Sada domácích úkolů do Speciální relativity (deadline: odevzdat alespoň týden před tím, než budete chtít jít na zkoušku)

1. **[2 body]** Lorentzovský boost v obecném směru (pro $c = 1$) je dán jako bloková matice

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma v_n \\ \hline \gamma v^m & \delta^m_n + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} v^m v_n \end{array}\right),$$

   kde v^m je vektor rychlosti tohoto boostu a γ je příslušný lorentzovský faktor. Odvoďte tvar tohoto boostu. (Hint: Můžete využít toho, jak se transformují prostorové vektory $\vec{x}$ kolmé a rovnoběžné k rychlosti $\vec{v}$ při boostu podél souřadnicové osy. Tato vlastnost bude zachována i pro obecný směr.)

2. **[4 body]** Ukažte, jak se transformují vektory elektrické intenzity $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ při boostu v libovolném směru. Můžete bez důkazu využít tvar obecného Lorentzova boostu z předchozího příkladu.

3. **[2 body]** Cestující ve vlaku, který jede rychlostí $v = \frac{4}{5}c$, chvíli svítí laserovým ukazovátkem kolmo z okna (tj. vyšle krátký světelný paprsek kolmo z vlaku). Jaký je úhel mezi tímto paprskem a kolejemi (v klidové soustavě kolejí)?

4. **[1 bod]** Je grupa

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^T A = \mathbb{1}, \det A = 1 \right\},$$

   kde je operací maticové násobení, komutativní? Pokud ano, dokažte, pokud ne, najděte dvě matice, které spolu nekomutují.

5. **[3 body]** Určete trajektorii, po které se pohybuje relativistická částice s nábojem e a hmotností m v uniformním konstantním magnetickém poli $\vec{B} = (0, 0, B)$.

6. Ukažte, že platí:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\textbf{[0,1 bodu]}\ u^\mu p_\mu = mc, \\ &\text{b)}\textbf{[0,2 bodu]}\ \partial_\mu x_\nu = g_{\mu\nu}, \\ &\text{c)}\textbf{[0,5 bodu]}\ u^\mu \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = 0, \\ &\text{d)}\textbf{[0,2 bodu]}\ P^{\mu\nu} u_\mu = 0, \\ &\text{e)}\textbf{[0,5 bodu]}\ P^{\mu\nu} P_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho - u^\mu u_\rho = P^\mu_\rho, \end{aligned}$$

   kde u^μ je 4-rychlost, p^μ je 4-hybnost, $x^\mu = (ct, x, y, z)$, $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $g_{\mu\nu}$ je Minkowskiho metrika a

$$P^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu.$$

7. **[3 body]** Ukažte, že výraz

$$W^2 - \frac{|\vec{S}|^2}{c^2},$$

kde W je hustota energie a $\vec{S}$ je Poytingův vektor, je invariantní vůči Lorentzovým transformacím. V každé vztažné soustavě potom platí

$$W^2 - \frac{|\vec{S}|^2}{c^2} \geq 0.$$

Jaký je fyzikální význam této nerovnosti? (Hustota energie a Poytingův vektor jsou dány jako $W = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)$ a $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$.)

8. **[3 body]** Ukažte, že invariant $F_{\mu\nu}\left(\star F^{\mu\nu}\right)$ se dá psát ve tvaru 4-divergence

$$2\partial_\mu \left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma\right).$$

(Proto tento invariant není v lagrangiánu pro elektromagnetické pole.) Hodgeho duál je dán jako

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}.$$

Příklady za bonusové body:

9. **[1 bod]** Dejte příklad podélného elektromagnetické vlnění ve vakuu. Pokud takové vlnění neexistuje, dokažte to. (Elektromagnetické vlnění znamená, že vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ vyhovují jak Maxwellovým rovnicím, tak vlnové rovnici. Podélné vlnění znamená, že vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou rovnoběžné se směrem šíření vlny.)

10. **[2 body]** Znovu řešte příklad člověka běžící s žebříkem (desáté cvičení, třetí příklad). Mějte ale tentokráte jako klidovou soustavu soustavu člověka a jako pohybující se soustavu soustavu místnosti. Nakreslete celý prostoročasový diagram a spočtěte souřadnice, v obou vztažných soustavách, bodu průchodu člověka dveřmi a bodu, kdy ke dveřím přiletí světelný signál od bodu nárazu žebříku do zadní zdi.

11. **[2 body]** Killingovo vektorové pole X^μ je vektorové pole, které generuje isometrie (pseudo-)Riemannových variet (v našem případě Minkowskiho prostoru). To, že „generuje isometrie“, znamená, že tok Killingova vektorového pole (resp. integrální křivka k tomuto vektorovému poli) je spojitá isometrie variety. V případě Minkowskiho prostoru se Killingovo vektorové pole najde jako řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu = 0.$$

Najděte, pokud možno všechna, lineárně nezávislá Killingova vektorová pole. Hint: Soustavu rovnic přímo neřešte, ale na základě toho, jak vypadají symetrie Minkowskiho prostoru (tvoří Poincarého grupu), Killingova vektorová pole tipněte a jen ukažte, že opravdu splňují soustavu diferenciálních rovnic.