalších typů hvězdných objektů, které se k nim vážou. Bohužel tuto metodu lze použít jen na vyšetřování spirální struktury v bezprostředním okolí Slunce. Ve větší vzdálenosti jsou

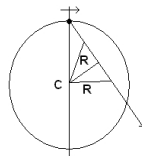
tyto objekty pozorovatelsky nedostupné v důsledku enormně vysoké extinkce v optickém oboru spektra.

Tímto neduhem netrpí sledování vybraných objektů v dlouhovlnějších částech elektromagnetického spektra, zejména v infračerveném a rádiovém oboru. Současný obraz globální spirální struktury Galaxie se opírá zejména o rádiová pozorování oblaků neutrálního vodíku H I na vlnové délce 21 cm a molekulových oblaků, které se sledují hlavně v čarách oxidu uhelnatého (CO).

Při rádiovém měření jsme schopni dostatečně přesně určit směr, odkud k nám záření dotyčného oblaku mezihvězdné látky přichází, jistým problémem je však stanovení jeho vzdálenosti. Ta se stanovuje nejčastěji pomocí naměřené radiální rychlosti dotyčného oblaku, která je v rozhodující míře určena kruhovou galaktickou rotací. Pozorovaná radiální rychlost oblaku RV pozorovaného v galaktické délce l je pak dána vztahem:

$$RV = R_{\odot}(\omega(R) - \omega_{\odot}) \sin l \quad \rightarrow \quad \omega(R) = \frac{RV}{R_{\odot} \sin l} + \omega_{\odot}.$$

Pomocí nalezené radiální rychlosti tak lze určit hodnotu úhlové rychlosti oběhu oblaku kolem centra $\omega(R)$ ve vzdálenosti R . Vzhledem k tomu že jde o funkci klesající, lze pomocí ní jednoznačně určit vzdálenost oblaku od galaktického centra. Pozorujeme-li v polorovině odvrácené od centra, pak nám tento údaj poslouží k jednoznačné lokalizaci oblaku v prostoru. V opačném případě pak dostáváme dvě možná řešení polohy, mezi nimiž musíme rozhodnout pomocí jiných kritérií, např. podle pozorované úhlové velikosti dotyčného oblaku (vzdálenější oblak stejných rozměrů se bude jevit pod menším úhlem). V každém případě však tento krok vnáší do interpretace pozorování nepříjemnou nejistotu. Tato nejistota však není jediná.



Předně v určitém směru v galaktické rovině málokdy pozorujeme jen jediný oblak, ale oblaků celou řadu, přičemž různě intenzivní spektrální čáry vysílané různými oblaky se vzájemně překrývají – bývá tedy leckdy sporné, jak pozorovaný profil příslušné čáry hodnověrně rozložit na jednotlivé složky a pro ně stanovit jejich radiální rychlost. Z našich průzkumů spirální struktury jsou bohužel vyloučeny velmi zajímavé oblasti ve směrech k centru a anticentru. Tam je totiž radiální rychlost prakticky nulová a jednotlivé oblaky nelze ani rozlišit ani určit jejich polohu. Rozhodující slabinou této metody je fakt, že velmi citlivě závisí na naší znalosti reálného průběhu rotační rychlosti $\omega(R)$ v celém rozsahu viditelné Galaxie. Bohužel tak dokonalou představu o vlastnostech galaktické rotace zatím nemáme, takže i všechny závěry, které se o ni opírají je nutno brát s dostatečnou rezervou.

Důsledkem této situace je pak skutečnost, že obrazy spirální struktury naší Galaxie pořizené různými metodami si odpovídají jen v hrubých rysech, v důležitých detailech, jimiž může být i celkový počet ramen (část astronomů soudí, že ramena jsou čtyři, jiní se kloní k názoru, že Galaxie má ramena pouze dvě), se vzájemně liší.

Pokud bychom pozorovali naši Galaxii ze strany severního galaktického pólu, pak budeme konstatovat, že galaktická rotace probíhá v témže smyslu jako otáčení hodinových

ručiček. Spirály v Galaxii, stejně jako i v jiných spirálních galaxiích, se „zavinují“, přesněji řečeno působí tak, jako by je diferenciální rotace postupně utahovala.³⁴ Během několika otáček by se spirály utáhly natolik, že by jakákoli spirální struktura zmizela. Už Bertil Lindblad, který se problematikou spirální struktury galaxií zabýval od roku 1927 až do své smrti však ukázal, že ono „utahování“ bude asi jen domnělé. Vzhledem k tomu, že tato struktura je víceméně „povinná“ ve všech galaxiích s diskem, je zřejmé, že se udržuje po desítky otoček galaxie. Možné je to jen tak, že pozorovaná spirální ramena nejsou tvořena stále týmiž objekty.

Vše nasvědčuje tomu, že tzv. velké spirály prostupující celou galaxií rotují konstantní úhlovou rychlostí (jako tuhé těleso), a to v témže směru jako hvězdy.³⁵ Od centra až po tzv. *oblast korotace* je galaktická rotace úhlově rychlejší než rotace spirální struktury. Poloměr korotace, kde se obě rychlosti srovnávají, leží poblíž vnějšího okraje spirálních ramen. Znamená to, že ve většině rozsahu spirálních ramen objekty disku procházejí spirálními rameny z jejich vnitřní strany.

Dlouhá spirální ramena tak nejsou tvořena stále týmiž objekty, ale představují jistou hustotní vlnu resp. potenciálovou brázdou. Objekty, které právě procházejí hustotní vlnou se v ní poněkud pozdrží a jejich prostorová hustota se zde zvýší.³⁶

Skutečné zvýšení prostorové hustoty v oblasti spirálních ramen je ovšem poměrně nevýrazné a spirální struktura, pokud by byla definována pouze hvězdami, jež se právě při své pouti zdržují v oblasti ramen, by nás asi stěží upoutala. Mnohem důležitější z tohoto hlediska je chování molekulových oblaků, které při svém oběhu kolem centra Galaxie doslova tvrdě „narazí“ na spirální rameno. Oblaky se po nárazu zploští, zahustí se, což v nich podpoří vznik nových hvězd, zejména pak hmotných a tudíž silně zářivých. Ty pak díky svému mimořádnému výkonu značují místo svého zrodu. Vzhledem k tomu, že se životní doby těchto hmotných hvězd počítají jen na miliony či desítky milionů let, nevzdálí se za celý svůj aktivní život příliš daleko od místa svého zrodu. To je pak příčinou toho, že krátce žijící, avšak nepřehlédnutelné objekty, jako jsou asociace OB, jeví tak silnou vazbu na spirální strukturu a činí ji nápadnou.

§ Vývoj hvězd a mezihvězdné látky v Galaxii

Existence hvězdných populací s odlišným stářím, chemickým složením a kinematickými vlastnostmi je důsledkem specifického vývoje generací hvězd a zejména pak vývoje rozložení, pohybových vlastností a chemického složení mezihvězdné látky, z níž se hvězdy tvoří.

Střední vzdálenosti hvězd v Galaxii jsou řádově 10^8 větší než jejich rozměry, relativně pomalé jsou též jejich pohyby – střední vzdálenost mezi sebou hvězdy urazí zhruba za 10^5 let. Doba mezi dvěma po sobě následujícími srážkami nebo těsnými přiblíženími, při nichž by se výrazně změnil pohybový stav těsně prolétajících hvězd, je o mnoho řádů delší než je stáří vesmíru. Srážky a těsná přiblížení mezi hvězdami v Galaxii tak není třeba uvažovat (jedinou výjimkou je oblast v bezprostředním okolí centra Galaxie),

³⁴ Určit smysl rotace, tj. zda jde o „navíjení“ či „zavíjení“, je značně obtížné. Na zavíjení ukazují počítačové simulace.

³⁵ Novější práce uvádějí, že spirální ramena se otáčejí kolem centra Galaxie nepříliš velkou úhlovou rychlostí cca $6 \text{ km/s/kpc} \times$ úhlová rychlost s níž obíhá Slunce kolem Galaxie: 26 km/s/kpc .

³⁶ Hustotní vlnu lze demonstrovat situací, která nastane na dálnici, jestliže na ní existuje úsek se sníženou příkázanou rychlostí. Z ptáčích perspektivy uvidíme, že v tomto úseku se nachází mnohem více aut než jinde. Pokud by se značky s příkázanou rychlostí ještě navíc zvolna posouvaly kupředu, byla by analogie ještě dokonalejší.

stejně tak není nutno uvažovat dynamické důsledky průchodu hvězdy oblaky mezihvězdné látky – tato prostředí jsou natolik řídká, že jimi hvězdy pronikají bez odporu. Z toho ovšem vyplývá, že kinematika hvězd je od jejich vzniku neměnná, jejich pohyb odpovídá naprosto věrně pohybu zárodečného materiálu, z něhož tyto hvězdy vznikly.

Stejně tak platí, že povrchové vrstvy hvězd si prakticky po celou dobu aktivní existence hvězdy podržují chemické složení odpovídající chemickému složení oblaku mezihvězdné látky, z něhož vznikly. Toto je důsledek skutečnosti, že po svém vzniku se hvězda důkladně a kompletně promíchává před tím, než se stane hvězdou hlavní posloupnosti. Jakmile se však v jejích centrálních oblastech zažehnou termionukleární reakce, dostatečně účinné kompletní promíchávání ve hvězdě ustane, takže zplodiny jaderného hoření se do horních vrstev hvězdy, které jsou přístupny pozorování, nedostanou. Tato situace trvá prakticky po celou dobu aktivního života hvězdy.³⁷ Pozorované povrchové chemické složení hvězdy tak velice dobře odpovídá počátečnímu chemickému složení oblaku mezihvězdné látky, z něhož hvězda vznikla. **Vývoj rozložení, pohybu a chemického složení mezihvězdné látky je tedy i klíčem k pochopení vývoje Galaxie jako celku, a zejména pak její hvězdné složky.**

● Etapy vývoje:

1. Krátce po velkém třesku vznikly ve vesmíru fluktuace látky, v nichž hmotnostně převládala temná látka. Jedna z nich, o hmotnosti bilionů Sluncí se účinky vlastní gravitace uspořádala do víceméně sféroidálního útvaru s výraznou koncentrací látky k centru. Tato gravitační jáma začala vychytávat baryonovou látku tvořenou ze 70 % vodíkem a z 30 % heliem, tedy prvky, které vznikly v předcházejících etapách vývoje vesmíru. Tato látka zvolna padala směrem k centru zárodku Galaxie.
2. V centru budoucí Galaxie se postupně shromáždil mírně zploštělý oblak, složený z vodíku a helia, který zpočátku jen pomalu rotoval. Pohyby plynu v rámci oblaku byly chaotické, neuspořádané. Velice rychle zde zřejmě vznikla úplně první generace relativně hmotných hvězd, hypotetických hvězd tzv. populace III. Tyto hvězdy po několika milionech let aktivního života dospěly k závěru svého vnitřního jaderného vývoje a vybuchly jako supernovy typu II. Těsně před vlastním vzplanutím se v těle hvězdy ustavily mimořádné podmínky, při nichž vzniklo i množství prvků těžších než helium. Následný výbuch pak vnější části obohacené o těžší prvky rozmetl do prostoru. Čáry hvězdy se rozletěly do okolí a později promísily s mezihvězdným vodíkem a heliem a vytvořily tak zárodečný materiál, z něhož pak začaly vznikat další generace hvězd.
3. Z mezihvězdného plynu složeného z vodíku, helia a malé příměsi těžších prvků ($Z < 1\%$) se začala tvořit další generace hvězd, kterou běžně označujeme jako hvězdy populace II nebo hvězdy tzv. sféroidální složky Galaxie. Pohyby nově vzniklých hvězd jsou nahodilé, neuspořádané, hvězdy vytvářejí jen mírně zploštělý sféroid. V této době všeobecného dostatku zárodečné mezihvězdné látky také vzniklo několik stovek gigantických gravitačně vázaných, sféricky symetrických kulových hvězdokup. Stáří hvězd této generace činí 10 až 13 miliard let, takže mezi aktivními hvězdami této skupiny se nesetkáme s objekty o hmotnosti větší než 1,2 Slunce.

³⁷ Ke kontaminaci dojde až v závěrečných fázích jaderného hoření, kdy se hvězda stává rozměrným obrem asymptotické větve. Tehdy se také produkty jaderného hoření dostávají do prostoru prostřednictvím velmi silného hvězdného větru.

Nejjasnějšími hvězdami jsou červení obří či příslušníci asymptotické větve obrů. V okolí Slunce se hvězdy této druhé generace prozradí relativně vysokou rychlostí (tzv. vysokorychlostní hvězdy). I tyto hvězdy se ke konci svého života zbavují své látky v důsledku pulzací a silného hvězdného větru. V případě hvězd asymptotické větve obrů, v nichž konvekce čas od času zasáhne i do slupky, v níž probíhají vodíkové reakce cyklu CNO, někdy i do slupky, v níž hoří heliové reakce, se do prostoru dostávají kromě vodíku a helia i atomy těžších prvků, zejména pak skupiny C, N, O. Další obohacení o těžší prvky sebou přináší výbuchy supernov.

4. Zatímco ke srážkám a těsným přiblížením hvězd v Galaxii prakticky nedochází, ke srážkám částic mezihvězdného plynu dochází relativně často. Vzájemné interakce částic v turbulentním prostředí jsou příčinou vnitřního tření, jež vede k tomu, že se rychlosti v rámci oblaku mezihvězdné látky postupně vyrovnávají. Ty částice, které mají malý moment hybnosti klesají k centru, ty s vyšší hybností jsou odesílány k periférii. Disperze náhodných rychlostí ve směru kolmém k rovině Galaxie postupně klesá, částice postupně sestupují k rovině Galaxie. V pohybu kolmém záhy převládne hlavní směr, směr galaktické rotace. Rychlosti se vyrovnají, pohyb částic plynu se stane více či méně kruhovým. Vnější část sféroidu mezihvězdné látky se pozvolna mění ve stále se ztenčující rotující disk. V disku se objevuje náznak spirální struktury. Z mezihvězdného materiálu se utváří generace starších hvězd populace I, hvězd populace tzv. starého disku. Obsah těžších prvků zde přesahuje 1%, všechny hvězdy kolem středu Galaxie putují v jednom směru, všechny jeví koncentraci k rovině Galaxie. Jejich stáří se pohybuje mezi 10 až 5 miliardami let, což ovšem znamená, že i zde se neseťkáváme s příliš hmotnými hvězdami: nejhmotnější, dosud aktivní příslušníci starého disku nejsou hmotnější než $1,5 M_{\odot}$. Nejjasnějšími hvězdami jsou tudíž červení obří a obří asymptotické větve.
5. Při dalších srážkách částic mezihvězdného plynu padá veškerá látka do velmi tenkého disku v galaktické rovině. Supernovy a hvězdy asymptotické větve obrů dále obohacují mezihvězdnou látku, takže její zastoupení Z dosáhne v extrémních případech 5%. V tenkém disku pozorujeme plochá spirální ramena, kde se soustřeďují molekulová oblaka, z nichž vznikají mladší hvězdy populace I, hvězdy mladšího či nejmladšího hvězdné disku. Nové hvězdy vznikají i v současnosti. Nejjasnějšími hvězdami jsou velmi hmotné, krátce žijící hvězdy extrémní populace I, které svým výskytem značují místo svého zrodu – spirální ramena. Právě jim spirální galaxie v současnosti vděčí za podstatnou část své iluminace.

Výše uvedené etapy se týkají vývoje hvězdné složky nacházející se ve vnějších částech této obří soustavy. Vprostřed Galaxie, čili v oblasti galaktické výdutě a jádra, se nacházejí různě staré hvězdy s menším obsahem těžších prvků, najdeme tu i mezihvězdnou látku. Ta tam neustále padá z vnějších částí galaxie, zejména z galaktického hala. Jde vesměs o látku uvolněnou během vývoje hvězd populace II a není proto tak znečištěna těžšími prvky, produkty jaderného hoření. Svým vzhledem a vlastnostmi se tato oblast podobá obří kulové hvězdokupě nebo eliptické galaxii. Dlužno poznamenat, že i zde v současnosti vznikají nové hvězdy, vesměs málo hmotné.

Dynamiku vlastního centra Galaxie ovlivňuje masivní centrální černá díra, která pohlcuje část okolní mezihvězdné látky, část látky vyfukuje do prostoru, zpravidla ve směru kolmém k rovině Galaxie. Působí přímo i na hvězdy, které projdou v její blízkosti, při velmi těsných průchodech hvězdy slapovými silami trhá.

Důležitým momentem ve vývoji a vnějším vzhledu galaxie je tzv. **galaktický kanibalismus** – slévání buď celých galaxií nebo jejich částí při vzájemném, nejlépe ne příliš prudkém setkání. Stává se pravidlem, že při takovém setkání si část galaxie přivlastní hmotnější nebo koncentrovanější galaxie.³⁸ Přivlastněný mezihvězdný materiál při aktu galaktického kanibalismu přitéká zvenčí a střetává se s místní mezihvězdnou látkou, zahušťuje ji a dochází zde k současnému vzniku i několika tisíců i statisíců hvězd. Velcí galaktičtí kanibalové jsou obklopeni tisíci kulových hvězdokup, které, na rozdíl od naší Galaxie, mohly vzniknout teprve nedávno. V bezprostředním okolí pozorujeme projevy kanibalismu mezi naší Galaxií a jejími galaktickými souputníky, relativně velké Magellanovy mraky nevyjímaje.

§ Cizí galaxie

Hubbleovo klasické třídění:

a) **galaxie eliptické** = eliptická forma bez jakékoliv výraznější vnitřní struktury; označují se písmenem E a číslem z , které vyjadřuje míru elipticity ($z = 10[(a - b)/a]$, kde a je velká a b malá poloosa)

b) **normální spirální galaxie** = vyznačují se jasným jádrem, které samo o sobě připomíná galaxie eliptické; k jádru se přimykají většinou dvě symetricky orientovaná spirální ramena; označené S; k tomuto písmenu se připojují a, b, c, d, která značí v daném pořadí klesající velikost jádra (vzhledem k zdánlivému rozměru ramen); zvláštní, jakýsi přechodný typ mezi E a S galaxiemi jsou vřetenovité galaxie označované jako S0

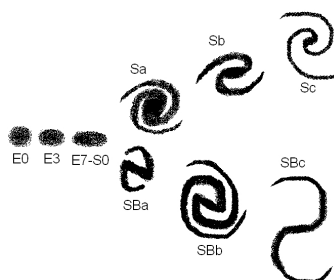
c) **spirální galaxie s příčkou** = ramena se napojují na příčku, která prochází jádrem; označení SB; písmena a, b, c opět vyjadřují velikost a výraznost jádra; vyznačují se výraznější symetrií než normální galaxie

d) **nepravidelné galaxie** = charakteristické neuspořádaným vzhledem, struktura nemá žádnou výraznou pravidelnost; označované Irr; existují zde 2 skupiny: Irr I jsou galaxie, které v Hubbleově třídění můžeme zařadit za typ Sc resp. Sd, obsahují velké množství mladých hvězd typu O, B a mezihvězdné hmoty, v některých lze dokonce pozorovat náznak ramen; naopak Irr II jsou skutečně nepravidelné/amorfnní útvary, neobsahují hvězdy jasnější než $M = 4,0$; obsahují též značné množství mezihvězdného plynu a prachu

+ ostatní či zvláštní typy jsou zastoupeny cca 13%; např. **Seyfertovy galaxie** jež mají malé, ale neobvykle jasné jádro s pohyby plynů až 5000 km/s, kompaktní zdroj rádiového záření; **rádiové galaxie** se vyznačují nadbytkem rádiového záření (v porovnání k záření optickému), jde většinou o nejhmotnější galaxie E, rádiové záření vychází obvykle ze dvou laloků vyvržených z galaxie do dvou protilehlých směrů téměř rychlostí světla, záření netepelné – synchrotron, vyvržené útvary větší než samotná galaxie (vzdálenosti od jádra až stovky kpc); **N-galaxie** mají jasně viditelné malé jádro, které produkuje velkou část záření celé galaxie, silně září v rádiovém a UV oboru (vlastnostmi tvoří přechodný typ mezi normálními galaxiemi a kvasary); podobné jsou **modré kompaktní galaxie** (BCG), ale vyznačují jen málo rádiového záření; QSG = kvazistelární galaxie, též **kvasagy** – malé, velmi husté galaxie se slabším rádiovým zářením; QSO = kvazistelární objekty, **kvasary** – 1963, je jich asi stokrát méně než QSG, velmi malé úhlové rozměry, široké emisní a úzké absorpční čáry, silné rádiové záření, značný rudý posuv, tj.

³⁸ Hlavní roli při procesu kanibalismu hrají neviditelné sféroidy (hala) temné látky. Jsou to jejich vlastnosti, jež určují, „která z galaxií vyhraje“. V optickém oboru pozorujeme až výsledky tohoto střetnutí, kdy se mezi jinak relativně vzdálenými galaxiemi realizují různé mosty či vlákna kudy proudí látka z jedné galaxie do druhé.

nejvzdálenější a nejsvítivější vesmírné objekty ($5 \cdot 10^{40}$ W)



Původní Hubbleova myšlenka, že naznačené třídění ukazuje vývoj galaxií nepravděpodobná. Tvar spíše závisí na úhlovém momentu – vyšší koncentrace hmoty v jádře pomalu rotujících galaxií vede spíše k eliptickým útvarům, rychle rotující systémy spíše k plochým galaxiím se spirálními rameny. Celková hmotnost zřejmě příliš neovlivňuje tvar, lze najít trpasličí eliptické galaxie, u kterých celková hmotnost není pravděpodobně vyšší než $10^5 M_{\odot}$, právě tak jako obří útvary s celkovou hmotností $10^{13} M_{\odot}$. Rozsah hmotností spirálních galaxií je o něco menší, od 10^9 do 10^{12} . Nicméně trpasličí galaxie (od 10^5 do $10^7 M_{\odot}$) jsou převážně eliptické nebo nepravidelné.

Od E0 přes S0 k Sd resp. SBc až k Irr klesá poměr M/L. To znamená, že galaxie eliptické, zejména E0 mají nejmenší světelný výkon na jednotku hmotnosti, nepravidelné naopak největší. Příčina rostoucího světelného výkonu je v zastoupení mezihvězdné látky (E0 0,2%, Sb 3%, Sc 20%, Irr 37%), ze které vznikají mladé hvězdy s velkou svítivostí.

§ Dodatek o soustavách galaxií, rozložení galaxií v prostoru

Galaxie se vyskytují velmi zřídka v prostoru izolovaně, většinou tvoří různě početné skupiny (od vícenásobných galaxií a malých skupin (groups) s cca 10 členy až po velké kupy (clusters) s cca 1000 členy). Naše Galaxie společně s SMC, LMC a M31 patří k tzv. místní skupině galaxií, jež má v oblasti o rozměru 0,8 Mpc cca 30 členů (většina jsou trpasličí galaxie).

Pozorují se dva typy kup galaxií – pravidelné (sférický tvar, galaxie v nich obsažené značně koncentrované ke středu kupy) a nepravidelné. Typ kupy zpravidla odpovídá typu galaxií, které v ní převažují, tj. v pravidelných převažují eliptické, v nepravidelných spirální a nepravidelené galaxie.

Nadkupy galaxií (superclusters) pak představují obrovská soustředění tisíců až statisíců galaxií, vždy tvořené větším počtem kup a skupin. Určitá nadkupa není izolovaným celkem, ale obvykle je v kontaktu nebo se proniká se sousedními nadkupami. Typická hmotnost zářící látky nadkup je cca $10^{15} - 10^{16} M_{\odot}$. (Např. místní nadkupa v souhvězdí Panny, kam patří zřejmě i Místní skupina, jež leží blízko jejího okraje. Nutno si ale uvědomit, že kupy a nadkupy budou spíše „volná sdružení“ než hierarchický útvar v pravém slova smyslu – soustava může být jen tehdy soustavou, pokud každá její část je částí celku; rozhodující je zde gravitační síla, která se šíří c; pokud je tedy soustava příliš velká, pak každá část se bude vyvíjet víceméně samostatně a celek se prosadí jen v omezené míře.)

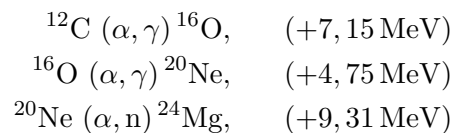
Ve skutečně velkých měřítkách už nenalzáme hierarchicky uspořádané soustavy, ale naopak stejnorodé rozmístění útvarů. Celá pozorovatelná oblast vesmíru – někdy nazývaná metagalaxií – je vcelku rovnoměrně vyplněna velkorozměrovou strukturou,

kteřá připomíná mýdlovou pěnu/mycí houbu . . . Pozorují se tlustá vlákna či spíše stěny, jinde proluky/kaverny. Typický rozsah těchto velkorozměrových struktur je 50 - 100 Mpc. Kupy jsou uspořádány do těchto struktur, nadkupy se vyskytují zejména v místech styku vláken nebo stěn. V měřítku přes 100 Mpc je již rozdělení hmoty homogenní a izotropní.

Velké struktury se také projevují gravitačně – okolní galaxie se k nim přibližují, což se projevuje odchylkami od Hubbleova vztahu. Např. Velký poutač (Great Attractor) ve vzdálenosti cca 100 Mpc směrem do Hydry a Kentaura. Galaxie mezi námi a G. A. se vzdalují větší rychlostí, galaxie za G. A. se vzdalují menší rychlostí . . .

§ Dodatek o nukleosyntéze

Jaderné reakce ve hvězdách vedou ke vzniku prvků hmotnějších než je vodík. Ke vzniku helia vede p - p a CNO cyklus. Počínaje 3α procesem vznikají těžší prvky. Uhlík, který vzniká tímto procesem, se může zúčastnit dalších reakcí:



Poslední reakce je významná tím, že může produkovat volné neutrony, které pak umožňují syntézu těžších prvků (snadno projdou coulombovským valem, mají největší pravděpodobnost, že budou zachyceny). Procesy vedoucí ke vzniku lehčích prvků lze shrnout:

- ${}^4\text{He}$ vzniká spalováním vodíku; ${}^3\text{He}$ při nedokončené p - p reakci
- Li, Be, B vznikají většinou mimo hlavní jaderné procesy, tím lze vysvětlit i jejich relativně nízké zastoupení
- ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{18}\text{O}$, ${}^{22}\text{Ne}$ vznikají spalováním helia; isotopy ${}^{14}\text{N}$, ${}^{13}\text{C}$, ${}^{15}\text{N}$, ${}^{17}\text{O}$ jsou produktem neukončeného CNO cyklu
- ${}^{20}\text{Ne}$, ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{26}\text{Al}$, ${}^{28}\text{Si}$, ${}^{30}\text{P}$, ${}^{32}\text{S}$ vznikají spalováním uhlíku resp. kyslíku

Obecně lze říci, že během života hvězdy dochází ke vzniku prvků postupně, a to tak, že tehdy, kdy je spotřebováno kritické množství prvku méně hmotného, nastoupí v plné intenzitě proces spalování prvku s vyšší hmotností, který je produktem procesu předešlého. Na vzniku prvků těžších než $A = 32$ se podílejí následující děje:

- α -proces: syntéza prvků pomocí α částic při teplotách 10^9 K, tj. procesem (α, γ) , kdy mohou vznikat prvky až do ${}^{40}\text{Ca}$; uplatňuje se tehdy, jestliže helium v jádru plně nevyhořelo
- p -proces: produkuje vzácnější lehké prvky v prostředí, kde je zachováno velké množství jader vodíku a probíhá při teplotách kolem $2,5 \cdot 10^9$ K
- e -proces: vede ke vzniku prvků skupiny železa: V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni; teploty $4 \cdot 10^{10}$ K, relativní počet protonů/neutronů = 300
- s -proces: hraje důležitou roli při budování prvků těžších než železo – produkuje např. Sr, Zr, Ba, Po zachycením neutronů jádru lehkých prvků nebo prvků skupiny železa; probíhá pomalu ve srovnání s β rozpadem, který probíhá souběžně

- *r-proces*: *s-proces*, avšak rychle probíhající vzhledem k β rozpadu; umožňuje vznik těžkých prvků (^{235}U , ^{238}U) na úkor prvků skupiny železa³⁹

Pozn. – Dostoupí-li centrální teplota hvězdy 4.10^{10} K a hustota 10^8 g/cm³, kdy vznikají prvky skupiny železa, konečný stav vyústí v rovnovážné zastoupení ^{56}Fe vzhledem k ostatním stabilním prvkům (železo je nejstabilnější, má největší vazebnou energii na jeden nukleon; jako exotermické mohou probíhat jen ty reakce, jejichž produkt má vyšší vazebnou energii na jeden nukleon, než původní prvek, tj. pro vznik těžšího jádra $A > 56$ z prvku lehčího, je energie spotřebována . . .); rovnováha je *equilibrium*, odtud *e-proces*.

Nadměrným vytvořením těžších prvků by došlo k ochlazení hvězdného materiálu, procesy vedoucí ke vzniku prvků těžších než $A > 56$ nejsou zdroji hvězdné energie. Navíc těžká jádra jsou odolná proti vniknutí nabitě částice, pravděpodobnost, že těžký prvek bude proměněn např. reakcí s protonem v ještě těžší je tak malá, že i za vysokých teplot a velké hustoty protonů by charakteristický čas takové reakce byl srovnatelný s dobou života průměrné hvězdy slunečního typu.

Toto ovšem neplatí o neutronech. Teoreticky možno i lehké prvky změnit v těžší pomocí bombardování neutrony. Těžké prvky mohou tímto způsobem vznikat i za poměrně nízkých teplot. Ovšem neutrony nejsou produkovány při *p-p* reakci ani *CNO* cyklu v dostatečném množství a jejich koncentrace se podstatněji zvýší teprve v pokročilejším stádiu spalování uhlíku. Poněkud příznivější situace nastává tehdy, jestliže hvězdná látka již od počátku obsahuje větší množství těžších prvků jako uhlíku, dusíku apod., které umožňují α reakce uvolňující neutrony, jako je $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ apod.

Dokud je koncentrace volných neutronů nízká, je malá pravděpodobnost jejich srážek s jádry a vznik těžkých prvků probíhá pomalu. Navíc jen izotopy s dlouhým poločasem rozpadu přispívají k tomuto ději podstatněji měrou – ty méně stabilní se rozpadají dříve, než dojde k zachycení dalších neutronů potřebných k tomu, aby jádro dosáhlo stability.⁴⁰ Jelikož proces probíhá pomalu (*slow*), označuje se jako *s-proces*.

Při *r-procesu*, který vyžaduje poměrně velkou koncentraci neutronů, je pravděpodobnost jejich srážky s jádry podstatně větší. Probíhá tedy rychle – *rapid*. Umožňuje vznik těžkých prvků reakcemi, kdy meziprodukt může být i velmi nestabilní izotop.

Za teplot 10^9 K a větších je v jádru rovněž obrovské množství γ kvant tepelného původu s energiemi $\gg 1$ keV, jež umožňují fotodisociaci/fotodesintegraci = reakce, při kterých je pohlcením takového kvanta uvolněn proton, neutron nebo částice α . Takovéto reakce napomáhají vzniku stabilnějších prvků (např. u křemíku nebo síry, ze kterých takto uvolněné nukleony vytvoří jádra skupiny železa).

Tj. veškeré pochody jaderného spalování během aktivního života hvězdy vedou k ^{56}Fe , k hlavnímu konečnému produktu. Nitra hvězd vyplněna „železným popelem“ pozbývají schopnosti vyvolat další proces, který by zajistil uvolňování jaderné energie po delší čas. Většina prvků lehčích než $A < 56$, kromě vodíku, jsou zbytky spalovacího procesu z předchozích etap ve vývoji hvězdy a těžké prvky jsou produkty spíše vedlejších procesů, při kterých důležitou úlohu hrají volné neutrony.

³⁹ Tj. při gravitačním kolapsu/výbuchu supernovy, kdy se hvězdné plazma zahřeje řádově na 100-200 mld. K, proběhne mnoho termonukleárních reakcí, jádra dříve vybudovaná jsou tříštěna na fragmenty a nukleony. V mohutných tocích volných energetických protonů a neutronů dochází k pestré směsí termonukleárních reakcí a ke vzniku dalších chemických prvků/jader. Mezi dvěma zachyceními neutronu je kratičká doba, tj. nemůže dojít k β rozpadu.

⁴⁰ Jako jsou např. prvky s $A = 90, 138, 208$, které mají uzavřené neutronové slupky s celkovým sudým počtem neutronů 50, 82, 126.

Vyhasnutí exotermických reakcí ovšem vede ke smršťování hvězdy a opětovnému zvyšování centrální teploty. U hmotných hvězd dochází k zhroucení centrální části v poměrně krátkém čase a k zvýšení teploty na 10^{10} K. Tehdy ani jádro ^{56}Fe není stabilní a rozpadá se následkem intenzivní fotodisociace. Jelikož ostatní prvky jsou ještě méně stabilní, lze předpokládat, že ^{56}Fe se rozpadne až na jednotlivé nukleony, při tom je samozřejmě spotřebováno značné množství energie, dochází tedy k značnému ochlazení centrální části hvězdy, důsledkem je smršťování probíhající rychlostí volného pádu. Gravitační zhroucení hvězdy je zastaveno jen tehdy, až dojde k degeneraci neutronového plynu při hustotách blízcích se hustotě nukleonů, tj. 10^{14} až 10^{15} g/cm³. Při tomto ději dochází i k vzniku velkého množství neutrin (především anihilací dvojice e^- , e^+). Ohromný proud neutrin a antineutrin unikající z hroutícího se jádra odebírá značnou část energie, takže zbylá energie nestačí k tomu, aby došlo k opětovné expanzi ještě před tím, než nastane stav degenerace. Podstatně jiná je situace ve vnějších vrstvách hvězdy, kde mohou ještě doznívat jaderné reakce, popř. v důsledku intenzivního proudu neutronů vznikají i těžší prvky. Výše popsany děj vede patrně k výbuchu supernovy, jsou odvrženy vnější vrstvy, zbytek = NS.

Ovšem vznik prvků ve vesmíru nelze vysvětlit pouze termonukleárními reakcemi ve hvězdných tělesech, i když je nesporné, že určité množství hmoty v průběhu času prochází různými stavy, kdy se vystřídá vysoká teplota a tlak v nitru hvězd s nízkým tlakem mezihvězdného a mezigalaktického prostředí. Tento proces je označován jako astrace, viz předchozí části – Vývoj látky v galaxii.

Výbuchy supernov jsou tedy důležité pro obohacení galaktického prostoru těžšími prvky. Avšak s prvky lehčími – alespoň s heliem a deuteriem – je nutno počítat už v ranném stádiu vývoje vesmíru. Jelikož termojaderné procesy jsou nejúčinnější mechanismem pro vznik lehkých jader z protonů a deutronů, hledá se původ takových prvků v hustém mimořádně teplém prostředí, které předcházelo období vzniku galaxií, viz průběh *Velkého třesku*, kdy již po cca 100 s mohlo vznikat prvotní D, ^3He a těžší prvky. Teplota byla dostatečně vysoká ($kT > 1,3$ MeV), nastává rovnováha pro reakci typu $p + e^- \leftrightarrow n + \nu$, $n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}$. Poměr počtu protonů a neutronů je možno zjistit z Boltzmannovy rce $N_p/N_n = \exp[-1,3\text{MeV}/kT] \sim 1$. Za těchto poměrů snadno vznikalo deuterium procesem $n + p \leftrightarrow D + \gamma$, které je ovšem za velmi vysokých teplot opět fotodisociováno. Při teplotách $kT \sim 1$ MeV a menších se proces $D + \gamma \leftrightarrow n + p$ prakticky zastavuje a zbylé deuterium zůstává zachováno. Tehdy ovšem klesá i počet volných neutronů vzniklých za vyšších teplot. Životní doba volného neutronu je cca 10^3 s. Znamená to, že do 10^3 s po počátku vesmíru se téměř všechny neutrony buď rozpadnou ($n + P \rightarrow e^- + \bar{\nu}$) nebo podminí vznik deuteria, které pak dále vytváří ^3He , ^4He . V rozhodujícím okamžiku, tj. cca 1000 s „po startu“, tak ustávají jaderné reakce, při nichž vzniklo pravděpodobně přes 90% dnes existujícího helia, výsledný poměr $^4\text{He}/\text{H} \geq 0,1$.

Viz též Relativita, scénář Big Bangu ...

Literatura a zdroje

- Mikulášek Z., Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav, Skripta kurzu, PřF MU, Brno 2000 (převážná většina této kapitoly doslova převzata z tohoto zdroje ...)
- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002
- Příhoda P., Průvodce astronomií, HaP Praha, 2000
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Galaktická a extragalaktická astronomie I & II, Prof. RNDr. Jan Palouš, DrSc., 2004
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Astrofyzika I, Doc. RNDr. Martin Šolc, CSc., 2003

Kapitola 12

Slunce

Sluneční fyzika: Globální charakteristiky Slunce, sluneční aktivita, magnetická pole na povrchu Slunce, procesy v erupcích. Pozorování Slunce v různých oborech spektra. Helioseismologie.

- Globální charakteristiky Slunce, sluneční aktivita. ¹
- Magnetická pole na Slunci. Erupce, procesy v erupcích. ¹
- Vnitřní stavba slunce, helioseismologie. ¹
- Charakteristika Slunce v různých oborech spektra, spektrální diagnostika struktury sluneční atmosféry. ¹

¹pro absolventy přednášky Sluneční fyzika

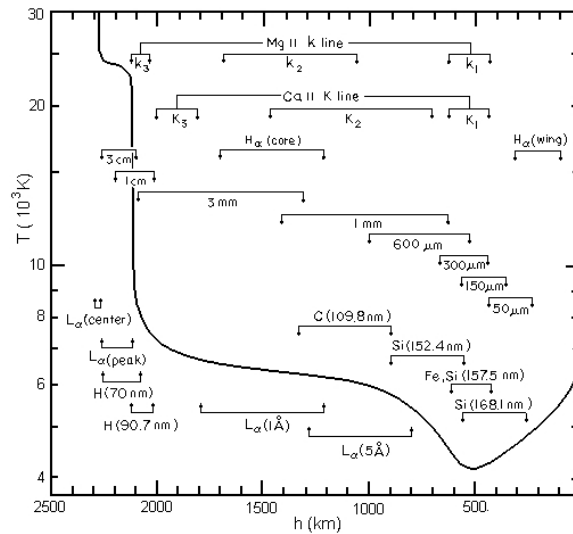
12.1 Slunce – základní charakteristika

Stavba Slunce je určena především jeho hmotností a chemickým složením. Slunce sestává především z vodíku a hélia – zastoupení ve fotosféře je 90,965 % pro vodík, 8,889 % pro hélium. Hmotnost společně s dalšími základními údaji o Slunci je možno najít v tabulce.

stáří	$4,6 \times 10^9$ let
střední vzdálenost Země – Slunce (1 AU)	$149,598 \times 10^6$ km
hmotnost	$1,989 \times 10^{30}$ kg
průměrný poloměr	$695,995 \times 10^6$ m
povrch	$6,087 \times 10^{18}$ m ²
objem	$1,412 \times 10^{27}$ m ³
úniková rychlost	$617,7$ km.s ⁻¹
gravitační zrychlení na rovníku	$274,0$ m.s ⁻²
zářivost	$384,6 \times 10^{24}$ J.s ⁻¹
výkon 1 m ²	$63,29 \times 10^6$ J.m ⁻² .s ⁻¹
přeměna hmoty	$4\,300 \times 10^6$ kg.s ⁻¹
teplota na povrchu (efektivní)	5 770 K
střední hustota	$1\,408$ kg.m ⁻³
teplota v jádru	$1,57 \times 10^7$ K
hustota v jádru	$162\,000$ kg.m ⁻³
tlak v jádru	$2,48 \times 10^{16}$ Pa
hvězdná velikost	-26,74 mag
absolutní hvězdná velikost	+4,83 mag
spektrální typ	G2 V

Zdrojem energie, kterou Slunce vyzařuje do svého okolí, jsou termonukleární reakce, probíhající za extrémních podmínek v centrální oblasti – *slunečním jádru*. Teplota této oblasti je zhruba 15 milionů kelvinů, což společně s dostatečně vysokým tlakem tvoří podmínky nutné pro spojování jader vodíku na jádra hélia. Plazma, které je zahřáto na vysokou teplotu, má tendenci zbavit se své energie a předávat ji svému okolí. Přenos energie se pak děje převážně procesem, který je za daných podmínek nejúčinnější. Do vzdálenosti přibližně 490 000 km od středu Slunce – v tzv. *zářivé vrstvě* – se energie přenáší ve formě fotonů, tj. zářením. Nad touto vrstvou se nachází tzv. *konvektivní zóna* o tloušťce přibližně 200 000 km; zde se chladnější plazma stává pro procházející fotony neprůhledné (zejména díky rekombinaci vodíku) a výhodnějším se stává přenos energie konvekcí – přenos energie prouděním tekutin. Existence konvektivní zóny je velice důležitá; na jejím dně je s největší pravděpodobností pomocí tzv. *slunečního dynama* udržováno a zesilováno magnetické pole Slunce, které je odpovědné za většinu aktivity, kterou můžeme v atmosféře Slunce pozorovat.

Atmosféru Slunce můžeme vertikálně rozdělit do několika oblastí. Nejnižší vrstvou je *fotosféra* = velice tenká vrstva s tloušťkou přibližně 500 km a efektivní teplotou 5 770 K, ze které k nám přichází většina viditelného světla. Plazma se tedy v této vrstvě stává v oblasti viditelného světla průhledné, a fotosféru je možno též definovat jako vrstvu vymezenou optickou hloubkou $\tau_{500} = 1$ (tj. optická hloubka na 500 nm) na jedné straně a teplotním minimem sluneční atmosféry na straně druhé, viz obr. 12.1. Ve fotosféře můžeme pozorovat projevy konvekce, tzv. *granulaci* a *supergranulaci*. Jedná se o vrcholky vze-



Obrázek 12.1: Průběh teploty ve sluneční atmosféře pro model klidného Slunce. Na obrázku jsou též vidět oblasti formování některých spektrálních čar.

stupných proudů s typickou vertikální rychlostí $400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a dobou života okolo 8 minut. Supergranulace je pak projevem konvekce ve větších geometrických měřítkách – typické rozměry jsou 30 000 km. Nejvýraznějším jevem ve fotosféře, a zároveň nejnápadnějším projevem sluneční aktivity², jsou tzv. *sluneční skvrny* resp. skupiny skvrn. Jedná se o oblasti slunečního disku, jež se nám jeví jako tmavší skvrny díky tomu, že mají nižší teplotu (cca 4 000 K) než je teplota jejich okolí. S největší pravděpodobností se jedná o důsledek potlačení konvekce vlivem silného magnetického pole (2 000–4 000 G), tj. díky tomuto magnetickému poli je omezen přísun energie do těchto oblastí. Doba existence slunečních skvrn se pohybuje od několika hodin u nejmenších skvrn až po několik měsíců u těch největších. Dále lze pozorovat fakule a fakulová pole – světlejší a teplejší útvary v okolí skvrn.

Nad fotosférou leží *chromosféra* – vrstva o tloušťce cca 2 000 km, kde teplota vzrůstá z hodnot, jež odpovídají teplotnímu minimu, až na hodnoty přibližně 20 000 K. Jelikož částicová hustota v této vrstvě je ve srovnání s fotosférou výrazně menší (10^{10} cm^{-3} v horních oblastech chromosféry oproti 10^{17} cm^{-3} v oblasti fotosféry), můžeme ji pozorovat pouze během slunečních zatmění resp. pomocí úzkopásmových filtrů v silných chromosférických čarách (nejčastěji H_α). V chromosféře můžeme pozorovat další projevy sluneční aktivity (jež zasahují i do nejvyšší vrstvy sluneční atmosféry – koróny), např. *fokulová pole* (nejjasnější části fakulových polí), *spikule* (lat. *klásky*, plyn vystřelený rychlostí kolem 20 km/s do výšky až 15 000 km s životností cca 10 min), *protuberance* (obлак relativně chladného (7 000 K) a hustého plynu ($n_{\text{H}} = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$; relativně oproti koronálnímu okolí, chladnější i než sluneční povrch pod ním), udržovaný proti gravi-

² Statistická sluneční aktivita: $R = k(10g + f)$, kde k je váhovací faktor; nejdelší řada pozorování, kterou máme (od cca 1700). Dále motýlkový diagram – distribuce skvrn v heliografické šířce vs. čas \leftrightarrow Spörerův zákon = sluneční skvrny v průběhu 11-letého cyklu driftují k rovníku. (Souvisí s dynamo efektem/navíjením čar k rovníku.) Cyklus aktivity 11 let (střední hodnota s kolísáním od 8 do 15 let), resp. rozšířený cyklus 22 let – dochází k úplnému přepólování. Navíc celý cyklus variuje, hlavně ± 80 let (perioda relativních čísel)

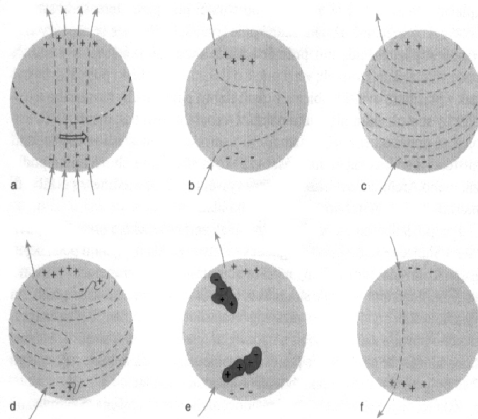
taci magnetickým polem, pozorovaný na slunečním okraji, dokáží do sebe naakumulovat energii a pak ji uvolnit jako CME – eruptivní protuberance), *filamenty* (protuberance promítající se na sluneční disk, tmavá vlákna na světlém povrchu (pohlcují světlo ze spodu)) nebo *sluneční erupce*, jež se v chromosféře projevují jako jasné skvrny či vlákna.

Vnější částí sluneční atmosféry je *koróna* – velmi rozsáhlá oblast obklopující Slunce do vzdálenosti mnoha miliónů kilometrů (přecházející do meziplanetární hmoty). Je tvořena horkým ($T \sim 10^6$ K) a řídkým (částicová hustota $\sim 10^8 - 10^9$ cm⁻³) plazmatem, jež není uspořádáno homogenně, ale vytváří bohaté oblasti s nižší (koronální díry) a vyšší (koronální kondenzace nad aktivními oblastmi) hustotou, zejména v maximu slunečního cyklu. Korónu je možno pozorovat při zatměních Slunce pomocí koronografů umístěných na vysokohorských observatořích nebo pomocí přístrojů umístěných mimo zemskou atmosféru, jež detekují záření EUV (daleké ultrafialové, meze vlnových délek nejsou přesně určeny, přibližně lze brát 15 nm až 150 nm) a SXR (měkké rentgenové, přibližně 1 nm až 15 nm) oblasti spektra.

Mezi chromosférou a korónou je tzv. *přechodná vrstva*, oblast velice tenká, kde na vzdálenosti několika stovek kilometrů prudce stoupá teplota z hodnot chromosférických ($T \sim 10^4$ K) na hodnoty korunální. Tato oblast se pozoruje převážně v emisních EUV čarách.

12.2 Sluneční magnetismus

Za příčinu sluneční aktivity, a tedy i jejích pozorovatelných projevů, je dnes všeobecně považováno sluneční magnetické pole. Ve slunečním plazmatu tečou silné elektrické proudy, jež jsou udržovány konvektivním prouděním podfotosférických vrstev. Jakýkoliv elektrický proud je však doprovázen magnetickým polem. Předpokládá se proto, že vnitřní pohyby Slunce, tzv. *sluneční dynamo*, jsou příčinou slunečního magnetismu.

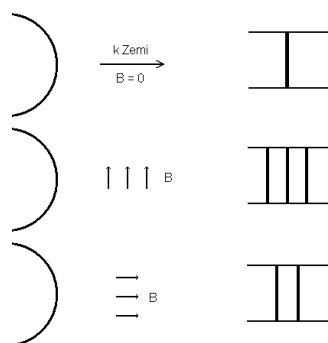


Obrázek 12.2: Vysvětlení schématu slunečního magnetického cyklu.

V oblasti magnetických pólů Slunce je možno naměřit slabé (10^{-4} T) magnetické pole globálního charakteru, které je poloidální (tj. jeho siločáry leží v rovině poledníků) a které střídá polaritu ve dvaadvacetiletém cyklu (tzv. *Haleův cyklus*). Dnes uznávaný model tohoto dvaadvacetiletého cyklu předpokládá, že globální pole předchází vzniku všech polí lokálních. V prvním stadiu je toto pole symetrické, procházející nepříliš hluboko pod povrchem Slunce (viz obr. 12.2 a). Ze studia Slunce pomocí helioseismologie (využití zvukových a tíhových vln ke studiu slunečního nitra) víme, že jádro Slunce rotuje jako tuhé těleso. Zhruba od oblasti, kde začíná konvektivní zóna, však nastává tzv. diferenciální rotace, tj. oblasti v různé vzdálenosti od rovníku rotují různou úhlovou rychlostí (např. rotace na rovníku trvá přibližně 25 dní, v oblastech 40° od rovníku je to již 27 dní).³ Výsledky helioseismologie jsou znázorněny na obrázku 12.9. Dále je nutné si uvědomit, že magnetické siločáry jsou v plazmatu tzv. *zamrzlé* – tímto pojmem vyjadřujeme zachování magnetického toku v plazmatu; siločáry se pohybují s plazmatem a naopak pohybující se plazma s sebou unáší siločáry a deformuje je. Je-li hustota kinetické energie pohybujícího se plazmatu ($1/2 \rho \cdot v^2$) větší než hustota energie magnetického pole ($B^2/8\pi$), jsou siločáry vířivým pohybem plazmatu zamotávány. Kinetická energie plazmatu se tak mění v energii magnetického pole, viz sluneční dynamo. Naopak, silnější magnetické pole strhává plazma s sebou a určuje tak jeho pohyb.

³ Polohu útvarů na Slunci určujeme v heliografických souřadnicích. Slunce se otáčí, můžeme proto určit jeho póly i rovník a obě souřadnice – heliografickou délku a šířku. Vzhledem ke hvězdám se Slunce otočí jednou za 24,96 dne na rovníku, oblasti dále od rovníku se otáčejí pomaleji, průměrně za 25,38 dne (siderická rotace). Sledujeme-li otáčení Slunce ze Země, jeví se pomalejší, protože Země obíhá kolem Slunce v témže smyslu, v jakém se Slunce otáčí. Tato tzv. synodická rotace je 26,9 dne na slunečním rovníku a průměrně činí 27,2753 dní (Carringtonova rotace, od 9.11.1853 souvislé číslování). Rovina slunečního rovníku svírá s rovinou ekliptiky úhel $7,25^\circ$. Proto se k Zemi natáčí střídavě severní pól Slunce (nejvíce v září) a jižní pól (nejvíce v březnu).

V důsledku diferenciální rotace a zamrznutosti siločar jsou tyto v oblasti rovníku strhávány plazmatem a dochází k jejich „navíjení“. Poloidální magnetické pole přechází v toroidální – jeho siločáry leží v rovníkové rovině (viz obr. 12.2 b,c,d). Jak se siločáry navíjejí stále hustěji, dochází k zesilování magnetického pole a magnetické silotrubice (svazky siločar), jež takto vznikly, se mohou vynořit nad povrch. Příčinou je tzv. *magnetický vztlak* – mezi tlakem plazmatu v silotrubici a tlakem v okolí silotrubice je rovnováha; tlak v silotrubici však má dvě složky: tlak plazmatu a tlak magnetický, proto tlak plazmatu v silotrubici musí být menší než tlak plazmatu mimo; jelikož teplota plazmatu vně i uvnitř trubice je stejná, znamená to, že rozdíl tlaků je způsoben menší hustotou plazmatu v silotrubici – silotrubice je tedy lehčí než okolní plazma a je tlačena směrem k povrchu. Přitom se objeví dvojice skvrn s odpovídající polaritou (viz obr. 12.2 e). V poslední fázi pak dochází k přepólování magnetického pole, jež předtím zesláblo. Mechanismus přepólování není zcela objasněn. Nakonec tedy nalezneme po přibližně jedenácti letech opět poloidální pole, ale s opačnou polaritou, viz *jedenáctiletý cyklus* sluneční aktivity.



Obrázek 12.3: Bez magnetického pole uvidíme jednu spektrální čáru, pokud bude magnetické pole kolmo k zorné přímce, uvidíme 3 složky (prostřední je nepolarizovaná, obě krajní jsou polarizované lineárně), pokud bude magnetické pole rovnoběžné se zornou přímkou, uvidíme rozštěp na 2 složky (obě polarizované kruhově s opačnou orientací).

Poznámka o měření mag. pole – Zeemanův jev, do dnes základní metoda měření mag. pole Slunce, $\Delta\lambda = Kg\lambda^2B$, kde K je konstanta a g je Landého faktor (0-6, charakterizuje citlivost spektrální čáry na magnetické štěpení). Jakékoli pohybující se elektrické náboje kolem sebe vytvářejí magnetické pole, naopak magnetická pole ovlivňují pohyb elektronů a ty pak vysílají spektrum poněkud pozměněné. Jedná se tedy o rozštěpení energetických hladin atomů, iontů popř. molekul v magnetickém poli a s tím související rozštěpení spektrálních čar. (Sejmutí degenerace; výběrové pravidlo požaduje, aby se magnetické kvantové číslo při přechodu na jinou hladinu nezměnilo, nebo změnilo o ± 1 , tj. čára se v mag. poli rozštěpí obecně na 3 složky – $\Delta m = 0$ odpovídá lineárně polarizované složce, kde elektrický vektor kmitá ve směru mag. pole, $\Delta m = \pm 1$ odpovídá kruhově resp. elipticky polarizovaným komponentám, elektrický vektor kmitá v rovině kolmé k \vec{B} .) Používají se hlavně čáry s nepříliš velkou vlastní šířkou a tepelně nezávislé. (Obecně jsou čáry rozšířeny i dalšími efekty, a proto lze pozorovat pouze čáry rozšířené Zeemanovým jevem. Ve slunečních laboratořích však lze díky jasů Slunce dosáhnout velké disperze a měření polarizace určit nejen intenzitu magnetického pole, ale i jeho orientaci.) Analogií pro elektrické pole je **Starkův jev**.

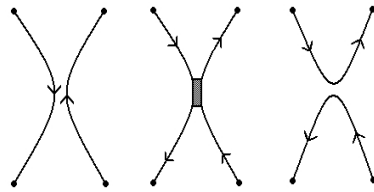
12.3 Erupce – „Standardní model sluneční erupce“

Nejenergetičtější a pravděpodobně tedy nejzajímavějším projevem sluneční aktivity jsou sluneční erupce. Jedná se o jev, při kterém se náhle uvolňuje přebytek energie nashromážděný v určitých částech sluneční atmosféry. Detailní vysvětlení erupčních procesů zatím chybí, jelikož se však erupce vyskytují v místech silných magnetických polí – aktivních oblastech – považuje se za prvotní zdroj jejich energie právě magnetické pole.

Pole ve vrchní chromosféře a vnitřní koróně má obecně stabilní konfiguraci. V důsledku konvektivních pohybů plazmatu v podfotosférických vrstvách však může dojít k takové deformaci jím unášených siločar, jež v daném místě vede ke zvýšení gradientů složek vektoru magnetické indukce. Dle Maxwellovy rovnice v kvazistacionárním přiblížení (*Ampérův zákon*)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

kde \mathbf{B} je magnetická indukce a μ_0 susceptibilita vakua, jsou v tomto místě indukovány proudy s hustotou \mathbf{j} ; při stlačování polí opačné polarity se tvoří tzv. *proudová vrstva*. Ve výsledku tedy dochází ke vzrůstu celkové objemové energie koronálního magnetického pole ($\int_V B^2/8\pi dV$).



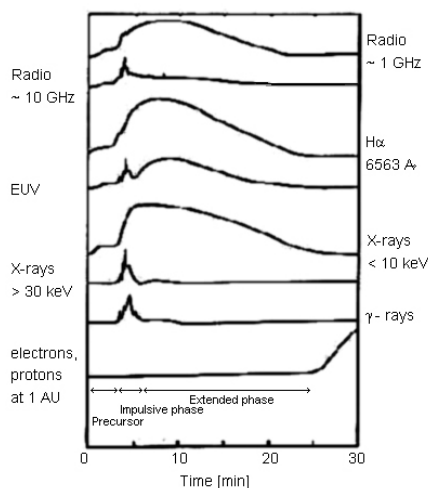
Obrázek 12.4: Schéma rekonexe magnetického pole: a) původní uspořádání magnetického pole, b) vznik proudové vrstvy, c) nové propojení magnetických siločar.

Forma uvolněné energie	Velké erupce [J]	Suberupce [J]
Meziplanetární eejekce a rázové vlny	$(1 - 3) \cdot 10^{25}$	—
SXR, UV záření	$(3 - 5) \cdot 10^{24}$	$\leq 10^{22}$
H_α	$3 \cdot 10^{23}$	$\approx 10^{19}$
HXR (tvrdé rentgenové záření)	$(3 - 5) \cdot 10^{19}$	$\leq 10^{17}$
γ záření	$(1 - 3) \cdot 10^{18}$	—
Urychlené elektrony	$(1 - 3) \cdot 10^{24}$	$\approx 10^{20}$
Urychlené protony	$(1 - 3) \cdot 10^{24}$	—

Pro vlastní vznik erupce je klíčovým momentem zvýšení jinak zanedbatelné rezistivity na anomální hodnotu (např. v důsledku střetu proudové vrstvy s plazmatem, jež má výrazně vyšší teplotu – teplotní nestabilita, nebo v důsledku vzniku turbulentní nestability). Dochází tak k vymizení indukovaných proudů, vzrůstá magnetická difúze a formují se nová propojení magnetických siločar. Nastala tzv. *rekonexe magnetického pole*, viz obr. 12.4. Tato fáze erupce je obvykle označována jako *přederupce* či *přederupční zjasnění*, trvá několik minut a je detekovatelná v EUV a SXR oboru spektra viz obr. 12.5.

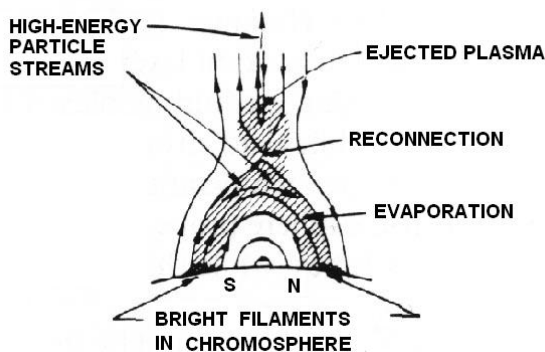
Vlastní rekonexí pak začíná tzv. *impulzní fáze*. Dochází k uvolnění nashromážděné energie ve formě elektromagnetického záření, ohřevu plazmatu (v místě rekonexe) a

zejména kinetické energie tzv. *částicových svazků*. Typické energie těchto svazků jsou ≥ 20 keV pro elektrony a ≥ 20 MeV pro protony. Tyto vysokoenergetické částice se následně pohybují podél nově propojených magnetických siločar, a to jak do nižších oblastí sluneční atmosféry, tak do koróny. V nižších oblastech svazky interagují s částicemi okolního plazmatu, kterému tak předávají svou energii. Plazma se ohřívá a svazky jsou termalizovány. V impulzní fázi dochází k rychlým změnám intenzit záření ve všech spektrálních oborech, viz obr. 12.5.



Obrázek 12.5: Elektromagnetické a částicové záření typické erupce.

Díky prudkému ohřevu plazmatu dochází k jeho vypařování do koronálních oblastí magnetických smyček. Teploty těchto oblastí mohou dosáhnout až 30 MK, výrazně vzrůstá intenzita jejich záření v SXR oboru spektra. Nakonec dochází k postupnému chladnutí (vlivem přenosu energie do nově se tvořících smyček a vyzařování elektromagnetického záření) a plazma padá zpět do chromosféry. Postupný pokles intenzity záření může trvat až několik hodin, hovoříme o *graduální fázi* erupce. Celková energie uvolněná erupcí může přesáhnout 10^{25} J. Energie je uvolňována v různých formách, viz tabulka.



Obrázek 12.6: Schéma předpokládaného erupčního scénáře.

§ Klasifikace erupcí

Existuje mnoho způsobů, jak klasifikovat erupci. Záleží na spektrálním oboru ve kterém provádíme pozorování. Obecně se hovoří o síle erupce či o tzv. *importanci* – mohutnosti. Např. z pozorování v čáře H_α je možno erupci klasifikovat dle plochy, kterou zabírá v době své maximální jasnosti, viz tabulka 12.1. Další způsob klasifikace využívá výrazného zvýšení intenzity záření v SXR oblasti spektra během erupce (viz oddíl 12.3). Dělení do tříd se provádí dle maximální dosažené hodnoty toku energie. V neposlední řadě lze erupce rozdělit do dvou základních tříd dle jejich morfologie. První třídu tvoří rozsáhlé, tzv. *dvouvláknové* erupce. Mají obvykle složitou strukturu, typickým znakem je systém erupčních smyček, ve kterých těsně před fází vzplanutí dochází ke změnám uspořádání na velkorozměrových škálách, a fáze vzplanutí se projevuje zjasněním dvou úzkých vláken na každé straně magneticky neutrální linie (odtud název), která můžeme pozorovat v čáře H_α . Druhým typem (mnohem častějším) jsou tzv. *kompaktní* erupce. Projevují se jako menší (přibližně 10 - 100 krát ve srovnání s erupcemi dvouvláknovými) jasné obloučky a výsledkem jsou pouze malé změny ve struktuře magnetických smyček.

Importance	Plocha erupce (10^{-6} viditelné polokoule)
S (suberupce)	≤ 100 ($\leq 3 \cdot 10^8 \text{ km}^2$)
1	100 - 250
2	250 - 600
3	600 - 1200
4	≥ 1200

Tabulka 12.1: Klasifikace erupcí dle plochy pozorované v čáře H_α .

Třída erupce	Tok energie [W m^{-2}]
A	$\geq 10^{-8}$
B	$\geq 10^{-7}$
C	$\geq 10^{-6}$
M	$\geq 10^{-5}$
X	$\geq 10^{-4}$

Tabulka 12.2: Klasifikace erupcí dle energetického toku v pásmu 0,1 – 0,8 nm.

§ CME

Mnohé větší erupce jsou doprovázeny *koronálním výronem hmoty* (CME, coronal mass ejection). Energie uvolněná v této formě může představovat největší část celkově uvolněné erupční energie, viz tabulka. Ze sluneční koróny je v takovém případě velkou rychlostí vyvržen mrak řídkého žhavého plazmatu, který se podél siločar meziplanetárního magnetického pole pohybuje směrem do hlubin Sluneční soustavy. Takovéto vysokoenergetické částice při interakci s ochrannými vrstvami Země (zemská magnetosféra a atmosféra) způsobují geomagnetické bouře (rozkolísání celého magnetického pole Země trvající několik hodin až dnů) a polární záře. Rovněž představují velké nebezpečí pro citlivou elektroniku družic a kosmonauty na oběžné dráze.

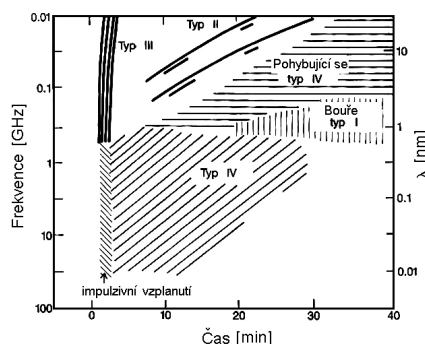
§ Elektromagnetické záření erupce

Elektromagnetické záření produkované erupcemi je ve velmi širokém rozsahu vlnových délek, obvykle od tvrdého rentgenového záření (HXR, $\approx 10^{-2}$ nm), méně často již od γ záření ($\approx 2 \cdot 10^{-4}$ nm), do kilometrových rádiových vln ($\approx 10^4$ m). Charakter záření sluneční erupce je především tepelný, pouze na velmi krátkých vlnových délkách (HXR s $\lambda \leq 0,1$ nm) a v oblasti velmi dlouhých (rádiových) vln se pozorují krátkodobá netepelná vzplanutí, vzbuzená především energetickými částicemi (netepelné brzdné záření, synchrotronové záření aj.). V různých místech sluneční atmosféry vznikají různé typy záření, jež pak nazýváme erupcemi v H_{α} , rentgenovými či rádiovými erupcemi.

Záření erupce v **optické oblasti** je emisní čarové, zejména vynikají nízké čáry *Balmerovy série* a čáry H a K ionizovaného vápníku. Profily těchto čar jsou obvykle velmi široké, a to až zhruba do 1 nm; svědčí tak o vysoké hustotě ionizovaného plynu – tlakové rozšíření, *Starkův jev*. Rovněž se u těchto profilů často pozorují asymetrie, tj. jedno křídlo je širší a intenzivnější než druhé. Výjimečně se mohutné erupce projevují i zjasněním fotosféry. Malé části takové erupce pak můžeme pozorovat v bílém světle (odtud název – tzv. *bílé erupce*), asi 10 min během impulzní fáze. Jsou tvořeny jedním či dvěma jasnými body, jež leží ve stejné vzdálenosti od neutrální magnetické linie, a představují oblasti propojené magnetickými smyčkami procházejícími erupční oblastí.

Rádiové emise při slunečních erupcích se nazývají **rádiová vzplanutí** (prudký vzrůst rádiového toku až o 3 řády), nejčastěji se klasifikují podle mechanismu vzniku.

Jestliže je materiál vymrštěn tak prudce jako při erupci, pak se urychlí a rozkmitá elektrony a ionty na vlastní frekvenci prostředí v místě excitace (tj. poruší se rovnováha v plazmatu a když se budou snažit elektrostatické síly tuto rovnováhu obnovit, elektrony díky setrvačnosti překmitnou, vznikají kmity elektronů vůči iontům/plazmové kmity). Vznikají při tom střídavé proudy a střídavá magnetická pole, pohybující se částice tedy budou vysílat záření. Částice vyzařují rádiové vlny nejen při pravidelném rytmickém pohybu, ale při jakémkoli pohybu se změnami rychlosti. Frekvenci kmitání částic nazýváme plazmová frekvence. Hraje roli při šíření vln v plazmatu – mohou se jím šířit pouze vlny o frekvenci větší než je plazmová frekvence. Uvážíme-li závislost elektronové hustoty na výšce nad fotosférou, dostaneme rovněž závislost plazmové frekvence na výšce. Frekvenční stupnice na rádiovém spektrogramu představuje po transformaci stupnici výšky nad fotosférou (u slunečního povrchu v relativně husté plazmě vznikají milimetrové vlny (kmity s frekvencí stovek stovek GHz), v koróně je plazmová frekvence okolo 10 MHz, což odpovídá 30 metrům). Podle zpoždění se kterým následuje příchod záření na jednotlivých frekvencích se tedy dá usuzovat na čas potřebný k překonání daného výškového rozdílu, a tedy na rychlost pohybu.



V impulsní fázi erupce pozorujeme mikrovlnné a rádiové vzplanutí typu III, jež se projevuje jako krátkodobé zvýšení rádiového toku na všech frekvencích (v pásmu 5 MHz až 4 GHz). Na dynamickém spektrogramu se projevuje ve formě jedné nebo několika svislých stop. Šikmost těchto stop = drift. Z hodnot rychlostí pohybu zdroje se usuzuje, že vzplanutí typu III způsobuje svazek urychlených částic, pravděpodobně elektronů (energie 10-100 keV, rychlost cca 100000 km/s). Při s výškou klesající elektronové hustotě v koróně vzplanutí se záporným driftem představují pohyb zdroje korónou vzhůru, zatímco kladný drift signalizuje pohyb směrem k fotosféře. Po typu III následuje typ II, odvozené rychlosti odpovídají cca 200 - 2000 km/s čemuž dobře odpovídá rychlost šíření rázových hydromagnetických vln, které jsou rovněž intenzivně generovány během erupcí. S mohutnými slunečními erupcemi je spojen další typ vzplanutí, tentokrát označen jako typ IV. Předpokládá se, že záření typu IV je produkováno gyrosynchrotronovým mechanismem. Podle této představy mají elektrony zachycené v magnetické pasti koronální smyčky nerovnováznou rozdělovací fci a tvoří nestabilitu, která se stává zdrojem plazmových vln. Jejich následným rozptylem vzniká rádiová emise. Konečně vzplanutí typu I se na spektrogramu projevuje jako víceméně časově stálé kontinuum v němž jsou prudká a krátká zjasnění. Příčina tohoto vzplanutí je ze všech typů nejméně jasná, ale předpokládá se souvislost s plazmovými a elektromagnetickými vlnami. Vzplanutí se velmi často objeví několik hodin po erupci. Šumové bouře typu I jsou podobné, trvají několik hodin a jsou spojeny s aktivními oblastmi bez erupcí a s rozsáhlými slunečními skvrnami.

Při slabých erupcích se objevuje typ III, při silných typ III, následován typem II a nakonec typ IV (zpravidla, pro vlnové délky okolo centimetrů přijde typ IV ihned po typu III – vzplanutí II je těžko pozorovatelné na krátkých vlnách).

Jinak rádiové záření klidného Slunce je způsobené brzděním elektronů, analogicky vzniká na hladině $\nu = \nu_p$ (kde ν_p je plazmová frekvence) a vyšší.

12.4 Helioseismologie

V několika posledních desetiletích se naskytla zcela nová metoda, která umožňuje vědcům pozorovat už nejen vnější vrstvy Slunce, ale dovoluje podívat se velmi hluboko do slunečního nitra.⁴

Podstata metody byla původně odvozena pro potřeby geofyziky a seismologie. Geofyzikové již dlouho využívají zemětřesení k hloubkové sondáži zemského tělesa, neboť je to v současnosti jediný způsob, jak odhalit některá tajemství skrytá kilometry pod povrchem Země. Jestliže na nějakém místě planety nastane zemětřesení, nejruznější typy vln se rozběhnou od ohniska všemi směry. Každý z těchto typů jinak reaguje na látku, kterou prochází. Některé typy seismických vln se například nešíří v kapalinách. Z pozorování opožděných vln na nejruznějších seismologických observatořích na světě jsme schopni zrekonstruovat, co se s vlnou dělo od doby, co opustila oblast svého vzniku. Tím nepřímou určujeme, jakým prostředím procházela a jak se toto prostředí chovalo. Na Zemi máme situaci značně zjednodušenou faktem, že zdroje seismických vln jsou poměrně ojedinelé a tudíž se nemusíme obvykle zabývat například interferencí různých vln z různých zdrojů.

V případě Slunce je situace podobná, nicméně mnohem složitější. I v nitru Slunce vznikají mnohé vlny. Mechanismus jejich vzniku je v zásadě trojí.

Ionizované plazma se může v tělese Slunce poměrně snadno přemisťovat z místa na místo, ale také se zhušťovat a zředovat. V současnosti se má za to, že původcem snad všech typů vln je náhodné vychýlení nějakého elementárního objemu slunečního plazmatu. Další osud tohoto elementu pak závisí na okolním prostředí. Sledovaný objemový element byl totiž na svém původním místě v rovnováze s okolím. Při vychýlení se dostane do oblastí, kde jsou teplota, tlak i hustota jiné. Nacházíme-li se v oblasti pod konvektivní zónou, průběh teploty, tlaku i hustoty vykazuje nárůst ve směru do středu hvězdy. Pokud bude hustota sledovaného elementu větší než hustota okolí, převáží gravitační síla, která má tendenci vrátit tento element do oblastí, které mají hustotu stejnou. Ze setrvačných důvodů element překmitne na druhou stranu, kde převáží vztlaková síla snažící se element vytlačit opět vzhůru. Celý proces se pak periodicky opakuje a produkuje mechanické vlnění, které se šíří dále slunečním tělesem. Protože je podstatou tohoto typu gravitační síla, nazýváme tento typ *g*-vlnami.

V oblastech blíže sluneční fotosféry se průběh tlaku, teploty a hustoty mění na opačný. Vychýlený element pak není vrácen gravitační silou do své původní pozice, ale naopak je urychlován silou vztlakovou a stoupá vzhůru až k horní hranici konvektivní zóny. Při svém pohybu dává do pohybu tlakové nehomogenity, které se v konvektivní zóně šíří na všechny směry (fyzikálně je tento princip analogický šíření zvuku). Podstatou tohoto typu oscilací je síla tlaková, mluvíme tedy o *p*-vlnách.

Třetí typ má opět podstatu v gravitaci a velmi připomíná vlnění mořské hladiny. Vyzdvižený element způsobí dočasný úbytek hmoty ve svém těsném okolí – vznikne tak jakýsi hřeben a údolí vlny. Hřeben je přitahován gravitací zpět a do údolí též působením gravitace padá látka z okolí. Proces je opět periodický a dává za vznik *f*-vlnám.

Zatím se zdá, že v hlubinách Slunce narážíme na podobné překážky, jako v hlubinách Země. Zatímco *p*- a *f*-vlny jsme schopni poměrně spolehlivě pozorovat a zdá se, že se bez velkých problémů šíří konvektivní zónou, na rozdíl od *g*-vln se nemohou šířit až do jádra a přinášet tedy informace o dění v nejhlubším nitru na povrch. *G*-vlny jsou na tom

⁴ Počáteční impuls: 1960, Robert Leighton na Mt. Wilsonu při studiu supergranulace odhaluje pětiminutové oscilace Slunce (tj. odhalena ne jen konvektivní aktivita, ale i rychlost, která to celé překrývá = sledovaná plocha povrchu se zvedala a klesala v rytmu 5 min (296 s))

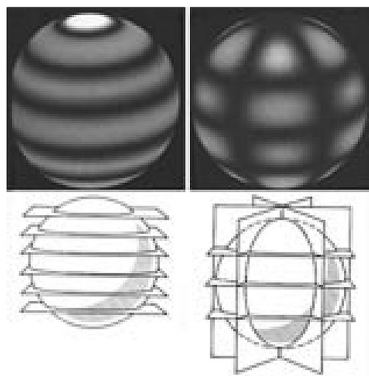
opačně, bez větších problémů se zřejmě šíří jádrem a radiativní vrstvou, nedokážou však buď proniknout až k povrchu a nebo jsou při svém průniku k povrchu již tak slabé, že je zatím nejsme schopni detekovat. Celá experimentální helioseismologie tedy prozatím opírá své závěry o pozorování p -vln.

Situaci komplikuje fakt, že ve slunečním tělese vzniká současně obrovské množství vln z mnoha nejrůznějších zdrojů. Tyto vlny se šíří nitrem hvězdy, odrážejí se, lámou a vzájemně se skládají. Vlny s vhodnou vlnovou délkou mohou vytvořit stojaté vlnění. Jak známo, stojaté vlny mají v některých místech takzvané uzly (v těch fakticky nekmitají), zatímco v jiných mají kmitny. V případě vícerozměrných vln (a to je případ Slunce) se nevytvářejí jednoduché uzlové body, ale celé uzlové obrazce.

Aby však v prostorových tělesech (rezonátorech) mohlo dojít ke vzniku stojatého vlnění, jsou k tomu naprosto nezbytné odrazy od stěn rezonátoru. V nitru Země jsou jednotlivé vrstvy od sebe odděleny diskontinuitami, na kterých dochází ke skokové změně parametrů a dochází na nich buď k odrazu nebo lomu zemětřesených vln. Jenže v nitrech hvězd takové diskontinuity nenajdeme, prostředí hvězdných niter jsou spojitá. Uvážíme-li ale, že se bavíme o vlnách s délkou desítek až stovek tisíc kilometrů, je pro ně fotosféra tlustá přinejlepším 300 km potřebnou diskontinuitou, neboť se v této tenké vrstvičce hustota prostředí mění o tři řády. Slunce tedy funguje jako obrovský rezonátor.

Každá vlna tedy již není popsána zcela jednoduše pouze svou vlnovou délkou, ale je jednoznačně dána uzlovým obrazcem, který způsobuje. Sluneční fyzikové je popisují třemi čísly – jedno z nich říká, kolik uzlových přímků vlna vytváří, další pak udává, kolik z nich prochází pólem. Třetí číslo popisuje radiální chování vlny a hraje podstatnou roli při určování vnitřní rotace. Tato čísla lze získat jednak pozorováním, ale mnohem efektivněji využitím analytické matematiky. Takové vícerozměrné vlny na kouli se využívají v mnoha partiích fyziky a matematiky a dostaly název sférické harmonické funkce.

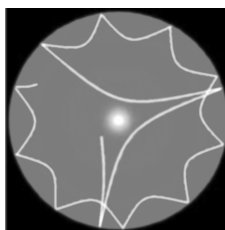
Celkový počet uzlových čar a jejich struktura charakterizuje mod kmitání. Každý mod je jednoznačně vztážen vůči pólu a rovníku. Avšak pro různé mody budou „jejich“ rovníky a póly navzájem různé. Dá se říci, že mohou mít zcela libovolnou orientaci.



Obrázek 12.7: Dva z nepřeberného množství možných modů slunečních oscilací. Vlevo mod popsáný čísly $l=6$, $m=0$, vpravo pak čísly $l=6$, $m=3$. Sousední světlé oblasti se pohybují opačným směrem, v dalším cyklu se pohyby vymění. Schémata dole naznačují polohu uzlových rovin.

Obecně platí, že čím méně má vlna na povrchu uzlových křivek (má nižší mod), tím hlouběji do nitra proniká. Vlna se při svém průniku do nitra dostává do prostředí s vyšší

teplotou a rychlostí zvuku a tedy nižším indexem lomu, prodělává spojitý lom od kolmice, až se v jisté hloubce směr postupu zcela obrátí k povrchu. Dostává se naopak do oblastí s vyšším indexem lomu, spojitě se láme ke kolmici. Vlna proniká zpět do fotosféry, odráží se od ní a cyklus se opakuje. Je-li obvod Slunce celočíselným násobkem vlnové délky, vlna vytvoří stabilní uzlový obrazec. Vlny, jež nevytvoří stojaté vlnění, se vlastní interferencí během cesty nitrem hvězdy rychle utlumí.



Obrázek 12.8: Obrázek zachycuje šíření vln nitrem Slunce. Vlny s nižším modem pronikají hlouběji do nitra než vlny s modem vyšším.

Vlny se projeví oscilacemi v měřených rychlostech plazmatu nebo v jasů povrchových elementů. Rychlosti pohybujícího se plazmatu odvozujeme na základě Dopplerova jevu, z rozdílu vlnové délky vybrané spektrální čáry změřené v laboratorii a z pozorování Slunce. Dopplerovské posuvy spektrálních čar dovedeme v současné době poměrně přesně měřit mnoha metodami a technikami. Přesnost, jíž potřebujeme dosáhnout, je pro leckoho nepředstavitelná. Vezměme si například fakt, že měříme typickou spektrální čáru ve viditelné oblasti spektra, řekněme, že bude mít vlnovou délku 600 nm. Rychlost zdroje 1 m/s směrem k nám znamená posun této čáry přibližně o 0,01 nm. Helioseismologie počítá s pohyby ještě desetkrát menšími. V případě Slunce jsme schopni v rámci rozlišovací schopnosti změřit posuv vybrané vhodné spektrální čáry v libovolném bodě jeho povrchu. Obrázky, které takto vznikají, se nazývají dopplergramy.

Dopplerovských posuvem spektrální čáry se projevují nejen vlnové procesy, ale také procesy konvektivní (granulace a supergranulace). Další komponentou dopplergramů je též sluneční rotace a meridionální cirkulace. Separace jednotlivých komponent je velice složitá úloha. Sluneční rotaci i meridionální proudění lze považovat v krátkých časových okamžicích za konstantní a tudíž je lze obvykle bez větších problémů pouze odečíst. Signál konvektivní komponenty lze získat časovým průměrováním série dopplergramů.

V současnosti nejspolehlivějšími přístroji pro jejich pozorování jsou přístroje projektu GONG a též přístroj MDI na družicové observatoři SOHO. V některých obdobích své existence pořizoval MDI celodiskové dopplergramy s kadencí šedesáti sekund s rozlišením 1024 x 1024 pixelů (čili přibližně 2" na obrazový bod) a právě tato data se stala základem pro budování moderní helioseismologie.

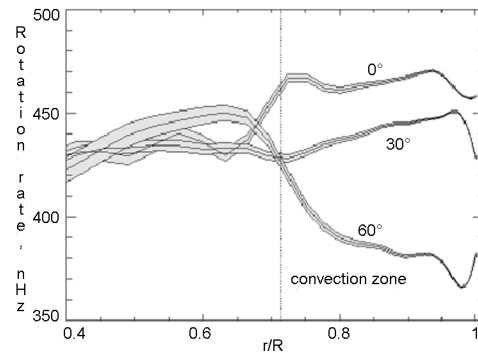
Úkol tedy není úplně složitý. Abychom získali přehled o podpovrchových vrstvách Slunce, studujme chování p - a g -vln, které vznikají v nitru Slunce. Je tedy jasné, že pokud budeme v čase sledovat vlnění jednoho bodu sluneční fotosféry, získáme spoustu informací o chování vln v nitru a tudíž o nitru samém. Budeme-li sledovat vlnění všech bodů povrchu, získáme informací mnohem více.

To je podstata moderní helioseismologie. Sledují se pohyby všech bodů obrazu Slunce v dané spektrální čáře. Pravidelně se pořizují dopplergramy a s využitím rozkladu do sférických harmonických funkcí lze pak v měření, jež zahrnují složené vlnění mnoha

zdrojů, identifikovat jednotlivé vlny. Vývoj rozkladu měření do sférických funkcí v čase je pak odrazovým můstkem pro identifikaci jednotlivých oscilačních modů. Jak jsme si již řekli, každá vlna proniká do jiné hloubky nitra Slunce a tudíž přináší jinou důležitou informaci. Spektrum doposud detekovaných oscilací začíná na periodách 1,5 minuty a končí přibližně u 20 minut, vlnové délky těchto modů počínají na nějakých tisících kilometrech a končí na rozměru slunečního glóbu.

Zatím jsme se zabývali aplikací helioseismologie globální, tedy takové, která využívá celodiskového signálu oscilací. V posledních letech je na vzestupu poněkud odlišná metoda – takzvaně lokální helioseismologie (*time distance helioseismology*). Metoda je aplikovatelná bez výhrad na p -mody oscilací. Vychází ze způsobu průniku zvukové vlny konvektivní zónou, kdy vlna prostupuje prostředím se zmenšujícím se indexem lomu, láme se od kolmice, v určitém bodě se zcela obrací a vrací se k povrchu. Sluneční fyzikové dovedou na základě vlnového čísla vypočítat, kde se bude nacházet tento bod obratu a také vypočítat polohu kružnice (nesmíme zapomenout, že jde o vlnění třírozměrné), na niž by se měla vlna vrátit v případě přesně homogenního podpovrchového prostředí. Z rozdílů časů, v nichž se vlna vrací do různých bodů této kružnice je možné usuzovat na podpovrchová proudění nebo magnetická pole pod povrchem analyzované oblasti.

A jaké jsou výsledky moderní helioseismologie? Helioseismologie dala odpovědi na některé otázky týkající se stavby a složení slunečního nitra. Je také jedinečným a velmi mocným nástrojem pro nezávislé ověřování teoretických modelů. Ukázalo se například, že konvektivní vrstva je mohutnější, než se původně předpokládalo. Podle současných představ založených na helioseismologických pozorováních leží dno konvektivní vrstvy na 0,67 poloměru Slunce.



Obrázek 12.9: Graf frekvence sluneční rotace jako funkce poloměru na třech heliografických šířkách: 0, 30 a 60 stupňů. Tato ukázková data byla získána během dvou měsíců pomocí přístroje *MDI* (*Michelson Doppler Imager*) v rámci experimentů družice *SOHO* (*SOLar and Heliospheric Observatory*). S přibývajícím hloubkou se stírá diferenciálnost rotace, radiativní vrstva již rotuje téměř rigidně. Svislou čarou je naznačena přítomnost dna konvektivní zony, pás kolem vypočteného průběhu naznačuje chybový interval.

P -mody se šíří okolním prostředím rychlostí zvuku, která je jednoznačně dána hustotou a teplotou tohoto prostředí. Díky helioseismologii bylo možné zkonstruovat experimentálně získané průběhy hustoty, tlaku a teploty s hloubkou pod povrchem a porovnat je s teoretickými modely. Ukázalo se, že se oba průběhy moc neliší až na několik bodů. Jedním z nich byly významné odchylky právě kolem 0,67 poloměru, kde se téměř skokem

mění rychlost zvuku. Přesně tak bylo odhaleno dno konvektivní vrstvy. Podobný skok na hodnotě 0,25 slunečního poloměru zřejmě odhalil přechod mezi jádrem a vrstvou v zářivé rovnováze.

Podobným způsobem se podařilo zmapovat závislost rotační rychlosti na heliografické šířce v nitru Slunce. Zatímco fotosféra vykazuje značnou diferenciální rotaci (v rovníkových oblastech je rotace značně rychlejší, než v oblastech polárních), helioseismologická měření ukazují, že se tato závislost s hloubkou ztrácí a Slunce rotuje v samém nitru prakticky jako pevné těleso. Tím definitivně padla představa o válcově symetrické rotaci nitra, která by dobře vysvětlovala diferenciálnost pozorovanou ve fotosféře, ale těžko se pro ní hledá fyzikální opodstatnění. Stejně tak vzalo za své jiné vysvětlení nejen diferenciální rotace fotosféry, ale i tvorby silného magnetického pole – rychlejší rotace jádra. Helioseismologická pozorování ukazují, že tomu tak není, že jádro se otáčí pomaleji než fotosféra v rovníkových oblastech a tedy přesné vysvětlení tohoto jevu je nadále záhadou.

Nejvíce viditelným výsledkem lokální helioseismologie je trojrozměrný obraz proudění plazmatu v okolí sluneční skvrny a také pod ní. Měření ukazují, že sluneční skvrna je poměrně mělký útvar (5000 – 10000 km hluboký). Při analýze nebyly nalezeny žádné příznaky vnořující se smyčky magnetické silotrubice vycházející ze spodní části konvektivní vrstvy. V případě potvrzení tohoto experimentálního faktu by to znamenalo narušení jednoho z vysvětlení mechanismu slunečního cyklu, které je dnes přijímáno širokou komunitou slunečních fyziků.

Helioseismologie je jedinečný nástroj, který dává možnost mapovat sluneční aktivitu i na odvrácené straně Slunce pomocí analýzy časového vývoje rychlostních polí na straně přivrácené. Metoda využívá experimentálně zjištěného faktu, že magnetická pole se značnou měrou podílejí na pohlcování a rozptylu šířících se oscilací. Takto lze lokalizovat poměrně spolehlivě i na odvrácené straně silná lokální magnetická pole, jejichž existence je pravidelně spojena s výskytem aktivních jevů, mezi něž patří například sluneční skvrny nebo protuberance a chromosférické erupce. Sluneční fyzikové dostali možnost, jak sledovat skvrny i na odvrácené straně a sledovat jejich vývoj a usnadnili si tak předpovědi sluneční aktivity.

Literatura a zdroje

- Švanda M., Helioseismologie – moderní směr ve výzkumu Slunce, *Astropis* 1/2003
- Prosecký T., 2005, Studium asymetrie profilů spektrálních čar slunečních erupcí, diplomová práce, MFF UK + zdroje zde uvedené . . .

Část IV

Kosmická elektrodynamika

Kapitola 13

Kosmická elektrodynamika

Požadavky

Vlny v plazmatu: Popis vln, fázová a grupová rychlost, plazmová frekvence, zvukové vlny, elektrostatické elektronové a iontové vlny, elektromagnetické elektronové a iontové vlny, přehled elementárních vln, srovnání s Jeansovou teorií.

Difúze a odpor v plazmatu: Střední volná dráha, Fickův zákon, ambipolární difúze, difúze mezi rovnoběžnými stěnami a napříč magnetickým polem, plně ionizované plazma, specifický odpor plazmatu.

Stabilita plazmatu: Hydromagnetická rovnováha, parametr beta, difúze magnetického pole do plazmatu, klasifikace nestabilit, dvousvazková a gravitační nestabilita.

Základy kinetické teorie: Fyzikální smysl rychlostního rozdělení. Boltzmannova a Vlasovova rovnice, srovnání s magnetohydrodynamikou. Landauův útlum.

+

Fyzika plazmatu: Pohyb nabitě nerelativistické a relativistické částice v plazmatu. Základní rovnice magnetohydrodynamiky. Tepelné a netepelné záření. Synchrotronové záření, inverzní Comptonův jev.

Otázky

- Definice plazmatu. Saha rovnice. Debyeova délka. Kritéria pro existenci plazmatu.
- Driftové pohyby nabitých částic ve vnějším elektrickém a magnetickém poli.
- Základní rovnice magnetohydrodynamiky. Jednokapalinový a dvoukapalinový model.
- Vlny v plazmatu
 - Elektronové vlny v plazmatu.
 - Iontové vlny v plazmatu.
 - Difúze odpor a stabilita plazmatu.
- Kinetická teorie plazmatu. Vlasovova rovnice. Porovnání s magnetohydrodynamikou.
- Netepelné záření. Pohyb elektronu v magnetickém poli, cyklotronové a synchrotronové záření. Comptonův jev. ¹
- Fyzika plazmatu, základní rovnice magnetohydrodynamiky ²
- Pohyb a záření nabitě částice v magnetickém poli (nerelativistický a relativistický případ) ²

¹ !!!Otázka z části obecná fyzika!!!

² !!!Otázky z povinné části astrofyzika!!!

13.1 Plazma - úvodní průřezový článek

Plazma je **kvazineutrální** plyn tvořený soustavou nabitých a nenabitých částic, vyznačující se **kolektivním chováním**. Plazma je charakterizováno svou **hustotou** n (počtem částic v m^{-3}), **teplotou** T (v K či eV) a **stupněm ionizace**.

Kvazineutralita se vztahuje k rozměrům plazmatu a lokálním poruchám potenciálu. Jestliže je charakteristický rozměr plazmatu L podstatně větší než tzv. **Debyeova délka** λ_D , považujeme plazma za kvazineutrální. Debyeova délka je vzdálenost, na které je možno předpokládat odstínění eventuální poruchy potenciálu (způsobenou např. náhodnou fluktuací hustoty elektronů či iontů) a je definována vztahem

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k T_e}{n e^2} \right)^{1/2},$$

kde ε_0 je permitivita vakua, k je Boltzmannova konstanta, T_e je teplota elektronové komponenty a e je náboj elektronu.

Poměr mezi hustotou nabitých a nenabitých částic (tedy stupeň ionizace) v rovnovážném plazmatu je dán **Sahovou rovnicí**

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \cdot 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp \left(-\frac{U_i}{kT} \right).$$

Zde n_i , n_n je hustota nabitých/ionizovaných a neutrálních částic, T je teplota plynu v K, U_i je ionizační energie v eV, k je opět Boltzmannova konstanta.

Definice teploty je svázána s předpokládaným maxwellovským rozdělením rychlostí a počtem dimenzí úlohy. Pro případ jednodimenzionální má Maxwellova rozdělovací funkce tvar

$$f(v) = A \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Teplotu lze udávat buď v K nebo v eV, převodní vztah je $1 \text{ eV} = 11600 \text{ K}$.

Hustota n a teplota T jsou hlavní parametry, kterými lze odlišit různé typy plazmatu, ať laboratorního, či astrofyzikálního.

Hustota plazmatu n se v různých aplikacích uvažuje v rozmezí od 10^6 m^{-3} až do 10^{28} m^{-3} . Hustota 10^6 m^{-3} se vyskytuje v meziplanetárním prostoru, hustota 10^{20} m^{-3} je typická pro úvahy o řízené termonukleární fúzi v tokamacích, a hustota 10^{28} m^{-3} pro laserovou termonukleární fúzi. teplota plazmatu se pohybuje v rozmezí 10^{-2} eV (v meziplanetárním prostoru) až do 10^4 eV při řízené termonukleární fúzi.

Pro stanovení dynamiky plazmatu se užívá **Boltzmannova kinetická rovnice** pro **kinetický popis**, dále pak existuje fluidní popis a magnetohydrodynamický popis, a pro pohyb částic v plazmatu driftový popis. Pomocí těchto přístupů je možno stanovit podmínky pro rovnováhu a stabilitu, podmínky pro šíření, absorpci či generaci vln v plazmatu.

Boltzmannova kinetická rovnice se užívá pro kinetický popis dynamiky plazmatu pro rozdělovací funkci i -té komponenty plazmatu (tedy pro elektronovou, iontovou či neutrální komponentu plazmatu). Tato rce má tvar

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_c,$$

kde t je čas, \vec{v} je vektor rychlosti, \vec{r} je prostorový vektor, \vec{F} je vektor síly, která na částice působí a $(\partial f_i / \partial t)_c$ je tzv. kolizní člen.

Boltzmannova rce je odvozena z rovnice Liouvilleovy pro soustavu N částic redukcí na tzv. jednočásticové vyjádření, které zachycuje pravděpodobnost výskytu částice v okolí \vec{r} ve fázovém prostoru. V plazmatu je obvykle \vec{F} silou Lorentzovou, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, kde \vec{E} , \vec{B} je elektrické a magnetické pole, buď systému zvnějška vnucené, nebo generované uvnitř plazmatu kolektivním chováním plazmatu (např. vlny v plazmatu). Do srážkového členu jsou zahrnuty náhodné interakce s ostatními částicemi.

Protože Boltzmannova rce obsahuje pole \vec{E} , \vec{B} a protože plazma toto pole také vytváří, je nutno Boltzmannovu rovnici doplnit ještě Maxwellovými rovnicemi, ve kterých je \vec{E} , \vec{B} vztaženo k rozdělovací fci vztahy (při zanedbání externích vlivů)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{\varepsilon_0} \int f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}, \\ \nabla \times \vec{H} &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}.\end{aligned}$$

Zde index α značí částice daného druhu, ε_0 je dielektrická konstanta vakua a μ_0 je magnetická permeabilita vakua.

Jestliže vyjádříme hustotu náboje σ a proudovou hustotu \vec{j} jako

$$\sigma = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}, \quad \vec{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d^3\vec{v}$$

a jestliže budeme definovat hustotu n_{α} a hustotu náboje σ jako

$$n_{\alpha} = \int f_{\alpha} d^3\vec{v} \quad \sigma = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d^3\vec{v},$$

lze vyjádřit předchozí Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Boltzmannova rce tedy tvoří spolu s Maxwellovými soustavu tzv. selfkonzistentních rovnic, které je nutno současně řešit. Protože jde o nelineární soustavu parciálních a integrodiferenciálních rovnic, je problém obecně analyticky neřešitelný a je nutno užívat aproximativních metod. Často se užívá Vlasovovy rce, kterou dostaneme z rce Boltzmannovy, jestliže zanedbáme srážkový člen.

Fluidní popis zachycuje chování plazmatu rovnicemi fluidními. V rámci tohoto popisu je považováno plazma za soustavu vzájemně se prostupujícího elektronového a iontového fluida (neuvažujeme-li neutrální částice). pro každou z těchto komponent lze odvodit, jako momenty Boltzmannovy rce, rci kontinuity, pohybové rce a další vyšší momenty. Jako momenty se zde rozumějí integrály původní Boltzmannovy rovnice, jejichž jednotlivé členy byly násobeny příslušnými mocninami vektoru rychlosti.

pro fluidní rce je definována hustota n_j , rychlost \vec{v}_j a hustota náboje σ_j j-té komponenty jako

$$n_j = \int f_j d\vec{v}, \quad \vec{v}_j = \int \vec{v} f_j d\vec{v}, \quad \sigma_j = n_j q_j.$$

První dvě nejdůležitější fluidní rce pak mají tvar

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \vec{v}) = 0,$$

$$m_j n_j \left[\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t} + (\vec{v}_j \cdot \nabla) \vec{v}_j \right] = q_j n_j (\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B}) - \nabla \cdot \vec{P}_j + \vec{P}_{ij}.$$

Zde \vec{P}_{ij} značí změnu hybnosti vlivem srážek a tensor \vec{P}_j je tensorem napětí. Pro isotropní rozdělovací funkci platí, že $\nabla \cdot \vec{P}_j = \nabla p_j$, kde p_j je tlak j-té složky. První rce je rovnicí kontinuity pro j-tou komponentu, druhá rovnice je pak rovnicí pohybovou j-té komponenty. Soustavu je opět nutno doplnit soustavou rovnic Maxwellových a rovnicí stavovou.

Magnetohydrodynamický popis je odvozen z přiblížení fluidního. Zde je plazma považováno za jednu vodivou tekutinu. Součtem a odečtením odpovídajících rovnic fluidních získáme rci kontinuity, rci pohybovou a zobecněný Ohmův zákon.

Definujme měrnou hmotnost ρ , rychlost pohybu hmoty \vec{v} a hustotu proudu \vec{j}

$$\rho = n_i M + n_e m \approx n(M + m),$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} (n_i M \vec{v}_i + n_e m \vec{v}_e) \approx \frac{M \vec{v}_i + m \vec{v}_e}{M + m},$$

$$\vec{j} = e(n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) \approx ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e).$$

Potom soustava MHD rovnic má tvar (v pořadí rce kontinuity, pohybová, zobecněný Ohmův zákon)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \rho \vec{g},$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}.$$

Zde \vec{g} a η jsou gravitační zrychlení a specifický odpor a tlak $p = p_i + p_e$. Soustavu je nutno doplnit rovnicemi Maxwellovými a rovnicí stavovou.

Driftový popis je nejjednodušším, avšak často velmi potřebným přiblížením pro určení pohybu částic plazmatu. V něm je elektrické a magnetické pole uvnitř plazmatu uvažované jako pevně zadaná veličina. Driftové přiblížení je důležité nejen pro kvalitativní odhad udržení plazmatu v různých plazmatických konfiguracích, ale i pro diskuzi různých typů plazmatických nestabilit. Aniž bychom se zabývali odvozením, uvedeme tři nejzákladnější typy driftových pohybů.

Všechny vycházejí z pohybu částice v homogenním magnetickém poli. Jestliže rychlost částice \vec{v} rozložíme do složky \vec{v}_\perp a \vec{v}_\parallel (kde \vec{v}_\perp značí složku rychlosti, kolmou na siločáru a \vec{v}_\parallel složku rychlosti, rovnoběžnou se směrem siločar), pak částice v homogenním magnetickém poli $\vec{B} = B_0 \vec{z}_0$ (\vec{z}_0 je jednotkový vektor v dekartovském ortogonálním systému x, y, z) rotuje kolem siločáry s poloměrem cyklotronové rotace $r_c = v_\perp / \omega_c$, kde ω_c je tzv. cyklotronová frekvence $\omega_{ci} = |q_i| B_0 / m_i$ (q_i a m_i je náboj a hmota částice). Ve směru rovnoběžném se směrem siločar se částice pohybuje rychlostí v_\parallel .

Driftové přiblížení sleduje rychlost pohybu středu cyklotronové rotace v nehomogenních magnetických polích či v kombinaci elektrického a magnetického pole; driftová rychlost \vec{v}_d je dána výrazy (m a q je hmota a náboj sledované částice)

$$\vec{v}_d = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2},$$

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2},$$

$$\vec{v}_d = \frac{m}{q} \frac{\vec{R}_k \times \vec{B}}{R_k^2 B^2} (v_\parallel^2 + \frac{1}{2} v_\perp^2);$$

(jedná se o případ obecné síly, kombinace elektrického a magnetického pole a případ nehomogenního magnetického pole s křivostí čar \vec{R}_k). Jestliže se částice pohybuje v souřadném cylindrickém systému r, θ, z ve směru osy z podél osové siločáry, a jestliže je magnetické pole podél osy z nehomogenní, potom v adiabatickém přiblížení (které v našem modelu odpovídá malým změnám B během jedné cyklotronové otáčky) platí, že se zachovává tzv. adiabatický invariant μ

$$\mu = \frac{m v_\perp^2}{2B}.$$

V důsledku tohoto invariantu může dojít v místě, kde je splněno, že $v_\perp = v$ k tzv. zrcadlovému efektu, tj. že částice se odrazí v místě z_0 , kde je splněno

$$\mu = \frac{m v^2}{2B(z_0)}.$$

Tento efekt je jednak užít jako způsob ohraničení plazmatu v tzv. zrcadlových nádobách, jednak se objevuje při pohybu částic v toroidálních magnetických zařízeních typu tokamak, a jednak způsobuje zachycení ionizovaných částic ve Van Allenových pásech.

Rovnováha a stabilita plazmatu je velmi důležitou charakteristikou plazmatu. Ukazuje se, že v rovnovážném stavu musí být splněno

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}, \quad c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0},$$

kde \vec{j} je hustota proudu, tekoucího plazmatem. V nejjednodušším případě cylindrického plazmatu platí

$$p + \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B^2 = konst.,$$

kde druhý člen levé strany rovnice představuje tzv. tlak magnetického pole.

Aby plazma bylo stabilní, je nutné, aby se malá náhodná odchylka z rovnovážného stavu (kdekoliv uvnitř nebo na povrchu plazmatu) dále nezvětšovala. Ukazuje se, že celá

řada plazmatických konfigurací této podmínce nevyhovuje, jsou nestabilní. To bylo také příčinou prudkého ochlazení optimizmu v padesátých letech při studiu tzv. řízené termonukleární fúze. Jako klasický příklad nestability uveďme tzv. smyčkovou nestabilitu. Sloupec plazmatu, kterým protéká proud o hustotě i se může v určitém místě vychýlit. Siločáry magnetického pole, daného protékajícím proudem (a které v rovnovážném stavu plazmatického cylindru tvořily kružnice) jsou na vnější straně smyčky řidší než na vnitřní straně. Tlak magnetického pole je tedy na vnitřní straně větší než na vnější straně, a to vede ke kumulativnímu zvětšování výchylky a tedy k nestabilitě.

Kromě této nestability existuje celá řada dalších nestabilit, např. Rayleighova-Taylorova nestabilita, analogická nestabilitě rozhraní dvou druhů kapalin v gravitačním poli. Pokud je těžší kapalina v rovnovážném stavu nad kapalinou lehčí, např. voda nad olejem, jakákoliv perturbace rozhraní vede k jejich téměř okamžité záměně. Intenzivní studium ukázalo, že vhodné konfigurace magnetických polí mohou alespoň nejzhooubnější nestabilitám zabránit.

Vedle nestabilit magnetohydrodynamického typu existují i nestability kinetické. Ty souvisí s nestabilním tvarem rozdělovacích funkcí. Nejjednodušším typem kinetické nestability je tzv. bump-in-tail-instability, která je způsobena poruchou maxwellovské rozdělovací funkce. Ta může být např. realizována elektronovým svazkem, který proniká plazmatem s nenulovou teplotou.

Vlny v plazmatu jsou typickým příkladem kolektivního chování plazmatu. Teorie jejich šíření je poměrně komplikovaná a představuje důležitou část fyziky plazmatu. Šíření vln v plazmatu je možno studovat jak v rámci fluidního přiblížení, tak v přiblížení kinetickém. Kinetický popis je obecnější formou popisu fluidního. Ukazuje na efekty, které fluidní popis principiálně nemůže stanovit.

Uveďme nejdříve popis fluidní. Cílem tohoto popisu je nalézt tzv. disperzní rovnici, která určuje vztah mezi frekvencí vlny ω a jejím vlnovým vektorem \vec{k} . Relace sama pak vyplývá z tzv. selfkonzistentního řešení fluidních rovnic.

Jak již bylo uvedeno v části, popisující soustavu fluidních rovnic, komplikace jejich řešení spočívá jednak v tom, že se jedná o soustavu parciálních diferenciálních rovnic, jednak v tom, že jsou tyto rovnice principiálně nelineární. To pak vyžaduje buď řešení numerické nebo řešení analytické perturbační.

Na rozdíl od šíření elektromagnetických vln ve vakuu (vyznačují se tím, že se jedná o transversální vlny s elektrickou i magnetickou složkou pole, které jsou kolmé na směr šíření), mají vlny, šířící se plazmatem, různé formy polarizace. Ta závisí na parametrech plazmatu a vln. Tato odlišnost je způsobena tím, že elektrické a magnetické pole ovlivňuje dynamiku plazmatu a tím zpětně ovlivňuje i charakter šíření.

Disperzní relace $D(\omega, \vec{k}) = 0$ je obecně závislá na hustotě plazmatu a na tom, je-li plazma vnořeno do magnetického pole, či jedná-li se o plazma bez magnetického pole. Obvykle se uvažuje plazma s homogenní hustotou, vnořené do časově i prostorově konstantního magnetického pole. Z rozsáhlého spektra vln, které se mohou plazmatem šířit, si povšimneme pouze tzv. elektrostatických vln v plazmatu bez vnějšího magnetického pole a vln elektromagnetických, šířících se plazmatem opět bez vnějšího mag. pole.

Vlny elektrostatické (Langmuirovy) se vyznačují zcela zvláštní polarizací. Mají pouze elektrickou složku pole, rovnoběžnou se směrem šíření vlny. Jejich disperzní rovnice má tvar

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3kT_e}{m_e} k^2,$$

kde tzv. plazmová frekvence ω_{pe} je dána vztahem

$$\omega_{pe}^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}.$$

Zde n je hustota plazmatu, m_e je hmota elektronu a k je vlnové číslo. Shora uvedenou disperzní relaci lze odvodit z fluidní pohybové rce pro elektronovou složku, z fluidní rce kontinuity pro tutéž složku a z rovnice Poissonovy. Předpokládá se, že ionty lze považovat za nepohyblivé pozadí, a že porucha hustoty, způsobená vlnou je podstatně menší než hustota neporušená (používá se perturbační metoda a uvažuje se pouze nejnížší perturbace). Disperzní rce umožňuje šíření vln pouze s frekvencí $\omega > \omega_{pe}$.

Elektromagnetická vlna, šířící se plazmatem bez magnetického pole má disperzní rovnici ve tvaru

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2,$$

kde c je rychlost světla. Nalezení disperzní rovnice vyžaduje selfkonzistentní řešení dvou Maxwellových rovnic, rovnice pohybové rovnice kontinuity. Protože se předpokládá, že s dobrou aproximací nepohyblivé ionty tvoří pouze pozadí pro poruchy elektronové komponenty, jedná se u posledních dvou rovnic o rovnice elektronového fluida. Předchozí disperze ukazuje, že reálné řešení (a tedy i šíření) existuje pouze pro dostatečně vysoké frekvence ($\omega > \omega_{pe}$).

Fluidní popis je velmi praktický a umožňuje získat disperzní rovnice pro celý rozsah frekvencí (od stovek kHz po stovky GHz), v širokém režimu hustot plazmatu a velikostí magnetického pole. Není schopen však odvodit zvláštní a důležitý jev, Landauův útlum, vlastní jen kinetickému přiblížení.

Z širokého spektra kinetických efektů uvedeme pouze Landauovu reprezentaci útlumu elektrostatické vlny, šířící se plazmatem bez magnetického pole. Předpokládá se, že neporušená rozdělovací fce f_0 elektronové komponenty má maxwellovský tvar a že ionty tvoří nehybné pozadí. Disperzní rovnice, získaná z Vlasovovy rovnice a rovnice Poissonovy má tvar

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=v_\phi} \right),$$

kde derivace rozdělovací fce (v našem případě záporná) se bere pro rychlosti v splňující rezonanční podmínku $v = v_\phi = \omega/k$. Tato podmínka zároveň vysvětluje mechanismus útlumu - je to rezonanční interakce vlny s částicemi, které se pohybují rychlostí blízkou fázové rychlosti vlny. Pro maxwellovské plazma předchozí rovnice představuje útlum vlny. Naopak, jestliže $\partial f_0/\partial v$ bude mít kladné znaménko, ukazuje disperze na nestabilitu (bump-in-tail-instability), jak jsme se již o tom zmínili.

Kinetické přiblížení lze analyticky řešit pouze v přiblížení (nekonečně) malých amplitud vlny. Interakce vln s konečně velikou amplitudou - tedy ryze nelineární úloha - vyžaduje jiný přístup. Řada úloh je řešitelná pouze numericky na počítačích. Z úloh, které lze řešit analyticky se aspoň zmiňme o zachycení částice do vlny, o kvazilineární aproximaci a o solitonovém řešení.

Řízená termonukleární fúze je jednou z aktuálních aplikací fyziky vysokoteplotního plazmatu. Protože reakce vyžaduje teploty okolo 10^6 K a hustoty 10^{20} částic na m^3 (pro tzv. magnetické udržení, tokamaky) či až 10^{28} částic na m^3 (pro laserovou fúzi), jedná se o plazma plně ionizované, na které lze aplikovat všechny shora uvedené přístupy. V rámci studia magnetického udržení jsou zřejmě nejperspektivnější tokamaky; jejich silným konkurentem je tzv. inerciální udržení, reprezentované hlavně laserovou fúzí.

13.2 Plazma - základy

Plazma je kvazineutrální plyn nabitých a neutrálních částic, který vykazuje kolektivní chování.

V plazmatu jsou nabitě částice, které při svém pohybu mohou vytvářet lokální koncentrace pozitivního/negativního náboje, které vedou ke vzniku elektrických polí. Tato pole ovlivňují pohyb jiných nabitých částic na vzdáleném místě. (× Naopak nějaká neutrální částice se v obyčejném prostředí pohybuje zcela nerušeně až do okamžiku nějaké srážky.) Tj. **kolektivním chováním** se rozumí pohyby, které nezávisí pouze na lokálních podmínkách, ale rovněž na stavu plazmatu ve vzdálených oblastech. (Můžeme mít až „bezsrážkové“ plazma = dálkově působící elektromagnetické síly jsou mnohem větší než síly způsobené obyčejnými lokálními srážkami, které tak mohou být zanedbány.)

Teplota plazmatu – v plynu v tepelné rovnováze se vyskytují částice všech rychlostí, nejpravděpodobnější rozdělení je rozdělení Maxwellovo:

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{1}{2}mu^2/kT\right),$$

kde $f du$ je počet částic v m^3 s rychlostmi mezi u a $u + du$, $mu^2/2$ je kinetická energie a k je Boltzmannova konstanta $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Hustotu n (počet částic v m^3) dostaneme jako

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du.$$

Mezi konstantou A a hustotou n je pak převodní vztah $A = n(m/2\pi kT)^{1/2}$.

Šířka rozdělení je charakterizována konstantou T , kterou nazýváme **teplota**. Pokud spočteme střední kinetickou energii částic s Maxwellovým rozdělení, tj. výraz

$$E_{st} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mu^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du},$$

dostaneme (na stupeň volnosti)

$$E_{st} = \frac{1}{2}kT.$$

Protože mezi T a E_{st} je takovýto těsný vztah, bývá ve fyzice plazmatu zvykem udávat teplotu v jednotkách energie. Pro $kT = 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J dostáváme $T = 11\,600$ K. Převodní vztah je tedy $1 \text{ eV} = 11\,600$ K.

Plazma tak může mít několik teplot současně – např. ionty a elektrony mohou mít odlišná rozdělení s rozdílnými teplotami T_i a T_e (pokud frekvence srážek iontů mezi sebou a elektronů mezi sebou je větší než frekvence srážek mezi ionty a elektrony). Je-li přítomno mag. pole, může dokonce i jediný druh částic mít dvě teploty (síly působící ve směru \vec{B} jsou jiné než síly působící kolmo ...).

Plazma je **kvazineutrální** pokud je „natolik neutrální“, že lze položit $n_i \sim n_e \sim n$, kde n je společná hustota nazývaná *hustotou plazmatu*, ale nikoliv natolik neutrální, aby se všechny elektromagnetické síly ztratily. Tato podmínka je splněna pokud $D \ll L$, kde L je rozměr (oblaku) plazmatu a D je **Debyeova délka** = „vzdálenost, ve které ještě působí náboj částice resp. vzdálenost, ve které je okolními částicemi odstíněn; míra stínící vzdálenosti; udává vzdálenost, do jaké se může vzdálit elektron od svého kladného iontu

a ještě pocíťovat jeho přitažlivost“³, tj.

$$D \equiv \left(\frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2} \right)^{1/2},$$

kde n je počet částic s nábojem e v 1 m^3 . V definici vystupuje elektronová teplota – stínění obecně způsobují pohyblivější elektrony.

Vzrůstá-li hustota nabitých částic, D se zmenšuje (v každé vrstvičce je více elektronů, k odstínění stačí kratší vzdálenost). Naopak D vzrůstá s rostoucím kT_e , bez tepelného neklidu by se odstiňující nábojový oblak zhroutil v nekonečně tenkou destičku.⁴

Pokud je tedy systém daleko větší než Debyeova délka, pak ať kdekoli vznikne lokální koncentrace náboje nebo je do systému zaveden vnější potenciál, jsou tyto odstíněny ve

³ dle Coul. z. přitažlivost mezi e^- a i^+ působí na ∞ vzdálenost; v plazmatu tomu ale tak není \leftarrow v prostoru jsou i další nabitě částice; oblast za Debyeovou sférou se pro e^- jeví jako neutrální kontinuum, mikroskopická pole jednotlivých částic na něj odtud nepůsobí; z oblasti mimo sféru na něj působí jen makroskopické vlivy (el.proud, mag. pole ...)

⁴ *Odvození Deb. délky*: vložme do plazmatu idealizovanou plochu s nábojem, ten bude odstíněn. Pokud by plazma bylo studené bez tepelných pohybů, bude odstínění dokonalé. Avšak teplota konečná \rightarrow částice na okraji stínícího oblaku (kde je el. pole slabé) mají dost tepelné energie, aby unikly z elstat. potenc. jámy \rightarrow „okrajem“ oblaku je poloměr, na němž se potenciální energie \approx tepelné energii částic kT .

Nechť je potenciál ϕ v rovině $x = 0$ udržován na hodnotě ϕ_0 . Chceme spočítat $\phi(x)$. Vyjdeme z Poissonovy rovnice

$$\nabla^2 \phi = - \frac{e(n_i - n_e)}{\varepsilon_0}.$$

(Z *Gaussovy věty elektrost.* $\text{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 = e(n_i - n_e)/\varepsilon_0$; $\vec{E} = -\text{grad} \phi$; $\text{div grad} = \nabla \cdot \nabla = \Delta \dots$)

Je-li hustota v dostatečné vzdálenosti n_∞ , dostáváme $n_i = n_e$.

V místě s potenciální energií $q\phi$ je elektronová rozdělovací funkce

$$f(u) = A \exp[-(1/2mu^2 + q\phi)/kT_e].$$

(Tato rovnice říká: na místě s velkou potenciální energií je méně částic – ne všechny mají dostatečnou energii, aby se tam dostaly.) Integrací $f(u)$ přes všechna u (a s využitím $q = -e$, $n_e(\phi \rightarrow 0) = n_\infty$) dostaneme tzv. **Boltzmannův vztah**

$$n_e = n_\infty \exp(e\phi/kT_e).$$

Dosadíme-li za n_e a n_i do Poissonovy rce, dostaneme

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} n_\infty \left\{ \left[\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \right] - 1 \right\}.$$

V oblasti, kde $e\phi/kT \ll 1$, lze exponenciálu rozvést do Taylora

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} n_\infty \left[\frac{e\phi}{kT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\phi}{kT_e} \right)^2 + \dots \right],$$

(V blízkosti plochy, kde je $e\phi/kT$ velké není zjednodušení možné, tato oblast však mnoho nepřispívá k tloušťce oblaku [potenciál zde strmě padá ...]) Ponecháme-li v rozvoji pouze lineární člen, dostaneme

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{n_\infty e^2}{\varepsilon_0 kT_e} \phi. \quad (\alpha)$$

Můžeme tedy definovat Debyeovu délku D

$$D \equiv \left(\frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2} \right)^{1/2},$$

kde n stojí na místě n_∞ , a řešení rce (α) tj. rce $d^2 \phi/dx^2 = \phi/D^2$ má tvar $\phi = \phi_0 \exp(-|x|/D)$.

vzdálenosti krátké ve srovnání s rozměrem systému L a ponechají tak převážnou část plazmatu (makroskopické rozměry) bez velkých elektrických potenciálů či polí.

Takto popsaný mechanismus Debyeova stínění platí pouze tehdy, je-li v nábojovém oblaku dostatečný počet částic. Jsou-li v oblasti vrstvy jedna či dvě částice, není pojem Debyeova stínění statisticky platný. Podmínka kolektivního chování tedy vyžaduje aby počet částic v Debyeově sféře $N_D = n \cdot \frac{4}{3} \pi D^3 = 1,38 \cdot 10^6 T^{3/2} / n^{1/2}$ byl $\gg 1$.

Poslední podmínka souvisí se srážkami: je-li ω frekvence typických oscilací plazmatu a τ střední doba mezi srážkami s neutrálními atomy, musí platit $\omega\tau > 1$, aby se plyn choval spíše jako plazma než jako neutrální plyn (tj. aby pohyb částic byl řízen převážně silami elektromagnetickými a ne obyčejnými hydrodynamickými jako v případě neutrálního atomu). Podmínky, které plazma musí splňovat, jsou:

1. $D \ll L$
2. $N_D \gg 1$
3. $\omega\tau > 1$

13.3 Driftový popis

V obecném případě gravitačního a elektromagnetického pole je pohybová rce pro částici s klidovou hmotností m_0 a elektrickým nábojem q dána vztahem

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = \gamma m_0 \vec{g} + \frac{q}{c}(\vec{e} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}),$$

kde

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

je relativistický faktor. Nicméně pro začátek z důvodu maximálního zjednodušení z našich úvah gravitační pole a veškeré relativistické jevy vypustíme . . .

Věnujeme se tedy čistě pohybu testovací částice v předem daných elektrických a magnetických polích, a to za předpokladu malých rychlostí . . .

§ Homogenní elektrické a magnetické pole

• $\vec{B} = 0$, elektrické pole $\vec{E} \neq 0$

Pohyb nabité částice v konstantním elektrickém poli \vec{E} je samozřejmě analogický pohybu nějaké hmotné částice v poli gravitačním. Nejjednodušším případem je rovnoměrně zrychlený pohyb směřující ve směru orientace pole, který lze popsat velmi jednoduchou rovnicí

$$m \left(\frac{dv}{dt} \right) = qE.$$

Pohyb částice je tedy rovnoběžný s elektrickým polem a rychlost neustále roste, pokud je toto pole konstantní.

• $\vec{E} = 0$, magnetické pole $\vec{B} \neq 0$

V tomto případě nabitá částice krouží – výsledným pohybem je tzv. **cyklotronní** nebo též **Larmorova rotace/gyrace**. Pohybová rovnice je samozřejmě dána zjednodušením obecné pohybové rce, výsledný tvar je

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Pokud je síla \vec{F} působící na částici stálá (což zde předpokládáme), výsledný pohyb bude kruhový neboť $q\vec{v} \times \vec{B}$ působí vždy *kolmo* na směr pohybu nabité částice. Poloměr dráhy závisí na velikosti B neboť zrychlení potřebné pro pohyb ve dráze s poloměrem r je dáno vztahem $\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r}$, takže dosazením do předchozí rovnice dostáváme $\frac{mv^2}{r} = qvB$, a tedy

$$r_L \equiv \frac{mv_{\perp}}{|q|B}.$$

Toto je definiční rovnice pro tzv. **Larmorův poloměr**, určující poloměr dráhy částice (mm/100 - cm). Střed této dráhy je tzv. **gyrační střed**/střed cyklotronní rotace. Kruhová frekvence ω je obecně dána vztahem $\omega = v/r$ (jelikož $T = 2\pi r/v$ a $\omega = 2\pi/T$), tj. částice se bude po kruhové trajektorii pohybovat s tzv. **cyklotronní frekvencí**

$$\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m}.$$

Ve vztahu pro Larmorův poloměr vystupuje v_{\perp} – složka rychlosti částice kolmá k mag. poli. V případě pohybu obecnou rychlostí, jež má nenulové obě složky rychlosti (tj. kolmou i rovnoběžnou k mag. poli), bude trajektorií částice šroubovice – mag. pole ovlivňuje pouze kolmou složku rychlosti, která tak určuje poloměr trajektorie; složka rovnoběžná, která není mag. polem ovlivňována, určuje „odlehlost“ otáček šroubovice.⁵

Směr kroužení (viz obr) je vždy takový, že mag. pole vytvářené nabitou částicí má opačný směr než vnější pole. Částice plazmatu mají tedy sklon ke zmenšování magnetického pole, plazma je diamagnetické.

+ *Podrobné odvození:*

Položíme-li osu z do směru mag. pole, tj. $\vec{B} = (0, 0, B)$, dostaneme pro jednotlivé složky pohybové rovnice

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y, & m\dot{v}_y &= -qBv_x, & m\dot{v}_z &= 0, \\ \ddot{v}_x &= \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x, \\ \ddot{v}_y &= -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y. \end{aligned}$$

Toto jsou rovnice pohybu LHO s frekvencí ω_c , tedy $\ddot{v}_i + \omega_c^2 v_i = 0$, definovanou vztahem

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}.$$

Řešení pohybových rovnic tvaru LHO bude (jelikož $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega_c \dots$)

$$v_{x,y} = v_{\perp} \exp(\pm i\omega_c t + \delta_{x,y}),$$

kde \pm označuje znaménko q . Fázi δ můžeme zvolit tak, že

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x}, \quad (*a)$$

kde v_{\perp} je kladná konstanta znamenající rychlost v rovině kolmé na \vec{B} , tedy $v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2$. Pak také

$$v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega_c}\dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{y}. \quad (*b)$$

Integrace dá

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}, \\ y - y_0 &= \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme definovat Larmorův poloměr dle vztahu

$$r_L \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}.$$

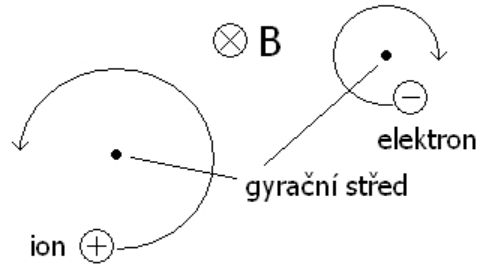
Reálné části předchozích rovnic

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t, \quad y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t, \quad (**)$$

popisují kruhový pohyb okolo gyračního středu (x_0, y_0) , jehož souřadnice odpovídají integračním konstantám ...

⁵ Obecně v reálném případě mohou být dráhy částice samozřejmě velmi komplikované. Při studiu takových situací pak velké zjednodušení přináší přiblížení tzv. gyračního středu. Při něm se namísto přesné dráhy sleduje cesta pomyslného gyračního středu; použitelné samozřejmě pouze tehdy, pokud poloměr gyrač je mnohem menší než charakteristická délková škála na níž je pole nehomogenní a pokud perioda gyrač je mnohem kratší než časová škála spojená se změnou pole.

Larmorovy orbity v magnetickém poli



Tj. díváme-li se ve směru \vec{B} , pak \oplus se pohybuje kladně a \ominus záporně ...

• Navíc konečné \vec{E} pole, tj. zkřížená pole $\vec{E} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$

Přidáme nyní elektrické pole, výsledným pohybem bude součet obou pohybů: kruhová Larmorova rotace plus unášení (drift) gyračního středu. Pohybová rovnice nyní bude

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

její z -tová složka je $dv_z/dt = qE_z/m$, tj. $v_z = qE_z t/m + v_{z0}$, což je prosté zrychlování ve směru \vec{B} . Příčné složky pohybové rovnice jsou

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = 0 \mp \omega_c v_x.$$

Po derivaci dostaneme (\vec{E} je konst.)

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x, \quad \ddot{v}_y = \mp \omega_c \left(\frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right). \quad (\Delta)$$

To můžeme napsat jako (viz podrobné odvození předchozího pohybu)

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right),$$

takže rov. (Δ) je převedena na předchozí případ, nahradíme-li v_y výrazem $v_y + (E_x/B)$. Nyní tedy dostáváme

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t}, \quad v_y = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B}.$$

Larmorův pohyb zůstává týž jako před tím, jen se přes něj překládá drift gyračního středu \vec{v}_{gs} ve směru $-y$ (pro $E_x > 0$). Výsledný drift je kolmý na \vec{E} i \vec{B} , viz obr.

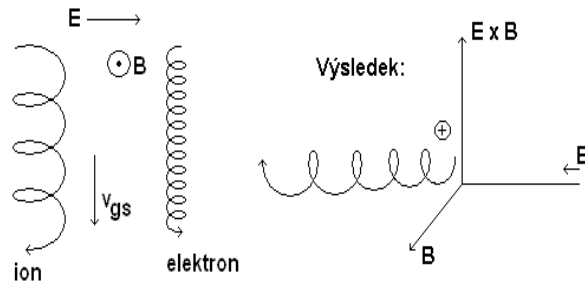
Pro získání obecného výrazu pro \vec{v}_{gs} je nutno řešit výchozí rovnici vektorově, člen $m d\vec{v}/dt$ vypustíme – dává pouze krouživý pohyb s frekvencí ω_c , který již známe. Tj.

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0.$$

Vektorový součin s \vec{B} dává

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = {}^6 = \vec{v} B^2 - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}).$$

⁶ 1. v závorce a skalárně ostatní dva - 2. v závorce a skalárně ostatní dva



Poslední člen je nula ($\vec{v} \perp \vec{B}$), dostáváme tedy

$$\vec{v}_{\perp gs} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \equiv \vec{v}_E.$$

Dostali jsem tedy definici přídavné rychlosti \vec{v}_E , driftu vyvolaného elektrickým polem. \vec{v}_E nezávisí na q , m , v_{\perp} , což je dáno tím, že: v první polorovině svého orbitu získává ion v el. poli energii, zvětšuje se v_{\perp} a tedy i r_L , v druhé půlce oběhu ovšem energii ztrácí a zmenšuje se r_L – různost r_L na levé a pravé straně způsobuje drift v_E ; ovšem záporný elektron krouží v opačném směru, ale energii získává též v opačném směru – výsledkem je drift v témž směru jako drift iontů; podobně budeme-li mít dvě částice s touž energií, ale různou hmotností, pak lehčí bude mít menší r_L a driftový posun připadající na jeden oběh bude též menší, cyklotronní frekvence však bude větší a tyto dva efekty se navzájem zruší ...

Výsledná dráha v třírozměrné prostoru tedy je zešikmená šroubovice s proměnným stoupáním, viz obr.

• Gravitační drift

Předchozí výpočet je speciálním případem tzv. driftových pohybů. V případě, že na částici působí kromě magnetického pole ještě další silové pole, které se mění v průběhu jedné gyrační periody jen velmi málo (v čase i v prostoru), posouvá se gyrační střed driftovou rychlostí

$$\vec{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Je-li tedy působící silou síla gravitační, dostáváme **gravitační drift**

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Tento drift je kolmý jak na grav. sílu, tak na \vec{B} , avšak na rozdíl od předchozího mění znaménko s nábojem částic. Při gravitační síle je tedy drift elektronů a iontů namířen v opačných směrech, vzniká tak proudová hustota $\vec{j} = \tau = n(m + M)(\vec{g} \times \vec{B})/B^2$. Fyzikální příčina driftu: opět změna Larmorova poloměru, když částice získává a ztrácí energii v gravitačním poli; elektrony krouží v opačném smyslu než ionty, avšak síla na ně působí v témž směru \rightarrow drift má opačný směr.

⁷ $\vec{j} = \rho \vec{v}$

§ Další driftы – nehomogenní \vec{B} pole (bez \vec{E})

Pro homogenní pole bylo možno získat přesné výrazy, při proměnných polích příliš komplikované \rightarrow přibližná odpověď se obvykle získává tak, že se výraz rozvine pro malou hodnotu r_L/L , kde L je charakteristická délka nehomogenity ...

• $\nabla B \perp \vec{B}$, grad- B drift

Uvažujme Lorentzovu sílu zprůměrovanou přes jeden oběh. Zřejmě platí, že $\overline{F_x} = 0$, neboť částice stráví stejně dlouhou dobu při pohybu vzhůru jako při pohybu dolů. Dále chceme spočítat přibližný tvar $\overline{F_y}$ – pro výpočet střední hodnoty uijeme neporušený orbit částice daný rovnicemi (*) a (**) pro konstantní \vec{B} pole. Vezmeme-li reálnou část rovnice (*)⁸, dostaneme

$$F_y = -qv_x B_z(y) = -qv_{\perp}(\cos \omega_c t) \left[B_0 \pm (\cos \omega_c t \frac{\partial B}{\partial y}) \right],$$

kde jsme použili Taylorův rozvoj \vec{B} okolo bodu $x_0 = 0, y_0 = 0$ a užili jsme rci (**)

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B} + \dots \rightarrow B_z = B_0 + y(\partial B_z / \partial y) + \dots$$

Tento rozvoj ovšem platí jen pro $r_L/L \ll 1$, kde L je charakteristická délka pro $\partial B_z / \partial y$, tj. pro slabě nehomogenní magnetické pole. Při rotaci je průměrná hodnota prvního členu rovnice pro F_y nula a průměrná hodnota $\cos^2 \omega_c t$ je $1/2$, tj.

$$\overline{F_y} = \mp qv_{\perp} r_L \cdot \frac{1}{2} (\partial B / \partial y).$$

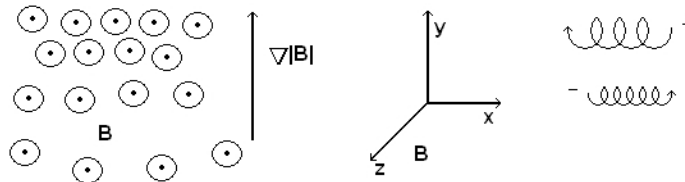
Driftová rychlost gyračního středu pak je

$$\vec{v}_{gs} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\overline{F_y}}{|B|} \hat{x} = \mp \frac{v_{\perp} r_L}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \hat{x},$$

přičemž jsme užili rovnici pro drift při obecné síle. Protože volba y je libovolná, lze výsledek zobecnit

$$\vec{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2}.$$

Tohle je obecný **grad- B drift**. Znaménko \pm zastupuje náboj.



Gradient $|\vec{B}|$, jenž je způsoben změnou velikosti magnetického pole, tedy způsobuje, že Larmorův poloměr je větší v dolní části orbitu než v horní, to vede k driftu pro ionty a elektrony v opačných směrech kolmých jak na \vec{B} , tak i na ∇B . Výsledkem tedy může být proud kolmý k \vec{B} .

⁸ $v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} \rightarrow \text{Re } v_x = v_{\perp} \cos \omega_c t$

Možné je též „logické“ odvození: v slabě nehomogenním magnetickém poli působí na gyrační střed částice fiktivní síla (fiktivní proto, že jde o sílu působící na gyrační střed – přes gyraci byly rovnice vystředovány)

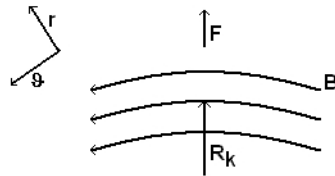
$$\vec{F} = -\mu \nabla |\vec{B}|, \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B},$$

kde μ je magnetický moment proudové smyčky vytvořené Larmorovou rotací částice. Lze ukázat, že tato veličina se zachovává v případě pomalých změn polí v porovnání s gyrací (je tzv. adiabatickým invariantem). Příslušná driftová rychlost tedy má velikost

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3}.$$

Viz též dále.

• Zakřivené siločáry: drift zakřivení



Při pohybu kolem zakřivené siločáry magnetického pole bude na částici působit odstředivá síla

$$\vec{F} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \hat{r} = mv_{\parallel}^2 \frac{\vec{R}_k}{R_k},$$

kde R_k je poloměr křivosti silokřivky. Výsledkem je tedy **drift zakřivení**

$$\vec{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\vec{R}_k \times \vec{B}}{R_k^2}.$$

Nutno však poznamenat, že předpoklad konstantního poloměru křivosti a zároveň konstantní velikosti $|\vec{B}|$ nevyhovuje Maxwellovým rovnicím pro vakuum, a proto se k tomuto driftu vždy přičítá grad- B drift.⁹ Výsledný součet dává drift pro **zakřivené vakuové pole**

$$\vec{v}_{\nabla B} + \vec{v}_R = \frac{m}{q} \frac{\vec{R}_k \times \vec{B}}{R_k^2 B^2} (v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2).$$

⁹ Pro vakuum platí $\nabla \times \vec{B} = 0$. V cylindrických souřadnicích R, ϑ, z dle obrázku tak má $\nabla \times \vec{B}$ pouze složku z , neboť \vec{B} má pouze složku ϑ a ∇B jenom složku r . Dostáváme tak

$$(\nabla \times \vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_{\vartheta}) = 0, \quad B_{\vartheta} \sim \frac{1}{r}.$$

Tj.

$$|\vec{B}| \sim \frac{1}{R_k}, \quad \frac{\nabla |\vec{B}|}{|\vec{B}|} = -\frac{\vec{R}_k}{R_k^2}.$$

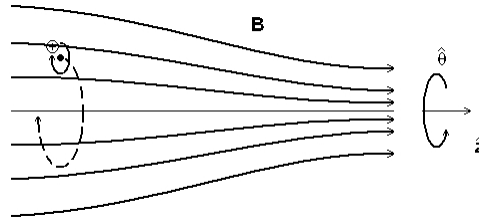
Užijeme-li dříve odvozený výsledek pro grad- B drift, dostáváme

$$\vec{v}_{\nabla B} = \mp \frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_{\perp}}{B^2} \vec{B} \times B \frac{\vec{R}_k}{R_k^2} = \pm \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\vec{R}_k \times \vec{B}}{R_k^2 B} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_{\perp}^2 \frac{\vec{R}_k \times \vec{B}}{R_k^2 B^2}.$$

Bohužel, že se tyto dva driftы sčítají. Stočíme-li totiž ve snaze udržet termonukleární plazma magnetické pole do tvaru toru, částice budou z toru vždy unikat, ať uijeme jakéhokoliv triku při volbě teploty a magnetických polí.

• $\nabla B \parallel \vec{B}$: **Magnetická zrcadla**

Nyní se budeme zabývat magnetickým polem, které je směřováno především podél osy z a jehož velikost se mění ve směru z . Nechť je pole osově symetrické s $B_\vartheta = 0$ a $\partial/\partial\vartheta = 0$. Protože se siločáry sbíhají a rozbíhají, nutně existuje složka B_r , viz obr. Chceme ukázat, že to vede ke vzniku síly, která může částici uvěznit v magnetickém poli.



B_r můžeme obdržet ze vztahu $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Jestliže $\partial B_z / \partial z$ je dáno pro $r = 0$ a příliš se s r nemění, dostáváme přibližně

$$r B_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \simeq - \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0},$$

$$B_r = - \frac{1}{2} r \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0}. \quad (\%)$$

$|\vec{B}|$ měnící se s r způsobuje grad- B drift gyračních středů okolo osy symetrie, ale nevznikne radiální grad- B drift, protože $\partial B / \partial \vartheta = 0$. Složky Lorentzovy síly jsou

$$F_r = q \underbrace{(v_\vartheta B_z - v_z B_\vartheta)}_1,$$

$$F_\vartheta = q \left(\underbrace{-v_r B_z}_2 + \underbrace{v_z B_r}_3 \right),$$

$$F_z = q \left(v_r B_\vartheta - \underbrace{v_\vartheta B_r}_4 \right).$$

Dva členy vymizí, jestliže $B_\vartheta = 0$, a členy 1 a 2 vedou ke vzniku obyčejné cyklotronní rotace. Člen 3 vymizí na ose; tam, kde není nulový, způsobí azimutální síla drift v radiálním směru. Tento drift pouze nutí gyrační středy sledovat siločáry. My se zajímáme hlavně o člen 4. Uijeme-li rce (%), obdržíme

$$F_z = \frac{1}{2} q v_\vartheta r (\partial B_z / \partial z).$$

Nyní musíme středovat přes jeden oběh. Pro jednoduchost uvažujme částici, jejíž gyrační střed leží na ose. v_ϑ pak zůstává při oběhu konstantní; podle znaménka q je $v_\vartheta = \pm v_\perp$. Protože $r = r_L$, je průměrná síla

$$\bar{F}_z = \mp \frac{1}{2} q v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} q \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Magnetický moment rotující částice definujeme vztahem

$$\mu = \frac{1}{2} m v_\perp^2 / B,$$

takže

$$\bar{F}_z = -\mu (\partial B_z / \partial z).$$

To je zvláštní případ síly působící na diamagnetickou částici, která může být obecně zapsána

$$\vec{F}_\parallel = -\mu \partial B / \partial \vec{s} = -\mu \nabla_\parallel B,$$

kde $d\vec{s}$ je element křivky podél \vec{B} .

Při pohybu částice oblastmi silnějšího a slabšího \vec{B} se mění její Larmorův poloměr, ale μ zůstává invariantní. Abychom to dokázali, vezměme z pohybové rovnice její složku podél \vec{B}

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}.$$

levou stranu vynásobíme v_\parallel a pravou jeho ekvivalentem ds/dt a dostaneme

$$m v_\parallel \frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = -\mu \frac{dB}{dt}. \quad (\$)$$

Zde dB/dt vyjadřuje změnu B , jak ji vidí částice; B samo je časově konstantní. Energie částice se musí zachovávat, platí tedy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \mu B \right) = 0$$

a pomocí (§) přechází tato rce ve tvar

$$-\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0,$$

takže

$$d\mu/dt = 0.$$

Na invariantnosti μ je založen jeden ze základních projektů na udržení plazmatu, tzv. magnetické zrcadlo. Pokud částice při svém tepelném pohybu přechází z oblasti se slabým magnetickým polem do oblasti silného magnetického pole, setkává se se vzrůstajícím B a aby zachovala konstantní μ , musí její v_\perp vzrůst. Je-li tudíž v „hrdle“ zrcadla B dostatečně veliké, v_\parallel případně klesne na nulu a částice se „odrazí“ zpět do oblasti slabého pole. Příčinou odrazu je samozřejmě síla \vec{F}_\parallel .

Takovéto zachycení však není dokonalé. Např. částice s $v_\perp = 0$ nebude mít žádný magnetický moment a nebude na ni působit žádná síla ve směru \vec{B} . Částice, která má ve střední rovině ($B = B_0$) malé v_\perp/v_\parallel , rovněž unikne, není-li maximální pole B_m dostatečně veliké.

Které částice při daném B_0 a B_m uniknou? Má-li částice ve střední rovině $v_\perp = v_{\perp 0}$ a $v_\parallel = v_{\parallel 0}$, v místě své obrátky bude mít $v_\perp = v'_\perp$ a $v_\parallel = 0$. Nechť je tam pole B' . Invariantnost μ dává

$$\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2/B_0 = \frac{1}{2}mv_{\perp}'^2/B'.$$

Podle zákona zachování energie musí platit

$$v_{\perp}'^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 = v_0^2.$$

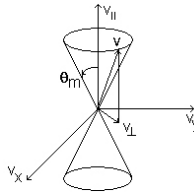
Kombinací předcházejících rovnic obdržíme

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp}'^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} = \sin^2 \vartheta,$$

kde ϑ je úhel stoupání šroubovicové dráhy v oblasti slabého pole. Částice s menším ϑ se odrazí jako v zrcadle v oblastech většího B . Je-li ϑ příliš malé, překročí B' hodnotu B_m a k odrazu částice vůbec nedojde. Nahradíme-li v předcházející rovnici B' hodnotou B_m , získáme výraz pro nejmenší ϑ , při němž se částice zachytí

$$\sin^2 \vartheta_m = B_0/B_m = 1/R_m,$$

kde R_m je zrcadlový poloměr. Poslední rce určuje v rychlostním prostoru povrch kuželové oblasti, nazývané únikový kužel. Částice ležící uvnitř únikového kuželu se nezachytí. Plazma uzavřené mezi zrcadly není tudíž nikdy izotropní. Únikový kužel je nezávislý na q a m . Nedochází-li ke srážkám, jsou ionty a elektrony zachyceny stejnou měrou. Dochází-li ke srážkám, budou částice ztraceny, jestliže ve srážce změni svůj úhel stoupání a dostanou se do únikového kuželu. Ke ztrátě elektronů dochází obecně snadněji, protože mají vyšší srážkovou frekvenci.



Příkladem zrcadlového efektu jsou např. van Allenovy radiační pásy – zachycené částice se odrážejí tam a zpět mezi oběma póly magnetické pasti.

§ Další driftы – nehomogenní \vec{E} , \vec{B} homogenní

Pro případ homogenního magnetického a nehomogenního elektrického pole lze odvodit obecný výsledek

$$\vec{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4}r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Druhý člen se nazývá **efekt konečného Larmorova poloměru**. Protože r_L je daleko větší pro ionty než pro elektrony, není už \vec{v}_E nezávislé na druhu částic. Objeví-li se v plazmatu nějaké zhuštění, může elektrické pole způsobit, že se elektrony a ionty oddělí a vytvoří tak další elektrické pole. Existuje-li mechanismus zpětné vazby, jímž sekundární elektrické pole zvyšuje pole primární, \vec{E} neomezeně poroste a plazma bude nestabilní – **driftová nestabilita**. (Podobně grad- B drift je efektem konečného L. p. a vede rovněž k separaci nábojů. Protože ale $\vec{v}_{\nabla B}$ je úměrný kr_L , zatímco zde je závislost $k^2 r_L^2$, je tedy efekt nehomogenního elektrického pole významný při relativně velkém k neboli už při malých rozměrech nehomogenity.)

§ Další driftы – časově proměnné \vec{E}

Předpokládáme homogenní \vec{E} i \vec{B} ; ovšem bude-li se velikost elektrického pole pomalu měnit v čase, bude se také měnit driftová rychlost \vec{v}_E . To odpovídá působení setrvačné síly

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_E}{dt} = m \frac{d\vec{E}}{dt} \times \frac{\vec{B}}{B^2},$$

výsledkem je pak **polarizační drift**

$$\vec{v}_p = \frac{m}{q} \frac{\vec{B} \times \left((d\vec{E}/dt) \times \vec{B} \right)}{B^4}, \quad \text{resp.} \quad \vec{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\vec{E}}{dt},$$

který je opět původcem proudu v plazmatu (jelikož \vec{v}_p má opět pro ionty a elektrony opačný směr) = polarizační proud, pro $Z = 1$ platí

$$\vec{j}_p = ne(v_{ip} - v_{ep}) = \frac{ne}{eB^2}(M + m) \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{d\vec{E}}{dt}.$$

Fyzikální smysl: necht' existuje nepohybující se ion v magnetickém poli; při náhlém zapnutí pole \vec{E} se začne ion pohybovat nejprve ve směru \vec{E} , teprve když nabere rychlost \vec{v} , pocítí Lorentzovu sílu; zůstane-li nyní \vec{E} konstantní, žádný drift \vec{v}_p už nebude dále existovat, pouze drift $\vec{v}_E \dots \vec{v}_p$ je tedy drift „zapnutí“ a je způsoben setrvačností; opoždění iontů v důsledku jejich setrvačnosti tedy vede ke vzniku polarizačního proudu.

§ Dodatky

• **Časově proměnné \vec{B} :** V případě časově proměnného magnetického pole je nutno si uvědomit, že Lorentzova síla je vždy kolmá na \vec{v} , tj. magnetické pole samo od sebe nemůže předávat nabitě částici energii. Ovšem magnetické pole je s elektrickým spojeno Maxwellovou rovnicí

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

jež už samozřejmě může částice urychlovat.

• Jak již bylo řečeno, v pomalu se měnících magnetických polích je magnetický moment invariantní¹⁰; když se intenzita magnetického pole mění, rozpínají se a stahují Larmorovy orbity a částice ztrácejí a získávají energii příčného pohybu.

Pomocí invariantnosti μ lze dokázat tvrzení, že: magnetický tok Larmorovým orbitem je konstantní. Tok $\phi = BS$, kde $S = \pi r_L^2$, tj.

$$\phi = B\pi \frac{v_\perp^2}{\omega_c^2} = B\pi \frac{v_\perp^2 m^2}{q^2 B^2} = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{mv_\perp^2/2}{B} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu.$$

¹⁰ Pro každý systém s periodickým pohybem je integrál akce přes jednu periodu $\oint pdq$ konstantou daného pohybu, kde p a q jsou zobecněný impuls a souřadnice. Jestliže v systému dochází k pomalé změně, tj. pohyb není zcela periodický, konstanta pohybu se nemění a nazýváme ji adiabatickým invariant. Slovem pomalý se rozumí ve srovnání s periodou pohybu, takže integrál je dobře definován, i když to není po přesně uzavřené křivce. První adiabatickým invariantem je právě $\mu = mv_\perp^2/2B$, příslušným periodickým pohybem je samozřejmě cyklotronní totace. Pokud za p dosadíme moment impulsu $mv_\perp r_L$ a za dq souřadnici $d\vartheta$, dostaneme

$$\oint pdq = \oint mv_\perp r_L d\vartheta = 2\pi r_L m v_\perp = 2\pi \frac{mv_\perp^2}{\omega_c} = 4\pi \frac{m}{|q|} \mu.$$

Pokud se tedy nemění q/m , je μ konstantou pohybu.

13.4 Dodatek k pohybu nabité částice – netepelné záření

Kromě záření tepelného vzniká v kosmickém prostoru též záření původu netepelného. V astronomii je významné **magnetické brzdé záření**, kam spadá i **synchrotronové záření**, záření kosmických maserů, fluorescence mlhovin, anihilační záření, **Comptonův rozptyl** (typicky rozptyl fotonů relativistickými elektrony), energetické záření vzniklé z reliktního záření působením inverzního Comptonova jevu (energie elektronu v pozorovatelské klidové soustavě převyšuje energii rozptylovaných fotonů), **Čerenkovovo záření** ...

Dále existuje třeba tzv. plasmový emisní mechanismus záření: uvažujme velmi horké plazma v termodynamické nerovnováze s ne-Maxwellovským rozdělením (díky nepřítomnosti srážek, zejména v tranzitních událostech jako CME, flares ...). Odchyly od Maxwellovské distribuční fce vyvolají vlny, může dojít k jejich zesílení a k tomu, že tyto vlny prostředí jsou transformovány do EM modu. Výsledkem jsou typicky úzkopásmové rádio emise s možnou jemnou strukturou, což odpovídá např. pozorování solar radio bursts. (Viz též nestability str. 419.)

§ Synchrotron

Velmi významným netepelným zářením ve vesmíru je záření **synchrotronní** = záření vysílané relativistickými elektrony kroužícími v magnetickém poli. Jak již bylo řečeno, na elektrony v magnetickém poli působí Lorentzova síla, kolmá k jejich rychlosti i k magnetickým siločárám, tj. elektrony o hmotnosti m se v magnetickém poli B pohybují po kružnicích resp. šroubovicích o poloměru r s cyklotronovou frekvencí $\omega = v_{\perp}/r$, kde v_{\perp} je složka rychlosti kolmá k B . Elektrony jsou tedy stále odchylovány (urychlovány, neboť mění směr) a při tom vysílají úzký svazek polarizovaného záření ve směru svého pohybu. Vlnová délka závisí na energii elektronu; např. elektron s energií 1 MeV září především v rádiové oblasti, elektron s energií 1 GeV září převážně ve světle. Synchrotronové záření má spojité spektrum, u některých pulsarů sahá od γ až po rádio. Rádiové záření z mezihvězdného prostoru Galaxie i jiných galaxií je synchrotronové – od elektronů kosmického záření kroužících v mezihvězdném magnetickém poli.

Pokud tedy $v \rightarrow c$, pak elektron (jehož celková energie je $E_T \gg mc^2$) vyzařuje energii v kuželi. Osa kužele je ve směru okamžité rychlosti a jeho vrcholový úhel je 2α

$$\alpha = \frac{E_r}{E_T},$$

kde $E_r = mc^2 = 0,511$ MeV je klidová energie elektronu. Jelikož úhel α není příliš široký, chová se elektron jako reflektor obíhající po kruhové dráze. Pozorovatel, který je v rovině kruhové dráhy, zahlédne záblesk záření jedině v okamžiku, kdy se elektron pohybuje ve směru zorného paprsku. Pozorovatel tedy může sledovat sérii záblesků, které se opakují s frekvencí

$$\nu' = \omega'/2\pi = \omega/2\pi\gamma = eB/2\pi m\gamma.$$

Každý záblesk osvětluje pozorovatele po jistý časový interval

$$t_{\Delta} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \frac{2\alpha\gamma}{\omega}.$$

Ze vztahů pro dynamiku velkých rychlostí a vztahu $\alpha = E_r/E_T$ plyne, že $\alpha\gamma = 1$. Protože pro $v \rightarrow c$ lze nalézt, že

$$2(1 - v/c) \sim 1 - v^2/c^2 = \gamma^{-2},$$

pak platí

$$t_{\Delta} = (\omega\gamma^2)^{-1} = (\omega'\gamma^3)^{-1}.$$

Záření záblesku by mělo mít frekvenci úměrnou t_{Δ}^{-1} , ve skutečnosti je však záření spojitě až do jisté „kritické“ frekvence $\omega_c = 2\pi\nu_c$

$$\nu_c = 1/t_{\Delta} = \omega\gamma^2 = \omega(E_T/E_r)^2.$$

Je tedy zřejmé, že $\nu_c > \nu'$. Přesná teorie synchrotronního záření ukazuje, že maximum intenzity spojitěho spektra je u frekvence $\nu_{max} = 0,29\nu_c$. Vyzářená energie jednoho elektronu $dE/dt \sim (\gamma v_{\perp})^2 B^2$.

Synchrotronní záření je polarizované. Rovina, ve které leží elektrický vektor vysílaného záření, je vždy kolmá ve směru magnetického pole, tj. k B . Světlo zdrojů synchrotronního záření, které mají vhodně orientované magnetické pole, bude silně polarizováno. Naproti tomu zdroje, kde siločivky magnetického pole jsou neuspořádané, mají lineární polarizaci světla malou nebo vůbec žádnou.

Spektrální rozdělení intenzity synchrotronního záření je obecně odlišné od Planckova rozdělení, čímž možno rozeznat zdroje netepelného a tepelného záření. Jestliže rozdělení počtu rychlých elektronů n_e s energií E v intervalu dE odpovídá rozdělovací fci $E^{-\gamma}dE$, pak rozdělení intenzity ve spektru synchrotronního zdroje s homogenním magnetickým polem $I_{\nu} \sim \nu^{-(\gamma-1)/2}$ a i když hodnota $(\gamma - 1)/2$ je poměrně malá (přibližně 0,5 - 0,7), intenzita znatelně klesá se vzrůstající frekvencí.

Limita nerelativistického pohybu popisuje **cyklotronové záření** (gyrační) = magnetické brzdné záření, které vysílá elektron obíhající kolem siločáry v magnetickém poli. Frekvence záření se rovná jeho gyrofrequenci. Ta je dána intenzitou jeho magnetického pole: čím je větší, tím je frekvence záření vyšší. Je to tedy záření na určité frekvenci, monochromatické. Pro relativistické elektrony se projevuje relativistické rozšíření gyrofrequence a záření se stává synchrotronovým se spojitým spektrem (tj. spektrum synchrotronové je širokopásmové a rozkládá se kolem kritické frekvence). Přejídný typ mezi cyklotronovým čarovým zářením tepelných elektronů a synchrotronovým zářením relativistických elektronů je **gyrosynchrotronové záření** = záření elektronů v magnetickém poli, které mají rychlost zhruba 100 000 km/s (slabě relativistické elektrony).

§ Comptonův rozptyl

Comptonův vztah popisuje změnu frekvence fotonu při interakci s částicí $\nu_{inic} \rightarrow \nu_{final}$. V praxi nacházejí aplikaci pouze interakce s elektrony. Vztah mezi počáteční a koncovou frekvencí lze vyjádřit ve tvaru

$$\nu_f = \frac{m_e c^2 \nu_i}{m_e c^2 + h\nu_i (1 - \underbrace{\vec{n}_i \cdot \vec{n}_f}_{\cos \vartheta})}.$$

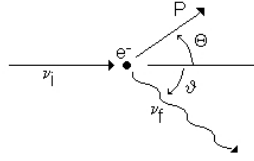
Tento výraz lze odvodit z úvah o zachování hybnosti a energie. Zavedeme-li bezrozměrnou výslednou energii fotonu $e_f = h\nu_f/m_e c^2$, bezrozměrnou výslednou energii elektronu $\gamma_f = m/m_e$, bezrozměrnou výslednou hybnost elektronu p_f mířící ve směru jednotkového vektoru \vec{n}_f ($\gamma_f^2 - p_f^2 = 1$) a odpovídající počáteční hodnoty budou $\gamma_i = 1$, $p_i = 0$, můžeme psát

- Zachování energie:

$$e_i + 1 = e_f + \gamma_f$$

- Zachování celkové hybnosti:

$$e_i = e_f \cos \vartheta + p_f \cos \Theta, \quad 0 = e_f \sin \vartheta - p_f \sin \Theta.$$



Umocněním a sečtením těchto rovnic dostaneme

$$(e_i - e_f \cos \vartheta)^2 + (e_f \sin \vartheta)^2 = p_f^2,$$

a řešení tedy má tvar

$$e_f = \frac{e_i}{1 + e_i(1 - \cos \vartheta)}, \quad \gamma_f = 1 + e_i e_f (1 - \cos \vartheta),$$

$$p_f = e_f \sqrt{e_i(e_i + 2)(1 - \cos \vartheta)^2 + 2(1 - \cos \vartheta)},$$

$$\cos \Theta = (1 + e_i) \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2 + e_i(e_i + 2)(1 - \cos \vartheta)}}.$$

První rci pro e_f lze přepsat pomocí vlnové délky

$$\lambda_f - \lambda_i = \lambda_c(1 - \cos \vartheta), \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e c} \doteq 0,0024426 \text{ nm}.$$

Vidíme tedy, že rozdíl frekvence před rozptylem a po něm je fci pouze ϑ ; nezávisí na počáteční frekvenci. Frekvence nízko-energetických fotonů se při Comptonově rozptylu mění jenom nepatrně ($e_f \approx e_i$ při $e_i \ll 1$). Změna frekvence vysoce energetických fotonů ($e_i \gg 1$) vzrůstá s ϑ .

Z předcházejících rovnic též plyne, že konečná energie rozptýlených elektronů leží v rozmezí

$$1 \leq \gamma_f \leq \gamma_{max}, \quad \gamma_{max} = 1 + \frac{2e_i^2}{1 + 2e_i} \quad (\vartheta = \pi, \text{ zpětný rozptyl})$$

$$\gamma_{max} \approx 1 \quad (e_i \ll 1), \quad \gamma_{max} \approx e_i \quad (e_i \gg 1).$$

Diferenciální účinný průřez $d\Xi$ se definuje (v obecnosti pro jakýkoliv druh interakce) vztahem

$$dN h\nu_i = \frac{d\Xi}{d\varpi_f} d\varpi_f I(\nu_i) dt d\nu_i d\varpi_i,$$

kde $dN h\nu_i$ je energie ztracená během časového intervalu dt z dopadajícího svazku, dN označuje počet rozptylů uvnitř elementu frekvence a prostorového úhlu $d\nu_i d\varpi_i$, $I(\nu_i)$ je intenzita dopadajícího svazku paprsků. Celkový účinný průřez lze získat integrací:

$$\Xi = \int_{4\pi} \left(\frac{d\Xi}{d\varpi} \right) d\varpi.$$

Účinný průřez Comptonova rozptylu se obecně odvozuje v kvantové teorii a je dán tzv. Kleinovou-Nishinovou formulí, kterou lze v mezních případech zjednodušit

$$\Xi \approx \Xi_T(1 - 2e_i), \quad h\nu_i \ll m_e c^2,$$

$$\Xi \approx \frac{3}{8} \Xi_T e_i^{-1} [\ln(2e_i) + 1/2], \quad h\nu_i \gg m_e c^2.$$

Thompsonův účinný průřez $\Xi_T = 8\pi r_e^2/3$ představuje klasickou limitu K.-N. účinného průřezu.

Nerelativistické elektrony se Comptonovým rozptylem vysokoenergetických fotonů ohřívají. Naopak, nízkoenergetické fotony se ohřívají inverzním Comptonovým rozptylem na ultrarelativistických elektronech. Po dostatečně dlouhém čase se ustaví rovnováha mezi oběma těmito projevy téhož jevu.

Inverzní Comptonův rozptyl tedy je srážka relativistického elektronu s fotonem, při níž elektron předá část své energie fotonu. Foton má tedy po srážce vyšší frekvenci. Tento proces probíhá ve velkém měřítku v mezihvězdném prostoru. Energie relativistických elektronů kosmického záření obohacuje fotony reliktního záření natolik, že je v něm gama-zářením. Tímto procesem vzniká gama-pozadí oblohy.

13.5 Přístupy k plazmatu

Situace v plazmatu je však podstatně komplikovanější než v předchozí části, jelikož pole \vec{E} a \vec{B} nejsou předem dána, ale určují je rozmístění a pohyby samotných částic, tj. jde o self-konzistentní problém – hledáme soubor trajektorií částic a konfigurací polí tak, aby tato pole byla vytvářena částicemi při jejich orbitálním pohybu a aby částice byly těmito poli nuceny pohybovat se právě v těchto orbitech; navíc se toto vše mění s časem. Při velkém počtu částic v plazmatu jde o problém značně komplikovaný, jako základní přístup se tedy používá hrubé zjednodušení užívané mechanikou tekutin (jež však stačí pro popis poměrně široké škály pozorovaných jevů) – nehledí se na identitu jednotlivé částice, sleduje se pouze pohyb elementů tekutiny, jež v případě plazmatu navíc obsahuje elektrické náboje.

Rovnice popisující plazmové procesy:

§ Kinetický popis

Plazma je popsáno **distribuční funkcí** $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, jež udává počet částic v elementu 6D fázového prostoru se souřadnicemi \vec{r} , \vec{v} a v čase t ; je řešením **Boltzmannovy kinetické rovnice**¹¹

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{coll},$$

kde \vec{F} je obecná síla působící na částice, resp. zde Lorentzovská $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Na pravé straně je tzv. „srážkový člen“ charakterizující změnu f za jednotku času v důsledku srážek. Symbol $\partial/\partial \vec{v}$ čili ∇_v je samozřejmě gradient v rychlostním prostoru

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z}.$$

Smysl B. k. rce: f je fcí sedmi proměnných, tj. její totální derivace dle času je

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_y} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{dv_z}{dt},$$

kde $\partial f/\partial t$ vyjadřuje explicitní závislost na čase, následující tři členy jsou právě $\vec{v} \cdot \nabla f$ a dle Newt. zákona $m(d\vec{v}/dt) = \vec{F}$ poznáváme v posledních třech členech $(\vec{F}/m) \cdot (\partial f/\partial \vec{v})$. Totální derivace vyjadřuje rychlost změny, a tedy B. k. rce říká, že změna rozdělovací fce s časem je nulová, dokud nedochází ke srážkám. Plasma má mnoho komponent (e^- , p^+ , ionty různých prvků ...), B. rce. se v nejobecnější případě řeší pro každou zvlášť.

Pokud je kolizní člen malý (řídke, dostatečně horké plazma, plasmová frekvence \gg frekvence srážek), můžeme použít aproximaci bezsrážkového plazmatu, „srážkový člen“ = 0, B. k. rce. přechází v rovnici **Vlasovovu**, kterou lze pro případ, že \vec{F} je síla výhradně elektromagnetická zapsat jako

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = 0,$$

¹¹ Viz část Statistická fyzika ...

Pokud je naopak srážek mnoho, volí se odlišný – pravděpodobnostní přístup, jenž pro případ coulombovských srážek vede na **Fokker-Planckovu rovnici**, kam se započítávají pouze dvojné coulombovské srážky

$$\left(\frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle}{2\Delta t} \right) - \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t} \right),$$

kde $\Delta \vec{v}$ znamená změnu rychlosti při srážce. Pohyb částic v rychlostním prostoru tedy odpovídá difúzi.¹²

Samozřejmě pro úplný popis plazmatu nutno vzít v úvahu **Maxwellovy rce**

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

kde $\vec{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d^3 v$ je proudová hustota a $\rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d^3 v$ je hustota náboje, α označuje jednotlivé komponenty plazmatu.

§ Magnetohydrodynamický (MHD) přístup

Nemusíme znát rozložení částic v rychlostním prostoru, stačí nám rozložení makroskopických veličin v prostoru (ρ , T , střední rychlost plazmatu ... zajímaví nás tedy momenty distribuční fce - částicová hustota $n_{\alpha} = \int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}'$, dále průměrná rychlost $\vec{v}_{\alpha} = (1/n_{\alpha}) \int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}', t) \vec{v}' d\vec{v}'$ a „stres“ tensor $\vec{P}_{\alpha} = m_{\alpha} \int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}', t) (\vec{v}' - \vec{v}_{\alpha}) d\vec{v}'$), tj. stačí nám informace o vývoji dynamických proměnných v čase a v poloze. Integrujeme tak přes rychlostní prostor, informace z rychlostního prostoru zanedbáváme¹³ ... Tento přístup např. pro studium urychlování nestačí, pro zkoumání toků částic ano. Rovnice pro makroskopické veličiny tedy dostaneme jako **momenty Boltzmannovy kinetické rovnice**:

$$0. \int \text{BKE} d^3 v, \quad 1. \int m \vec{v} \text{BKE} d^3 v, \quad 2. \int \frac{1}{2} m v^2 \text{BKE} d^3 v.$$

¹² Nechť $P(\vec{v}, \Delta \vec{v})$ je pravděpodobnost změny rychlosti testovací částice z \vec{v} na $\vec{v} + \Delta \vec{v}$ v čase Δt . Při zachování počtu částic lze rychlostní rozdělení v t zapsat jako

$$f(\vec{v}, t) = \int f(\vec{v} - \Delta v, t - \Delta t) \cdot P(\vec{v} - \Delta v, \Delta v) d^3 \Delta v.$$

Pro malé úhlové odchylky ($|\Delta v| \ll |v|$) lze výsledek fP rozepsat do Taylora

$$f(\vec{v}, t) = \int (fP - \Delta t \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] P - \Delta \vec{v} \left[\nabla_{\vec{v}} f P \right] + \frac{1}{2} \Delta v_i \Delta v_j \left[\frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} f P \right] + \dots) d^3 \Delta v.$$

Definujeme-li

$$\int P d^3 \Delta v = 1, \quad \underbrace{\int \Delta \vec{v} P d^3 \Delta v}_{\text{průměrná rychlostní změna na } \Delta t} = \langle \Delta \vec{v} \rangle, \quad \int \Delta v_i \Delta v_j P d^3 \Delta v = \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle,$$

získáváme z rozvoje při záměně integrace a diferenciaci F.-P. rci ... V ní levá strana odpovídá změně distribuce testovacích částic díky mnohonásobným „úhlově průměrovaným“ srážkám, na pravé straně vlevo je pak difúzní člen (tj. 3D difúze testovací částice v rychlostním prostoru), úplně vpravo pak je decelerační člen (tj. zpomalování a pohyb radiálně k pův. směru).

¹³ Ztráta informace v rychlostní proměnné tak obecně vede od statistiky k rovnicím kontinua. Tento přístup je možný díky tomu, že o rychlostním rozdělení každého druhu částic předpokládáme, že je maxwellovské ($f_m = (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-v^2/v_t^2)$, kde $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ a $v_t = (2kT/m)^{1/2}$), a může tudíž být jednoznačně specifikováno jediným číslem, teplotou T .

Pro nultý moment tedy máme

$$\int \frac{\partial}{\partial t} f d^3v + \int \vec{v} \cdot \nabla f d^3v + \frac{q}{m} \int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v,$$

srážkový člen bude díky zachování počtu částic roven nule, poslední člen na levé straně je též roven nule, neboť ho lze s využitím Gaussova teorému rozepsat jako

$$\int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = \int f \vec{E} d\vec{S}_v + \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (f \vec{v} \times \vec{B}) d^3v - \int f \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) d^3v,$$

kde všechny tři členy na pravé straně jsou nulové – $d\vec{S}_v$ je povrchový element rychlostního prostoru a $f \rightarrow 0$ pro $|v| \rightarrow \infty$ pro každé rozdělení s konečnou energií; prostřední člen lze analogicky přepsat na plošný integrál; poslední člen vymizí, neboť $\vec{v} \times \vec{B}$ je kolmé na $\partial/\partial \vec{v} \dots$. Zbývá tedy (\vec{v} je nezáv. proměnná, nepůsobí na ní oper. ∇)

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial t} f d^3v + \int \vec{v} \cdot \nabla f d^3v &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int f d^3v + \nabla \cdot \int \vec{v} f d^3v &= 0, \end{aligned}$$

což lze se zavedením střední rychlosti plazmatu

$$\vec{u} = \frac{\int \vec{v} f d^3v}{\int f d^3v}$$

zapsat jako

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0.$$

Nultým momentem B. k. rce. tedy je **rovnice kontinuity**.

Analogickým postupem je možno pro první moment získat pohybovou rci pro tekutinu; tj. Boltzmannovu rci přenásobíme $m\vec{v}$ a integrujeme přes $d\vec{v}$, dostaneme

$$m \int \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} + m \int \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) f d\vec{v} + q \int \vec{v} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = \int m \vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_s d\vec{v}.$$

Pravá strana vyjadřuje změnu hybnosti vlivem srážek \vec{P}_{ij} . První člen dává

$$m \int \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} = m \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{v} f d\vec{v} = m \frac{\partial}{\partial t} (n\vec{u}).$$

Třetí integrál lze zapsat

$$\begin{aligned} &\int \vec{v} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot [f \vec{v} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})] d\vec{v} - \int f \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{v} - \int f (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \vec{v} d\vec{v}. \end{aligned}$$

Prvé dva integrály této rce na pravé straně vymizí ze stejných důvodů jako již dříve, $\partial \vec{v} / \partial \vec{v}$ je jen jednotkový tenzor, odtud

$$q \int \vec{v} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = -q \int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) f d\vec{v} = -qn (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Abychom konečně vyjádřili druhý integrál ve výchozí rci, využijeme především skutečnost, že \vec{v} je nezávisle proměnná bez vztahu k operátoru ∇ , a prepíšeme

$$\int \vec{v}(\vec{v} \cdot \nabla) f \, d\vec{v} = \int \nabla \cdot (f \vec{v} \vec{v}) \, d\vec{v} = \nabla \cdot \int f \vec{v} \vec{v} \, d\vec{v}.$$

Protože střední hodnota veličiny je středovací integrál přes \vec{v} krát $1/n$, máme

$$\nabla \cdot \int f \vec{v} \vec{v} \, d\vec{v} = \nabla \cdot n \overline{\vec{v} \vec{v}}.$$

Nyní můžeme rozdělit \vec{v} na střední (tekutinovou) rychlost \vec{u} a tepelnou rychlost \vec{w} , tj.

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}.$$

Protože \vec{u} již je střední veličina, dostáváme

$$\nabla \cdot (n \overline{\vec{v} \vec{v}}) = \nabla \cdot (n \vec{u} \vec{u}) + \nabla \cdot (n \overline{\vec{w} \vec{w}}) + 2 \nabla \cdot (n \overline{\vec{u} \vec{w}}).$$

Je zřejmé, že střední hodnota $\overline{\vec{w}}$ je nula. Veličina $n \overline{\vec{w} \vec{w}}$ je přesně to, co označujeme jako tensor napětí $\vec{\vec{P}}$. Zbývající člen poslední rce můžeme napsat jako

$$\nabla \cdot (n \vec{u} \vec{u}) = \vec{u} \nabla \cdot (n \vec{u}) + n (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}.$$

Shrneme-li všechny předchozí výsledky, můžeme psát

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n \vec{u}) + m \vec{u} \nabla \cdot (n \vec{u}) + mn (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla \cdot \vec{\vec{P}} - qn (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \vec{P}_{ij}.$$

Prvé dva členy sloučíme pomocí rce kontinuity, tj. dostáváme

$$mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = qn (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \nabla \cdot \vec{\vec{P}} + \vec{P}_{ij},$$

což je **pohybová rovnice pro tekutinu**, jež popisuje tok hybnosti.

Druhý moment B. k. rce popisuje **zachování vnitřní energie**, popisuje tedy toky energií (proudění, vedení tepla [analogicky tenzoru napětí v ní vystupuje tenzor teplotní vodivosti $\vec{\vec{\kappa}}$], tok elektromagnetické energie – Poyntingův vektor, vyskytují se zde ztráty energie dané Jouleovým teplem ...).

Obecně tedy Maxwellovy rovnice dávají odpověď na otázku, jaká \vec{E} a \vec{B} pole vznikají při daném stavu plazmatu. Abychom mohli řešit self-konzistentní problém, musíme mít ještě rovnici, která popíše odpověď plazmatu na daná \vec{E} a \vec{B} , tou je právě pohybová rovnice. V tekutinovém přiblížení se vychází z představy, že plazma se skládá ze dvou nebo více vzájemně se prostupujících tekutin; každému druhu částic pak přísluší jedna tekutina. V nejjednodušším případě, kdy je v plazmatu jen jeden druh iontů, budeme potřebovat dvě pohybové rovnice, jednu pro tekutinu kladně nabitých iontů a jednu pro tekutinu záporně nabitých elektronů. V částečně ionizovaném plazmatu budeme navíc potřebovat ještě rovnici pro tekutinu neutrálních atomů (k vzájemnému působení mezi tekutinou neutrálních částic a ionty a elektrony pak dochází jen prostřednictvím srážek). Tekutiny iontů a elektronů pak na sebe působí samozřejmě i tehdy, když ke srážkám nedochází, prostřednictvím \vec{E} a \vec{B} polí, která samy vytvářejí.¹⁴

¹⁴ Sečteme-li všechny druhy částic, dostaneme tzv. jednotekutinový model. Příspěvky do srážek se v jednotekutinovém modelu navzájem vyruší. Nultý moment B. k. rce v jednotekutinovém modelu je právě rce kontinuity ... Pro plazma je však důležitější právě více tekutinový model. V tomto přiblížení nevymizí srážkové členy a je nutno s nimi počítat.

Celkově lze úplnou soustavu rovnic pro tekutinu tvořenou dvěma druhy částic (ionty a elektrony)¹⁵ zapsat následovně (zanedbáváme srážky a viskozitu; hustota náboje a proudová hustota jsou dány výrazy $\rho = n_i q_i + n_e q_e$, $\vec{j} = n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e$; $j = i, e$):

Rovnice kontinuity¹⁶

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \vec{v}_j) = 0,$$

Pohybová rovnice¹⁷

$$m_j n_j \left[\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t} + (\vec{v}_j \cdot \nabla) \vec{v}_j \right] = q_j n_j (\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B}) - \nabla p_j,$$

¹⁵ Základní soustava MHD v jednotekutinovém modelu viz str. 415.

¹⁶ Lze ji bez problémů „vydedukovat“ a ne jen odvodit z B. k. rce. Ze ZZHm plyne, že celkový počet částic N v objemu V se může měnit jedině tehdy, pokud je nenulový výsledný tok částic plochou S ohraničující daný objem. Protože hustota toku částic je $n\vec{u}$, dostáváme při použití Stokesova teorému

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \oint n\vec{u} d\vec{S} = - \int_V \nabla \cdot (n\vec{u}) dV,$$

jelikož toto musí platit pro libovolný objem, musí si být integrované výrazy rovny, odtud přímo

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0.$$

¹⁷ Opět ji lze „vydedukovat“. Pohybová rce pro jednu částici je $m d\vec{v}/dt = q(\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B})$. Pokud nedochází ke srážkám a neexistují tepelné pohyby, pak se všechny částice pohybují společnou střední rychlostí, a tedy pro více částic pak lze pohybovou rci zobecnit jednoduše přenásobením hustotou n , tj. $mn d\vec{v}/dt = qn(\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B})$. Tento tvar však není vhodný, neboť časová derivace se vztahuje na souřadný systém pohybující se s částicí; my ale chceme rovnici pro elementy tekutiny, které jsou v prostoru pevné, proto provedeme transformaci do proměnných v pevném souř. s. Časová změna obecné vlastnosti tekutiny $G(x, t)$, v souř. s. pohybujícím se s částicí, se vyjádří dvěma členy

$$\frac{d\vec{G}(x, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{G}}{\partial x},$$

kde prvý člen vpravo představuje změnu \vec{G} v pevném bodě v prostoru, druhý pak změnu \vec{G} , jak by ji zaznamenal pozorovatel pohybující se s tekutinou do oblasti, v níž má \vec{G} odlišnou hodnotu. V 3D máme obecnější tvar, mluvíme o konvektivní derivaci

$$\frac{d\vec{G}(x, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{G}.$$

Celkem dostaneme

$$mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Pokud dále vezmeme v úvahu tepelný pohyb, musíme k pravé straně této rovnice přidat tlakovou sílu způsobenou gradientem tlaku ∇p . Je-li kromě nabitě tekutiny přítomen i neutrální plyn, vyměňují si částice ve vzájemných srážkách hybnost; úbytek hybnosti připadající na jednu srážku je úměrný relativní rychlosti $\vec{u} - \vec{u}_0$, kde \vec{u}_0 je rychlost neutrální tekutiny. Pokud průměrná doba mezi srážkami τ je konstantní, můžeme výslednou sílu zhruba zapsat $-mn(\vec{u} - \vec{u}_0)/\tau$. Konečně tak dostáváme

$$mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \nabla \cdot \vec{p} - \frac{mn(\vec{u} - \vec{u}_0)}{\tau}.$$

Srážky s nabitými částicemi zde nevyjadřujeme.

+ Pozn. – Pro obyčejné tekutiny platí Navierova-Stokesova rovnice $\rho[\partial\vec{u}/\partial t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\vec{u}$, což je totéž, jen bez elektromagnetických sil a bez srážek mezi různými druhy částic (jde jen o jeden druh). Viskózní člen $\rho\nu\nabla^2\vec{u}$, kde ν je kinematická viskozita, je právě srážková část $\nabla \cdot \vec{p} - \nabla p$ v nepřítomnosti magnetických polí.

Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= n_i q_i + n_e q_e, \\ \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0, & \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} &= n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e,\end{aligned}$$

Stavová rovnice¹⁸

$$p_j = C(m_j n_j)^{\gamma_j}.$$

Celkem tak máme pro 16 skalárních neznámých (n_i , n_e , p_i , p_e , \vec{v}_i , \vec{v}_e , \vec{E} a \vec{B}) 18 skalárních rovnic (každá vektorová odpovídá třem skalárním), avšak dvě z Maxwellových rovnic ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$ a $\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = n_i q_i + n_e q_e$) lze získat ze zbylých dvou, aplikujeme-li na ně operátor divergence.

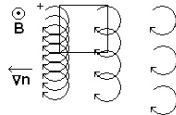
Nakonec tedy poznamenejme, že MHD rce jsou použitelné v tom případě, že lze látku považovat za kontinuum. Toto přiblížení přestává platit při příliš nízké hustotě, protože střední volná dráha je v tom případě srovnatelná s ostatními charakteristickými délkami ve zkoumané soustavě. Za extrémních stavů zředěného plazmatu je tedy nutno látku popisovat pomocí kinetické teorie (případně při zjednodušeném přístupu ji lze považovat za množství samostatných testovacích částic).

- **Dodatek o driftových pohybech tekutiny ve směru kolmém na \vec{B}**

Protože se element tekutiny skládá z mnoha individuálních částic, očekáváme, že kapalina bude vykazovat driftové pohyby kolmé na \vec{B} , jestliže se takovými driftovými pohyby pohybují jednotlivé gyrační středy. V rovnicích tekutiny se však objevuje člen ∇p a s ním souvisí driftový pohyb, který vykazují elementy tekutiny, ale nikoliv částice. Tímto driftem je tzv. **diamagnetický drift**, pro který lze odvodit výraz

$$\vec{v}_D = -\frac{\nabla p \times \vec{B}}{qnB^2},$$

který se tak kromě $\vec{E} \times \vec{B}$ driftu projevuje v pohybu kolmo na směr \vec{B} . Fyzikální smysl: viz obr., gradient hustoty směřuje doleva, každým objemovým elementem se tak pohybuje více iontů dolů než nahoru, protože ionty pohybující se dolů přicházejí z oblasti s větší hustotou, výsledkem je drift tekutiny kolmý na ∇n i na \vec{B} , i když se gyrační středy nepohybují. Diamagnetický drift mění znaménko s nábojem, protože se mění smysl rotace, tj. pokud je někde gradient tlaku, vzniká pak i diamagnetický proud.



¹⁸ Potřebujeme ji, aby byl systém rovnic uzavřený. Vyjadřuje vztah mezi p a n . γ je poměr specifických tepel C_p/C_V . Tlak je definován vztahem $p = nkT$. Člen ∇p tak můžeme vyjádřit jako

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n},$$

takže např. pro izotermickou kompresi dostaneme $\nabla p = \nabla(nkT) = kT\nabla n$ a $\gamma = 1$. Pro N stupňů volnosti je $\gamma = (2 + N)/N$. Aby platila stavová rovnice, musí být tepelný tok zanedbatelný, tj. tepelná vodivost musí být malá.

A co grad- B drift a drift zakřivení, které se objevily v jednočásticovém modelu? V tekutinovém se neobjevují. Magnetická pole neovlivňují Maxwellovo rozdělení, a to proto, že Lorentzovská síla je kolmá na \vec{v} a nemůže tak měnit energii částice. Rozdělení rychlostí, které je nejpravděpodobnější bez mag. pole je stejné i při nenulovém magnetickém poli. Jestliže v nehomogenním mag. poli je nulový gradient hustoty a rozdělení rychlostí je maxwellovské, pak výsledná hybnost předaná určitému elementu tekutiny je nulová. Tekutina nevykazuje driftový pohyb, i když jednotlivé gyrační středy se driftově pohybují – driftové pohyby částic se v každém pevně zvoleném elementu tekutiny zruší ...

• Dodatek o driftových pohybech tekutiny ve směru rovnoběžném s \vec{B}

Uvažujme z složku pohybové rce pro tekutinu

$$mn \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_z \right] = qn E_z - \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Konvektivní člen bývá často zanedbáván, protože je mnohem menší než $\partial v_z / \partial t$. V případě, kdy v_z je prostorově homogenní s užitím $\nabla p = \gamma k T \nabla n$ dostaneme

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{q}{m} E_z - \frac{\gamma k T}{m} \frac{\partial n}{\partial z},$$

což nám říká, že tekutina je podél \vec{B} urychlována kombinovanými silami, elektrostatickou a gradientem tlaku. Pokud budeme uvažovat elektrony s nulovou hmotností ($\lim m \rightarrow 0$, $q = -e$, navíc specifikujeme $\vec{E} = -\nabla\phi$), dostaneme

$$q E_z = e \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\gamma k T_e}{n} \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Elektrony jsou tak pohyblivé, že jejich tepelná vodivost je „nekonečná“. Můžeme je tak považovat za izotermické a položit $\gamma = 1$. Integrací dostaneme $e\phi = kT_e \ln n + C$ neboli

$$n = n_0 \exp(e\phi/kT_e).$$

To je Boltzmannův vztah pro elektrony. Fyzikálně znamená, že elektrony jsou v důsledku své lehkosti velice pohyblivé a působí-li na ně nějaká výsledná síla, jejich pohyb se velmi rychle zrychluje a nabývají vysokých energií. Jelikož elektrony nemohou opustit nějakou oblast hromadně, protože by za nimi zůstal veliký iontový náboj, musí být síly působící na elektrony, tj. elektrostatická síla a gradient tlaku, dobře vyváženy. Z této podmínky plyne Boltzmannův vztah.

• Plazmatické přiblížení

Předcházející příklad naznačil důležitou vlastnost plazmatu. Obecně se \vec{E} počítá z Poissonovy rce, jestliže známe hustotu ρ . Ve fyzice plazmatu se obvykle postupuje opačně, \vec{E} se vypočte z pohybových rovnic a Poissonova rce slouží pouze k nalezení ρ . Důvodem je ta skutečnost, že v plazmatu převládá tendence zachovat neutralitu. Pohybují-li se ionty, elektrony je následují. \vec{E} se musí nastavit tak, aby dráhy elektronů a iontů zachovávali neutralitu. Hustota náboje má druhořadou důležitost – nastaví se tak, aby byla splněna Poissonova rce (to ovšem platí pouze pro nízkofrekvenční pohyby, při nichž setrvačnost elektronů nehraje roli).

V plazmatu je tedy obvykle možné pokládat $n_i = n_e$ a zároveň $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$. Toto nazýváme plazmatickým přiblížením. V systému rovnic pro tekutinu tak lze vynechat Poissonovu rci a jednu z neznámých tím, že $n_i = n_e = n$.

13.6 Vlny v plazmatu

Každý periodický pohyb můžeme Fourierovou analýzou rozložit – jeví se nám jako superpozice sinusových oscilací s různými frekvencemi ω a vlnovými délkami λ . Kterákoliv z těchto složek je jednoduchá vlna. Je-li amplituda oscilací malá, má vlna obvykle sinusový tvar a vytváří ji jenom jedna složka; tímto se budeme zabývat.

Každá sinusově oscilující vlna (např. hustota n) může být zapsána jako

$$n = \bar{n} \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)],$$

kde v kartézských souřadnicích je $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, \bar{n} je konstanta označující amplitudu vlny, \vec{k} je možno nazvat konstanta šíření či vlnový vektor.

Podle konvence se za měřitelnou veličinu považuje reálná část výrazu v exponenciálním zápisu, pro šíření ve směru x tak dostáváme

$$\text{Re}(n) = \bar{n} \cos(kx - \omega t).$$

Místo na vlně, jemuž přísluší konstantní fáze, se pohybuje tak, že $(d/dt)(kx - \omega t) = 0$, tj.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \equiv v_\phi,$$

což je **fázová rychlost**. Je-li ω/k kladné, vlna se pohybuje tak, že x vzrůstá s rostoucím t , a to tak, aby $kx - \omega t$ zůstávalo konstantní.¹⁹

Vezmeme nyní jinou oscilující veličinu, např. \vec{E} . Protože jsme již zvolili fázový posuv n nulový, musíme poli \vec{E} umožnit, aby bylo fázově posunuto o δ , tj.

$$\vec{E} = \vec{E} \cos(kx - \omega t + \delta), \quad \text{resp.} \quad \vec{E} = \vec{E} e^{i(kx - \omega t + \delta)},$$

kde \vec{E} je konstantní reálný vektor. Bývá zvykem zahrnovat informaci o fázovém posuvu do \vec{E} tím, že umožníme, aby \vec{E} bylo komplexní. Můžeme tedy psát

$$\vec{E} = \vec{E} e^{i\delta} e^{i(kx - \omega t)} \equiv \vec{E}_k e^{i(kx - \omega t)},$$

kde \vec{E}_k je komplexní amplituda.²⁰ Nadále budeme všechny amplitudy považovat za komplexní. Jakoukoliv oscilující veličinu tak zapíšeme jako

$$\vec{g}_1 = \vec{g}_1 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)],$$

takže \vec{g}_1 může představovat buď komplexní amplitudu nebo celý výraz, což ovšem nevádí, neboť v lineární teorii vln se na obou stranách každé rovnice objeví týž exponenciální faktor a můžeme jej vykrátit.

Fázová rychlost vlny v plazmatu často přesáhne c . To ovšem není porušení STR neboť nekonečně dlouhá řada vln o konstantní amplitudě nemůže přenášet informaci.

¹⁹ Toto je otázka konvence, stejně dobře je možno psát $n = \bar{n} e^{i(kx + \omega t)}$, kladné ω/k znamená zápornou fázovou rychlost ...

²⁰ Fázový posuv můžeme z \vec{E}_k kdykoliv vypočítat, neboť $\text{Re}(\vec{E}_k) = \vec{E} \cos \delta$, $\text{Im}(\vec{E}_k) = \vec{E} \sin \delta$, tj.

$$\text{tg } \delta = \text{Im}(\vec{E}_k) / \text{Re}(\vec{E}_k).$$

Např. rádiová vlna nenese informaci, pokud není modulována. A modulační informace nepostupuje fázovou, ale **grupovou rychlostí**, která je vždy $< c$ a pro kterou platí²¹

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

V plazmatu se vlny mohou objevit jako důsledek nestabilit nebo díky umělému vybuzení (ohřevem, pro diagnostiku . . .) Existuje široké spektrum plazmových vln, jež se navzájem liší frekvencí, polarizací, absorpcí . . . Zásadní rozdíl samozřejmě je mezi šířením vln za přítomnosti magnetického pole a bez magnetického pole. Typické frekvence vln v plazmatu jsou v rozsahu 1 MHz - 10² GHz.

§ Plazmové oscilace

Jsou-li elektrony v plazmatu posunuty proti homogennímu iontovému pozadí, vytvoří se elektrické pole takového směru, aby obnovilo neutralitu plazmatu „přitažením“ elektronů do jejich původní polohy. Elektrony však v důsledku své setrvačnosti překmitnou a oscilují tak okolo své rovnovážné polohy s charakteristickou frekvencí – **plazmová frekvence**. Tato je tak rychlá, že ionty nemají čas reagovat a můžeme je považovat za pevné.

Pro odvození navíc uvažujeme: magnetické pole je nulové (nedochází k jeho změně, a proto se jedná o elektrostatické oscilace), částice nemají tepelný pohyb ($kT = 0$), plazma se rozprostírá do nekonečna, elektrony se pohybují jen ve směru x .

Pohybová rce a rce kontinuity

$$mn_e \left[\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e \right] = -en_e \vec{E}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0.$$

Výjimečně (viz Plazmatické přiblížení) použijeme Poissonovu rci (neboť se zde jedná o vysokofrekvenční oscilace, setrvačnost elektronů hraje důležitou roli a odchylka od neutrality je tím hlavním efektem), tj.

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial \vec{x} = e(n_i - n_e).$$

Tento systém rovnic vyřešíme linearizací, tj. předpokládáme, že amplituda oscilací je malá a členy obsahující vyšší řády amplitudových faktorů mohou být zanedbány. Veličiny tedy rozdělíme na „rovnovážnou“ a „poruchovou“ část

$$n_e = n_0 + n_1, \quad \vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1.$$

Díky předpokladu homogenosti a neutrality plazmatu před počátečním vychýlením elektronů platí

$$\nabla n_0 = \vec{v}_0 = \vec{E}_0 = 0, \quad \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = 0.$$

²¹ Nechť existuje modulovaná vlna tvořená skládáním dvou vln o skoro stejných frekvencích, pro něž platí

$$E_1 = E_0 \cos [(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t], \quad E_2 = E_0 \cos [(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta \omega)t].$$

Jejich frekvence se tedy liší o $2\Delta\omega$. Protože fázová rychlost každé vlny musí odpovídat prostředí, jímž se šíří, musíme diferencí členem $2\Delta k$ vyjádřit změnu konstanty šíření; použijme značení $a = kx - \omega t$, $b = (\Delta k)x - (\Delta \omega)t$; takto dostáváme

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_0 \cos(a + b) + E_0 \cos(a - b) = E_0(\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b) = \\ &= 2E_0 \cos a \cos b = 2E_0 \cos [(\Delta k)x - (\Delta \omega)t] \cos kx - \omega t. \end{aligned}$$

To je sinusově modulovaná vlna, kde informaci přenáší obálka vlny daná výrazem $\cos [(\Delta k)x - (\Delta \omega)t]$, jež postupuje rychlostí $\Delta\omega/\Delta k$. Pro limitu $\Delta\omega \rightarrow 0$ dostáváme grupovou rychlost.

Pohybová rovnice tak po dosazení předchozích výrazů dostává tvar

$$m(n_0 + n_1) \left[\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + ((\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot \nabla)(\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \right] = -e(n_0 + n_1)(\vec{E}_0 + \vec{E}_1),$$

$$m \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \right] = -e \vec{E}_1.$$

Člen $(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1$ je kvadratický v amplitudě, tj. škrtnutím rovnici zlinearizujeme \rightarrow lineární teorie platí, pokud je $|v_1|$ natolik malé, že kvadratické členy jsou opravdu zanedbatelné. Analogicky pro rovnici kontinuity získáme

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0,$$

u Poissonovy rce s uvážením nepohyblivosti iontů ($n_{i1} = 0$) a toho, že v rovnovážném stavu je $n_{i0} = n_{e0}$ dostaneme

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = -en_1/\varepsilon_0.$$

O oscilujících veličinách předpokládáme, že se mění sinusově

$$n_1 = n_1 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \vec{v}_1 = v_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{x}, \quad \vec{E}_1 = E_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{x},$$

pak časovou derivaci $\partial/\partial t$ můžeme nahradit faktorem $-i\omega$ a gradient faktorem $ik\hat{x}$ (tj. jde vlastně o Fourierovu transformaci). Zlinearizované rovnice tak přecházejí na

$$-i\omega n_1 = -n_0 ikv_1, \quad ikE_1 = -en_1/\varepsilon_0, \quad -im\omega v_1 = -eE_1.$$

Vyloučením n_1 a E_1 (z 1. dosadíme do 2. a to pak do 3.) dostaneme

$$-im\omega v_1 = -e \frac{-n_0 ikv_1}{i\varepsilon_0 k} \frac{-i\omega}{-i\omega} = -\frac{in_0 e^2}{\varepsilon_0 \omega} v_1.$$

Vidíme tedy, že pokud není v_1 nulové, pak musí platit

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m},$$

což je hledaný výraz pro **plazmovou frekvenci**.

$$\omega_p/2\pi = \nu_p \approx 9n^{1/2} \text{ s}^{-1}$$

Tato frekvence závisí pouze na hustotě a je jedním ze základních parametrů plazmatu.²²

²² Nebo i jednodušší odvození: v kvazineutrálním plazmatu relativní posunutí ξ elektronů vůči iontům způsobuje elektrické pole

$$E = \frac{n_e e \xi}{\varepsilon_0}.$$

Z Newtona máme pohybovou rci pro oscilaci elektronů

$$m_e \frac{d^2}{dt^2} \xi = \underbrace{-eE}_{F=qE} = -\frac{n_e}{\varepsilon_0} e^2 \xi,$$

a odtud přímo vidíme (z analogie LHO), že

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}.$$

Podobně protonová plazmová frekvence $\omega_{pp}^2 = n_p e^2 / \varepsilon_0 m_p \rightarrow$ v kvazineutrálním prostředí platí cca $\omega_{pe} \sim 43\omega_{pp}$.

Vidíme tedy, že ω nezávisí na k , grupová rychlost $d\omega/dk$ je 0, rozruch se nešíří – protože pokud se elektrony nesrazí s ionty či navzájem, pak jsou to v podstatě nezávislé oscilátory; navíc v našem jednoduchém nekonečném systému nebude ani elektrické pole přesahovat oblast původní poruchy a rozkmitávat sousední vrstvy plazmatu, neboť v důsledku stejného počtu kladných a záporných nekonečných rovinných vrstev náboje je toto pole nulové – v kterémkoliv konečném systému se pak plazmové oscilace budou šířit.

§ Elektronové plazmové vlny

Navíc existuje ještě jeden efekt, který způsobuje, že se plazmové oscilace šíří – tepelný pohyb; elektrony proudící do přilehlých vrstev plazmatu svými tepelnými rychlostmi přenášejí informaci o tom, co se děje v oblasti oscilací. Plazmové oscilace bychom tedy měli nazývat plazmové vlny. Tento efekt lze snadno započíst přidáním členu $-\nabla p_e$ k pohybové rovnici z předcházející části.

Pro 1D případ bude $\gamma = (2 + 1)/1 = 3$, a tedy

$$\nabla p_e = 3kT_e \nabla n_e = 3kT_e \nabla (n_0 + n_1) = 3kT_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \hat{x},$$

výsledná linearizovaná rovnice

$$\begin{aligned} mn_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -en_0 E_1 - 3kT_e \frac{\partial n_1}{\partial x}, \\ -im\omega n_0 v_1 &= -en_0 E_1 - 3kT_e ikn_1, \end{aligned}$$

po opětovném vyloučení n_1 a E_1 dostaneme

$$\begin{aligned} im\omega n_0 v_1 &= \left[en_0 \left(\frac{-e}{ik\epsilon_0} \right) + 3kT_e ik \right] \frac{n_0 ik}{i\omega} v_1, \\ \omega^2 v_1 &= \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} + \frac{3kT_e}{m} k^2 \right) v_1, \\ \omega^2 &= \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_t^2, \end{aligned}$$

kde $v_t^2 = 2kT_e/m$. Dostali jsme tzv. **disperzní vztah** $\omega(k)$. Z něj vidíme, že frekvence je nyní závislá na k a grupová rychlost je konečná

$$2\omega d\omega = \frac{3}{2} v_t^2 \cdot 2k dk, \quad \rightarrow \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_t^2 = \frac{3}{2} \frac{v_t^2}{v_\phi}.$$

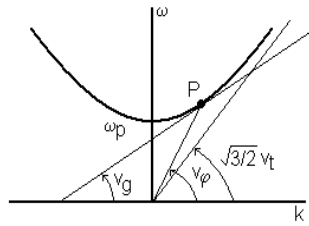
Navíc

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_t^2}}{k} \quad \rightarrow \quad v_g = \frac{3}{2} \frac{v_t^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_t^2}},$$

a v lim $k \rightarrow \infty$ tedy

$$v_g = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} v_t.$$

Grupová rychlost je tedy vždy menší než tento výraz, který je zase vždy menší než c . Viz obr. znázorňující daný disperzní vztah. V každém bodě P na této křivce udává sklon přímkou vedené počátkem fázovou rychlost, sklon samotné křivky v bodě P pak rychlost grupovou, jež je vždy menší než $(3/2)^{1/2} v_t$. Vidíme tak, že při velkých k (malých λ) informace postupuje v podstatě tepelnou rychlostí v_t^2 . Při malých k (velkých λ) postupuje informace pomaleji než v_t , i když v_ϕ je větší než v_t . To je proto, že při velkých λ je malý gradient hustoty a tepelný pohyb přenáší velmi malou část hybnosti do sousedních vrstev.



§ Iontozvukové vlny

• Vsuvka o zvukových vlnách

Popisuje je Navierova-Stokesova rce, se zanedbáním viskozity máme

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho,$$

rce kontinuity je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Linearizací pro odchylky od rovnovážného stavu dostáváme

$$-i\omega \rho_0 \vec{v}_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} i \vec{k} \rho_1, \quad -i\omega \rho_1 + \rho_0 i \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0.$$

Pro rovinnou vlnu s $\vec{k} = k \hat{x}$ a $\vec{v} = v \hat{x}$ dostáváme po vyloučení ρ_1

$$-i\omega \rho_0 v_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} i k \frac{\rho_0 i k v_1}{i\omega},$$

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma k T}{M} \right)^{1/2} \equiv c_z,$$

což je výraz pro rychlost zvukových vln c_z v neutrálním plynu. Jde o tlakové vlny šířící se od jedné vrstvy k druhé srážkami mezi molekulami vzduchu. V plazmatu, v němž nejsou neutrální částice a srážky nečetné dochází k analogickému jevu, který nazýváme iontově akustická, iontozvuková či jen iontová vlna.

Nedochází-li ke srážkám, nemohou vznikat obyčejné zvukové vlny. Avšak ionty si přesto mohou působením svých nábojů předávat chvění – akustické vlny vznikají prostřednictvím elektrického pole. Protože se jedná o pohyb těžkých iontů, oscilace budou mít nízkou frekvenci, a můžeme tak užít plazmatické přiblížení, $n_i = n_e = n$. Rovnice pro iontovou tekutinu bez působení magnetického pole je

$$Mn \left[\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i \right] = en \vec{E} - \nabla p = -en \nabla \phi - \gamma_i k T_i \nabla n,$$

kde jsme použili $\vec{E} = -\nabla \phi$ a $\nabla p = \gamma(p/n) \nabla n = \gamma k T \nabla n$. Pokud předpokládáme, že jde o rovinné vlny, linearizací dostaneme

$$-i\omega M n_0 v_{i1} = -e n_0 i k \phi_1 - \gamma_i k T_i i k n_1. \quad (*)$$

Pro elektrony můžeme položit $m = 0$ a použít podmínku pro zachování rovnováhy sil působících na elektrony odvozenou dříve

$$n_e = n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi_1}{kT_e}\right) \stackrel{23}{=} n_0 \left(1 + \frac{e\phi_1}{kT_e} + \dots\right).$$

Porucha hustoty elektronů a tudíž i iontů potom je

$$n_1 = n_0 \frac{e\phi_1}{kT_e}. \quad (**)$$

²³ $e^x \doteq 1 + x$

Nakonec ještě potřebujeme linearizovanou rci kontinuity pro ionty

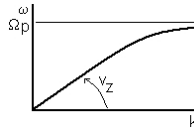
$$i\omega n_1 = n_0 i k v_{i1}.$$

Nyní opět v rovnici (*) nahradíme ϕ_1 pomocí n_1 (***) a následně n_1 pomocí v_{i1} . Dostaneme

$$i\omega M n_0 v_{i1} = \left(e n_0 i k \frac{k T_e}{e n_0} + \gamma_i k T_i i k \right) \frac{n_0 i k v_{i1}}{i\omega},$$

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{k T_e + \gamma_i k T_i}{M} \right)^{1/2} \equiv v_z,$$

což je **disperzní vztah pro iontově akustické vlny**, v_z je rychlost zvuku v plazmatu. Dle našeho předpokladu jsou ionty v rovině stlačovány v jednom směru, tj. $\gamma_i = 3$. Elektronky se vzhledem k těmto vlnám pohybují tak rychle, že v každém místě stačí vyrovnat svou teplotu, jejich pohyb je tedy izotermní a $\gamma_e = 1$; jinak by se před $k T_e$ objevil ještě faktor γ_e .



Disperzní křivka pro iontové vlny se svým charakterem liší od disperzní křivky elektronových vln. Plazmové oscilace jsou v podstatě vlny s konstantní frekvencí s odchylkami v důsledku tepelných pohybů, kdežto iontové vlny jsou v podstatě vlny s konstantní rychlostí²⁴ a mohou se vyskytovat pouze tehdy, existuje-li tepelný pohyb. Grupová rychlost iontových vln se rovná fázové frekvenci. (Neboť při elektronových oscilacích zůstávají okolní částice (ionty) v podstatě na místě, při iontozvukových vlnách naopak okolní částice (elektrony) zdaleka na místě nezůstávají, naopak jsou přetahovány spolu s ionty a snaží se odstínit elektrické pole vznikající nahromaděním iontů. Toto odstínění však samozřejmě není dokonalé a ionty tak vytvářejí oblasti zhuštění a zředění stejně jako v obyčejné zvukové vlně – stlačené oblasti se pak rozpínají do míst zředění, a to jednak díky tepelnému pohybu, který ionty zředuje a jednak díky tomu, že ionty jsou kladně nabitý a výsledné elektrické pole se snaží ionty rozptýlit. Toto pole je převážně odstíněno elektrony a jenom malá část, úměrná $k T_e$ může na shluky iontů působit. To vyjadřuje první člen pod odmocninou v disperzním vztahu. V důsledku své setrvačnosti ionty přeběhnou, zhuštění a zředění vznikají znovu a vytvářejí vlnu.²⁵

§ Elektrostatické elektronové oscilace kolmé na \vec{B}

Dosud jsme předpokládali $\vec{B} = 0$. Je-li však v plazmatu nenulové magnetické pole, může vzniknout mnohem víc typů vln.²⁶

Předpokládáme nyní, že ionty jsou pro frekvence oscilací příliš těžké, tj. nepohybují se a vytvářejí homogenní pozadí kladného náboje; rovněž zanedbáme tepelné pohyby a položíme $k T_e = 0$; rovnovážné

²⁴ Ovšem lze ukázat, že v limitě vysokých frekvencí/krátkých vlnových délek se iontově akustická vlna změní na vlnu s konstantní frekvencí $\Omega_p^2 = n_0 e^2 / \varepsilon_0 M$, což je plazmová frekvence iontů. Chování elektronových plazmových vln a iontozvukových má tedy v podstatě komplementární charakter: základní vlastností prvých je konstantní frekvence, ale při velkých k se stávají vlnami s konstantní rychlostí; základní vlastnost druhých je konstantní rychlost, ale při velkých k se stávají vlnami s konstantní frekvencí. Viz obr.

²⁵ Tento druhý proces vede k tomu, že iontozvukové vlny budou existovat i když $k T_i$ půjde k nule, což se v neutrálním plynu stát nemůže. Dostaneme pak $v_z = (k T_e / M)^{1/2}$; rychlost v_z je tedy dána elektronovou teplotou, protože elektrické pole je jí úměrné, a hmotností iontů, protože je jí úměrná setrvačná síla.

²⁶ *Terminologie* – Pojmy **rovnoběžný** a **kolmý** (perpendikulární) užíváme k označení směru \vec{k} vzhledem k neporušenému magnetickému poli \vec{B}_0 . **Podélný** (longitudinální) a **příčný** (transversální) se týká směru \vec{k} vzhledem k oscilujícímu elektrickému poli \vec{E}_1 . Je-li oscilující magnetické pole \vec{B}_1 nulové, jde o vlnu **elektrostatickou**, v opačném případě o vlnu **elektromagnetickou**. Vztah mezi posledními čtyřmi termíny je dán Maxwellovou rovnicí $\nabla \times \vec{E}_1 = -\dot{\vec{B}}_1$ neboli $\vec{k} \times \vec{E}_1 = \omega \vec{B}_1$. Je-li tedy vlna podélná, $\vec{k} \times \vec{E}_1$ je nulové a vlna je rovněž elektrostatická. Je-li vlna příčná, je \vec{B}_1 konečné a vlna je elektromagnetická. Mezi \vec{k} a \vec{B}_0 resp. \vec{E}_1 ovšem může být libovolný úhel, pak se jedná o kombinaci základních modů.

plazma má klasicky časově konstantní a homogenní n_0 a \vec{B}_0 a nulové \vec{E}_0 a \vec{v}_0 . Pohyb elektronů se pak řídí linearizovanými rovnicemi

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} &= -e(\vec{E}_1 + \vec{v}_{e1} \times \vec{B}_0), \\ \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_{e1} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{E}_1 &= -en_{e1}/\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Zabýváme se pouze vlnami podélnými ($\vec{k} \parallel \vec{E}_1$). BÚNO můžeme zvolit osu x tak, aby měla směr \vec{k} a \vec{E}_1 , a osu z tak, aby ležela ve směru \vec{B}_0 . Tak $k_y = k_z = E_y = E_z = 0$, $\vec{k} = k\hat{x}$, $\vec{E} = E\hat{x}$. Vynecháme indexy 1 a e a rozepíšeme první linearizovanou rovnici do složek

$$-i\omega m v_x = -eE - ev_y B_0, \quad -i\omega m v_y = +ev_x B_0, \quad -i\omega m v_z = 0,$$

Dosazením za v_y z prostřední rce do první dostaneme

$$v_x = \frac{eE/im\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2}. \quad (\Delta)$$

Vidíme tedy, že v_x se stává při cyklotronové rezonanci $\omega = \omega_c$ nekonečné; to lze očekávat, protože elektrické pole mění znaménko s v_x a spojitě urychluje elektrony. Zanedbáme-li členy $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ a ∇p , jsou rovnice pro tekutinu a rovnice pro jednotlivou částici totožné, všechny částice se pohybují zároveň. Z linearizované rce kontinuity pak dostáváme

$$n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_x,$$

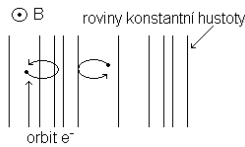
do čehož za v_x dosadíme z (Δ) a celý výsledek použijeme v poslední z trojice linearizovaných rovnic. Celkem

$$\begin{aligned} ikE &= -\frac{e}{\varepsilon_0} \frac{k}{\omega} n_0 \frac{eE}{im\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \\ \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) E &= \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E. \end{aligned}$$

Disperzní vztah tedy je

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2.$$

Frekvence ω_h se nazývá **horní hybridní frekvence**. Tuto frekvenci mají elektrostatické vlny kolmé na \vec{B} , kdežto vlny ve směru \vec{B} jsou obyčejné plazmové oscilace s ω_p . Grupová rychlost je opět nulová, pokud zanedbáme tepelné pohyby.

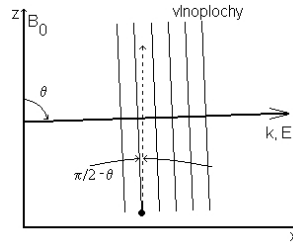


Fyzikální princip = elektrony v rovinné vlně vytvářejí oblasti zhuštění a zředění jako při plazmových oscilacích. Nyní je však přítomno \vec{B} pole kolmé na pohyb a Lorentzova síla přeměňuje trajektorie na elipsy. Na elektrony působí nyní dvě síly vracející je zpět do rovnovážné polohy – elektrostatické pole a Lorentzova síla – frekvence je proto větší než frekvence plazmových oscilací.

§ Elektrostatické iontové vlny kolmé na \vec{B} a dolní hybridní frekvence

Uvažujme \vec{k} téměř kolmé na \vec{B}_0 . Plazma je jako obvykle nekonečné, mající v rovnovážném stavu časově konstantní a prostorově homogenní n_0 a \vec{B}_0 a nechť $\vec{v}_0 = \vec{E}_0 = 0$. Navíc pro jednoduchost položíme $T_i = 0$ (což můžeme, neboť víme že iontozvukové vlny existují i při $T_i = 0$). Rovněž předpokládáme, že jde o vlny elektrostatické s $\vec{k} \times \vec{E} = 0$, tj. $\vec{E} = -\nabla\phi$.

Geometrie viz obr. Úhel $\pi/2 - \vartheta$ považujeme za tak malý, že můžeme položit $\vec{E} = E_1\hat{x}$ a $\nabla = ik\hat{x}$, pokud máme na mysli pohyb iontů. V případě elektronů je však velký rozdíl, je-li $\pi/2 - \vartheta$ nula nebo malé, ale konečné. Larmorův poloměr pro elektrony je tak malý, že se elektrony ve směru x nemohou



pohybovat a neutralizovat tak prostorový náboj; celý účinek elektrického pole spočívá v tom, že nutí elektrony k driftovému pohybu sem a tam v y -směru. Pokud ale ϑ není přesně $\pi/2$, mohou se elektrony pohybovat podél čárkované přímky (ve směru \vec{B}_0), přenášejí náboj ze záporných do kladných oblastí vlny a uskutečňují tak Debyeův mechanismus stínění. Ionty nemohou podobný pohyb efektivně vykonávat, protože jejich setrvačnost jim nedovolí během periody uběhnout velkou vzdálenost, proto v jejich případě můžeme k_z zanedbat. Mezní úhel $\chi = \pi/2 - \vartheta$ je úměrný poměru iontové ku elektronové rychlosti ve směru \vec{B}_0 : $\chi \simeq (m/M)^{1/2}$ [rad].

a) postup **pro větší úhly** χ :

Pohybová rce

$$M \frac{\partial \vec{v}_{i1}}{\partial t} = -e \nabla \phi_1 + e \vec{v}_{i1} \times \vec{B}_0,$$

ve složkách (pokládáme vlnu za rovinnou ve směru x)

$$-i\omega M v_{ix} = -eik\phi_1 + e v_{iy} B_0, \quad -i\omega M v_{iy} = -e v_{ix} B_0.$$

Odtud nacházíme

$$v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \quad (\diamond)$$

kde $\Omega_c = eB_0/M$ je iontová cyklotronová frekvence. Rce kontinuity pro ionty dává

$$n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{ix}.$$

Protože předpokládáme, že se elektrony mohou pohybovat ve směru \vec{B}_0 ($\chi \neq 0$), můžeme pro ně užít Boltzmannův zákon, jenž v linearizovaném tvaru zní

$$\frac{n_{e1}}{n_0} = \frac{e\phi_1}{kT_e}.$$

Posledním krokem je plazmatické přiblížení $n_i = n_e$, díky kterému lze rci kontinuity a B. rci spojit a dosadit do (\diamond) . Dostaneme

$$\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \frac{kT_e}{en_0} \frac{n_0 k}{\omega} v_{ix}, \quad \rightarrow \quad \omega^2 - \Omega_c^2 = k^2 \frac{kT_e}{M}.$$

Protože jsme položili $kT_i = 0$, můžeme totéž zapsat jako

$$\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_z^2.$$

Dostali jsme disperzní vztah pro **elektrostatické iontové cyklotronní vlny**. Tj. analogicky horní hybridní frekvenci: ionty mají tendenci oscilovat jako ve vlně akustického typu, ale Lorentzova síla představuje novou sílu směřující k obnovení původního stavu, její vliv se projevuje členem Ω_c^2 .

b) postup **pro** $\chi = \pi/2$:

Elektrony nemohou svým pohybem podél siločar udržovat neutralitu plazmatu. Namísto Boltzmannova vztahu budeme mít plnou pohybovou rovnici. Ponecháme-li elektronům konečnou hmotnost, bude tato rce netriviální i tehdy, když položíme $T_e = 0$ a vypustíme-li člen ∇p (což učiníme). Pohybová rce iontů zůstává nezměněna, tj.

$$v_{ix} = \frac{ek}{m\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}.$$

Pohybovou rci elektronů pak získáme z analogie, tj. záměnou e za $-e$ etc.

$$v_{ex} = -\frac{ek}{m\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}.$$

Rce kontinuity dají

$$n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{i1}, \quad n_{e1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{e1}.$$

Má-li platit plazmatické přiblížení $n_i = n_e$, musí být $v_{i1} = v_{e1}$. Z rovnosti rovnic pro v_{ix} a v_{ex} dostaneme

$$M \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2} \right) = -m \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right),$$

$$\omega^2 (M + m) = m\omega_c^2 + M\Omega_c^2 = e^2 B^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right),$$

$$\omega^2 = \frac{e^2 B^2}{Mm} = \Omega_c \omega_c,$$

$$\omega = (\Omega_c \omega_c)^{1/2} \equiv \omega_d.$$

Tento výraz nazýváme **dolní hybridní frekvence**, tuto by měli elektrostatické iontové oscilace, kdyby ϑ bylo přesně $\pi/2$.

§ Elektromagnetické vlny s $\vec{B}_0 = 0$

Vlny s $\vec{B}_1 \neq 0$ jsou příčné elektromagnetické vlny – vlny světelné či rádiové procházející plazmatem.

Elektromagnetické vlny ve vakuu: Maxwellovy rce jsou (ve vakuu $\vec{j} = 0$)

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\dot{\vec{B}}_1, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}_1 = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}_1. \quad (\clubsuit)$$

Druhou rci vydělíme ε_0 , aplikujeme rotaci a dosadíme do časově zderivované první rce. Protože $1/(\varepsilon_0 \mu_0) = c^2$, dostaneme

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) = \nabla \times \dot{\vec{E}}_1 = -\ddot{\vec{B}}_1.$$

Za opětovného předpokladu rovinné vlny s faktorem $e^{i(kx - \omega t)}$ dostaneme

$$\omega^2 \vec{B}_1 = -c^2 \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{B}_1) = -c^2 [\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{B}_1) - k^2 \vec{B}_1].$$

Podle jiné z Maxwellových rovnic máme $\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = -i \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$, dostáváme výsledek

$$\omega^2 = k^2 c^2,$$

a c tedy je fázová rychlost ω/k světelných vln.

V plazmatu je nutno v druhé z Maxwellových rovnic (\clubsuit) přidat člen \vec{j}_1 , jenž odpovídá poruchovým proudům v důsledku pohybů nabitých částic. Dostaneme

$$c^2 \nabla \times \vec{B}_1 = \frac{\vec{j}_1}{\varepsilon_0} + \dot{\vec{E}}_1,$$

$$c^2 \nabla \times \dot{\vec{B}}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} + \ddot{\vec{E}}_1.$$

Rotace první rce (\clubsuit) dává

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}_1) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}_1) - \nabla^2 \vec{E}_1 = -\nabla \times \dot{\vec{B}}_1.$$

Vyloučením $\nabla \times \vec{B}_1$ a předpokladem závislosti $e^{i(kx-\omega t)}$ dostaneme

$$-\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) + k^2 \vec{E}_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1.$$

Příčnými vlnami rozumíme $\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = 0$, tj.

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \vec{j}_1. \quad (\spadesuit)$$

Pro světelné vlny či mikrovlny bude jejich frekvence tak velká, že ionty lze považovat za nehybné a proud \vec{j}_1 je tedy výsledkem pouze pohybu elektronů $\vec{j}_1 = -n_0 e \vec{v}_{e1}$. Z lineari- zované pohybové rovnice pro elektrony dostáváme (pro $kT_e = 0$)

$$m \frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -e \vec{E}_1, \quad \leftrightarrow \quad \vec{v}_{e1} = \frac{e \vec{E}_1}{im\omega},$$

a z rovnice (\spadesuit) tak získáme

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E}_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_0 e \frac{e \vec{E}_1}{im\omega} = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \vec{E}_1 = \omega_p^2 \vec{E}_1,$$

a tedy

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2,$$

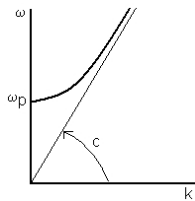
což je **disperzní vztah pro elektromagnetické vlny** šířící se plazmatem bez stej- nosměrného magnetického pole. Fázová rychlost světelných vln v plazmatu je větší než rychlost světla

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2.$$

Grupová rychlost však nemůže rychlost světla překročit, což souhlasí právě když $v_\phi > c$, neboť

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g = \frac{c^2}{v_\phi}.$$

Pro takovéto disperzní vztahy je charakteristická existence tzv. mezní frekvence. Vysílá-



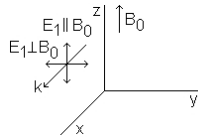
me-li plazmatem např. mikrovlnný svazek s danou frekvencí ω , vlnová délka $2\pi/k$ bude v plazmatu předepsána rovnicí $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$. Bude-li se hustota plazmatu a tedy i ω_p^2 zvyšovat, musí se k^2 zmenšovat a vlnová délka bude stále větší a větší, až konečně dosáhne takové hustoty, že k^2 bude nula. Pro hustoty větší než tato mezní nemůže žádné reálné k splňovat disperzní vztah, vlna se nemůže šířit! Tento mezní případ nastane při kritické hustotě $\omega = \omega_p$, tj.

$$n_k = \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{e^2}.$$

Je-li n příliš velké či ω příliš malé, elmag vlna nemůže projít plazmatem, dle disperzního vztahu je k imaginární $ck = (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} = i|\omega_p^2 - \omega^2|^{1/2}$. Protože prostorová závislost vlny je e^{ikx} , bude při imaginárním k exponenciálně tlumená. Důsledkem je pak vliv např. na krátkovlnné rádiové spojení – dojde-li vlna až k ionosféře, kde je hustota plazmatu dostatečně vysoká, odrazí se; takto je možno vyslat signál okolo Země. Při hustotě cca 10^{12} m^{-3} je kritická frekvence cca 10 MHz. Pro spojení s kosmickými loděmi je tak nutno používat vyšší frekvence, které ionosférou pronikají. Podobně vznik plazmatu v důsledku tření při vstupu kosmické lodě do atmosféry způsobí výpadek spojení.

§ Elektromagnetické vlny kolmé na \vec{B}

Nyní uvažujme šíření elektromagnetických vln v přítomnosti magnetického pole. Nejprve předpokládejme šíření kolmo na \vec{B}_0 , vezmeme-li příčné vlny $\vec{k} \perp \vec{E}_1$, máme ještě dvě možnosti: $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$ nebo $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$, viz obr.



Pokud je $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$, můžeme položit $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$, $\vec{E}_1 = E_1 \hat{z}$ a $\vec{k} = k \hat{x}$. Vlnovou rovnicí²⁷ pro tento případ je opět vztah (♠)

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \vec{j}_1 = \frac{in_0}{\varepsilon_0} e\omega \vec{v}_{e1}.$$

Protože $\vec{E}_1 = E_1 \hat{z}$, je na pravé straně jenom složka v_{ez} , jež je dána pohybovou rovnicí $m\partial v_{ez}/\partial t = -eE_z$, což je též vztah jako pro případ \vec{B}_0 , je i konečný výsledek stejný

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2.$$

Tato vlna, v níž $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$, se nazývá **řádovou vlnou** (též O-vlna), čímž se míní, že není ovlivňována magnetickým polem.

Pokud je $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$, bude pohyb elektronů ovlivněn polem \vec{B}_0 a disperzní vztah se změní. Vlny s $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$ mají sklon být elipticky polarizované, tj. pokud taková vlna vstupuje do plazmatu, vzniká složka E_x ve směru \vec{k} , a vlna se tak stává částečně podélnou a částečně příčnou. Proto je nutno při odvození připustit, že $\vec{E}_1 = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$.

Opět vyjdeme z linearizované pohybové rovnice pro elektrony (pro $kT_e = 0$); nyní je

$$-im\omega \vec{v}_{e1} = -e(\vec{E} + \vec{v}_{e1} \times \vec{B}_0),$$

kde netriviální jsou pouze složky

$$v_x = \frac{-ie}{m\omega} (E_x + v_y B_0), \quad v_y = \frac{-ie}{m\omega} (E_y - v_x B_0).$$

Indexy 1 a e jsme vynechali. Obvyklým postupem najdeme

$$v_x = \frac{e}{m\omega} \left(-iE_x - \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad v_y = \frac{e}{m\omega} \left(-iE_y + \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}.$$

Ve vlnové rci tentokrát musíme zachovat podélný člen $\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = kE_x$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E}_1 + c^2 k E_x \vec{k} = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \vec{j}_1 = in_0 \frac{\omega e}{\varepsilon_0} \vec{v}_{e1},$$

kteřou ve složkách x a y s použitím předcházejících rovnic zapíšeme

$$\omega^2 E_x = -i\omega n_0 e \frac{e}{m\omega} \left(iE_x + \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1},$$

²⁷ Z Maxw. rovnic ...

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_y = -i \omega n_0 e \frac{e}{m \omega} \left(i E_y - \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1},$$

jež s využitím definice $\omega_p = (n_0 e^2 / \varepsilon_0 m)^{1/2}$ prepíšeme na

$$\underbrace{\left[\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right]}_A E_x + i \underbrace{\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega}}_B E_y = 0,$$

$$\underbrace{\left[(\omega^2 - c^2 k^2) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right]}_C E_y - i \underbrace{\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega}}_D E_x = 0.$$

Tato soustava pro E_x a E_y má nenulové řešení jen když bude nulový determinant, tj. $AD = BC$. Z této podmínky pak po poměrně zdlouhavých úpravách plyne

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_\phi^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2},$$

což je disperzní vztah pro **mimořádnou vlnu** (též X-vlna) = elektromagnetická vlna částečně příčná a částečně podélná, která se šíří kolmo na \vec{B}_0 s \vec{E}_1 kolmým na \vec{B}_0 .

• Dodatek o mezní frekvenci a rezonanci

O mezní frekvenci v plazmatu hovoříme, pokud index lomu klesá k nule, tj. když se vlnová délka stává nekonečnou, neboť $\tilde{n} = ck/\omega$. Rezonance naopak označuje ten případ, kdy index lomu roste do nekonečna, tj. vlnová délka jde k nule. Šířili se vlna oblastí, v níž se mění ω_p a ω_c , může dojít k oběma jevům.

Rezonanci mimořádné vlny tak nalezneme, když v disperzním vztahu dáme $k \rightarrow \infty$, odtud $\omega \rightarrow \omega_h$, takže k rezonanci dojde v takovém místě plazmatu, kde

$$\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega^2,$$

což je disperzní vztah pro elektrostatickou vlnu šířící se napříč \vec{B}_0 . Blíží-li se vlna s daným ω k místu rezonance, blíží se fázová i grupová rychlost nule a energie vlny se přemění v energii oscilací s horní hybridní frekvencí. Mimořádná vlna je tedy částečně elektromagnetická a částečně elektrostatická. Lze ukázat, že při rezonanci ztrácí tato vlna svůj elektromagnetický charakter a přechází v elektrostatické oscilace.

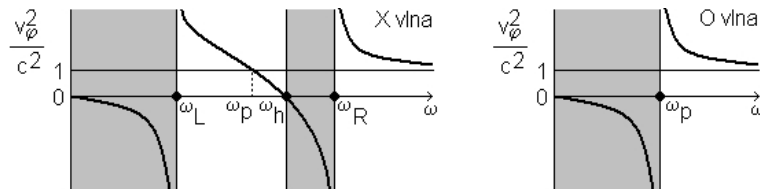
Mezní frekvenci naopak najdeme pokud položíme $k = 0$, odkud vyjde

$$\omega^2 \mp \omega \omega_c - \omega_p^2 = 0.$$

Každé znaménko dává jinou mezní frekvenci, kořeny příslušných rovnic jsou

$$\omega_R = \frac{1}{2} [\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}], \quad \omega_L = \frac{1}{2} [-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}].$$

Tyto nazýváme **pravotočivou a levotočivou mezní frekvencí**. Mezní a rezonanční frekvence rozdělují disperzní diagram na oblasti, v nichž se vlna buď může nebo nemůže šířit. Např. pro mimořádnou vlnu existují dvě oblasti šíření, oddělené zakázaným pásmem.



§ Elektromagnetické vlny rovnoběžné s \vec{B}

Položme nyní \vec{k} ve směru osy z , pro \vec{E}_1 ponechme obě příčné složky E_x a E_y , tj.

$$\vec{k} = k \hat{z}, \quad \vec{E}_1 = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}.$$

Můžeme použít vlnovou rovnici pro mimořádnou vlnu, stačí zaměnit $k\hat{x}$ za $k\hat{z}$. Dostáváme nyní složky

$$(\omega^2 - c^2 k^2)E_x = \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left(E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} E_y \right),$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2)E_y = \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left(E_y + \frac{i\omega_c}{\omega} E_x \right).$$

Použijeme-li označení $\alpha = \omega_p^2/(1 - \omega_c^2/\omega^2)$, můžeme psát

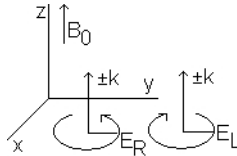
$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)E_x + i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_y = 0, \quad (\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)E_y - i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_x = 0.$$

Položíme-li opět determinant roven nule, dostaneme po úpravě dvě možná řešení této soustavy odpovídající dvěma vlnám, jež se mohou šířit rovnoběžně s \vec{B}_0 . Disperzní vztahy jsou

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - (\omega_c/\omega)}, \quad \text{R vlna}$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + (\omega_c/\omega)}. \quad \text{L vlna}$$

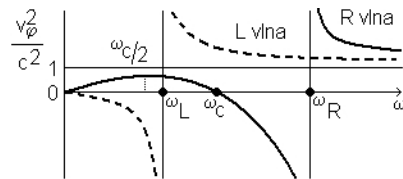
Ukazuje se, že R a L vlny jsou kruhově polarizovány a symboly R a L znamenají, zda jde o pravotočivou či levotočivou kruhovou polarizaci. V R vlně se při pohledu ve směru \vec{B}_0 vektor elektrického pole s časem



otáčí ve směru hodinových ručiček, u L vlny naopak. Disperzní vztahy závisí pouze na k^2 , polarizace proto nezávisí na směru šíření vlny.

Celkem tedy – hlavní vlny šířící se rovnoběžně s \vec{B}_0 jsou pravotočivě a levotočivě kruhově polarizovaná vlna; hlavní vlny šířící se napříč \vec{B}_0 jsou rovinně polarizovaná vlna (0 – ordinary) a elipticky polarizovaná vlna (X – extraordinary).²⁸

Mezní frekvence pro R a L vlny opět dostaneme, položíme-li $k = 0$. Výsledkem jsou stejné rovnice jako pro X vlnu, tj. i mezní frekvence jsou tytéž. R vlna s minus znaménkem má vyšší mezní frekvenci ω_R , L vlna s plus znaménkem má nižší mezní frekvenci ω_L . To byl i důvod označení mezních frekvencí v předchozí části.

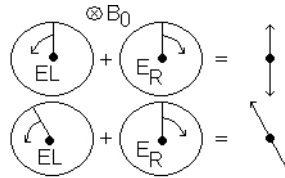


Z disperzního diagramu je vidět, že L vlna se chová jako O vlna, zakázané pásmo má při nízkých frekvencích, avšak mezní frekvencí je ω_L a nikoliv ω_p . Zakázané pásmo pro R vlnu je mezi ω_R a ω_c , ale pod ω_L je druhé pásmo šíření, v němž $v_\phi < c$. Vlny v této nízkofrekvenční oblasti se nazývají hvizdy a jsou důležité pro studium ionosféry – **hvizdy** se na spektrogramu projeví jako s časem klesající klouzavé

²⁸ Polarizace světla charakterizuje geometrickou orientaci kmitání vektoru intenzity el. pole světelné vlny. Vektor intenzity elektrického pole světelné vlny lze vždy rozložit na dvě k sobě kolmé složky, E_x a E_y , mezi nimiž může fázový rozdíl $\Delta\varphi$ nabývat různých hodnot. Pokud je tento rozdíl definovaný a konstantní (úplná korelace), jde o úplně polarizované světlo. Nejobecnějším případem je eliptická polarizace, speciálními případy jsou lineární polarizace, kdy $\Delta\varphi = m\pi$, a kruhová polarizace, kdy $\Delta\varphi = (2m+1)\pi/2$, kde m je přirozené číslo. Není-li mezi fázemi obou složek korelace, jde o nepolarizované/přirozené světlo. Částečná korelace vede k částečné polarizaci světla a její velikost popisuje stupeň polarizace I_{pol}/I_{celk} .

tóny slyšitelné přes reproduktor (zpravidla jsou přímo v rozsahu slyšitelných frekvencí od 0 do cca 15 kHz). Dají se vysvětlit pomocí disperzních charakteristik R vln. Např. při úderu blesku vznikne rádiový šum na všech frekvencích, v plazmatu ionosféry a magnetosféry vzniknou různé vlny, z nichž R vlny postupují podél zemského magnetického pole, jsou vedeny siločárami. Vlny jsou zachyceny pozorovateli na opačné straně Země. Z disperzního diagramu vidíme, že fázová rychlost roste s frekvencí; dá se ukázat, že s frekvencí roste i grupová rychlost \rightarrow nízké frekvence dorazí později . . .

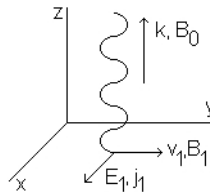
Bude-li rovinně polarizovaná vlna vysílána plazmatem podél magnetického pole, bude se její rovina polarizace stáčet, čemuž lze porozumět opět na základě rozdílných fázových rychlostí R a L vln – z disperzního diagramu je vidět, že pro velké ω postupuje R vlna rychleji než L vlna. Nechť je rovinně polarizovaná vlna součtem R a L vlny (jež mají samozřejmě obě stejnou frekvenci). Po N cyklech se vektory \vec{E}_R a \vec{E}_L vrátí do svých počátečních poloh; ovšem na dané vzdálenosti d vykonají R a L vlny různý počet cyklů, protože každá potřebuje jinou dobu na její proběhnutí. Hovoříme tak o **Faradayově jevu**/rotaci = stáčené polarizační roviny při průchodu polarizovaného záření plazmatem. Důležité zejména v mezihvězdném prostředí, kde jsou velké vzdálenosti a tedy tento jev je výrazný. Úhel stočení je roven součinu λ^2 a M , což je míra rotace daná součinem $N_e B$, kde N_e je míra disperze (celkové množství elektronů ve sloupci v zorném směru, jehož základna je 1 cm^2) a B je magnetická indukce. Pokud není magnetické pole rovnoběžné se zorným směrem, pak samozřejmě úhel rotace je dán $\lambda^2 \int n_e B \cos(\phi) ds$, kde s je dráha paprsku plazmatem a ϕ je úhel mezi paprskem a směrem magnetického pole. Pro různé vlnové délky je tedy stočení roviny polarizace různé, což dovoluje odhadovat magnetické pole a elektronovou hustotu. Těto metody lze v radioastronomii použít i k určení vzdálenosti rádiových zdrojů, když se za n_e a B dosadí známé hodnoty odvozené jiným způsobem.



§ Alfvénova vlna

Nyní přejdeme k nízkofrekvenčním iontovým oscilacím v magnetickém poli, tj. k hydromagnetickým vlnám. Existuje mnoho modů, z nichž nejdůležitější jsou dva – hydromagnetická vlna rovnoběžná s \vec{B}_0 , též Alfvénova vlna, a magnetozvuková vlna.

Alfvénova vlna má v rovinné geometrii $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$; \vec{E}_1 a \vec{j}_1 jsou \perp na \vec{B}_0 ; nakonec \vec{B}_1 i \vec{v}_1 jsou \perp na \vec{B}_0 i na \vec{E}_1 . Viz obr.



Z Maxwellových rovnic jako obvykle dostaneme

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_1 = -\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) + k^2 \vec{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1 + \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}_1.$$

Protože předpokládáme $\vec{k} = k\hat{z}$ a $\vec{E}_1 = E_1\hat{x}$, je pouze x -ová složka této rovnice netriviální. Jedná se však o nízké frekvence, takže k proudu \vec{j}_1 přispívají elektrony i ionty. Dohromady tak máme

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_0 e (v_{ix} - v_{ex}). \quad (\S)$$

Tepelné pohyby nejsou pro tuto vlnu důležité, můžeme tedy užít řešení pohybové rovnice iontů s $T_i = 0$, jež jsme odvodili dříve ($M(\partial \vec{v}_{i1}/\partial t) = e(\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0)$, $T_i = 0$, $p_i = 0 \rightarrow -i\omega M v_{ix} = eE_1 + e v_{iy} B_0$ a $-i\omega M v_{iy} = -e v_{ix} B_0$ a odtud ...)

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1, \quad v_{iy} = \frac{e}{M\omega} \frac{\Omega_c}{\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1.$$

Odpovídající řešení pro elektrony najdeme záměnou $M \rightarrow m$, $e \rightarrow -e$, $\Omega_c \rightarrow -\omega_c$ a limitou $\omega_c^2 \gg \omega^2$

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 \rightarrow 0, \quad v_{ey} = -\frac{e}{M\omega} \frac{\omega_c}{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 = -\frac{E_1}{B_0}.$$

Vidíme tedy, že v této limitě je Larmorova rotace elektronů zanedbána, elektrony se prostě pohybují $\vec{E} \times \vec{B}$ driftem ve směru y . Dosazením těchto řešení do rovnice (§) dostáváme

$$(\omega^2 - c^2 k^2) = \Omega_p^2 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}.$$

Dále činíme předpoklad $\omega^2 \ll \Omega_c^2$; frekvence hydromagnetické vlny je mnohem nižší než cyklotronní rezonance iontů. Pak dostaneme

$$\omega^2 - c^2 k^2 = -\omega^2 \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = -\omega^2 \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 M} \frac{M^2}{e^2 B_0^2} = -\omega^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2}, \quad \rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + (\rho/\varepsilon_0 B_0^2)},$$

kde ρ je měrná hmotnost $n_0 M$. Ve jmenovateli tohoto výrazu se nachází tzv. nízkofrekvenční poměrná dielektrická konstanta plazmatu pro příčné pohyby a dosažený výsledek tedy prostě popisuje fázovou rychlost elektromagnetické vlny v dielektrickém prostředí

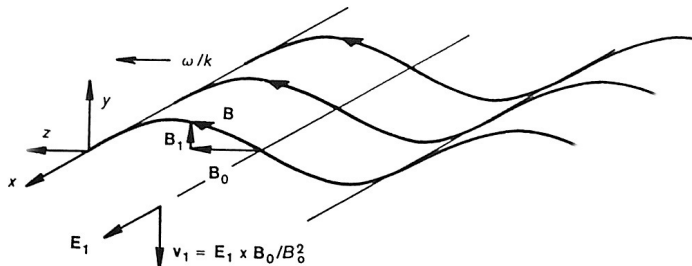
$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{(\varepsilon_r \mu_r)^{1/2}} = \frac{c}{\varepsilon_r^{1/2}} \quad \text{pro } \mu_r = 1.$$

Pro laboratorní plazma je zpravidla $\varepsilon_r \gg 1$, tj.

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi = \frac{c B_0}{(\rho/\varepsilon_0)^{1/2}} \equiv v_A.$$

Tato vlna tedy postupuje podél \vec{B}_0 s konstantní rychlostí $v_A = \mathbf{Alfvénova rychlost}$

$$v_A = c B (\varepsilon_0/\rho)^{1/2}.$$



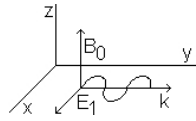
Abychom pochopili, co se v Alfvénově vlně fyzikálně děje, připomeňme si, že je to elektromagnetická vlna s vlnícím se magnetickým polem \vec{B}_1 , daným rovnicí

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\dot{\vec{B}}_1, \quad E_x = (\omega/k)B_y. \quad (\aleph)$$

Přidáme-li k \vec{B}_0 malou složku B_y , dostaneme siločáry se sinusovým zvlněním, jež je přehnaně znázorněno na obrázku. V zobrazeném bodě je B_y v kladném y -ovém směru, tj. E_x je v kladném x -ovém směru, je-li ω/k ve směru z . Elektrické pole E_x způsobí $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$ drift plazmatu v záporném y -ovém směru. Protože jsme použili limitu $\omega^2 \ll \Omega_c^2$, budou se ionty i elektrony pohybovat touž driftovou rychlostí v_y . Tekutina se tedy pohybuje nahoru a dolů ve směru y . Velikost této rychlosti je $|E_x/B_0|$. Protože zvlnění pole se pohybuje spolu s fázovou rychlostí ω/k , v naznačeném bodě na obrázku se siločára rovněž pohybuje směrem dolů. Rychlost tohoto pohybu siločáry směrem dolů je $(\omega/k)|B_y/B_0|$, což se dle poslední rce (\aleph) rovná právě rychlosti tekutiny $|E_x/B_0|$. Tak tekutina i siločáry oscilují společně, jako kdyby částice byly na siločáru navléknuty. Siločáry se chovají, jako kdyby to byly napjaté hmotné struny a na Alfvénovu vlnu se můžeme dívat jako na šířící se rozruch po brnknutí na strunu – „zamrzlé plazma“.

§ Magnetozvukové vlny

Uvažujeme nízkofrekvenční vlny šířící se kolmo na \vec{B}_0 . Opět můžeme vzít $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ a $\vec{E}_1 = E_1 \hat{x}$, ale nyní položíme $\vec{k} = k \hat{y}$.



Rychlost $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$ driftu bude mít směr vektoru \vec{k} , takže plazma se bude při oscilacích stlačovat a rozpínat; je tedy nezbytné zachovat v pohybové rovnici člen ∇p . Pro ionty budeme mít

$$Mn_0 \frac{\partial \vec{v}_{i1}}{\partial t} = en_0(\vec{E}_1 + \vec{v}_{i1} \times \vec{B}_0) - \gamma_i k T_i \nabla n_1,$$

což při naší volbě \vec{E}_1 a \vec{k} ve složkách dá

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega}(E_x + v_{iy}B_0), \quad v_{iy} = \frac{ie}{M\omega}(-v_{ix}B_0) + \frac{k}{\omega} \frac{\gamma_i k T_i}{M} \frac{n_1}{n_0}.$$

Rovnice kontinuity dává

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k}{\omega} v_{iy},$$

rce pro složku v_{iy} přechází na tvar

$$v_{iy} = -\frac{ie}{M\omega} v_{ix} B_0 + \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_i k T_i}{M} v_{iy},$$

což zjednodušíme označením $A = (k^2/\omega^2)(\gamma_i k T_i/M)$

$$v_{iy}(1 - A) = -\frac{i\Omega_c}{\omega} v_{ix}.$$

Dosazením do rce pro složku v_{ix} dostaneme

$$v_{ix} \left(1 - \frac{\Omega_c^2/\omega^2}{1 - A} \right) = \frac{ie}{M\omega} E_x,$$

což je jediná složka \vec{v}_{i1} , kterou budeme potřebovat, neboť jediná netriviální složka vlnové rce (♠, hodně vzadu) je

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_0 e (v_{ix} - v_{ex}).$$

Abychom získali v_{ex} potřebujeme pouze opět udělat vhodné záměny v rovnici v_{ix} a vzít limitu s ohledem na malou hmotnost elektronů, tj. $\omega^2 \ll \omega_c^2$ a $\omega^2 \ll k^2 v_{te}^2$

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_e k T_e}{m} \right) E_x \quad \rightarrow \quad -\frac{ik^2}{\omega B_0^2} \frac{\gamma_e k T_e}{e} E_x.$$

Z posledních tří rovnic dostáváme

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_0 e \left[\frac{ie}{M\omega} E_x \left(\frac{1-A}{1-A - (\Omega_c^2/\omega^2)} \right) + \frac{ik^2 M}{\omega B_0^2} \frac{\gamma_e k T_e}{eM} E_x \right].$$

Opět budeme předpokládat $\omega^2 \ll \Omega_c^2$, tj. $1-A$ můžeme zanedbat vzhledem k Ω_c^2/ω^2 . S využitím definičních vztahů $\Omega_p = (n_0 e^2 / \varepsilon_0 M)^{1/2}$, $v_A = cB(\varepsilon_0/\rho)^{1/2}$ a s využitím vztahu $\Omega_p^2/\Omega_c^2 = c^2/v_A^2$ dostaneme

$$\omega^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) = c^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e k T_e + \gamma_i k T_i}{M v_A^2} \right) = c^2 k^2 \left(1 + \frac{v_z^2}{v_A^2} \right),$$

kde v_z je akustická rychlost. Dostáváme tedy **disperzní vztah pro magnetozvukovou vlnu** šířící se kolmo na \vec{B}_0

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_z^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2}.$$

Je to akustická vlna, v níž stlačení a zředění nevzniká pohyby ve směru \vec{E} , nýbrž ve směru $\vec{E} \times \vec{B}$, tj. driftovými pohyby kolmo na \vec{E} . V limitě $\vec{B}_0 \rightarrow 0$, $v_A \rightarrow 0$ přechází magnetozvuková vlna v obyčejnou iontově akustickou vlnu. V limitě $kT \rightarrow 0$, $v_z \rightarrow 0$ vymizí síly gradientu tlaku a vlna se stává modifikovanou Alfvénovou vlnou. Fázová rychlost magnetozvukové vlny je skoro vždy větší než v_A .

§ **Shrnutí**• **Elektronové vlny (elektrostatické, $\vec{B}_1 = 0$)**

$$\begin{array}{ll} \vec{B}_0 = 0 \text{ nebo } \vec{k} \parallel \vec{B}_0 & \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2}k^2v_i^2 \quad \text{Plazmové oscilace} \\ \vec{k} \perp \vec{B}_0 & \omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2 \quad \text{Horní hybridní frekvence} \end{array}$$

• **Iontové vlny (elektrostatické, $\vec{B}_1 = 0$)**

$$\begin{array}{ll} \vec{B}_0 = 0 \text{ nebo } \vec{k} \parallel \vec{B}_0 & \omega^2 = k^2v_z = k^2 \frac{\gamma_e k T_e + \gamma_i k T_i}{M} \quad \text{Akustické vlny} \\ \vec{k} \perp \vec{B}_0 & \begin{array}{l} \omega^2 = \Omega_c^2 + k^2v_z^2 \quad \text{Elstat. iontové cyklotronní vlny} \\ \omega^2 = \omega_d^2 = \Omega_c \omega_c \quad \text{Dolní hybridní frekvence} \end{array} \end{array}$$

• **Elektronové vlny (elektromagnetické, $\vec{B}_1 \neq 0$)**

$$\begin{array}{ll} \vec{B}_0 = 0 & \omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2 \quad \text{Světelné vlny} \\ \vec{k} \perp \vec{B}_0, \vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0 & \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{O vlna} \\ \vec{k} \perp \vec{B}_0, \vec{E}_1 \perp \vec{B}_0 & \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \quad \text{X vlna} \\ \vec{k} \parallel \vec{B}_0 & \begin{array}{l} \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - (\omega_c/\omega)} \quad \text{R vlna, hvězdy} \\ \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + (\omega_c/\omega)} \quad \text{L vlna} \end{array} \end{array}$$

• **Iontové vlny (elektromagnetické, $\vec{B}_1 \neq 0$)**

$$\begin{array}{ll} \vec{B}_0 = 0 & \text{Žádné} \\ \vec{k} \parallel \vec{B}_0 & \omega^2 = k^2v_A^2 \quad \text{Alfvénova vlna} \\ \vec{k} \perp \vec{B}_0 & \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_z^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad \text{Magneozvuková vlna} \end{array}$$

+ *Pozn.* – Mění-li se úhel mezi směrem šíření a magnetickým polem, mění se i fázová rychlost. Některé z typů vln zde uvedených pod $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ a $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ přitom spojitě přecházejí jeden v druhý, jiné typy při určitém kritickém úhlu prostě zmizí ...

+ *Pozn.* – Lze odvodit i obecnou vlnovou rovnici, jež zahrnuje všechny vlny, vlastnosti jednotlivých vln a plazmatu jsou pak skryty v tzv. tenzoru disperze.

13.7 Difúze, odpor a stabilita plazmatu

Nekonečné homogenní plazma je pouze idealizace. V každém reálném plazmatu existuje gradient hustoty a plazma má tendenci difundovat do oblastí s nízkou hustotou.

Nejprve budeme studovat difúzi bez přítomnosti magnetického pole. Navíc pro zjednodušení předpokládáme, že plazma je slabě ionizované (např. ionosférické plazma, plazma v tokamaku v blízkosti hranice . . .), tj. nabitě částice se sráží daleko více s neutrálními atomy, než mezi sebou ($n_i/n_n \leq 10^{-3}$ případ plně ionizovaného plazmatu vede k složitější nelineární rovnici). Jako výchozí tedy máme situaci, kdy na hustém pozadí neutrálních částic jsou nerovnoměrně rozloženy ionty a elektrony; přitom, jak se plazma působením gradientu tlaku a elektrických sil rozptyluje, jednotlivé částice se chaoticky pohybují a často se s neutrálními částicemi srážejí.

Při srážce elektronu s neutrálním atomem dochází ke ztrátě části hybnosti elektronu; velikost této části závisí na úhlu, v kterém se odrazí (až dvojnásobek při čelní srážce, elektron se odrazí zpět a změní znaménko). Pravděpodobnost ztráty hybnosti lze vyjádřit pomocí odpovídajícího průřezu σ , který by atomy měli, kdyby dokonale pohlcovali hybnost = **účinný průřez**.

Předpokládejme, že elektrony dopadají na desku o ploše A a tloušťce dx , jež v 1 m^3 obsahuje n_n neutrálních atomů, jež považujeme za „neprostupné kuličky“ o průřezu σ . Počet atomů v desce tedy je $n_n A dx = n_n dV$. Relativní část plochy, jež je zakryta atomy je $n_n A \sigma dx / A = n_n \sigma dx$. Tj. dopadá-li na desku tok elektronů Γ , na druhé straně z ní vystupuje tok $\Gamma' = \Gamma(1 - n_n \sigma dx)$. Změna toku připadající na jednotku délky tedy je $d\Gamma/dx = -n_n \sigma \Gamma$ neboli $\Gamma = \Gamma_0 e^{-n_n \sigma x} \equiv \Gamma_0 e^{-x/\lambda_s}$, kde λ_s je vzdálenost, ve které by se tok zmenšil na $1/e$ své původní hodnoty. λ_s je tedy **střední volná dráha** mezi srážkami

$$\lambda_s = \frac{1}{n_n \sigma}.$$

Má-li částice proběhnout vzdálenost λ_s , je dost pravděpodobné, že se při tom sráží. Střední doba mezi srážkami je pro částice s rychlostí v dána výrazem $\tau = \lambda_s/v$ a střední frekvence srážek je $\tau^{-1} = v/\lambda_s = n_n \sigma v$. Budeme-li nyní středovat přes částice všech rychlostí v při Maxwellovském rozdělení, dostaneme veličinu, která se obecně nazývá **srážková frekvence**

$$\nu = n_n \overline{\sigma v}.$$

Pohybovou rovnici zahrnující srážky můžeme pro kterýkoliv druh částic v tekutině (bez \vec{B}) napsat jako

$$mn \frac{d\vec{v}}{dt} = mn \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \pm en \vec{E} - \nabla p - mn \nu \vec{v},$$

kde \pm je znaménko náboje. Aby tato rovnice byla v pořádku, je nutno považovat ν za konstantní. Rovněž uvažujme ustálený stav, tj. $\partial v / \partial t = 0$. Je-li v dostatečně malé (resp. ν dost velké), element tekutiny se nestačí během srážkové doby posunout do oblastí, kde \vec{E} a ∇p mají jinou hodnotu, a konvektivní derivace rovněž zmizí. Odtud dostáváme (pro případ izotermního plazmatu $\nabla p = kT \nabla n$)

$$\vec{v} = \frac{1}{mn \nu} (\pm en \vec{E} - kT \nabla n) = \pm \frac{e}{m \nu} \vec{E} - \frac{kT}{m \nu} \frac{\nabla n}{n},$$

kde zavedeme transportní koeficienty

$$\mu \equiv |q|/m \nu, \quad \text{pohyblivost}$$

$$D \equiv kT/m\nu, \quad \text{koeficient difúze}$$

jež mají pro každý druh částic jinou hodnotu, a jež jsou svázány Einsteinovým vztahem

$$\mu = |q|D/kT.$$

Pomocí těchto koeficientů můžeme tok Γ_j j -tého druhu částic zapsat jako

$$\Gamma_j = n\vec{v}_j = \pm \mu_j n \vec{E} - D_j \nabla n. \quad (*)$$

Zvláštním případem této rovnice pro $\vec{E} = 0$ nebo nenabitě částice (tj. $\mu = 0$) je **Fickův zákon**

$$\Gamma = -D \nabla n.$$

Tato rovnice vyjadřuje skutečnost, že difúze je výsledkem chaotických pohybů, přičemž výsledný tok z oblastí s větší hustotou do řidších oblastí vzniká prostě proto, že v místech větší hustoty začíná svou cestu více částic. Tento tok je úměrný gradientu hustoty (časová změna látkového množství je úměrná gradientu hustoty). Ovšem v plazmatu nemusí Fickův zákon vždycky platit. Poněvadž může docházet k organizovaným pohybům (vlny), může se plazma rozpínat způsobem, který není svou podstatou chaotický.

§ Rozpad plazmatu difúzí

• Ambipolární difúze

Zkoumejme jak se plazma vytvořené v nějaké nádobě rozpadá difúzí ke stěnám. Jakmile ionty a elektrony dosáhnou stěny, rekombinují na ní, takže hustota v blízkosti stěny je prakticky nulová. Chování je samozřejmě popsáno rci kontinuity a pohybovou rci; je-li ale rozpad pomalý, je nutno časovou derivaci ponechat jenom v rci kontinuity, časová derivace v pohybové rci je zanedbatelná, je-li srážková frekvence ν velká. Dostáváme tedy

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_j = 0, \quad (**)$$

kde Γ_j je dáno rci (*). Kdyby se Γ_i a Γ_e sobě nerovnal, náboje by se v krátké době výrazně oddělily. Jsou-li však rozměry plazmatu velké ve srovnání s Debyeovou délkou, musí být plazma kvazineutrální \rightarrow difúze se „nastaví tak, že obojí částice mizí stejnou měrou“. Mechanismus nastavení rovnováhy je následující: elektrony jsou lehčí a tedy se snaží opustit plazma jako první; za nimi však zůstává kladný náboj a vzniká takové pole, které brzdí ztráty elektronů a zvyšuje ztráty iontů. Potřebné elektrické pole získáme z podmínky $\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$, tj.

$$\Gamma = \mu_i n \vec{E} - D_i \nabla n = -\mu_e n \vec{E} - D_e \nabla n, \quad \vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}.$$

Společný tok tedy je

$$\Gamma = \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i - \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n = \frac{\mu_i D_i - \mu_i D_e - \mu_i D_i - \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n,$$

což je Fickův zákon s novým koeficientem difúze

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}.$$

Koeficient ambipolární difúze. Je-li tento konstantní, přechází rce kontinuity (**)
jednoduše v

$$\partial n / \partial t = D_a \nabla^2 n. \quad (***)$$

Velikost D_a můžeme odhadnout, vezmeme-li $\mu_e \gg \mu_i$.²⁹ Rce pro koeficient ambipolární difúze a Einsteinův vztah pak dávají

$$D_a \approx D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = D_i + \frac{T_e}{T_i} D_i.$$

Pro $T_e = T_i$ tak dostáváme $D_a \approx 2D_i$, tj. ambipolární elektrické pole zvyšuje difúzi iontů o faktor 2, avšak rychlost difúze obou těchto druhů částic dohromady je určována v první řadě částicemi pomalejšími.

• Difúze mezi rovnoběžnými stěnami

Difúzní rovnici můžeme snadno řešit separací proměnných

$$n(\vec{r}, t) = T(t)S(\vec{r}). \quad (a)$$

Pak z (***) dostaneme

$$\begin{aligned} S \frac{dT}{dt} &= DT \nabla^2 S, \\ \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} &= \frac{D}{S} \nabla^2 S. \end{aligned}$$

L strana je pouze funkcí času, P strana pouze funkcí prostorových proměnných \rightarrow obě strany se musí rovnat téže konstantě, kterou označíme $-1/\tau$. Pak dostáváme

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow \ln T = -\frac{t}{\tau} + C \rightarrow T = T_0 e^{-t/\tau}. \quad (b)$$

$$\nabla^2 S = -\frac{1}{D\tau} S \rightarrow^{30} \rightarrow \frac{d^2 S}{dx^2} = -\frac{1}{D\tau} S \rightarrow S = A \cos \frac{x}{(D\tau)^{1/2}} + B \sin \frac{x}{(D\tau)^{1/2}}. \quad (c)$$

Chceme, aby hustota byla u stěn skoro nulová, mezi nimi aby bylo jedno či více maxim. Uvažujme nejjednodušší případ jednoho maxima. Díky symetrii lze v poslední rci škrtnout lichou fci, tj. sin. Z okrajové podmínky $S = 0$ pro $x = \pm L$ plyne

$$\frac{L}{(D\tau)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

neboli

$$\tau = \left(\frac{2L}{\pi} \right)^2 \frac{1}{D}. \quad (d)$$

Kombinací 4 dílčích výsledků (a, b, c, d) dostaneme

$$n = n_0 e^{-t/\tau} \cos \frac{\pi x}{2L}.$$

Tomuto výsledku říkáme **nejnižší difúzní mód**, tj. rozdělení hustoty je dáno kosinem a s časem ubývá hustota exponenciálně. Časová konstanta τ narůstá s L a mění se s převrácenou hodnotou D , což lze z logiky očekávat.

Samozřejmě existují vyšší difúzní módy s více než jedním maximem, které lze obecně rozvinout do Fourierovy řady. Analýzou pak zjistíme, že obecně platí $\tau_l = [L/(l + 1/2)\pi]^2/D$, tj. jemná struktura hustotního profilu, odpovídající velkým hodnotám l (jež označuje číslo modu) zaniká rychleji, s menší časovou konstantou τ_l ; $\tau \sim 1/D$

²⁹ Což je vidět z definice pohyblivosti a srážkové frekvence $\rightarrow \mu \sim m^{-1/2}$.

³⁰ Díky rovinné geometrii našeho příkladu.

§ Stacionární stav

Pokud plazma zůstává v ustáleném stavu (např. když jsou ztráty stále nahrazovány probíhající ionizací nebo při experimentech vstřikováním plazmatu), musíme pro výpočet profilu hustoty do rce kontinuity přidat zdrojový člen

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\nabla^2 n = Q(r).$$

Pro ustálený stav tedy máme $\partial n/\partial t = 0$, dostáváme rci Poissonova typu pro $n(\vec{r})$.

§ Rekombinace

Při srážce ionu s elektronem existuje zejména při nízké relativní rychlosti konečná pravděpodobnost, že budou rekombinovat a vznikne neutrální atom. Pro splnění ZZHyb se musí na srážce podílet ještě třetí těleso, což je buď emitovaný foton = radiativní rekombinace, nebo částice = třítělesová rekombinace. Ztráty způsobené rekombinací můžeme v rci kontinuity započítat záporným zdrojovým členem, jež bude úměrný $n_e n_i = n^2$. Bez difúzního členu má rce kontinuity tvar

$$\partial n/\partial t = -\alpha n^2,$$

konstantu úměrnosti α nazýváme koeficient rekombinace [m^3/s]. tato rce je nelineární n , tj. jednoduchou metodou lineární superpozice se nám nepodaří vyhovět počátečním podmínkám. Naštěstí je tato rce natolik jednoduchá kvadratická rce, že můžeme řešení odhadnout ve tvar

$$\frac{1}{n(\vec{r}, t)} = \frac{1}{n_0(\vec{r})} + \alpha t.$$

O správnosti se přesvědčíme dosazením. V případě rekombinace klesá hustota nepřímě úměrně s časem

$$n \sim 1/\alpha\tau.$$

což je zásadně odlišná závislost než pro případ difúze, kdy je časová závislost exponenciální. Např. u vyhasínajícího vodíkového plazmatu zjistíme, že při velkých hustotách převládá rekombinace, která je úměrná n^2 a hustota ubývá s $1/t$. Když hustota klesne na nízkou hodnotu, převládne difúze a další snižování už je exponenciální.

§ Difúze napříč magnetickým polem

Ztráty plazmatu lze snížit magnetickým polem (viz studium termojaderné fúze). Představme si slabě ionizované plazma v magnetickém poli. Ve směru rovnoběžném s \vec{B} se budou nabitě částice pohybovat difúzí a pohyblivostí dle předcházejících rovnic, neboť \vec{B} nebude mít na jejich pohyb v tomto směru vliv. Pro každý druh částic tak máme

$$\Gamma_z = \pm \mu n E_z - D \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Kdyby nedocházelo ke srážkám, částice by v kolmém směru vůbec nedifundovaly, stále by kroužily kolem stejné siločáry. Vznikají sice driftы částic napříč \vec{B} v důsledku přítomnosti elektrických polí nebo gradientů \vec{B} , ale ty lze uspořádat tak, aby byly rovnoběžné se stěnami.

Dochází-li ovšem ke srážkám, posunují se částice chaotickým pohybem (ke stěnám) ve směru gradientů, napříč \vec{B} . Srazí-li se např. ion s neutrálním atomem, opouští místo srážky v jiném směru, než se k němu blížil. Opět bude kroužit stejným způsobem okolo magnetické siločáry, ale jeho fáze se nespojitě změnila. (Může se také měnit jeho r_L , ale předpokládejme, že ion v průměru nezíská ani neztratí energii.) Gyrační středy tedy při srážce mění svoje polohy, vzniká chaotický pohyb. Částice tak budou difundovat proti směru ∇n . Délka kroku náhodného pohybu už není λ_s , jako při difúzi, ale má velikost Larmorova poloměru r_L . Difúze napříč \vec{B} tedy může být zpomalena tím, že zmenšíme r_L , tj. zvětšíme B .

Napišme tedy kolmé složky pohybové rce pro tekutinu pro kterýkoliv druh částic

$$mn \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \pm en(\vec{E} + \vec{v}_\perp \times \vec{B}) - kT\nabla n - mn\nu\vec{v} = 0.$$

Opět předpokládáme izotermní plazma a že ν je tak velké, že můžeme člen $d\vec{v}_\perp/dt$ zanedbat; ve složkách bude

$$mn\nu v_x = \pm enE_x - kT \frac{\partial n}{\partial x} \pm env_y B,$$

$$mn\nu v_y = \pm enE_y - kT \frac{\partial n}{\partial y} \mp env_x B,$$

což s užitím definice $\mu = |q|/m\nu$ a $D = kT/m\nu$ prepíšeme

$$v_x = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \frac{\omega_c}{\nu} v_y,$$

$$v_y = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \mp \frac{\omega_c}{\nu} v_x.$$

Dosadíme za v_x a vyjádříme v_y

$$v_y(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_x}{B} \pm \omega_c^2 \tau^2 \frac{kT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (*)$$

kde $\tau = \nu^{-1}$. Analogicky

$$v_x(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_y}{B} \mp \omega_c^2 \tau^2 \frac{kT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (**)$$

V posledních dvou členech těchto rovnic vystupují driftы $E \times B$ a diamagnetický

$$v_{ex} = \frac{E_y}{B}, \quad v_{ey} = -\frac{E_x}{B}, \quad v_{Dx} = \mp \frac{kT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}, \quad v_{Dy} = \pm \frac{kT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Prvé dva členy mohou být zjednodušeny, definujeme-li pohyblivost a koeficient difúze na kolmý směr

$$\mu_\perp = \frac{\mu}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad D_\perp = \frac{D}{1 + \omega_c^2 \tau^2}.$$

Pomocí posledních šesti rovnic můžeme složkové rce (*) a (**) přepsat na

$$v_\perp = \pm \mu_\perp E - D_\perp \frac{\nabla n}{n} + \frac{v_e + v_D}{1 + (\nu^2/\omega_c^2)}.$$

Odtud je vidět, že kolmá rychlost toho či onoho druhu částic se skládá ze dvou částí. Za prvé jsou to obyčejné driftové rychlosti \vec{v}_e a \vec{v}_D kolmé na gradienty potenciálu a hustoty. Tyto driftы jsou zpomaleny srážkami s neutrálními částicemi; brzdící faktor $1 + (\nu^2/\omega_c^2)$ se v limitě $\nu \rightarrow 0$ blíží k 1. Za druhé jsou to driftы způsobené pohyblivostí a difúzí, rovnoběžné s gradienty potenciálu a hustoty. Tyto driftы jsou vyjádřeny stejným způsobem jako v případě $B = 0$, ale koeficienty μ a D jsou zmenšeny faktorem $1 + \omega_c^2 \tau^2$.

Součin $\omega_c \tau$ je důležitou veličinou pro magnetické udržení plazmatu. Je-li $\omega_c^2 \tau^2 \ll 1$, má magnetické pole malý vliv na difúzi, je-li naopak $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$, snižuje se výrazně difúzní rychlost napříč \vec{B} . V limitě $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$ dostáváme

$$D_\perp = \frac{kT}{m\nu} \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2} = \frac{kT\nu}{m\omega_c^2}.$$

Vidíme tedy, že role srážkové frekvence se obrátila – při difúzi ve směru rovnoběžném s \vec{B} je D úměrné ν^{-1} , protože srážky zpomalují pohyb. Při difúzi kolmo na \vec{B} je D_{\perp} úměrné ν , protože srážky jsou nezbytné pro přecházení částic přes siločáry. Závislost na m se rovněž obrátila. Uvědomíme-li si, že ν je úměrné $m^{-1/2}$, pak je zřejmé, že $D \sim m^{-1/2}$, zatímco $D_{\perp} \sim m^{1/2}$. Při rovnoběžné difúzi se elektrony pohybují rychleji než ionty, protože jejich tepelná rychlost je větší; při difúzi v kolmém směru elektrony unikají pomaleji, protože mají menší Larmorův poloměr.

Pomineme-li číselné faktory řádu jednotky, můžeme rci pro difúzi psát $D = kT/m\nu \sim \sim v_t^2 \tau \sim \lambda_s/\tau$. Tento tvar, čtverec délky dělený časem, ukazuje, že základem difúze je chaotický pohyb s délkou kroku λ_s . Pro difúzi napříč naopak máme $D_{\perp} = kT\nu/m\omega_e^2 \sim \sim v_t(r_L^2/v_t^2)\nu \sim r_L^2/\tau$, což ukazuje, že difúze v kolmém směru spočívá v chaotickém pohybu s krokem r_L a nikoliv λ_s .

Jelikož v magnetickém poli jsou pohyblivost i koeficient difúze anizotropní, není ambipolární difúze tak prostým problémem, jako v případě $B = 0$. Nechtě toky částic jsou kolmé na \vec{B} . Protože $\Gamma_{e\perp}$ je menší než $\Gamma_{i\perp}$, obvykle vznikne napříč magnetickým polem pole elektrické, které bude podporovat difúzi elektronů a brzdit difúzi iontů. Toto elektrické pole však může být zkratováno nevyváženými toky podél \vec{B} . To znamená, že záporný náboj, vznikající v důsledku $\Gamma_{e\perp} < \Gamma_{i\perp}$, se může rozplynout únikem elektronů podél siločar. Ačkoliv úhrnná difúze musí být ambipolární, nemusí být ambipolární ta část difúzních ztrát, k nimž dochází v kolmém směru. Ionty difundují z plazmatu především radiálně, kdežto elektrony rovnoběžně s \vec{B} . Zda to ve skutečnosti takto probíhá či nikoliv, záleží na tom kterém pokusu. V krátkém sloupci plazmatu, kde siločáry končí na vodivých deskách, lze očekávat, že ambipolární elektrické pole bude zkratováno. Každý druh částic pak radiálně difunduje nestejně rychle. V dlouhých a tenkých sloupcích plazmatu, ukončených izolujícími deskami, bude radiální difúze ambipolární, protože únik \vec{B} je obtížný.

§ Srážky v plně ionizovaném plazmatu

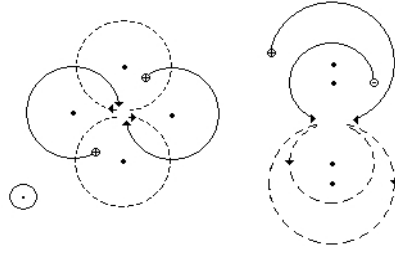
Srážky jsou coulombovské. Stačí uvažovat srážky mezi částicemi s opačným znaménkem,³¹ neboť srážky mezi stejnými částicemi způsobují jen velmi slabou difúzi.³²

Pohybovou rci tekutiny včetně efektů způsobených srážkami nabitých částic lze zapsat jako:

$$\begin{aligned} Mn \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= en(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i - \nabla \cdot \pi_i + \vec{P}_{ie}, \\ mn \frac{d\vec{v}_e}{dt} &= -en(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e - \nabla \cdot \pi_e + \vec{P}_{ei}, \end{aligned}$$

³¹ Srážejí-li se dvě částice opačného znaménka, to „nejhorší“, k čemu může dojít, je srážka, z níž částice vystoupí s obrácenými rychlostmi, jejich směr se změní o 180° ; protože musí pokračovat v rotaci okolo siločar v původním smyslu, oba gyrační středy postoupí tímž směrem, tj. srážky mezi nestejnými částicemi způsobují difúzi. Díky odlišné hmotnosti elektrony odskakují od celkem nehybných iontů a prostě se chaoticky pohybují. Ionty jsou při každé srážce postrčeny a jejich pohyb je výsledkem častých nárazů elektronů. Nicméně v důsledku zachování hybnosti při každé srážce jsou rychlosti difúze iontů i elektronů stejné.

³² Nechtě se srážejí dvě stejné částice. Jde-li o čelnou srážku, vystoupí z ní částice s obrácenými rychlostmi; prostě si vymění svoje orbity a oba gyrační středy zůstanou na stejných místech – výsledek je týž, jako když se částice těsně minou, takže trajektorie se sotva změní. To „nejhorší“, k čemu může dojít, je srážka, při níž se sice směr rychlosti změní o 90° (čárkované kroužky na obr. jsou orbity po takové srážce, gyrační středy se posunou), avšak „společné těžiště“ obou gyračních středů se nezmění . . . Tj. pro každou srážku iontu s iontem platí detailní rovnováha, neboť ke každému iontu, který se pohybuje směrem ven, existuje jiný, který se v důsledku srážky pohybuje směrem dovnitř. Na rozdíl od srážky iontu s neutrální částicí – při ní výsledná rychlost neutrální částice není pro difúzi důležitá a ion se chaoticky posune o náhodný krok ze své původní pozice . . .



kde člen \vec{P}_{ie} představuje přírůstek hybnosti iontové tekutiny ve srážkách s elektrony, analogicky \vec{P}_{ei} v rci pro elektrony. Tenzor napětí \vec{P}_j je rozdělen na izotropní část p_j a anizotropní tenzor viskozity $\vec{\pi}_j$. Srážky mezi stejnými částicemi, jimiž vzniká uvnitř každé jednotlivé tekutiny napětí, jsou obsaženy v $\vec{\pi}_j$, a protože tyto srážky nezpůsobují výraznou difúzi, lze tento člen vynechat. Členy \vec{P}_{ie} , \vec{P}_{ei} představují tření mezi oběma tekutinami; ze ZZHyb dostáváme

$$\vec{P}_{ie} = -\vec{P}_{ei}.$$

\vec{P}_{ei} lze vyjádřit jednoduše pomocí srážkové frekvence

$$\vec{P}_{ei} = mn(\vec{v}_i - \vec{v}_e)\nu_{ei}$$

a podobně i \vec{P}_{ie} . Jelikož se jedná o coulombovské srážky, lze očekávat, že \vec{P}_{ei} bude úměrné coulombovské síle, která je úměrná e^2 (pro jednou nabitým ionty). Dále \vec{P}_{ei} musí být úměrné hustotě elektronů n_e a hustotě rozptylových center n_i , která se ovšem rovná n_e . Konečně by \vec{P}_{ei} mělo být úměrné relativní rychlosti obou tekutin – z fyziky tedy lze psát

$$\vec{P}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\vec{v}_i - \vec{v}_e),$$

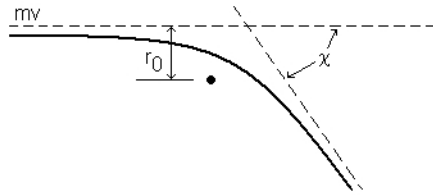
kde η je konstanta úměrnosti. Srovnáním nakonec můžeme psát

$$\nu_{ei} = \frac{ne^2}{m} \eta = \omega_p^2 \varepsilon_0 \eta.$$

Konstanta η je **specifický odpor plazmatu**.

• Vsuvka o coulombovských srážkách

Sráží-li se elektron s iontem, dochází k postupnému odchylování dalekosahajícím coulombovským polem. Viz obr., elektron se blíží \vec{v} k pevnému iontu s nábojem e . Kdyby nepůsobila Coulombova síla, přiblížil by se k iontu na nejbližší vzdálenost r_0 = srážkový parametr. Avšak elektron je přitahován Coulombovou



silou a odchýlí se tedy o χ , jehož velikost závisí právě na r_0 . Coulombova síla je $F = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$, tuto sílu pocítuje elektron během doby, kdy je v blízkosti iontu, tj. cca $T \approx r_0/v$. Hybnost elektronu se tak změní o cca $\Delta(mv) = |FT| \approx e^2/4\pi\varepsilon_0 r_0 v$. Chceme odhadnout účinný průřez pro srážky, při nichž se směr rychlosti změní o veliký úhel, $\chi \geq 90^\circ$. Změní-li se úhel χ o 90° , je změna hybnosti mv řádově samo mv . Tedy

$$\Delta(mv) \cong mv \cong \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 v}, \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2}.$$

Účinný průřez potom je

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{e^4}{16\pi\varepsilon_0^2 m^2 v^4}.$$

Srážková frekvence tak je

$$\nu_{ei} = n\sigma v = \frac{ne^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}$$

a specifický odpor

$$\eta = \frac{m}{ne^2} \nu_{ei} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0^2 m v^3}.$$

Pro maxwellovské rozdělení elektronů lze v^2 v řádovém odhadu nahradit výrazem kT_e/m , odtud dostáváme

$$\eta = \frac{e^2 m^{1/2}}{16\pi\epsilon_0^2 (kT_e)^{3/2}},$$

což představuje specifický odpor způsobený pouze srážkami s velkou změnou úhlu. Ovšem úhrnný efekt srážek s malou změnou úhlu je větší než efekt srážek s velkou změnou úhlu, protože srážky s malou změnou jsou díky velkému dosahu Coulombovy síly daleko častější. Lze ukázat, že předchozí výraz se má vynásobit faktorem $\ln \Lambda$, tj.

$$\eta = \frac{e^2 m^{1/2}}{16\pi\epsilon_0^2 (kT_e)^{3/2}} \ln \Lambda, \quad \text{kde } \Lambda = \frac{\lambda_D}{r_0}.$$

Tento faktor představuje maximální srážkový parametr v jednotkách r_0 , zprůměrovaný přes Maxwellovo rozdělení. Za maximální srážkový parametr se bere λ_D , protože Debyeovo stínění potlačí ve velkých vzdálenostech coulombovské pole.

• Vsuvka o η

Nechť v plazmatu existuje elektrické pole \vec{E} , a necht' všechen proud je nesen elektrony, jež jsou daleko pohyblivější než ionty. Dále $B = 0$, $kT_e = 0$, takže $\nabla p_e = 0$. Pak se v ustáleném stavu pohybová rce pro elektrony redukuje na $en\vec{E} = \vec{P}_{ei}$. Protože $\vec{j} = en(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$, lze rci $\vec{P}_{ei} = mn(\vec{v}_i - \vec{v}_e)\nu_{ei}$, kde $\nu_{ei} = ne^2/m$, přepsat na $\vec{P}_{ei} = \eta n\vec{j}$, takže výsledný tvar pohybové rce pro elektrony je

$$\vec{E} = \eta\vec{j},$$

což je obyčejný **Ohmův zákon** a konstanta η je právě specifický odpor.

Z výsledné definiční rce pro η vidíme, že toto je nezávislé na hustotě (s výjimkou slabé závislosti na $\ln \Lambda$), což znamená, že vytvoříme-li v plazmatu pole \vec{E} , je proud daný rci $\vec{E} = \eta\vec{j}$, nezávislý na počtu nosičů náboje. Tomu je třeba rozumět takto: ačkoliv \vec{j} vzrůstá s n_e , s rostoucím n_i se přibrzdí pohyb „třením“ s ionty. Protože $n_e = n_i$, tyto dva vlivy se navzájem zruší. Srážková frekvence je úměrná n , ale ve výrazu pro η se n zkrátí. V tomto ohledu se plně ionizované plazma chová naprosto jinak než slabě ionizované plazma. V slabě ionizovaném plazmatu máme $\vec{j} = -ne\vec{v}_e$, $\vec{v}_e = -\mu_e\vec{E}$, takže $\vec{j} = ne\mu_e\vec{E}$. Protože μ závisí pouze na hustotě neutrálních částic, je proud úměrný hustotě plazmatu n .

§ Difúze v plně ionizovaném plazmatu

• Vsuvka o MHD rovnicích v jednotekutinovém modelu

Protože disipativní člen \vec{P}_{ei} obsahuje rozdíl rychlostí $\vec{v}_i - \vec{v}_e$, je při studiu difúze v plně ionizovaném plazmatu jednodušší pracovat s lineární kombinací rovnic pro ionty a elektrony, takže neznámou je $\vec{v}_i - \vec{v}_e$ a nikoliv \vec{v}_i nebo \vec{v}_e odděleně. Tato lineární kombinace popíše plazma jako jedinou tekutinu s měrnou hmotností ρ a elektrickou vodivostí $1/\eta$. Dostaneme tak rovnice MHD (v jednotekutinovém modelu).

Pro kvazineutrální plazma s jednou nabitými ionty můžeme definovat měrnou hmotnost ρ , rychlost pohybu hmoty \vec{v} a hustotu proudu \vec{j} jako

$$\rho \equiv n_i M + n_e m \approx n(M + m), \quad \vec{v} \equiv \frac{1}{\rho}(n_i M \vec{v}_i + n_e m \vec{v}_e) \approx \frac{M \vec{v}_i + m \vec{v}_e}{M + m},$$

$$\vec{j} \equiv e(n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) \approx ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e).$$

V pohybové rci přidáme člen $Mn\vec{g}$ pro gravitační sílu (může samozřejmě představovat obecně libovolnou sílu neelektromagnetického původu působící na plazma); pak rci pro ionty a elektrony můžeme psát

$$Mn \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = en(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i + Mn\vec{g} + \vec{P}_{ie},$$

$$mn \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -en(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e + mn\vec{g} + \vec{P}_{ei}.$$

(Opět jsme zanedbali tenzor viskozity π (předpokládáme, že Larmorův poloměr je mnohem menší než charakteristická délka pro změnu různých veličin plazmatu) a člen $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ (ospravedlnit toto zjednodušení již není tak jednoduché; prostě předpokládáme, že \vec{v} je tak malé, že tento kvadratický člen lze zanedbat.) Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$n \frac{\partial}{\partial t} (M\vec{v}_i + m\vec{v}_e) = en(\vec{v}_i - \vec{v}_e) \times \vec{B} - \nabla p + n(M + m)\vec{g}.$$

Člen s elektrickým polem se vyloučil stejně jako srážkové členy $\vec{P}_{ei} = -\vec{P}_{ie}$; pro celkový tlak jsme zavedli označení $p = p_i + p_e$. Pomocí definičních rovnic z počátku můžeme psát

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \rho \vec{g},$$

což je pohybová rce pro jedinou tekutinu, popisující tok hmoty. Elektrické pole v ní explicitně nevystupuje, neboť tato tekutina je elektricky neutrální.

Méně zřejmou rci získáme, vezmeme-li jinou lineární kombinaci rovnic pro dvě tekutiny. Přenásobme rci pro ionty hmotou m a odečteme od ní rci pro elektrony přenásobenou hmotou M , dostaneme

$$Mmn \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = en(M + m)\vec{E} + en(m\vec{v}_i + M\vec{v}_e) \times \vec{B} - m\nabla p_i + M\nabla p_e - (M + m)\vec{P}_{ei}.$$

Opět pomocí definičních rovnic z počátku a pomocí $\vec{P}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$ dostaneme

$$\frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{j}}{n} \right) = e\rho \vec{E} - (M + m)n\eta \vec{j} - m\nabla p_i + M\nabla p_e + en(m\vec{v}_i - M\vec{v}_e) \times \vec{B}.$$

Poslední člen můžeme zjednodušit

$$m\vec{v}_i + M\vec{v}_e = M\vec{v}_i + m\vec{v}_e + M(\vec{v}_e - \vec{v}_i) + (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = \frac{\rho}{n} \vec{v} - (M - m) \frac{\vec{j}}{ne}.$$

Výsledek vydělíme $e\rho$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \eta \vec{j} = \frac{1}{e\rho} \left[\frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{j}}{n} \right) + (M - m)\vec{j} \times \vec{B} + m\nabla p_i - M\nabla p_e \right].$$

V limitě m/M odtud plyne

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{en} (\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p_e),$$

což je **zobecněný Ohmův zákon**, jenž popisuje elektrické vlastnosti vodivé tekutiny. Člen $\vec{j} \times \vec{B}$ se nazývá Hallův proud. Často se stává, že tento a poslední člen jsou natolik malé, že mohou být zanedbány, Ohmův zákon pak prostě zní

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}.$$

Rovnice kontinuity pro měrnou hmotnost ρ a hustotu náboje σ získáme sečtením a odečtením rce kontinuity pro ionty a elektrony.³³

Soustava MHD rovnic pak je

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \rho \vec{g},$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Spolu s Maxwellovými rovnicemi se tato soustava často používá k popisu rovnovážného stavu plazmatu.³⁴

³³ Tedy

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0 \quad / .M \qquad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0 \quad / .m$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (M n_i + m n_e) + \nabla \cdot (M n_i \vec{v}_i + m n_e \vec{v}_e) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Analogicky

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0 \quad / .e \qquad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0 \quad / . - e$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_i e - n_e e) + \nabla \cdot (e n_i \vec{v}_i - e n_e \vec{v}_e) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

³⁴ Z Maxw. rovnic dostaneme **indukční rci** = vypovídá o změnách magnetického pole v daném místě, jež jsou dány prouděním a difúzí.

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \eta_e \vec{j}, \quad \vec{j} = (\nabla \times \vec{B}) / \mu_0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

dosazením z druhé rce do první, aplikací rotace a užitím třetí rce dostaneme

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\eta_e}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

Definujeme magnetické Reynoldsovo číslo vztahem

$$R_m = \frac{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})}{\eta \nabla^2 \vec{B}} \approx \frac{v_0 B_0 / L_0}{\frac{\eta B_0}{L_0^2}} = \frac{L_0 v_0}{\eta},$$

kde v_0 je charakteristická rychlost plazmatu, L_0 je charakteristická délka. Z výsledné rce tak můžeme získat dvě limity:

a) $v_0 \rightarrow 0, R_m \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B} \qquad \text{Difúzní rce}$$

b) bezsrážkové plazma, $\eta_e = 0, R_m \gg 1$ ($\sim 10^{14}$)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{Indukční rce, zamrznutí mag. pole v plazmatu} \qquad \%$$

Důkaz zamrznosti = uvažujme křivku C ohraničující plochu S , jež se pohybuje s plazmatem; v čase dt element $d\vec{s}$ (element C) zasáhne plochu $\vec{v} \times d\vec{s}dt$; velikost změny magnetického toku skrz C tak bude

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_C \vec{B} \cdot \vec{v} \times d\vec{s}.$$

Tato rce tedy vyjadřuje, že celková změna mag toku je dána přímo změnou mag toku plochou s časem nebo díky pohybu hranice v čase (což lze vyjádřit $d\vec{s}/\partial t = \vec{v} \times d\vec{s}dt/\partial t$, po „zkrácení“ dt a ∂t dostaneme druhý člen vpravo). Díky pravidlu smíšeného součinu ($\vec{B} \cdot \vec{v} \times d\vec{s} = -\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s}$) a aplikaci Stokesovy věty ($\oint_l F d\vec{l} = \int_S \nabla \times d\vec{S}$) lze psát

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{S}.$$

Vidíme, že v „závorce je indukční rce“, tj. za ideálních podmínek je změna mag toku skrz C nulová.

• Difúze v plně ionizovaném plazmatu

Uvažujme nyní předcházející MHD rce pro ustálený stav plazmatu, navíc bez gravitace; dostaneme tedy

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p, \quad \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}.$$

Druhá z těchto rovnic pro směr rovnoběžný s magnetickým polem zní prostě $E_{\parallel} = \eta_{\parallel} j_{\parallel}$, což je obyčejný Ohmův zákon. Kolmou složku nalezneme, vynásobíme-li rci vektorově \vec{B}

$$\vec{E} \times \vec{B} + (\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \eta_{\perp} \vec{j} \times \vec{B} = \eta_{\perp} \nabla p,$$

$$\vec{E} \times \vec{B} - \vec{v}_{\perp} B^2 = \eta_{\perp} \nabla p,$$

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\eta_{\perp}}{B^2} \nabla p.$$

První člen je $\vec{E} \times \vec{B}$ drift společný oběma druhům částic. Druhý člen je difúzní rychlost ve směru $-\nabla p$. Tok způsobený difúzí je

$$\Gamma_{\perp} = n \vec{v}_{\perp} = - \frac{\eta_{\perp} n (kT_i + kT_e)}{B^2} \nabla n,$$

tj. tato rce má tvar Fickova zákona s difúzním koeficientem

$$D_{\perp} = \frac{\eta_{\perp} n \sum kT}{B^2}.$$

Je to tzv. „klasický“ difúzní koeficient. D_{\perp} je úměrné $1/B^2$ stejně jako ve slabě ionizovaných plynech. Tato závislost je charakteristická pro klasickou difúzi a pochází z modelu chaotického pohybu s délkou kroku r_L . Rozdíly proti částečně ionizovanému plynu:

a) D_{\perp} není konstanta, ale je úměrné n (neboť hustota rozptylových center není pevně dána hustotou neutrálních atomů, ale je to sama hustota plazmatu)

b) protože η je úměrné $(kT)^{-3/2}$, D_{\perp} v plně ionizovaném plynu s rostoucí teplotou klesá; v částečně ionizovaném je tomu naopak, příčinou této rozdílnosti je rychlostní závislost Coulombova účinného průřezu

c) v plně ionizovaném plazmatu je difúze automaticky ambipolární (pokud zanedbáme srážky mezi stejnými částicemi); D_{\perp} v poslední rci je koeficient pro tekutinu jako celek; ambipolární pole nevzniká, protože oba druhy částic difundují stejnou rychlostí, což je důsledek zachování hybnosti ve srážkách mezi iontem a elektronem

§ Rovnováha a stabilita

Pokud by se jednalo pouze o pohyby jednotlivých částic, bylo by snadné určit magnetické pole, jež by bezsrážkové plazma udrželo. Potřebovali bychom pouze zajistit, aby se siločáry neprotínaly se stěnami vakuové komory, a zvolit takovou symetrii systému, aby všechny drifts částic, v_E , $v_{\nabla B}$ a další, byly rovnoběžné se stěnami. Není však vůbec snadné rozhodnout, zda magnetické pole určené pro udržení jednotlivých částic udrží plazma jakožto makroskopickou tekutinu. Ať jsou vnější pole jakkoliv uzpůsobena, plazma může vytvářet vnitřní pole, jež ovlivňuje jeho pohyb. Např. shluky nábojů mohou vytvořit \vec{E} pole, jež způsobí $\vec{E} \times \vec{B}$ drift směrem ke stěnám. Proud v plazmatu vyvolají \vec{B} pole, jež může být příčinou grad- B driftu směrem ven z plazmatu.

Problém udržení plazmatu je možno rozdělit na dvě části: problém rovnováhy a problém stability. Rovnováha je takový stav, v němž jsou všechny síly navzájem vyváženy, takže existuje časově nezávislé řešení. Podle toho, zda se malá odchylka od tohoto stavu utlumí nebo zesílí, jedná se o rovnováhu stabilní nebo nestabilní. Je snadnější vyšetřovat stabilitu systému než jeho rovnováhu. Pohybové rce lze linearizovat pro malé odchylky od rovnovážného stavu, čímž dostaneme lineární rovnice stejně jako v případě plazmatických vln. Otázka rovnováhy je však nelineárním problémem podobně jako difúze.

• Hydromagnetická rovnováha

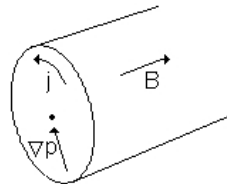
Obecný problém rovnováhy je složitý; z MHD rovnic však lze snadno získat několik fyzikálních kritérií. V ustáleném stavu s $\partial/\partial t = 0$ a $\vec{g} = 0$ musí plazma splňovat rce

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}, \quad c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j} / \epsilon_0.$$

První rce říká, že síla způsobená gradientem tlaku a Lorentzova síla jsou vyvážené. Jak k tomu dojde? Necht' existuje sloupec plazmatu, v němž ∇p směřuje k ose. Abychom rozpínavou sílu, jež je tím dána, vyvážili, musí plazmatem protékat azimutální proud v naznačeném směru. Velikost tohoto proudu nalezneme, vynásobíme-li první rci vektorově B

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} = (kT_i + kT_e) \frac{\vec{B} \times \nabla n}{B^2},$$

což je však výraz pro diamagnetický proud. Z hlediska pohybu jednotlivých částic diamagnetický proud vzniká Larmorovou rotací při nenulovém hustotním gradientu, neboť rychlost středovaná přes jeden oběh není nulová. Z hlediska MHD je diamagnetický proud vytvářen silou ∇p působící napříč \vec{B} ; výsledný proud právě stačí vyvážit síly působící na každý element tekutiny a zabránit pohybu.



První rce též zřetelně říká, že \vec{j} i \vec{B} jsou kolmé na ∇p . To ovšem není žádný triviální výrok, vždyť geometrie může někdy být velmi složitá. Např. uvažujme toroidální plazma s hladkým radiálním gradientem hustoty (v podstatě viz předchozí obrázek), v němž plochy s konstantní hustotou (vlastně s konstantní p) vytvářejí soustavu do sebe zasunutých

torusů. Protože \vec{j} a \vec{B} jsou kolmé na ∇p , musí ležet na plochách konstantního p . Obecně mohou být siločivky i proudové linie tak či onak pokriveny, nesmí však protínat plochy konstantního p .

Dosaďme nyní druhou rci do první

$$\nabla p = \varepsilon_0 c^2 (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \varepsilon_0 c^2 [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2],$$

neboli

$$\nabla(p + \varepsilon_0 c^2 B^2/2) = \varepsilon_0 c^2 (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}.$$

V mnoha případech je pravá strana nulová nebo malá. Tato rce říká, že

$$p + \varepsilon_0 c^2 B^2/2 = \text{const.},$$

$\varepsilon_0 c^2 B^2/2$ je tlak magnetického pole \rightarrow součet tlaku částic a tlaku magnetického pole je konstanta. V plazmatu s gradientem hustoty musí být slabé magnetické pole tam, kde je vysoká hustota částic, a naopak. Toto oslabení magnetického pole uvnitř plazmatu je ovšem způsobeno diamagnetickým proudem. Velikost tohoto diamagnetického efektu vyjadřuje poměr obou členů, jež je obvykle nazýván **parametrem** β

$$\beta = \frac{n \sum kT}{\varepsilon_0 c^2 B^2/2} = \frac{\text{tlak částic}}{\text{tlak magnetického pole}}.$$

Při všech případech, které jsme dosud zmiňovali, jsme mlčky předpokládali, že se jedná o plazma s malým β , tj. diamagnetický efekt tedy byl slabý. Proto jsme také mohli při studiu plazmatických vln předpokládat homogenní pole B_0 . V plazmatu s velkým β , jež je běžné např. v kosmickém prostoru, by rovnováha byla mnohem složitější.

• Difúze magnetického pole do plazmatu

V astrofyzice se často objevuje difúze magnetického pole do plazmatu. Existuje-li rozhraní mezi oblastí s plazmatem bez pole a oblastí s polem bez plazmatu a má-li plazma nulový odpor, zůstanou tyto oblasti odděleny. Elektromotorická síla vyvolaná jakýmkoliv pohybem siločar by vytvořila nekonečně velký proud, což není možné. Plazma tedy při svém pohybu tlačí na siločáry, může je ohýbat a kroutit. Je-li však vodivost plazmatu konečná, může plazma pronikat polem a naopak. Takové difúzní proniknutí trvá vždy jistou dobu a jsou-li tyto pohyby dostatečně pomalé, siločáry nemusí být pohybujícím se plynem deformovány. Difúzní dobu lze spočítat z rovnic

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}.$$

Předpokládejme, že plazma se nachází v klidu a siločáry v něm se pohybují. Pak $\vec{v} = 0$ a dostáváme

$$\partial \vec{B} / \partial t = -\nabla \times \eta \vec{j}.$$

Protože \vec{j} je dáno rci $c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j} / \varepsilon_0$, vychází

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\eta \varepsilon_0 c^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\eta \varepsilon_0 c^2 [\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}].$$

Protože $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, dostáváme rci difúze stejného typu jako v předchozí sekci

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \varepsilon_0 c^2 \nabla^2 \vec{B}.$$

Lze ji tedy řešit separací proměnných. Pro hrubý odhad vezměme L jako charakteristickou délku prostorové změny \vec{B} . Potom

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{\eta \varepsilon_0 c^2}{L^2} \vec{B}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{\pm t/\tau}, \\ \tau &= L^2 / \eta \varepsilon_0 c^2.\end{aligned}$$

To je charakteristická doba pronikání magnetického pole do plazmatu. Veličinu τ můžeme rovněž vyložit jako dobu, během níž dojde k anihilaci magnetického pole. (Když se siločáry pohybují plazmatem, indukované proudy plazma ohmicky zahřívají. Tato energie má svůj zdroj v energii magnetického pole. Za dobu τ se v jednotkovém objemu ztratí $\eta j^2 \tau$ energie a τ je tedy v podstatě doba, za kterou se energie rozplyne v Jouleovo teplo.)

§ Nestability

● Klasifikace nestabilit

Při studiu plazmatických vln jsme předpokládali neporušený stav, tj. stav dokonalé termodynamické rovnováhy: částice měly Maxwellovo rozdělení rychlostí, jemuž odpovídá nejvyšší entropie, neexistuje volná energie, která by mohla budít vlny, a museli jsme tedy předpokládat, že vlny jsou buzeny zvnějšku. Nyní budeme zkoumat stavy, jež nejsou v dokonalé termodynamické rovnováze, i když jsou v rovnováze v tom smyslu, že všechny síly jsou vyváženy a časově nezávislé řešení je možné. Protože v systému je nyní volná energie, mohou být vlny samobuzené, rovnováha je nestabilní. Nestabilitou rozumíme změnu, která zmenšuje volnou energii a přivádí plazma blíž ke skutečné termodynamické rovnováze.

Nestability můžeme klasifikovat dle typu volné energie, jež je může vyvolat. Existují 4 hlavní kategorie:

- **Svazková nestabilita.** V tomto případě prochází plazmatem buď svazek částic s vysokou energií, nebo elektrický proud, takže různé druhy částic se vůči sobě pohybují nějakou rychlostí. Energie tohoto proudění excituje vlny, oscilace získávají energii na účet energie proudění.

- **Rayleighova-Taylorova nestabilita.** Zde existuje hustotní gradient nebo plazma je ostře ohraničeno, takže není homogenní. Krom toho působí na plazma vnější síla jiná než elektromagnetická. Tato síla vyvolává nestabilitu. Analogickým případem je sklenice vody obrácená dnem vzhůru – i když je styčná plocha mezi vzduchem a vodou v rovnováze (váha vody je podpírána tlakem vzduchu), není to stabilní rovnováha, každá vlnka na povrchu bude narůstat na účet potenciální energie v gravitačním poli. K tomu dochází vždy, když je těžká tekutina podpírána lehčí tekutinou.

- **Univerzální nestabilita.** Dokud je plazma prostorově omezené, nebude nikdy v úplné termodynamické rovnováze, a to ani tehdy nepůsobí-li žádné vnější síly, jako např. gravitační pole. Díky hranici plazmatický tlak rozpíná plazma a tato energie rozpínání může vyvolat nestabilitu. Tento typ energie existuje v plazmatu vždy; vlny, jež tím vznikají nazýváme univerzální nestabilita.

- **Kinetická nestabilita.** V tekutinové teorii se předpokládá Maxwellovo rozdělení rychlostí. Není-li však rozdělení vskutku maxwellovské, představuje to odchylku od termodynamické rovnováhy; nestabilitu tedy může vyvolat anizotropie rychlostního rozdělení.

• **Dvoustavková nestabilita**

Příklad svazkové nestability. Uvažujme homogenní plazma, kde ionty jsou stacionární, elektrony vůči nim mají rychlost \vec{v}_0 , tj. pozorovatel se nachází v soustavě pohybující se s „proudem“ iontů. Necht' je plazma studené $kT_e = kT_i = 0$ a bez magnetického pole ($B_0 = 0$). Linearizované pohybové rce jsou

$$Mn_0 \frac{\partial \vec{v}_{i1}}{\partial t} = en_0 \vec{E}_1, \quad mn_0 \left[\frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_{e1} \right] = -en_0 \vec{E}_1.$$

Člen $(\vec{v}_{e1} \cdot \nabla) \vec{v}_0$ jsme ve druhé rci vypustili, protože předpokládáme, že \vec{v}_0 je v každém místě plazmatu stejné. V první rci se neobjeví člen $(\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1$, protože jsme položili $\vec{v}_{i0} = 0$. Hledáme elektrostatické vlny tvaru

$$\vec{E}_1 = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x},$$

kde \hat{x} je směr \vec{v}_0 a \vec{k} . Rce tak dostávají podobu

$$-i\omega Mn_0 \vec{v}_{i1} = en_0 \vec{E}_1, \quad \vec{v}_{i1} = \frac{ie}{M\omega} E \hat{x},$$

$$mn_0(-i\omega + kv_0) \vec{v}_{e1} = -en_0 \vec{E}_1, \quad \vec{v}_{e1} = -\frac{ie}{m} \frac{E \hat{x}}{\omega - kv_0}.$$

Rychlosti \vec{v}_{j1} mají obě směr x , můžeme tedy index x vypustit. Rce kontinuity pro ionty dává

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_{i1} = 0, \quad \rightarrow \quad n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1} = \frac{ien_0 k}{M\omega^2} E.$$

(Ostatní členy z $\nabla \cdot (n\vec{v}_i)$ vymizí, protože $\nabla n_0 = \vec{v}_{0i} = 0$.) Rce kontinuity pro elektrony dává

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_{e1} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) n_{e1} &= 0, \\ (-i\omega + kv_0) n_{e1} + ikn_0 v_{e1} &= 0, \\ n_{e1} = \frac{kn_0}{\omega - kv_0} v_{e1} &= -\frac{iekn_0}{m(\omega - kv_0)^2} E. \end{aligned}$$

Protože nestabilní vlny jsou vysokofrekvenční plazmové oscilace, nemůžeme užít plazmatické přiblížení, ale musíme použít Poissonovu rci

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_{i1} - n_{e1}),$$

po dosazení z předchozího

$$ikE = \frac{e}{\varepsilon_0} (ien_0 kE) \left[\frac{1}{M\omega^2} + \frac{1}{m(\omega - kv_0)^2} \right].$$

Po dělení výrazem ikE nalézáme **disperzní vztah**

$$1 = \omega_p^2 \left[\frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right].$$

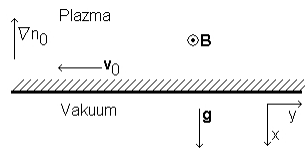
Zkoumejme, zda jsou oscilace s reálným k stabilní či nestabilní. Po vynásobení společným jmenovatelem bychom dostali rci 4. stupně pro ω . Kdyby byly všechny kořeny ω_j reálné, každý z nich by představoval možné oscilace

$$\vec{E}_1 = E e^{i(kx - \omega_j t)} \hat{x}.$$

$\Omega_p = (m/M)^{1/2}\omega_p$. Protože však oscilace v pohybující se elektronové tekutině mají ω_p posunuté Dopplerovým jevem, mohou se tyto dvě frekvence v laboratorní souřadné soustavě shodovat, má-li kv_0 odpovídající hodnotu. Fluktuační hustoty iontů a elektronů pak mohou splňovat Poissonovu rci. Lze dokonce ukázat, že elektronové oscilace mají zápornou energii, tj. celková kinetická energie elektronů je menší při oscilacích než bez oscilací. Kinetická energie v jednotkovém objemu v klidném, neporušeném svazku je $mn_0v_0^2/2$, při oscilacích je $m(n_0 + n_1)(v_0 + v_1)^2/2$. Při prostorovém vystředování se ukáže, že je tato hodnota menší než $mn_0v_0^2/2$ následkem fázových vztahů mezi n_1 a v_1 , jež musí splňovat rci kontinuity. Elektronové oscilace mají tedy zápornou energii a iontové oscilace kladnou energii. Obojí vlny mohou narůstat zároveň a přitom udržovat úhrnnou energii systému konstantní.

• Gravitační, Rayleigh-Taylor nestabilita

Protože magnetické pole působí na plazma podobně jako lehká tekutina podpírající těžkou tekutinu, může se v plazmatu objevit Rayleighova-Taylorova nestabilita. V zakřiveném magnetickém poli vzniká při pohybu částice podél zakřivených siločar odstředivá síla, která působí na plazma stejným způsobem jako ekvivalentní „gravitační“ síla. Proberme nejjednodušší případ; nechť rozhraní mezi plazmatem a vakuem leží v rovině $y - z$.



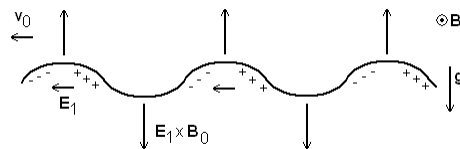
Gradient hustoty ∇n_0 nechť má směr $-x$ a gravitační pole \vec{g} směr x . Pro jednoduchost můžeme ponechat $KT_i = KT_e = 0$ a probrat případ, kdy β je malé a \vec{B}_0 homogenní.

V rovnovážném stavu lze ionty popsat rovnicí

$$Mn_0(\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{v}_0 = en_0\vec{v}_0 \times \vec{B}_0 + Mn_0\vec{g}. \quad (\%)$$

Je-li g konstantní, bude i v_0 konstantní a $(\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{v}_0$ vymizí. Předcházející rci vynásobíme vektorově \vec{B}_0 a dostaneme

$$\vec{v}_0 = \frac{M}{e} \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{B_0^2} = -\frac{g}{\Omega_c} \vec{y}. \quad (\#)$$



Drift elektronů, mající obrácený směr, můžeme v limitě $m/M \rightarrow 0$ zanedbat. Diamagnetický drift nevzniká, protože $KT = 0$, nevznikne ani $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0$ drift, neboť $\vec{E}_0 = 0$.

Jestliže se v důsledku chaotických tepelných fluktuací zvlní styčná plocha, drift \vec{v}_0 způsobí, že toto zvlnění poroste, viz obr. Driftem iontů se na bocích vlnek vytvoří náboj,

vznikne elektrické pole, jež má na hřebenu vlny opačné znaménko než v důlu vlny. Jak je patrné z obrázku, drift $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$ směřuje vzhůru v těch místech, kde se povrch prohnul nahoru, dolů směřuje tam, kde se povrch prohnul dolů. Růst zvlnění je výsledkem správného sfázování $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$ driftů.

Abychom našli inkrement, budeme obvyklým způsobem analyzovat linearizovanou vlnu šířící se ve směru y : $\vec{k} = k\vec{y}$. Pohybová rovnice pro iontovou poruchu je

$$\begin{aligned} M(n_0 + n_1) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot \nabla (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \right] = \\ = e(n_0 + n_1) [\vec{E}_1 + (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \times \vec{B}_0] + M(n_0 + n_1) \vec{g}. \end{aligned} \quad (@)$$

Nyní vynásobíme rci (%) výrazem $1 + (n_1/n_0)$ a dostaneme

$$M(n_0 + n_1) (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 = e(n_0 + n_1) \vec{v}_0 \times \vec{B}_0 + M(n_0 + n_1) \vec{g}.$$

Toto odečteme od rce (@) a zanedbáme-li členy druhého řádu, máme

$$Mn_0 \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \right] = en_0 (\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0).$$

Všimneme si, že \vec{g} se vyrušilo, informace o něm se však stále zachovává ve \vec{v}_0 . Pro poruchy ve tvaru $\exp[i(ky - \omega t)]$ dostáváme

$$M(\omega - kv_0) \vec{v}_1 = ie(\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0).$$

Řešení této rce viz elektromagnetické vlny kolmé na \vec{B} se záměnou $\omega \rightarrow \omega - kv_0$, $e^- \rightarrow$ ionty ... Pro $E_x = 0$ a

$$\Omega_c^2 \gg (\omega - kv_0)^2$$

je řešením

$$v_{ix} = \frac{E_y}{B_0}, \quad v_{iy} = -i \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_0}. \quad (A)$$

Druhý výraz je polarizační drift v souřadnicové soustavě spojené s ionty. Odpovídající veličina pro elektrony vymizí v limitě $m/M \rightarrow 0$, máme tedy

$$v_{ex} = E_y/B_0, \quad v_{ey} = 0. \quad (B)$$

Rovnice kontinuity pro poruchu iontů je

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 v_0) + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) n_1 + n_1 \nabla \cdot \vec{v}_0 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) n_0 + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \nabla \cdot (n_1 v_1) = 0.$$

Člen nultého řádu vymizí, protože \vec{v}_0 kolmé na ∇n_0 , a člen $n_1 \nabla \cdot \vec{v}_0$ vymizí, je-li \vec{v}_0 konstantní. Rovnice prvního řádu tedy je

$$-i\omega n_1 + ikv_0 n_1 + v_{ix} n'_0 + ikn_0 v_{iy} = 0, \quad (C)$$

kde $n'_0 = \partial n_0 / \partial x$. Pro elektrony platí jednodušší rce, neboť $\vec{v}_{e0} = 0$ a $v_{ey} = 0$

$$-i\omega n_1 + v_{ex} n'_0 = 0. \quad (D)$$

Všimněme si, že jsme použili plazmatické přiblížení a předpokládali jsme $n_{i1} = n_{e1}$. Takto lze postupovat, protože nestabilní vlny jsou nízkofrekvenční. Rovnice (A) a (C) dávají

$$(\omega - kv_0)n_1 + i\frac{E_y}{B_0}n'_0 + ikn_0\frac{\omega - kv_0}{\Omega_c}\frac{E_y}{B_0} = 0.$$

Rovnice (B) a (D) dávají

$$wn_1 + i\frac{E_y}{B_0}n'_0 = 0, \quad \frac{E_y}{B_0} = \frac{i\omega n_1}{n'_0}.$$

Dosazením do rce předchozí dostaneme

$$(\omega - kv_0)n_1 - \left(n'_0 + kn_0\frac{\omega - kv_0}{\Omega_c}\right)\frac{\omega n_1}{n'_0} = 0,$$

$$\omega - kv_0 - \left(1 + \frac{kn_0}{\Omega_c}\frac{\omega - kv_0}{n'_0}\right)\omega = 0,$$

$$\omega(\omega - kv_0) = -v_0\Omega_c n'_0/n_0.$$

Za v_0 dosadíme z rce (#) a dostaneme kvadratickou rci pro ω

$$\omega^2 - kv_0\omega - g(n'_0/n_0) = 0.$$

Řešení jsou

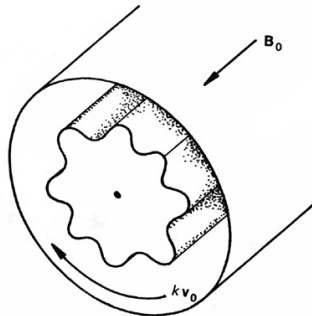
$$\omega = \frac{1}{2}kv_0 \pm \left[\frac{1}{4}k^2v_0^2 + g(n'_0/n_0)\right]^{1/2}.$$

Nestabilita vznikne tehdy, je-li ω komplexní, tj. jestliže

$$-gn'_0/n_0 > k^2v_0^2/4.$$

Z toho je patrné, že pro nestabilitu je nezbytné, aby g a n'_0/n_0 měly opačná znaménka. To je právě ono tvrzení, že lehká tekutina podpírá těžkou tekutinu; v opačném případě je reálné a plazma je stabilní. Pro dostatečně malé k (dlouhé vlny), je inkrement nestability dán výrazem

$$\gamma = \text{Im}(\omega) \approx [-g(n'_0/n_0)]^{1/2}.$$



Tato nestabilita, pro niž platí $\vec{k} \perp \vec{B}_0$, se někdy nazývá žlábková nestabilita, a to z následujícího důvodu. Ve válci postupují vlny ve směru ϑ , působí-li síly ve směru r . Plochy konstantní hustoty pak připomínají říčkové sloupy zdobené podélnými žlábkami, viz obr.

Literatura a zdroje

- Chen F.F., Úvod do fyziky plazmatu
(převážná většina této kapitoly doslova převzata právě z tohoto zdroje ...)
- Krlín L., Basic Features of the Kinetic Theory of Plasma Waves and of Waves-Particles Interaction, interní text k přednášce MFF UK, Teorie plazmatu, Doc. Ing. Ladislav Krlín, DrSc., 2006
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Teorie plazmatu, Doc. Ing. Ladislav Krlín, DrSc., 2006
- ... poznámky z přednášky MFF UK, Plazmová astrofyzika, RNDr. Marian Karlíček, DrSc., 2004
- Kleczek J., Velká encyklopedie vesmíru, Academia, 2002
- Vanýsek V., Základy astronomie a astrofyziky, Praha, Academia, 1980
- Doc. RNDr. Vladimír Karas, DrSc., Elementární procesy, studijní text k přednášce MFF UK