Sada domácích úkolů do Elektrodynamiky (deadline 23:59:59 17.4.2018)

1. Pomocí ϵ-tensorů ukažte, že platí následující identity:

$$\text{a)}[\mathbf{1\ bod}]\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0,$$
$$\text{b)}[\mathbf{1\ bod}]\ A\times(\nabla\times B)+B\times(\nabla\times A)+(B\cdot\nabla)\,A+(A\cdot\nabla)\,B=\nabla\,(A\cdot B)\,,$$

   kde $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jsou trojrozměrné vektory a A, B jsou trojdimezionální vektorová pole.

2. [**2 body**] Určete Greenovu funkci k dvojrozměrného Laplaceova operátoru, tj. řešení rovnice

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G(\vec{x}-\vec{x}')=\delta^2(\vec{x}-\vec{x}').$$

3. [**1,5 bodu**] Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x)=\sin 2x\cdot \mathrm{e}^{-x^2}.$$

4. [**2 body**] Použijte vzorec

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{x}'$$

   na nalezení elektrické intenzity od nekonečně velké a nekonečně tenké desky s konstantní povrchovou hustotou náboje.

5. Vyjádřete následující rozložení náboje pomocí δ-funkcí (a Heavisidovy funkce v případě b)) ve tvaru prostorové hustoty $\rho(\vec{x})$ v zadaných souřadnicích. Ověřte, jestli

$$\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x}$$

   dává očekávaný výsledek.

   a) [**0,5 bodu**] Rovnoměrně rozložený náboj na povrchu válce s poloměrem R, přičemž náboj na jednotkovou délku (resp. výšku válce) je λ. Použijte válcové souřadnice.

   b) [**1,5 bodu**] Náboj Q rovnoměrně rozložený na nekonečně tenkém kruhovém disku s poloměrem R. Použijte sférické souřadnice. (Pokud budete mít ve jmenovateli hustoty náboje souřadnici r, vysvětlete fyzikálně nebo matematicky, proč tam ta souřadnice je (Odpověď „Aby to vyšlo“ nestačí).)

6. [**1 bod**] Lze vytvořit elektrostatické pole $\vec{E}(\vec{x})$ konstantního směru, jehož velikost se mění pouze ve směrech kolmých na $\vec{E}(\vec{x})$? (Tj. pokud $\vec{E}(\vec{x})$ míří ve směru z, velikost pole se mění pouze ve směrech x a y.) Pokud ano, dejte příklad takového pole. Pokud ne, vysvětlete proč.

7. **[2 body]** Pomocí vytvořující funkce pro Legendrovy polynomy, tj.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l,$$

ukažte, že platí rekurzivní relace

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x).$$

8. Ukažte, že pro Legendrovy polynomy platí:

$$\text{a)}\textbf{[0,5 bodu]} \int_{-1}^{1} P_l(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{pro } l > 0,$$
$$\text{b)}\textbf{[1,5 bodu]} \int_{-1}^{1} P_l^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}.$$

(V případě b) můžete použít (bez důkazu) rekurzivní relaci pro Legendrovy polynomy z předchozího příkladu.)

9. **[3 body]** Ukažte, že platí následující identita

$$\int_V \vec{r} \times \left(\nabla \times \vec{M}\right) \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{r} \times \left(\vec{n} \times \vec{M}\right) \mathrm{d}S - \int_V \left(\vec{M} \times \nabla\right) \times \vec{r}\,\mathrm{d}V,$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor, $\vec{n}$ je normálový vektor k ploše S a $\vec{M}(\vec{r})$ je vektorové pole. (Identita použitá v rovnici 82 ve skriptech.)

10. **[7 bodů]** Určete elektrický potenciál $\phi(r,\varphi)$ od nabité nekonečné válcové plochy s poloměrem R a následující plošnou hustotou náboje

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} \sigma_0 & \frac{3\pi}{2} < \varphi \leq 2\pi \text{ a } 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ -\sigma_0 & \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

kde $\sigma_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. (Možný způsob řešení: nejprve pomocí separace proměnných ve válcových souřadnicích vyřešte Laplaceovu rovnici pro potenciál $\phi(r,\varphi)$, dále využijte toho, že na válcové ploše bude normálová složka elektrické intenzity nespojitá, kde „nespojitost“ bude úměrná plošné hustotě náboje, vhodně využijte Fourierovu řadu.)

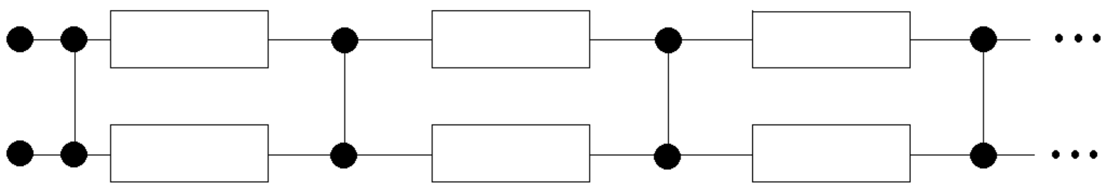
11. **[5 bodů]** Sféra (tj. kulová slupka) s poloměrem R a s konstantní povrchovou hustotou náboje σ rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω. Určete vektorový potenciál $\vec{A}(\vec{x})$. (Pokud budete vektorový potenciál určovat pomocí integrálu z hustoty proudu, při integraci volte osy x', y', z' tak, aby osa z' splývala s vektorem $\vec{x}$ a aby se vektor $\vec{\omega}$ promítal pouze do os x' a z'. Tato volba by měla usnadnit integraci.)

12. Uvažte nekonečně velkou a nekonečně tenkou desku (splývající s rovinou xy) s nulovým elektrickým potenciálem a s hustotou elektrického proudu

$$\vec{j}(t) = j(t)\hat{y} = (0, j(t), 0).$$

Ze symetrií je vektorový potenciál dán jako

$$\vec{A}(z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{y} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{j\left(t - \frac{\sqrt{z^2+r^2}}{c}\right)}{\sqrt{z^2+r^2}}\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$



Obrázek 1: Schéma obvodu

a) **[1 bod]** Pomocí vhodných substitucí převeďte vektorový potenciál na tvar

$$\vec{A}(z,t) = \frac{\mu_0 c}{2} \hat{y} \int_0^\infty j\left(t - \frac{z}{c} - u\right) \mathrm{d}u.$$

b) **[1,5 bodu]** Ukažte, že elektrická intenzita a magnetická indukce je

$$\vec{E}(z,t) = -\frac{\mu_0 c}{2} j\left(t - \frac{z}{c}\right) \hat{y},$$
$$\vec{B}(z,t) = \frac{\mu_0}{2} j\left(t - \frac{z}{c}\right) \hat{x}, \quad \text{pro } z > 0,$$

magnetickou indukci nalezněte i pro případ $z < 0$. Při výpočtu použijte, že

$$j(-\infty) = 0.$$

c) **[1 bod]** Spočtěte elektrickou intenzitu a magnetickou indukci pro následující konkrétní hustoty proudu:

$$i)\ j_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ j_0 & t > 0, \end{cases}$$
$$ii)\ j_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \alpha t & t > 0, \end{cases}$$

kde j_0 a α jsou reálné konstanty.

Zajímavější příklady za bonusové body:

13. **[3 body]** Na základě Gaußova zákona určete elektrickou intenzitu od bodového náboje q v libovolné dimenzi $n \geq 2$. Jaký bude příslušný potenciál?

14. **[1 bod]** Spočtěte celkový odpor nekonečného obvodu na Obrázku 1, pokud má každý rezistor odpor $R > 0$.