Formální řešení rovnice přenosu záření

- při známé opacitě a emisivitě

- když $\eta, \chi = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dz} = 0 \longrightarrow I(z) = konst.$ ... prázdné prostředí

- když $\chi = 0,\ \eta = \eta(z) \Rightarrow \mu \frac{dI}{dz} = \eta(z) \longrightarrow I(z,\mu) = I(0,\mu) + \int_0^z \eta(z) \frac{1}{\mu} dz$

  ... opticky tenké prostředí – planetární mlhoviny

- když $\eta = 0,\ \chi = \chi(z) \Rightarrow \mu \frac{dI}{dz} = -\chi(z) I \longrightarrow I(0,\mu) = I(\tau,\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}}$

  ... opticky husté prostředí → zemská atmosféra

- když $\eta = \eta(z),\ \chi = \chi(z) \Rightarrow \mu \frac{dI}{d\tau} = I(\tau) - S(\tau)$

$$I(\tau_1,\mu) = I(\tau_2,\mu) e^{-\frac{\tau_2-\tau_1}{\mu}} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t) e^{-\frac{t-\tau_1}{\mu}} \frac{1}{\mu} dt$$

- pro polonekonečnou atmosféru: $\tau_1 = 0,\ \tau_2 \to \infty$

$$I(0,\mu) = \int_0^\infty S(t) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu}$$

$S(t)$ se aproximuje lineárně $S(\tau) = a + b\tau$

$\Rightarrow I(0,\mu) = S(\tau = \mu)$

- intenzita v kolmém směru ($\mu = 1$) odpovídá vydatnosti v opt. hloubce $\tau = 1$

- pro homogenní konečnou vrstvu: $\tau_2 = T,\ \tau_1 = 0$

$$I(0,1) = S(1 - e^{-T})$$

- opt. tenká vrstva $T \ll 1$: $I(0,1) = ST$
- opt. tlustá vrstva $T \gg 1$: $I(0,1) = S$

- difuzní přiblížení – v hlubších oblastech $P_a(\tau) \approx 1 \Rightarrow S_\nu \to B_\nu$

  - taylorův rozvoj vydatnosti $S_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n B}{d\tau_\nu^n} \frac{(t-\tau)^n}{n!}$

$$\Rightarrow I_\nu(\tau,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B}{d\tau_\nu^n} = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}} \frac{1}{\mu} dt$$

- ponecháme jen první členy:

$$\Rightarrow \quad I_\nu(\tau_\nu,\mu) \approx B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \qquad H_\nu \approx \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \qquad \Rightarrow f_\nu^k \approx \frac{1}{3}$$

$$J_\nu \approx B_\nu(\tau_\nu) \qquad K_\nu \approx \frac{1}{3} B_\nu(\tau_\nu)$$

- vyjádříme Eddingtonův tok jako fci teploty

$$H_\nu = \frac{1}{3}\frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z} = -\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\right)\frac{dT}{dz}$$

$$H = \int_0^\infty H_\nu d\nu = -\frac{1}{3}\frac{dT}{dz}\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}d\nu$$, zavedem Rosselandovu střední opacitu

$$\frac{1}{\bar{\chi}_R}\frac{dB}{dT} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}d\nu$$

$$H = -\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\bar{\chi}_R}\frac{dB}{dT}\right)\frac{dT}{dz}$$

- když $H > 0 \to \frac{dT}{dz} < 0$

- Λ- operátor - polonekonečné prostředí $\tau_2 \to \infty$, $\tau_1 \to 0$, vyjádříme I_ν pro oba směry

$$I_\nu(\tau_\nu,\mu) = \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}\frac{dt}{\mu}$$

$$I_\nu(\tau_\nu,\mu) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}\frac{dt}{-\mu}$$

$$\Rightarrow J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^\infty S_\nu(t)\, E_1(|t-\tau_\nu|)dt,$$

kde $E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt} t^{-n} dt$ ... n-tá exp. integrální fce

$\Rightarrow$ formální zápis $J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu}[S_\nu(t)]$, $I_\nu(\tau_\nu,\mu) = \Lambda_{\nu,\mu}[S_\nu(\tau_\nu)]$

- případně přes profil čáry $\bar{J} = \Lambda[S] = \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu$

$\Rightarrow$ obdobně i pro ostatní momenty (vyšší řády exp.-integrální fce)

$$F_\nu(\tau_\nu) = \Phi_{\tau_\nu}[S_\nu(t)], \quad K_\nu(\tau_\nu) = X_{\tau_\nu}[S_\nu(t)]$$

- pravděpodobnostní interpretace - zkoumáme-li co se děje s jedním fotonem

$P(\tau) = e^{-\tau}$ .. pravděp., že mezi 0 a τ není absorbován

$\Rightarrow P_a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$

- pravděp. že je absorbován mezi τ a $\tau + d\tau$ ale nejdřív prošel od 0 do τ

$$p(\tau)\, p_a(\delta\tau) = p(\tau)\, d\tau = e^{-\tau} d\tau$$

- je-li vyzářen ze $\tau = 0$, pak $p(\tau)d\tau = e^{-\frac{\tau}{\mu}}\frac{d\tau}{\mu} \Rightarrow \bar{p}(\tau)d\tau = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\mu}}\frac{d\tau}{\mu}d\mu = E_1(\tau)d\tau$