

Vzorečky

$$\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} c E_v \\ \vec{F}_v \\ c \vec{P} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \\ \vec{n} \otimes \vec{n} \end{pmatrix} I_v d\omega$$

$$I = ch\nu f_N = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f_R$$

$$E_v = \frac{4\pi}{c} J_v, E_R = \frac{1}{c} T^4$$

$$H_v = \frac{1}{4\pi} F_v, P = \frac{1}{3} E_R$$

$$J_v(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(z, \mu) d\mu$$

$$P_R = \frac{4\pi}{c} K, E_R = \frac{4\pi}{c} J, f_v^k = \frac{K_v}{J_v}$$

$$H_v(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(z, \mu) \mu d\mu$$

$$\vec{P} = \text{diag}(P_R) - \frac{1}{2} \text{diag}(3P_R - E_R)$$

$$K_v(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(z, \mu) \mu^2 d\mu$$

$$\tilde{I}_v = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta, \nu, \mu) \sin \theta \cos \theta d\theta d\mu$$

$$P_I = E_1^2 + E_2^2$$

$$P_I^2 = P_Q^2 + P_u^2 + P_v^2$$

$$P = \frac{\sqrt{P_Q^2 + P_u^2 + P_v^2}}{P_I}$$

$$P_Q = E_1^2 - E_2^2$$

$$P_u = 2E_1 E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$I, Q, U, V = \frac{c}{8\pi} P_{I, Q, U, V}$$

$$P_v = 2E_1 E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) I_v(\vec{r}, \vec{n}) = \eta_v(\vec{r}, \vec{n}) - \chi_v(\vec{r}, \vec{n}) I_v(\vec{r}, \vec{n})$$

$$d\tau_v(z) = -\chi_v(z) dz$$

$$\mu \frac{dI_v(z, \mu)}{dz} = \eta_v(z, \mu) - \chi_v(z, \mu) I_v(z, \mu)$$

$$S = \frac{\mu}{\chi}$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) I_v(r, \mu) = \eta_v(r, \mu) - \chi_v(r, \mu) I_v(r, \mu)$$

$$\mu \frac{dI}{dz} = I - S$$

$$\frac{\partial E_v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{F}_v = \oint (\eta_v - \chi_v I_v) d\omega = 4\pi (\eta_v - \chi_v J_v)$$

$$\frac{dH_v}{dz} = \eta_v - \chi_v J_v, \frac{dK_v}{dz} = -\chi_v H_v$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}_v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{P}_v = \frac{1}{c} \oint \vec{n} (\eta_v - \chi_v I_v) d\omega = -\frac{1}{c} \chi_v F_v$$

$$\frac{d^2(f_v^k J_v)}{dz^2} = J_v - S_v$$

$$\left(\frac{h_i}{N}\right)^* = \frac{g_i}{U^*} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \quad U^* = \sum_i g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \quad \left(\frac{h_u}{n_e}\right)^* = \frac{g_u}{g_e} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$\frac{n_{0,j+1}^*}{n_{0,j}^*} = \frac{g_{0,j+1} \cdot g_e^{-1}(\nu)}{g_{0,j}} e^{-\frac{\epsilon_{I,j} + \frac{1}{2}m\nu^2}{kT}} = \frac{g_{0,j+1}}{g_{0,j}} \frac{2}{h e} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_{I,j}}{kT}}$$

$$n_{ij}^* = n_{0,j+1} n_e(\nu) \Phi_{ij}(T) \quad \Phi_{ij}(T) = \frac{g_{i,j}}{g_{0,j+1}} C_I T^{-3/2} e^{-\frac{\epsilon_{I,j} - \epsilon_{i,j}}{kT}}$$

diskret:

Kontinuum:

$$C_I = \left(\frac{h^2}{2\pi m_e kT}\right)^{3/2}$$

$$r_{eu} = n_e B_{eu} I$$

$$r_{bf} = h_0 p_\nu I d\nu$$

$$A_{ul} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ul}$$

$$r_{ul}^{stim} = n_u B_{ul} I$$

$$r_{fb}^{stim} = n_u n_e(\nu) G(\nu) I \nu d\nu$$

$$g_e B_{eu} = g_u B_{ul}$$

$$r_{ul}^{spont} = n_u A_{ul}$$

$$r_{fb}^{spont} = n_u n_e(\nu) F(\nu) \nu d\nu$$

$$F(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} G(\nu)$$

$$G(\nu) = \frac{m_e}{h} \left[\frac{h_0}{n_u^* n_e^*(\nu)} \right] p_\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

makroskopisch:

$$\sigma_{cl} = \frac{\pi e^2}{m_e c} \quad f_{lu} = \frac{\alpha_{lu}}{\sigma_{cl}}$$

$$\chi(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} \left(\Phi(\nu) n_e B_{lu} - \psi^{stim}(\nu) n_u B_{ul} \right) \quad \chi_{bf}(\nu) = h_0^* \alpha_{bf}(\nu) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)$$

$$q(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} \psi^{spont}(\nu) n_u A_{ul}$$

$$q_{fb}(\nu) = h_0^* \alpha_{bf}(\nu) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) B_\nu(T) d\nu$$

formal:

diffusiv:

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) e^{-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\mu}} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t) e^{-\frac{t - \tau_1}{\mu}} \frac{dt}{\mu}$$

$$I_\nu(\tau, \mu) \approx B_\nu + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}$$

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(t) E_1(|t - \tau_\nu|) dt \quad E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt} t^{-n} dt \Rightarrow J_\nu = \mathcal{L}[S_\nu(t)]$$

$$j_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [I(+\mu, \nu) + I(-\mu, \nu)]$$

$$\mu \frac{dh_{\mu\nu}}{d\tau_\nu} = j_{\mu\nu} - S_\nu$$

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} \frac{dB}{dt} = \int_0^\infty \frac{1}{\bar{\kappa}_\nu} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} d\nu$$

$$\frac{dj_{\mu\nu}}{d\tau_\nu} = j_{\mu\nu} - S_\nu$$

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [I(+\mu, \nu) - I(-\mu, \nu)]$$

$$\mu \frac{dj_{\mu\nu}}{d\tau_\nu} = h_{\mu\nu}$$

Vzorečky 2

rozptyl:

$$\eta^s = \sigma_0(\vec{r}) \oint \frac{d\omega}{4\pi} \int_0^\infty R(\vec{n}, \nu, \vec{n}', \nu') I d\nu$$

$$L(\chi, \tau) = \frac{\tau}{\pi(\chi^2 + \tau^2)} \quad \chi = \frac{E - E_n}{h} \quad \tau = \frac{\Gamma_{Ln}}{4\pi}$$

elipsa

$$g(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{3}{2}(1 + \cos \phi)$$

$$\sigma_{\omega} = \frac{8}{3} \frac{\hbar e^4}{m_e^2 c^2} - \text{na valných}$$

$$\sigma_{\omega} = \frac{8\hbar e^4}{3m_e^2 c^2} f_{ij} \frac{\omega^4}{(\omega_{ij}^2 - \omega^2)} \quad (\omega = 2\pi\nu)$$

struktúra:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad j \in (|l-s|, |l+s|)$$

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\Delta m_l = 0, \pm 1$$

$$\Delta j = 0, \pm 1 \quad \text{okrem } j=0 \leftrightarrow j'=0$$

LS

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

JJ

$$\vec{J}_i = \vec{L}_i + \vec{S}_i$$

$$\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i$$

Sobolevova aproximácia: $\chi(\vec{n}) = \frac{\chi_c c}{v_0 |\vec{n} \cdot \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n}|} \Rightarrow \frac{v_0}{c} |\vec{n} \cdot \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n}| \frac{dI}{dy} = \chi_c (s_L - I)$

$$I(\vec{n}') = I_c \beta(\vec{n}') + s_L [1 - \beta(\vec{n}')] \quad , \quad \beta(\vec{n}) = \frac{1 - e^{-\chi(\vec{n})}}{\chi(\vec{n})}$$

$$\bar{J} = \frac{1}{4\pi} \oint I_c \beta(\vec{n}) d\omega + s_L (1 - \beta) \quad , \quad \beta = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{1 - e^{-\chi}}{\chi} d\omega$$

$$\Delta l_s = \frac{C \Delta v_0}{v_0 \frac{dv_0}{dv}} \approx \frac{v_{th}}{v_0} l_0$$

$$\chi_{th} \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon_v} N}$$

rozptyl podruhe: - termalizačná dĺžka $L^2 = \sum_i \langle L_i^2 \rangle \approx N l^2 \quad L = \frac{l_v}{\sqrt{\epsilon_v}}$

$$L_v = \frac{1}{\kappa_v + \sigma_v} \quad , \quad \epsilon_v = \frac{\kappa_v}{\kappa_v + \sigma_v} \quad , \quad S_v = \frac{\kappa_v B_v + \sigma_v J_v}{\kappa_v + \sigma_v} = \epsilon_v B_v + (1 - \epsilon_v) J_v$$

- v čarách: $\kappa_v = \kappa_c + \kappa_L \Phi_v$, $\eta_v = \kappa_c B_v + \kappa_L \Phi_v [\epsilon_v B_v + (1 - \epsilon_v) J_v]$

$$S_v = \eta_v B_v + (1 - \eta_v) J_v \quad \eta = \frac{\kappa + \epsilon \Phi}{\kappa + \sigma} \quad , \quad r = \frac{\kappa_c}{\kappa_L}$$

$$\eta = 1 + \frac{[\epsilon \Phi]}{[\kappa + \sigma]} = 1 + \frac{[\epsilon \Phi]}{[\kappa + \sigma]} \quad , \quad 1 + \frac{[\epsilon \Phi]}{[\kappa + \sigma]}$$

Fyzika hmotných atmosfér

- specifická intenzita záření I , $[I]_{\text{sys}} = \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$
 $[I]_{\text{si}} = \text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$

$$\delta E = I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) \vec{n} \cdot d\vec{S} d\omega d\nu dt$$

– počet fotonů: $f_n h\nu = I$

- rozdělovací fce fotonů f_R

$$\delta E = h\nu f_R(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) \vec{n} \cdot d\vec{S} d\omega d\nu dt$$

$$f_R(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3r d^3p = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} f_R(\vec{r}, \nu, \vec{n}, t) d^3r d\omega d\nu$$

→ přes $d\vec{S}$ za čas dt

– při započtení spinu:

$$f_R d^3r d^3p = \sum_{\alpha=1}^2 f_{\alpha} d^3r d^3p$$

$$\frac{h^3 \nu^2}{c^3} f_R(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) \vec{n} \cdot d\vec{S} d^3r d\omega d\nu dt$$

$$\Rightarrow f_R(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) = \frac{c^3}{h^3 \nu^2} f_N(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) = \frac{c^2}{h^4 \nu^3} I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)$$

– rovnovážné rozdělení:

n_{α} ... hustota fotonů vyčíslená v jednotkovém objemu fáz. prostoru

$$\Rightarrow n_{\alpha} = f_{\alpha} h^3$$

$$I(\nu) = B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$I = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f_R = 2 \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f_{\alpha} = 2 \frac{h\nu^3}{c^2} n_{\alpha}$$

– (limitní případy:

fotony jsou bosony

• $\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \Rightarrow B_{\nu}(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ – Wienův

$$\hookrightarrow n_{\alpha} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} - 1}$$

• $\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \Rightarrow B_{\nu}(T) \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$ – Rayleigh-Jeansův

– bolometrická intenzita $B(T) = \int_0^{\infty} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{\sigma_R}{\pi} T^4$, $\sigma_R = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$

Momenty záření:

$$\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} c E_v \\ \vec{F}_v \\ c \vec{P}_v \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \oint \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \\ \vec{n} \otimes \vec{n} \end{pmatrix} I_v d\omega$$

- specifická intenzita záření $I(\vec{r}, \vec{n}, \nu)$ (0. moment)

$$\delta E = I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \vec{n} d\vec{S} d\omega d\nu dt$$

- střední intenzita záření $J(\vec{r}, \nu)$ (1. moment)

$$J(\vec{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) d\omega$$

$$E_v = h\nu \int f_n(\vec{r}, \vec{n}, \nu) d\omega = \frac{4\pi}{c} J(\vec{r}, \nu)$$

$$E_R(\vec{r}) = \int_0^\infty E_r(\vec{r}, \nu) d\nu = \frac{4\pi}{c} B(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

- tok záření $\vec{F}_v(\vec{r}, \nu)$ ~~2. moment~~ (2. moment)

$$\vec{F}_v(\vec{r}, \nu) = \oint I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \vec{n} d\omega$$

- celkový počet fotonů (energie)

$$N(\vec{r}, \nu) h\nu = \left(\oint f_n(\vec{r}, \vec{n}, \nu) c \vec{n} d\omega \right) \cdot d\vec{S} = \vec{F}_v(\vec{r}, \nu) \cdot d\vec{S}$$

$$F(\vec{r}) = \int_0^\infty F_v(\vec{r}, \nu) d\nu \dots \text{celkový tok}$$

- tenzor tlaku záření $\vec{P}(\vec{r}, \nu)$ (3. moment)

$$\vec{P}(\vec{r}, \nu) = \frac{1}{c} \oint I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \vec{n} \vec{n} d\omega, \quad \vec{n} \vec{n} = \vec{n} \otimes \vec{n} = n_i n_j \quad \text{— dvoudílný tenzor}$$

fotony v směru i $P_{ij} = \frac{1}{c} \oint I n_i n_j d\omega \dots$ symetrický tenzor

$P_{ii}(\vec{r}, \nu) = \oint I (\vec{n} \cdot \vec{n}) d\omega = \oint I d\omega$ $\xrightarrow{h\nu n_i}$ $\xrightarrow{\text{hybnost v směru } j}$

$\epsilon_R = \text{tr } P_{ij} = 3\rho$ $\xrightarrow{\text{tlak záření}}$

$\vec{I} = \frac{\vec{P}}{3}$ $\xrightarrow{\text{Eddingtonův tenzor}}$

Rovnice přenosu záření

- po příchodu elementární vzdálenosti se změní energie

$$\delta E'(\vec{r} + \delta \vec{r}, \vec{n}, \nu) - \delta E(\vec{r}, \vec{n}, \nu) = (I(\vec{r} + \delta \vec{r}, \vec{n}, \nu) - I(\vec{r}, \vec{n}, \nu)) dS d\Omega d\nu$$

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right] I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) = \eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu) - \chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu) I(\vec{r}, \vec{n}, \nu)$$

\parallel
 $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}$

- Boltzmannova rovnice - rozdělovací fce $f(r, p, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla}) f + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p) f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad \text{— srážkový člen (collision)}$$

$$\vec{v}_p = c \vec{n}$$

$$\vec{F} = \vec{0}$$

$$f_R = \frac{c^2}{h^4 \nu^3} I$$

$$\frac{1}{c h \nu} \left[\frac{\partial}{\partial t} + c(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \right] I = \frac{1}{c h \nu} \left(\frac{\partial I}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \frac{\eta - \chi I}{h \nu}$$

- planparalelní přiblížení

$$\mu \frac{dI(\mu, \nu)}{dz} = \eta(\mu, \nu) - \chi(\mu, \nu) I(\mu, \nu)$$

- sférické přiblížení

$$\frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) I(r, \mu, \nu) = \eta(r, \mu, \nu) - \chi(r, \mu, \nu) I(r, \mu, \nu)$$

- optická hloubka (pro planparalelní at.)

= vzdálenost ve směru volné dráhy fotonu

$$d\tau(z, \nu) = -\chi(z, \nu) dz \quad \tau_s(\vec{r}, \nu) = \int_s^{\infty} \chi(\vec{r}, \nu) ds$$

- zdrojová fce (source func.) = vydatnost

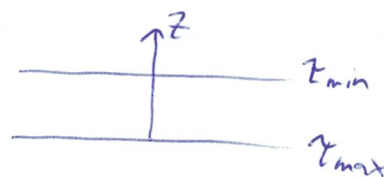
$$S(\vec{r}, \vec{n}, \nu) = \frac{\eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu)}{\chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu)}$$

$$\tau \gg 1 \text{ opticky husté} \quad \tau_s(z, \mu, \nu) = \int_s^{\infty} \tau(z, \nu)$$

$$\frac{dI}{dz} = \mu \frac{dI}{dz} = I - S$$

- typické okrajové podmínky - počítáme dif. rovnice 4 řádku - potřebujeme 6 podmínek

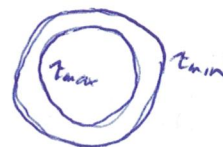
• planoparalelní atmosféra



horní podmínka: $I(\tau_{\min}, \mu, \nu) = I^-(\mu, \nu)$ pro $-1 \leq \mu \leq 0$

spodní podmínka: $I(\tau_{\max}, \mu, \nu) = I^+(\mu, \nu)$ pro $0 \leq \mu \leq 1$

případě i



• symetrická vrstva (např. akreční disk)



τ_{\min} : $I(\tau_{\min}, \mu, \nu) = I^-(\mu, \nu)$

τ_{\max} : $I(\tau_{\max}, \mu, \nu) = I(\tau_{\max}, -\mu, \nu)$

• polokonečná vrstva (např. hvězdná atmosféra)

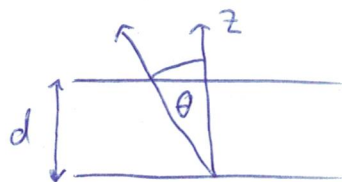
horní podmínka: $I(\tau_{\min}, \mu, \nu) = 0$ pro $-1 \leq \mu \leq 0$

dolní podmínka: $\lim_{\tau_v \rightarrow \infty} I(\tau_v, \mu, \nu) e^{-\frac{\tau_v}{\mu}} = 0$ pro $0 \leq \mu \leq 1$

$$I(\tau_{\max}, \mu, \nu) = I^+(\mu, \nu) = S(\mu, \nu) + \frac{dS(\mu, \nu)}{d\tau_v}$$

Planparalelní aproximace (1D model)

- když $d \ll R_*$ + homogenní rozložení hmoty



$$\theta \in (0, \pi)$$

$$\mu = \cos \theta$$

$$d\omega = -d\mu d\varphi$$

• střední intenzita záření (1. moment)

$$\vec{n} = (\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \mu)$$

$$J(z, \nu) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\mu I(\mu, z, \nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(z, \mu, \nu) d\mu$$

• tok záření (2. moment) - ze symetrie $F_x = F_y = 0$

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \mu I(z, \mu, \nu) d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 \mu I(z, \mu, \nu) d\mu$$

$$H(z, \nu) = \frac{1}{4\pi} F_z(z, \nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu I(z, \mu, \nu) d\mu \dots \text{Eddingtonův tok}$$

• tenzor tlaku záření (3. moment)

$$K(z, \nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(z, \mu) \mu^2 d\mu \dots K\text{-integrál}$$

$$\vec{P} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{c} \begin{pmatrix} 3K-J & 0 & 0 \\ 0 & 3K-J & 0 \\ 0 & 0 & 3K-J \end{pmatrix}$$

zavedeme

$$P_R = \frac{4\pi}{c} K$$

tlak záření

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_R & 0 & 0 \\ 0 & P_R & 0 \\ 0 & 0 & P_R \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3P_R - E_R & 0 & 0 \\ 0 & 3P_R - E_R & 0 \\ 0 & 0 & 3P_R - E_R \end{pmatrix}$$

- Eddingtonův faktor

$$f^K(z, \nu) = \frac{K(z, \nu)}{J(z, \nu)}$$

izotropní $f^K = \frac{1}{3}$ $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_R & 0 & 0 \\ 0 & P_R & 0 \\ 0 & 0 & P_R \end{pmatrix}$
 anizotropní $f^K \rightarrow 1$ $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_R \end{pmatrix}$

- divergence tenzoru tlaku záření

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right)_z = \frac{d}{dz} P_R(z, \nu) - \text{planparalelní případ}$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right)_r = \frac{d}{dr} P_R(z, \nu) + \frac{3P_R(z, \nu) - E_R(z, \nu)}{r} - \text{sférický-symetrický případ}$$

- záření vzdálené hvězdy - vidíme polovinu hvězdy - plošku dS

$$dS = r dr d\varphi = R_*^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$



$$\pi R_*^2 \tilde{I}(\nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta, \varphi, \nu) R_*^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$F^+(\nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta, \varphi, \nu) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$F^-(\nu) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 I(\theta, \varphi, \nu) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$\tilde{I}(R_*, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta, \varphi, \nu) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \dots \text{astrofyzikální tok}$$

Momenty rovnice přenosu záření

- vynásobením \vec{r} a integrací 0. momentu: $\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) I = \eta - \chi I$

• střední intenzita záření (1. moment) + tok záření (2. moment)

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial J_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\nu = \overset{\text{monochromatická } E}{\frac{\partial E_{R\nu}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\nu} = \oint (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) d\omega$$

po integraci přes ν : $\frac{\partial E_R}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_0^\infty \oint (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) d\omega d\nu$

• tok záření (2. moment) + tenzor tlaku záření (3. moment)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_\nu = \frac{1}{c} \oint \vec{r} (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) d\omega$$

po integraci přes ν : $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{c} \int_0^\infty \oint \vec{r} (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) d\omega d\nu \equiv -G$

- kde G je hustota zářivé síly

↙ když je slabší než gravitace roztáhne materiál
když je silnější urychluje hvězdný útěr

- pro izotropní opacitu χ_ν a emisivitu η_ν platí:

$$\frac{\partial E_{R\nu}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\nu = 4\pi (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_\nu = -\frac{1}{c} \chi_\nu \vec{F}_\nu$$

planparalelná atmosféra

použijeme Eddingtonův faktor

$$f_v^k = \frac{K_v}{J_v}$$

$$\frac{dH_v}{dz} = \eta_v - \chi_v J_v$$

$$\frac{dK_v}{dz} = -\chi_v H_v$$

$$\Rightarrow \frac{d^2(f_v^k J_v)}{d\tau_v^2} = J_v - S_v$$

sféricky symetrická atmosféra

Eddingtonův faktor + fce sférickosti

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 H_v)}{dr} = \eta_v - \chi_v J_v$$

$$\frac{dq_v}{dr} \frac{1}{q_v} = \frac{3 - f_v^{k-1}}{r}$$

$$\frac{dK_v}{dr} + \frac{3K_v - J_v}{r} = -\chi_v H_v$$

$$\frac{d(r^2 H_v)}{dX_v} = \frac{r^4}{q_v} (J_v - S_v)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2(f_v^k q_v J_v)}{dX_v^2} = \frac{r^4}{q_v} (J_v - S_v)$$

$$\text{kde } X_v = -\frac{q_v \chi_v}{r^2} dr$$

polarizované záření

č složky \vec{E} pole

propagační tenzor el. pole

$$\frac{d}{ds} \vec{E}_j = -\sum_k G_{jk} E_k, \quad G_{jk} = -2\pi i \frac{v}{c} \sum (\vec{u}_k \otimes \vec{e}_j)(\vec{u}_k \otimes \vec{e}_k) h_k$$

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_I \\ m_Q \\ m_U \\ m_V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \chi_I & \chi_Q & \chi_U & \chi_V \\ \chi_Q & \chi_I & \rho_V & -\rho_U \\ \chi_U & -\rho_V & \chi_I & \rho_Q \\ \chi_V & \rho_U & -\rho_Q & \chi_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_I &= \text{Re}(G_{11} + G_{22}) & \rho_Q &= -\text{Im}(G_{11} - G_{22}) \\ \chi_Q &= \text{Re}(G_{11} - G_{22}) & \rho_U &= -\text{Im}(G_{12} + G_{21}) \\ \chi_U &= \text{Re}(G_{12} + G_{21}) & \rho_V &= -\text{Im}(G_{12} - G_{21}) \\ \chi_V &= \text{Re}(G_{12} - G_{21}) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_I & & & \\ & \chi_I & & \\ & & \chi_I & \\ & & & \chi_I \end{pmatrix} \vec{I} - \begin{pmatrix} 0 & \chi_Q & \chi_U & \chi_V \\ \chi_Q & & & \\ \chi_U & & & \\ \chi_V & & & \end{pmatrix} \vec{I} - \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ & \rho_V & -\rho_U \\ \rho & -\rho_V & 0 & \rho_Q \\ & \rho_U & -\rho_Q & 0 \end{pmatrix} \vec{I} + \vec{M}$$

Formální řešení rovnice přenosu záření

- při známé opacitě a emisivitě

• když $\eta, \chi = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dz} = 0 \rightarrow I(z) = \text{konst.}$... prázdné prostředí

• když $\chi = 0, \eta = \eta(z) \Rightarrow \mu \frac{dI}{dz} = \eta(z) \rightarrow I(z, \mu) = I(0, \mu) + \int_0^z \eta(z) \frac{1}{\mu} dz$
... opticky tenké prostředí - planetární mlhoviny

• když $\eta = 0, \chi = \chi(z) \Rightarrow \mu \frac{dI}{dz} = -\chi(z) I \rightarrow I(z, \mu) = I(0, \mu) e^{-\frac{z}{\mu}}$
... opticky husté prostředí - zemská atmosféra

• když $\eta = \eta(z), \chi = \chi(z) \Rightarrow \mu \frac{dI}{dz} = I(z) - S(z)$

$$I(z_1, \mu) = I(z_2, \mu) e^{-\frac{z_2 - z_1}{\mu}} + \int_{z_1}^{z_2} S(t) e^{-\frac{t - z_1}{\mu}} \frac{1}{\mu} dt$$

- pro polonekonečnou atmosféru: $z_1 = 0, z_2 \rightarrow \infty$

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{1}{\mu} dt$$

$S(t)$ se aproximuje lineárně

$$S(t) = a + b t$$

- pro homogenní konečnou vrstvu: $z_2 = T, z_1 = 0 \Rightarrow I(0, \mu) = S(T = \mu)$

$$I(0, 1) = S(1 - e^{-T})$$

opt. tenká vrstva $T \ll 1: I(0, 1) = ST$
opt. hustá vrstva $T \gg 1: I(0, 1) = S$

- intenzita v kolmém směru ($\mu=1$)
odpovídá ydatnosti v opt.
hloubce $z=1$

- difúzní přiblížení - v hlubších oblastech $P_a(z) \approx 1 \Rightarrow S_v \rightarrow B_v$

- Taylorův rozvoj ydatnosti $S_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n B}{d z_v^n} \frac{(t - z_v)^n}{n!}$

$$\Rightarrow I_v(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B}{d z_v^n} = \int_{z_v}^{\infty} S_v(t) e^{-\frac{t - z_v}{\mu}} \frac{1}{\mu} dt$$

- ponecháme jen první členy:

$$\Rightarrow I_v(z_v, \mu) \approx B_v(z_v) + \mu \frac{dB_v}{dz_v} \quad H_v \approx \frac{1}{3} \frac{dB_v}{dz_v} \quad \Rightarrow f_v^k \approx \frac{1}{3}$$

$$J_v \approx B_v(z_v)$$

$$K_v \approx \frac{1}{2} B_v(z_v)$$

- vyjádříme Eddingtonův tok jako funkci teploty

$$H_\nu = \frac{1}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} = - \frac{1}{3} \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z} = - \left(\frac{1}{3} \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right) \frac{dT}{dz}$$

$$H = \int_0^\infty H_\nu d\nu = - \frac{1}{3} \frac{dT}{dz} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu, \text{ zavedeme Rosselandovu střední absorpci}$$

$$H = - \left(\frac{1}{3} \frac{1}{\bar{\chi}_R} \frac{dB}{dT} \right) \frac{dT}{dz} \quad \frac{1}{\bar{\chi}_R} \frac{dB}{dT} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu$$

- když $H > 0 \rightarrow \frac{dT}{dz} < 0$

- A-operátor - polomechaničké prostředí $\tau_2 \rightarrow \infty$, vyjádříme I_ν pro oba směry $\tau_1 \rightarrow 0$

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}} \frac{dt}{\mu}$$

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) e^{-\frac{t-\tau_\nu}{-\mu}} \frac{dt}{-\mu}$$

$$\Rightarrow J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(t) E_1(|t-\tau_\nu|) dt,$$

kde $E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt} t^{-n} dt \dots n$ -tá exp. integrální fce

$$\Rightarrow \text{formální zápis } J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu}[S_\nu(t)], \quad I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \Lambda_{\nu, \mu}[S_\nu(\tau_\nu)]$$

- případně přes profil čáry $\bar{J} = \Lambda[S] = \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu$

\Rightarrow obdobně i pro ostatní momenty (vyjádř. řády exp.-integráln. fce)

$$F_\nu(t) = \Phi_\nu[S_\nu(t)], \quad K_\nu(\tau_\nu) = \chi_{\tau_\nu}[S_\nu(t)]$$

- pravděpodobnostní interpretace - zhoumíme-li co se děje s jedním fotonem

$$P(\tau) = e^{-\tau} \dots \text{pravd. že mezi } 0 \text{ a } \tau \text{ není absorbován}$$

$$\Rightarrow P_a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$$

- pravd. že je absorbován mezi τ a $\tau + d\tau$ a že projde v prostoru od 0 do τ

$$p(\tau) P_a(\tau) = p(\tau) d\tau = e^{-\tau} d\tau$$

- je-li vyžáren ze $\tau=0$, pak $p(\tau) d\tau = e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} \Rightarrow \bar{p}(\tau) d\tau = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} = E_1(\tau) d\tau$

Numerické řešení rovnice přechodu zářiv

- diskretizace - obecně: $\int_a^b f(x) dx \Rightarrow \sum_i^N w_i f(x_i)$

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_i \Rightarrow \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$



• úhlová diskretizace

$$\int_{-1}^1 I(\mu) d\mu \approx \sum_{n=1}^N w_n I(\mu_n), \quad \sum w_n = 1 \quad \text{normalizace}$$

- směry se volí Gaussova-Legendrova kvadratura

• frekvencí diskretizace - řadí bychom zahrnutí ionizační hrany a spekt. čáry

$$J = \int_0^\infty J_\nu d\nu \approx \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} J_\nu d\nu \approx \sum_{n=1}^N w_n J(\nu_n) \quad \sum w_n = 1 \quad \text{normalizace}$$

• prostorová diskretizace - v 1D globální - ekvidistantní v log τ

- pro hrádok frekvencí ν_n

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} \Lambda_{12} \dots \Lambda_{1N} \\ \Lambda_{21} \\ \vdots \\ \Lambda_{N1} \dots \Lambda_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}$$

- dlouhé a krátké charakteristiky

• dlouhé - řeší se podle celého prostředí $\begin{cases} \text{u plan. } \mu = \text{konst.} \\ \text{u sférick. } \mu = \mu(r) \end{cases}$

• krátké - dlouhé charakteristiky často minou uzlové body
- v buňce ohraničené uzlovými body

Integrovní metody

- např. vztah pro střední intenzitu $\bar{I}_d(z_d) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} S(t) E_1(1-t-z_d) dt$

- interpolační vztahnost

$$S(t) = S_d \frac{z_{d+1} - t}{z_{d+1} - z_d} + S_{d+1} \frac{t - z_d}{z_{d+1} - z_d} \quad - \text{lineární nebyl by moc přesný}$$

$$\bar{I}_d = \sum_{j=1}^N \Delta d_j S_j$$

Diferenciální metody - Feautricova metoda

- rovnice přenosu zářiv pro $I_{\mu\nu}$ je jen v jednom směru

- mohli by sme ji ale ziskob v protichybných směrech

$$j_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [I(+\mu, \nu) + I(-\mu, \nu)] \Rightarrow \oplus \quad \mu \frac{dj_{\mu\nu}}{dz_\mu} = j_{\mu\nu} - S_\nu$$

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [I(+\mu, \nu) - I(-\mu, \nu)] \Rightarrow \ominus \quad \mu \frac{dh_{\mu\nu}}{dz_\nu} = h_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 j_{\mu\nu}}{dz_\nu^2} = j_{\mu\nu} - S_\nu} \quad - \text{Schusterova rovnice}$$

- okrajové podmínky:

$$I(+\mu, \nu, z_{\max}) = I_{\mu\nu}^+ \Rightarrow j_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}^+ \Rightarrow j_{\mu\nu} + \mu \frac{dj_{\mu\nu}}{dz_\nu} = I_{\mu\nu}^+$$

$$I(-\mu, \nu, z_{\min}) = I_{\mu\nu}^- \Rightarrow j_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}^- \Rightarrow j_{\mu\nu} - \mu \frac{dj_{\mu\nu}}{dz_\nu} = I_{\mu\nu}^-$$

- často se uvažuje, že:

$$\text{nedopadá žádné záření} \quad I_{\mu\nu}^- = 0$$

$$\text{a v centru difúze aprox.} \quad I_{\mu\nu}^+ = B_\nu + \left. \frac{dB_\nu}{dz_\nu} \right|_{z_{\max}}$$

- případně u disků, že platí

$$\mu \left. \frac{dj_{\mu\nu}}{dz_\nu} \right|_z = 0$$

Přechod záření v pohybujícím se prostředí

- prostředí se vůči nám pohybuje rychlostí $v(t)$

$$\Rightarrow v' = v \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \text{foton potká přímo opacitní}$$

\Rightarrow rovnice přechodu:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} I = \eta - \chi I \quad \dots \text{v soustavě pozorovatele}$$

$$\underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} I}_{\text{položíme rovnou nule}} - \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} v \frac{dI}{dv} - \underbrace{\frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{v} \vec{\nabla} (1 - \vec{n} \cdot \vec{n}) v_n I + \frac{3}{2} \vec{n} \cdot \vec{v} \vec{\nabla} \vec{n} I}_{\text{můžeme zanedbat}} = \eta - \chi I$$

- Sobolevova aproximace: - pro prostředí s velkými rychlostmi (1. člen zanedbat)

- předpokládáme opacitu pouze ve spektrální čáře

$$\Rightarrow \chi_L = \frac{\tilde{n} e^2}{m_e c} f_{el} \left(\frac{h\nu}{g_e} - \frac{n_u}{g_u} \right)$$

$$\chi(\nu) = \chi_L \phi(\nu)$$

$$\eta(\nu) = \chi_L S_L \phi(\nu)$$

- zavedeme integrál profilu

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu' \quad \text{pro } \vec{n} \cdot (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{n} > 0$$

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu' \quad \text{pro } \vec{n} \cdot (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{n} < 0$$

- když máme úzkou čáru: $\frac{v_0}{c} |\vec{n} \cdot \vec{v} \vec{\nabla} \vec{n}| \frac{dI}{dy} = \chi_L [S_L - I]$

opt. hloubka

$$\rightarrow \text{Sobolevova } \tau(\vec{r}) = \frac{\chi_L c}{v_0 |\vec{n} \cdot \vec{v} \vec{\nabla} \vec{n}|}$$

- okrajová podmínka pro $y=0 \Rightarrow I = I_c$

$$\Rightarrow I(\vec{r}, y) = I_c e^{-\tau(\vec{r}) y} + S_L [1 - e^{-\tau(\vec{r}) y}]$$

\rightarrow integrací přes profil dostaneme $\bar{I}(\vec{r}) = I_c \beta(\vec{r}) + S_L [1 - \beta(\vec{r})]$,

$$\text{kde } \beta = \frac{1 - e^{-\tau(\vec{r})}}{\tau(\vec{r})}$$

→ integraci přes úhly dostaneme

$$\bar{J} = \frac{1}{4\pi} \oint I_c(\vec{n}) d\omega + S_L(1-\beta)$$

$$\text{kde } \beta = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(\vec{n}) d\omega = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{1 - e^{-\tau(\vec{n})}}{\tau(\vec{n})} d\omega$$

↳ Sobolevova pravděpodobnost úniku fotonu

- aby byla aprox. splněna musí být velký gradient rychlosti

- čára se posune tak, že lze řídit přes malou oblast určitou rezonanční podmínkou:

$$\frac{V-V_0}{V_0} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} = \frac{v_x}{c} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{c} \frac{dv_x}{dx} \Delta l$$

↳ rezonanční oblast

- Δl ... vzdálenost na které spolu hmoty interaguje v čáře

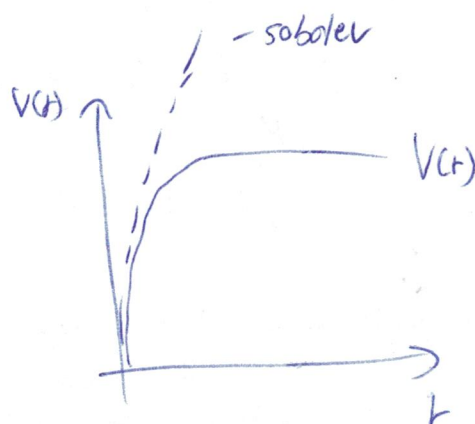
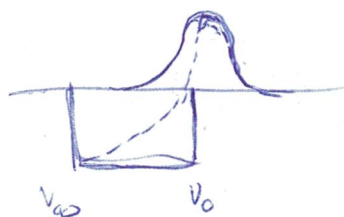
ΔV ... šířka spekt. čáry - včetně ΔV_0

$$\Rightarrow \text{sobolevova délka } \Delta l_s = \frac{c \Delta V_0}{V_0 \frac{dv_x}{dx}}$$

$$\Delta l_s \approx \frac{v_{th}}{v_0} l_0 - \text{typická délka prostředí}$$

↳ rychlost expanze

- P-Cygnr profil



Přenos záření metodou Monte Carlo

- zkusíme záření jako balík fotonů - generujeme s danou pravděp. úrd. jehy

- vypustíme fotony a necháme je interagovat

$$\text{- distribuční fce } \eta(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} P(s) ds \quad 0 \leq \eta(x_0) \leq 1, \quad \int_0^b P(s) ds = 1$$

$$\text{- P že nebude } P(x) = e^{-x} \quad P = 1, 1, \quad P(x) = 1 - e^{-x} = \eta$$

Termodynamická rovnováha

láhe i-tého stavu

- z Boltzmannova zákona $S = k \ln W \Rightarrow \left(\frac{n_i}{N} \right)^* = \frac{g_i}{U^*} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}$

\Rightarrow excitace formule pro poměr stavů l a m

$$\left(\frac{n_m}{n_l} \right)^* = \frac{g_m}{g_l} e^{\frac{\epsilon_l - \epsilon_m}{kT}} = \frac{g_m}{g_l} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

kde $U^* = \sum_i g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}$... partiční fce

- detailní rovnováha = přechody z hladiny l do m v rovnováze s přechody z m do l

- partiční fce pro izolovaný atom diverguje a nelze spočítat

- izolovaný atom neexistuje \Rightarrow snížen ionizační energie \rightarrow součet je konečný

$$\Delta \epsilon_i = \frac{Ze^2}{D}, \text{ kde } D = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}} \frac{1}{n_l + \sum_j Z_j^2 n_j} \dots \text{Debyeova délka}$$

- stejné pro všechny částice

- kpsr je zahrnut pravděpodobnostní rozdělení $w_i \in (0,1)$

$$U^* = \sum_i w_i g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}$$

- Maxwellovské rozdělení rychlostí - rovnovážné rozdělení (uvážejte se vždy)

$$d^3p d^3r = m^3 dp_x dv_y dv_z dV = 4\pi m^3 v^2 dv dV$$

$$g_{trans} = \frac{4\pi m^3 v^2 dv dV}{h^3} \xRightarrow{\epsilon_k = \frac{1}{2}mv^2} \frac{1}{N^*} d^6 N^* = \frac{4\pi m^3}{h^3} \frac{1}{U_{trans}^*} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv dV$$

$$U_{trans}^* = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} V \Rightarrow \frac{1}{N^*} d^6 N^* = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv$$

- translační + vnitřní E :

\Rightarrow tepelná rychlost

$$U^*(T) = \sum_i \sum_j g_i g_j e^{-\frac{\epsilon_i + \epsilon_j}{kT}} = \sum_i g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \sum_j g_j e^{-\frac{\epsilon_j}{kT}} = U_{trans}^* \cdot U_{exc}^*$$

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Saha ionizační formule

$$\frac{n_{0,1}^*}{n_{0,0}^*} = \frac{g_{0,1}}{g_{0,0}} \frac{2}{n_e} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_{I,0}}{kT}} = \frac{g_{0,1} \cdot g_{e-}(r)}{g_{0,0}} e^{-\frac{\varepsilon_{I,0} + \frac{1}{2} m_e v^2}{kT}}$$

$$\frac{n_{0,j+1}^*}{n_{0,j}^*} = \frac{g_{0,j+1}}{g_{0,j}} \frac{2}{n_e} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_{I,j}}{kT}} \quad C_I = \left(\frac{h^2}{2\pi m_e k} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow n_{ij}^* = n_{0,j+1} n_e \Phi_{ij}(T), \text{ kde } \Phi_{ij}(T) = \frac{g_{0,j}}{g_{0,j+1}} C_I T^{-3/2} e^{\frac{\varepsilon_{I,j} - \varepsilon_{I,j'}}{kT}}$$

platí i pro N^* a U^*

ionizační podíl $f_{jk}(n_e, T) = \frac{N_{jk}}{N_k} \overset{\text{nepřesl. iont}}{\prod_{l=1}^{J-1} \frac{N_{ek}}{N_{e0,l,k}}} = \prod_{l=1}^{J-1} n_e \tilde{\Phi}_l(T) = \frac{N_{jk}}{N_{jk}}$

rovnovážný $f_{jk}^*(n_e, T) = \frac{N_{jk}^*}{N_k} = \frac{\prod_{l=2}^{J-1} n_e \tilde{\Phi}_l(T)}{\sum_{n=0}^J \prod_{l=1}^{J-1}}$

stavová rovnice

$$p_g = NkT = (N_{\text{atony}} + N_{\text{ionty}} + n_e)kT = (N_N + n_e)kT$$

zavedeme relativní abundanci vzhledem k celk. počtu ~~atony~~ N_N

$$N_k = \alpha_k (N - n_e) = \alpha_k N_N, \text{ přičemž platí } \sum_k N_k = N_N$$

$$n_e = \sum_k \sum_{j=1}^{J_k} j N_{jk} = \sum_k N_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T) = (N - n_e) \sum_k \alpha_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T)$$

atony ionty

řeší se numericky - metodou linearizace $\tilde{F}(n_e) = \sum_k \alpha_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T)$

$$\Rightarrow N - n_e \left(1 + \frac{1}{\tilde{F}(n_e)} \right) = 0$$

dissociace molekul

$$\frac{N_A N_B}{N_{AB}} = \frac{U_A U_B}{U_{AB}} e^{-\frac{D_0}{kT}} = C_I \left(\frac{2\pi m_{\text{red}} kT}{h^2} \right)^{3/2} \left(\frac{U_A U_B}{U_{AB}} \right)_{\text{intern}} e^{-\frac{D_0}{kT}} \quad m_{\text{red}} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

Lokální termodynamická rovnováha

- TE neplatí - vidíme hvězdy, pozorujeme spekt. čáry
- pro každé \vec{r} jiné $T(\vec{r})$ a $n_e(\vec{r})$
- lokálně platí maxwellovski rozdělení rychlostí - teplota $T(\vec{r})$ - průměrné srážky
+ rozdělení excitací a ionizací - neprůměrné srážky
- neplatí rovnovážné rozdělení záření - neplatí $n_2 = B_{12}$
- platí Kirchhoffův zákon $B_\nu = \frac{n_\nu}{\chi_\nu}$ dle platí $S_\nu = B_\nu$

Opacita, emisivita

- četnost absorpcí a emisí:

$$r_{\text{en}}(\vec{n}, \nu) = n_e B_{\text{en}} I(\vec{n}, \nu)$$

$$r_{\text{ul}}^{\text{stim}}(\vec{n}, \nu) = n_u B_{\text{ul}} I(\vec{n}, \nu)$$

$$r_{\text{ul}}^{\text{spont}}(\vec{n}, \nu) = n_u A_{\text{ul}}$$

- vztahy mezi koeficienty:

$$A_{\text{ul}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{\text{ul}}$$

$$g_e B_{\text{en}} = g_u B_{\text{ul}}$$

• pro vázané-vázané přechody

$$B_\nu = \frac{n_u^* A_{\text{ul}}}{n_e^* B_{\text{en}} - n_u^* B_{\text{ul}}}$$

$$B_\nu \stackrel{\text{Boltzmann}}{=} \frac{A_{\text{ul}}}{B_{\text{ul}}} \frac{1}{\frac{g_e B_{\text{en}}}{g_u B_{\text{ul}}} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

A_{ul}^{-1} ... bez záření
dopadá střední doba
životu ve stavu u

$$F(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} G(\nu)$$

$$G(\nu) = \frac{n_e}{n} \left[\frac{n_0^*}{n_1^* n_2^*(\nu)} \right] P_\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$\Rightarrow P_\nu = \frac{8\pi m_e^2 \nu^2}{h^2} \frac{g_1}{g_0} G(\nu)$$

- vztahy pro kontinuum

pravděpodobnost fotoionizace fotonem $(\nu, \nu + d\nu)$

$$r_{\text{bf}}(\vec{n}, \nu) = n_0 P_\nu I(\vec{n}, \nu) d\nu \dots \text{četnost fotoionizací}$$

$$r_{\text{fb}}^{\text{spont}}(\vec{n}, \nu) = n_1 n_2(\nu) F(\nu) \nu d\nu \dots \text{četnost spont. zachycení } e^-$$

$$r_{\text{fb}}^{\text{stim}}(\vec{n}, \nu) = n_1 n_2(\nu) G(\nu) I(\vec{n}, \nu) \nu d\nu \dots \text{četnost stim. zachycení } e^-$$

$$\Rightarrow \text{v TE platí: } n_0^* P_\nu B_\nu d\nu = n_1^* n_2^*(\nu) [F(\nu) + G(\nu) B_\nu] \nu d\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

→ makroskopická emisivita v kontinuu:

$$\cancel{\eta_{fb}} \quad \eta_{fb} d\nu = \tilde{n}_0^* \alpha_{bf}(\nu) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) B_{\nu}(T) d\nu,$$

kde $\alpha_{bf} = h\nu p_{\nu}$... fotoionizační příčný účinný průřez

$$\text{a } \tilde{n}_0^* = n_1 n_e(\nu) \left(\frac{n_0}{n_1 n_e(\nu)} \right)^*$$

→ makroskopická opacita v kontinuu:

$$\chi_{bf}(\nu) = (n_0 - \tilde{n}_0^* e^{-\frac{h\nu}{kT}}) \alpha_{bf}(\nu) \stackrel{TE}{\downarrow} = n_0^* \alpha_{bf}(\nu) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

→ makroskopická opacita a emisivita v čarách:

síla čáry: $S(l, \nu) = \sum_{l', u'} \langle l' | \vec{d} | u' \rangle$... dipólové matricové elementy

$$g_u A_{ul} = \frac{c^2}{2h\nu^3} g_u B_{ul} = \frac{c^2}{2h\nu^3} g_l B_{lu} = \frac{64\pi^4}{3} \frac{\nu_{ul}^3}{hc^3} S(l, \nu)$$

účinný průřez dipólového přechodu: $\sigma_{cl} = \frac{\pi e^2}{mc} \int_0^\infty \frac{\gamma}{4\nu^2} \frac{d\nu}{(\nu - \nu_0)^2 + \frac{\gamma}{4\nu^2}} = \frac{\pi e^2}{mc}$

místo A_{ul}, B_{ul}, B_{lu} se používá na oscilátoru: $f_{ul} = \frac{\alpha_{ul}}{\sigma_{cl}}$

$$\Leftrightarrow \alpha_{lu} = f_{lu} \sigma_{cl} = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} B_{lu}$$

$$g_l f_{lu} = \frac{8\pi^2 m_e \nu_{lu}}{3e^2 h} S(l, \nu)$$

→ popis pomocí profilu spekt. čáry:

$$\chi(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} (\phi(\nu) n_l B_{lu} - \psi^{stim}(\nu) n_u B_{ul})$$

$$\eta(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} \psi^{spont}(\nu) n_u A_{ul}$$

$$\Rightarrow \text{vydatnost v čáře } S_l(\nu) = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}$$

$$S_l = \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \frac{1}{\frac{h\nu_{lu}}{n_u g_u} - 1}$$

$$\alpha_{lu} = f_{lu} \sigma_{cl} \phi(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} B_{lu} \phi(\nu)$$

Řešení NLTE problému

- rovnice kinetické rovnice + rovnice přenosu záření

- dvouhladinový atom: $\chi_\nu = K_{lu} \phi(\nu) + \chi_c$ $K_{lu} = n_e \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu}$

\rightarrow ~~transport coefficient~~ $L_\nu = \frac{1}{K_{lu} \phi(\nu) + \chi_c}$

\Rightarrow střední volná dráha v čáře $L = \int_0^\infty L_\nu \phi(\nu) d\nu$

- pravděpodobnost zničení fotonu $P_d = \frac{C_{ul}}{C_{ul} + A_{ul}}$

\Rightarrow termalizovaný hloubka τ_{th} tam kde $P_e(\tau_{th}) \approx P_d(\tau_{th})$

$\tau \phi(x_c) = 1$, $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D}$

escape destruction

$P_e(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_c} \phi(x) dx \Rightarrow P_e^D(\tau) = \frac{1}{2} \text{erfc}(x_c) \approx \frac{e^{-x_c^2}}{2\sqrt{\pi} x_c}$

$P_e^V(\tau) \approx \frac{a}{\pi x_c}$

$\Rightarrow P_e^D \approx \frac{1}{2\tau \sqrt{\ln(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}})}} \quad P_e^V \approx \sqrt{\frac{a}{\pi \tau}}$

- bez kontinua

$S_{lu} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{n_l g_l}{n_u g_u} - 1}$

$\Rightarrow n_l (B_{lu} \bar{J}_{lu} + C_{lu}) = n_u (A_{ul} + B_{ul} \bar{J}_{lu} + C_{ul})$

$S_L = (1 - \epsilon) \bar{J}_{lu} + \epsilon B_{lu}$

$\epsilon = \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'}, \quad \epsilon' = \frac{C_{ul}}{A_{ul}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$

- s kontinuem

$\chi_\nu = \chi_{lu}(\nu) + \chi_c(\nu)$, $\eta_\nu = \chi_{lu} S_{lu} + \chi_c S_c$

$S_c = \xi B_\nu + (1 - \xi) \bar{J}_c$

- iterativní řešení: Λ -iterace

$$\mu \frac{dI}{dz} = \gamma(z, x) [I(z, x) - S(x)]$$

$$J_v^{(n)}(z_v) = \Lambda_{z_v} [(1 - \epsilon_v) J_v^{(n-1)}] + \Lambda_{z_v} [\epsilon_v B_v]$$

$$S_v^{(n)} = (1 - \epsilon_v) \Lambda_{z_v} [S_v^{(n-1)}] + \epsilon_v B_v$$

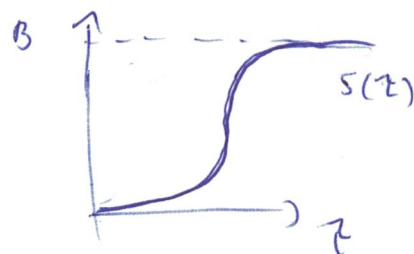
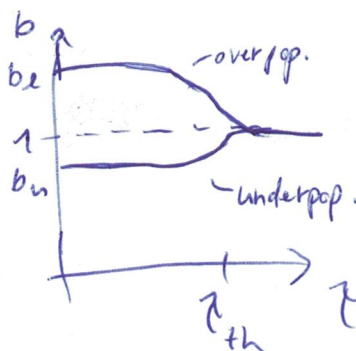
- urychlená Λ -iterace $\Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*)$

- mnohohladinový atom - úplná linearizace, Λ -iterace

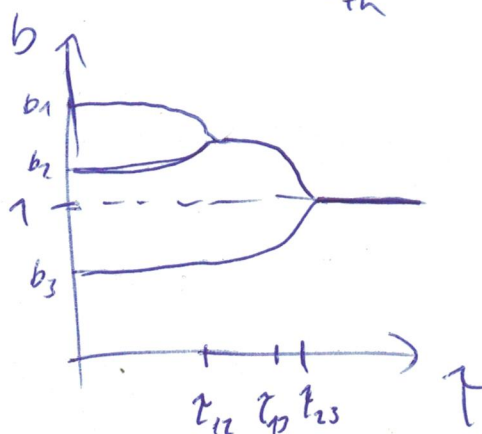
- Základní NLTE efekty:

- dvouhadinový atom

$$S_{lu} = \frac{n_u A_{ul}}{n_e B_{lu} - n_u B_{ul}} \approx \frac{b_u}{b_l} B_u(T)$$



- tríhadinový atom



- efekty pro kontinua

- aktivní - vysoce zotopené prvky
- silná opadba

- pasivní - méně zotopené prvky
- malý příspěvek k opadbě

Přenos záření hmotou

- absorpce
 - excitace fotonem + deexcitace srážkou
 - ionizace atomů
 - zvýšení volného e^- v poli atomů
- emise
 - spontánní / stimulovaná deexcitace
 - rekombinace e^- na iontu
 - zářivé srážení energie volného e^-
- rozptyl
 - zářivá excitace + deexcitace = rozptyl v čáře na volných e^-
 - na vázaných e^-

- absorpční koeficient = opacita, extinkce

$$\delta E = \chi(\vec{r}, \vec{n}, \nu) I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) d\omega d\nu dS ds \quad [\chi]_{\text{obj}} = \text{cm}^{-1} \frac{1}{\chi} \dots \text{střední volná dráha}$$

- emisní koeficient = emisivita

$$\delta E = \eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu) d\omega d\nu dS ds \quad [\eta]_{\text{obj}} = \text{erg cm}^{-3} \text{sr}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$$

- v termodynamické rovnováze: - záření je izotropní \Rightarrow pohlcená = vyzařovaná energie

$$\alpha(\nu) = \chi(\nu) J^*(\nu) = \chi(\nu) B(\nu) \dots \text{Kirchhoffův zákon}$$

Polarizované záření

splňuje vlnová rovnici

- popis záření pomocí vektoru elmag. pole \vec{E}

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{E}$$

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}, \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4\pi} \langle E_0^2 \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{E_0^2}{8\pi} \dots \text{střední intenzita elmag. pole}$$

$$E_R = \frac{1}{c} \int I d\omega = \frac{I(\nu_0)}{c} \quad \text{— pro rovinnou vlnu } I(r) = I(\nu) \delta(\nu - \nu_0) \delta(\vec{n} - \vec{n}_0)$$

$$I = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

- šíření rovinné vlny - ve směru z , $\vec{E}_0 = (E_1, E_2, 0)$

$$E_x(t) = E_1 \cos(\omega t - \phi_1)$$

$$E_y(t) = E_2 \cos(\omega t - \phi_2)$$

\Rightarrow vytráír elipsu (obecnou)

— speciální případy \leftarrow přímka (lineárně) kružnice

• mikroskopicky

$$P_I = E_1^2 + E_2^2$$

$$P_Q = E_1^2 - E_2^2$$

$$P_U = 2E_1 E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$P_V = 2E_1 E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$P_I^2 = P_Q^2 + P_U^2 + P_V^2$$

• makroskopicky

$$P_I = \langle E_1^2 + E_2^2 \rangle$$

$$P_Q = \langle E_1^2 - E_2^2 \rangle$$

$$P_U = \langle 2E_1 E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle$$

$$P_V = \langle 2E_1 E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \rangle$$

$$P_I^2 \geq P_Q^2 + P_U^2 + P_V^2$$

• Stokesovy

$$I = \frac{c}{8\pi} P_I \quad Q: \updownarrow - \longleftrightarrow$$

$$Q = \frac{c}{8\pi} P_Q \quad U: \swarrow - \searrow$$

$$P_U = \frac{c}{8\pi} P_U$$

$$V = \frac{c}{8\pi} P_V$$

$$V: \odot - \otimes$$

$$P_Q = P_U: E_1 = E_2, \phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

— kružnicí

$$P_Q = P_U = P_V = 0$$

— nepolarizované

$$P_V = 0: E_1 \text{ nebo } E_2 = 0 \text{ nebo } \phi_1 - \phi_2 = n\pi$$

— lineární $\phi_1 - \phi_2 = n\pi$

stupně polarizace

$$p = \frac{\sqrt{P_Q^2 + P_U^2 + P_V^2}}{P_I}$$

$P = 0 \dots$ nepolarizované

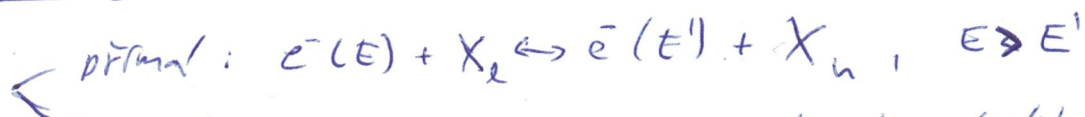
$P \in (0, 1) \dots$ částečně

$P = 1 \dots$ úplně polarizované

Scátřkové procesy

- pružné - ustavují rovnovážné rozdělení rychlostí
- nepružné - ustavují rovnováhu ionizační a excitační

• excitace a deexcitace



hepřímá: e^- v poli při přiblížení k iontu získá kinetickou E

- elektron musí po excitaci zase odletět $E = \frac{1}{2}mv^2 \geq E_{ln}$

- když neodletí bude v Z -exc. stavu \rightarrow pak \leftarrow autoionizace dielektrické tekutiny.

- účinný průřez $\sigma = \frac{\text{počet rozptýlených}}{\text{počet dopadlých}}, \sigma = \sigma(\theta)$

- diferenciální průřez $\frac{d\sigma(E, \theta)}{d\omega} = |f(\theta)|^2$ / amplituda rozptylu

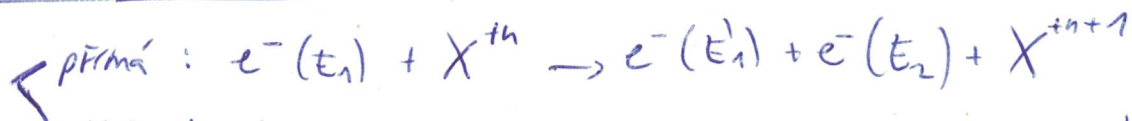
$$\Rightarrow \sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\omega} d\omega$$

- scátřková síla: \mathcal{R}_{ln}

$$\sigma_{ln}(E) = \frac{\mathcal{R}_{ln}}{g_l k_l^2} (\pi a_0^2), \quad E = k_l^2 [E]_{gs} = \text{rydberg}$$

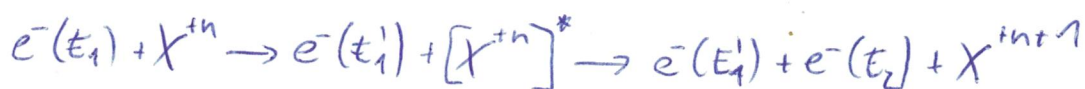
- efektivní scátřková síla: $\Upsilon(\tau) = \int_0^\infty \mathcal{R}_{ln}(E) e^{-\frac{E}{kT}} d\left(\frac{E}{kT}\right)$

• ionizace a rekombinace



alternativní:

$$E_1 = E_1' + E_2 + E_{ion}$$



• další procesy

- výměna náboje $X^{+n} + HI \rightarrow X^{+(n+1)} + H^0 + \Delta E$

- scátřky s protony - mnohem menší účinný průřez, u větších teplot

- scátřky atomů/iontů s atomy/ionty

• Augerovy procesy

- ionizace elektronu z nižší slupky (k)

→ excitovaný iont s dírou v k-slupce

→ následuje

autofonizace

zářivý rozpad

fluorescence

- zářivý rozpad: foton emitovaný při přechodu e^- do nižší slupky
může způsobit další ionizaci

Rozptyl

- při rozptylu foton není absorbován - může se ale změnit ν a \vec{h}

$\Rightarrow \vec{h}, \nu \rightarrow \vec{h}', \nu'$ - redistribuční fce $R(\vec{h}, \nu, \vec{h}', \nu')$

$$\eta^S = \sigma_0(\vec{r}) \oint \frac{d\omega}{4\pi} \int_0^\infty R(\vec{h}, \nu, \vec{h}', \nu') I d\nu'$$

• frekvencní redistribuce

$$\eta^S = \sigma_0(\vec{r}) \int_0^\infty R(\nu) J(\nu) d\nu = \sigma(\vec{r}, \nu) J(\nu)$$

• úhlová redistribuce

$$\eta^S = \sigma(\vec{r}, \nu) \oint I(\nu) g(\vec{h}, \vec{h}') \frac{d\omega}{4\pi} \quad \text{elipse} \quad g(\vec{r}, \vec{h}') = \frac{3}{4} (1 + (\vec{h} \cdot \vec{h}')^2)$$

izotropní $g = 1$

- rozptyl v kontinuu

• na volných e^-

$$\sigma_e = \frac{8}{3} \frac{\pi e^4}{m_e^2 c^2}$$

Thomsonův

• na vázaných e^-

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^2} f_{ij} \frac{\omega_{ij}^4}{(\omega_{ij}^2 - \omega^2)^2} \quad \text{Rayleighův}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

- nepružný rozptyl - Ramanův

- rozptyl v čarách

- redistribuční fce $r(\xi, \xi')$ $L(\chi, \gamma) = \frac{\sigma}{\pi(\chi^2 + \gamma^2)}$

$$\chi = \frac{E - E_n}{h}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma_{en}}{4\pi}$$

hladina 1 nemá přirozené rozšíření

Přenos záření s rozptylem

- k absorpci přispívá i rozptyl

$$l_\nu = \frac{1}{k_\nu + \sigma_\nu} \quad \text{střední volná dráha}$$

\Rightarrow termalizační délka - energie se postupně změní na tepelnou

$$L^2 = \sum_i^N \langle \vec{L}_i^2 \rangle + 2 \sum_n^N \sum_m^N \langle \vec{L}_n \cdot \vec{L}_m \rangle \approx NL^2$$

$$L = \frac{l_\nu}{\sqrt{\epsilon_\nu}} = \frac{1}{\sqrt{k_\nu(k_\nu + \sigma_\nu)}} \quad , \quad \tau_\nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\nu}} \quad \text{term. délka } \nu \text{ je dvojnásobek volné dráhy fotonu } \nu$$

- rovnice přenosu:

$$d\tau_\nu = -(k_\nu + \sigma_\nu) dz \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{dI_{\mu\nu}}{dz} = -(k_\nu + \sigma_\nu) I_{\mu\nu} + \eta^t + \eta^s$$

$$\langle \eta^s, \sigma_\nu = 0 \Rightarrow \text{LTE: } S_\nu = B_\nu$$

$$\langle \eta^t, k_\nu = 0 \Rightarrow S_\nu = J_\nu \sigma_\nu = \sigma_\nu \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{\mu\nu} d\mu \Rightarrow \mu \frac{dI_{\mu\nu}}{dz} = -\sigma_\nu I_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sigma_\nu \int_{-1}^1 I_{\mu\nu} d\mu$$

- když máme absorpci i rozptyl:

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = \frac{k_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu} \quad , \quad \epsilon_\nu = \frac{k_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu} \quad \text{pravděpodobnost zničení fotonu}$$

$$\Rightarrow S_\nu = \epsilon_\nu B_\nu + (1 - \epsilon_\nu) J_\nu$$

- opacita a emisivita v čarách:

$$\chi_\nu = \chi_c + \chi_L \Phi_\nu \quad , \quad \eta_\nu = \chi_c B_\nu + \chi_L \Phi_\nu [\epsilon_\nu B_\nu + (1 - \epsilon_\nu) J_\nu]$$

$$\Rightarrow S_\nu = f_\nu B_\nu + (1 - f_\nu) \int \phi_{\nu'} J_{\nu'} d\nu' \quad , \quad f = \frac{r + \epsilon \phi_\nu}{r + \phi_\nu} \quad , \quad r = \frac{\chi_c}{\chi_L}$$

$$J_\nu(z) = \Lambda_{\tau_\nu}[S_\nu] = \Lambda_{\tau_\nu}[(1 - \epsilon_\nu) J_\nu] + \Lambda_{\tau_\nu}[\epsilon_\nu B_\nu]$$

- přímé metody řešení rovnice přenosu záření

- úhlová diskretizace:

$$\mu_m \frac{dI_v(\mu_m)}{d\tau_v} = I_v(\mu_m) - S_v, \text{ kde } S_v = (1 - \epsilon_v) \sum_{m=-M}^M w_m I_v(\mu_m) + \epsilon_v B_v$$

- Feautrierova metoda:

~~$$S_d = (1 - \epsilon_{v,d}) \sum_{m=-M}^M w_m I_{d,m} + \epsilon_{v,d} B_v$$~~

$$\Rightarrow I_{d,m} - S_d = \frac{1}{\Delta \tau_d} \left(\frac{I_{d+1,m} - I_{d,m}}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}}} - \frac{I_{d,m} - I_{d-1,m}}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\overleftrightarrow{A}_d I_{d+1} + \overleftrightarrow{B}_d I_{d,m} - \overleftrightarrow{C}_d I_{d-1} = \overleftrightarrow{J}_d$$

- iterativní řešení - metoda proměnných Eddingtonových faktorů

$$f_v = \frac{k_v}{J_v} = \frac{\int_0^1 j_{\nu} \mu^2 d\mu}{\int_0^1 j_{\nu} d\mu}$$

$$\frac{d^k(f_v J_v)}{d\tau_v^k} = J_v - S_v$$

\Rightarrow okrajové podmínky:

$$\left. \frac{d(f_v^k J_v)}{d\tau_v} \right|_{\tau_{\min}} = f_v^H J_v - H_v^-$$

$$\left. \frac{d(f_v^k J_v)}{d\tau_v} \right|_{\tau_{\max}} = H_v^+ - f_v^H J_v$$

- povrchní Edd. faktor:

$$f_v^H = \frac{\int_0^1 j_{\nu} \mu d\mu}{\int_0^1 j_{\nu} d\mu} \Bigg|_{\tau_{\min, \max}}$$

$$H_v^- = \int_0^1 j_{\nu}^- \mu d\mu$$

Struktura atomu

- hlavní: $n = 1, 2, 3, \dots$
- orbitální: $l = 0, 1, \dots, n-1$ (s, p, d, f, ...)
- magnetické: $m_l = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$
- spinové: $s = \frac{1}{2}$, $m_s = \pm \frac{1}{2}$

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2$$

$$g_{n,l,n'} = \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)^3 \frac{1}{n^3 n'^3} g(n, n')$$

— gantův faktor (často 21)

$$E_{n,l} = \frac{Z^4 \alpha^2 R_2}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right), \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \dots \text{konst. jemné struktury}$$

- impuls momentové: $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ $j \in \langle |l-s|, |l+s| \rangle$ $l=0 \Rightarrow j = \frac{1}{2}$
 — značení $2s+1 L_j$ $l=1 \Rightarrow j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
 $l=2 \Rightarrow j = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
- Lambův posuv:

$$\begin{array}{c} \text{————— } 2p_{3/2} \\ 2s_{1/2} \text{ ————— } 2p_{1/2} \end{array}$$

- výběrová pravidla:

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\Delta m_l = 0, \pm 1$$

$$\Delta j = \pm 1, \text{ kromě } j=0 \Leftrightarrow j'=0$$

- hyperjemná struktura:

- způsobeno spinem jádra $i = \frac{1}{2}$

$$\vec{f} = \vec{j} + \vec{i}$$

slupka	term	hladina
K	1s	1s _{1/2}
L	2s	2s _{1/2}
	2p	2p _{1/2}
		2p _{3/2}
M	3s	3s _{1/2}
	3p	3p _{1/2}
		3p _{3/2}
	3d	3d _{3/2}
		3d _{5/2}

- struktura víceelektronových atomů

- závisí na interakci mezi \vec{L} a \vec{S}

• LS vazba

malé

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

velké

$$\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$$

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i$$

Obsazení energetických hladin atomů

1/

- uvažujeme LTE \rightarrow platí Maxwell, Saha, Boltzmann
 - \rightarrow nepatří Planck, ale platí Kirchhoff a $S_\nu = B_\nu$
- detailní rovnováha - stažka $\begin{cases} \text{průžné} - \text{Maxwell} \\ \text{nepřůžné} - \text{Saha, Boltzmann} \end{cases}$
 - zářivá - nepatří - má tendenci nahradit Saha a Boltzmann
- pole zářiv - v difúzním přiblížení celkem platí detailní rovnováha zářiv
 - u povrchu ale už moc ne
 - navíc je zářiv nelokální - nezanedbatelná volná dráha fotonů
 - \Rightarrow teplota zářiv neodpovídá teplotě v daném místě

- anizotropie zářiv - faktor zředění $W = \frac{w_*}{4\pi}$

$$w_* = \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 2\pi (1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2} \right) \quad \text{na povrchu } W = \frac{1}{2}$$

- TE $W = 1$

- uhlaviny $W \ll 1$

- když máme silné pole zářiv nebude platit Saha a Boltzmann \Rightarrow NLTE

rovnice kinetické rovnováhy

položíme rovno nule

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}) = \sum_{\text{útl}} (n_u P_{ul} - n_l P_{lu})$$

četnost přechodů

berem malý rychlosti

$$\Rightarrow \sum (n_u P_{ul} - n_l P_{lu}) = 0$$

- v detailní rovnováze platí $n_u P_{ul} = n_l P_{lu}$

$$P_{ul} = R_{ul} + C_{ul}$$

- b-faktor $b_e = \frac{n_e}{n_e^*}$

zářiv

stažka

• Četnost zářivých přechodů

- vázaně-vázané přechody

- absorpce

$$n_l \phi_\nu B_{lu} J_\nu d\nu = n_l 4\pi \frac{\alpha_{lu}}{h\nu} J_\nu d\nu$$

$$n_l R_{lu} = n_l B_{lu} \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu = \cancel{n_l} n_l 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}}{h\nu} J_\nu d\nu$$

$$n_l R_{lu} = n_l B_{lu} \bar{J}_{lu} \approx n_l 4\pi \alpha_{lu} \frac{\bar{J}_{lu}}{h\nu}$$

- emise - spontánní + stimulovaná

$$n_u R_{ul}^{\text{stim}} = n_u B_{ul} \bar{J}_{lu} = n_u \frac{g_l}{g_u} B_{lu} \bar{J}_{lu} \approx n_u \frac{4\pi}{h\nu} \frac{g_l}{g_u} \alpha_{lu} \bar{J}_{lu}$$

$$n_u R_{ul}^{\text{spont}} = n_u A_{ul} = n_u \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ul} = n_u \frac{g_l}{g_u} \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{lu}$$

$$\approx n_u \frac{4\pi}{h\nu} \frac{g_l}{g_u} \frac{2h\nu^3}{c^2} \alpha_{lu}$$

$$\text{celkově: } n_u R_{ul} = n_u (A_{ul} + B_{ul} \bar{J}_{lu})$$

- Vázaně-volné přechody

- fotolontace

$$n_l R_{lk} = n_l 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{bf, lk}}{h\nu} J_\nu d\nu$$

- rekombinace

$$n_k R_{kl}^{\text{spont}} = n_k \left(\frac{n_l}{n_k}\right)^k 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{bf, lk}}{h\nu} \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

$$n_k R_{kl}^{\text{stim}} = n_k \left(\frac{n_l}{n_k}\right)^k 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{bf, lk}}{h\nu} J_\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

$$\text{celkově: } n_k R_{kl} = \underbrace{n_k \left(\frac{n_l}{n_k}\right)^k}_{n_l \phi_{lk}} 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{bf, lk}}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu\right) e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

Obsazení energetických hladin atomů

2/

- četnost srážkových přechodů - uvažuj se pouze srážky s elektrony

$$h\nu(C_{ul}) = h\nu\left(\frac{h\nu}{h\nu}\right)^* C_{lu} = h\nu\left(\frac{h\nu}{h\nu}\right)^* h\nu g_{lu}(T)$$

~~h\nu(C_{ul}) = h\nu\left(\frac{h\nu}{h\nu}\right)^* C_{lu}~~

$$g_{lu} = \int_0^\infty g_{lu}(\nu) f(\nu) d\nu$$

rozdělení
/ rychlost

- soustava rovnic stat. rovnováhy

$$h\nu \sum_u (R_{lu} + C_{lu}) = \sum_u h\nu (R_{ul} + C_{ul})$$

- potřebujeme okrajovou rovnici - elektr. $\sum_k \sum_i q_i N_{ik} = n_e$

$$\text{- částice } \sum_k \sum_i N_{ik} = N_N$$

Polarizace atomárních hladin

$$g = 2J + 1, M \in \langle -J, J \rangle \dots \text{projekce do význačného směru}$$

$$\rho_J = \langle JM | \rho | JM' \rangle \dots \text{matice hustoty stavů}$$

$$\hat{\rho} = \sum \rho_Q |J^M\rangle \langle J^M|$$

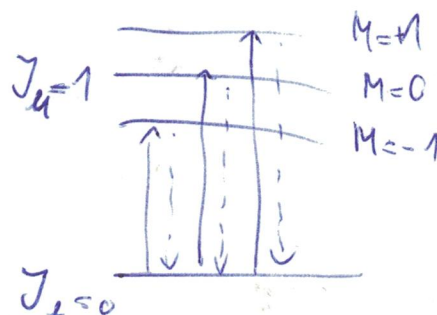
↙ má i nediag. prvky

- anizotropní záření

- dopadá-li nepol. záření

$$\Rightarrow \text{excitace do } \Delta M = \pm 1$$

$$\Rightarrow \text{deexcitace } \Delta M = 0, \pm 1$$



$$\frac{Q}{I} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}$$

$$\rightarrow \frac{Q}{I} = \frac{A \sin^2 \theta - B \sin^2 \theta}{A \sin^2 \theta + B (1 + \cos^2 \theta)}$$

$$A = \sum_{\Delta M=0} n S$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{\Delta M=\pm 1} n S$$

$$S = \begin{pmatrix} J_u J_l & M_u M_l \\ -M_u M_l & \Delta M \end{pmatrix}$$