Ústav fyzikální elektroniky
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 1

Úloha č. 7: Měření Poissonovy konstanty vzduchu

jarní semestr 2015

1 Úvod

Poissonova konstanta, označovaná κ, je konstantou vyskytující se ve vztahu pro adiabatický děj v ideálním plynu

$$pV^{\kappa} = konst. \tag{1}$$

Adiabatická expanze nebo komprese probíhá tak rychle, že nedochází k tepelné výměně mezi ideálním plynem a jeho okolím, proto se adiabatický děj někdy také nazývá izoentropický. Poissonovu konstantu můžeme určit jako $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$, kde C_p je molární tepelná kapacita při stálém tlaku a C_V molární tepelná kapacita při stálém objemu. Použitím Mayerova vztahu $C_p = C_V + R$ získáme vyjádření Poissonovy konstanty pomocí molární plynové konstanty R

$$\kappa = 1 + \frac{R}{C_V}. \tag{2}$$

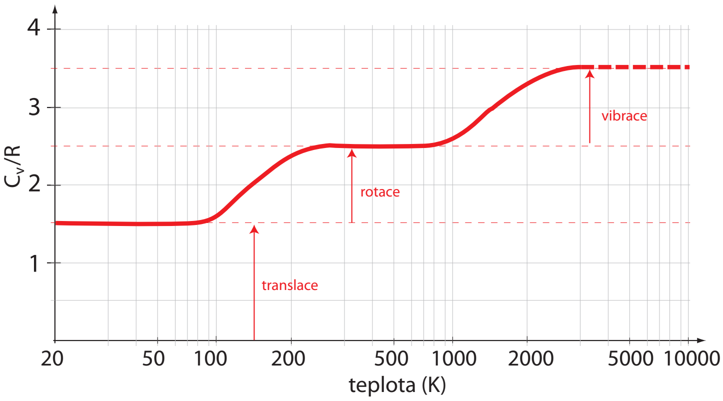
Hodnotu molární tepelné kapacity při stálém objemu C_V lze pro daný plyn spočítat použitím ekvipartičního teorému: každému stupni volnosti molekuly ideálního plynu odpovídá energie $\frac{1}{2}kT$, kde k je Boltzmannova konstanta (pro jednoatomové molekuly lze tento výsledek odvodit z Maxwellova rozdělení). Pro molární tepelnou kapacitu při stálém objemu pak plyne $C_V = N_a \cdot \nu \cdot \frac{1}{2}kT$, kde N_a je Avogadrova konstanta a ν počet stupňů volnosti molekul. Odkud

$$C_V = \frac{\nu}{2}R \tag{3}$$

a pro Poissonovu konstantu (2) dostaneme

$$\kappa = 1 + \frac{2}{\nu}. \tag{4}$$

Při určování konkrétní teoretické hodnoty Poissonovy konstanty je tedy potřebné vzít do úvahy, jaký plyn a v jakém teplotním rozmezí zkoumáme. Jednoatomové plyny mají $\nu = 3$ stupně volnosti (translační), pro dvouatomové je $\nu = 5$ (3 translační, 2 rotační, v případě, že započítáváme i vibrační moment, pak do vztahu (4) dosadíme $\nu = 7$), u víceatomových plynů je situace ještě složitější. Jak plyne z výsledků statistické fyziky a kvantové teorie, molární tepelná kapacita je závislá na teplotě – při nízkých teplotách se projevují pouze translační stupně volnosti, při zvyšování teploty dojde postupně i k rotačnímu pohybu a při dalším zvyšování teploty se přidává i pohyb vibrační – viz obrázek 1. Dvouatomový plyn má v teplotním rozmezí cca 250 K až 800 K pět stupňů volnosti, teoretická hodnota Poissonovy konstanty je pro takovýto plyn rovna $\kappa = 1{,}40$, protože vzduch je složen převážně z dvouatomových molekul, lze tuto hodnotu používat i pro něj.



Obrázek 1: Hodnota molární kapacity při stálém objemu pro dvouatomový plyn v závislosti na teplotě

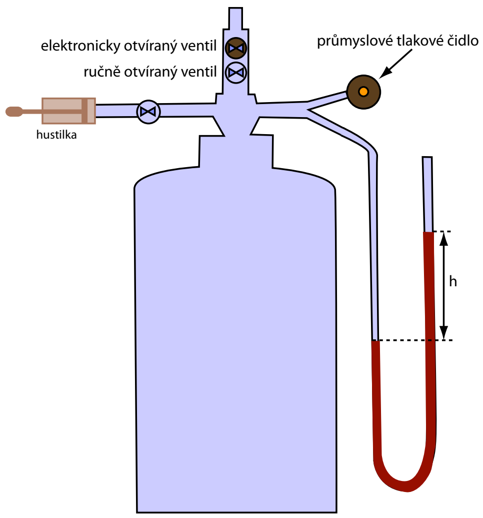
2 Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

Metoda je založena na vyhodnocení naměřených veličin posloupnosti dějů v měřeném plynu sestávající z izotermického stlačení, adiabatické expanze a izochorického ohřevu měřeného plynu. Metoda vystačí s relativním měřením přetlaku.

Popis aparatury

Aparatura se sestává z velké nádoby, malého napouštěcího a velkých vypouštěcích ventilů a tlakoměrů (viz obr. 2). Aparatura musí být zcela hermetická, bez obsahu většího množství nečistot schopných adsorbovat plyny a vlhkost a nesmí obsahovat žádný kondenzát.

Nádoba se tlakuje ruční pumpičkou přes malý oddělovací ventil. Vypouštění plynu z nádoby lze provést otevřením obou vypouštěcích ventilů. V sérii jsou na výstupu zapojeny hned dva ventily: mechanický dvoucestný ventil a elektromagneticky ovládaný ventil. Elektromagnetický ventil dovoluje otevřít nádobu na dobře definovanou dobu. Doba otevření je řízena analogovým obvodem a nastavována potenciometrem, měřena je elektronickými stopkami. Minimální doba otevření je asi 0,3 s. Vzhledem k tomu, že elektromagnetický ventil vykazuje určitou netěsnost, hlavní ruční dvoucestný ventil otvíráme až těsně před spuštěním elektromagnetického ventilu a okamžitě ho



Obrázek 2: Aparatura pro měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou.

zavíráme po ukončení operace. Otevření a uzavření elektromagnetického ventilu je manifestováno hlasitým cvaknutím. Ventil je typu zvedaná klapka a průtočný otvor má v otevřeném stavu $\approx 3\,\mathrm{cm}^2$.

Nádoba je opatřena dvěma tlakoměry, které měří přetlak vzhledem k okolní atmosféře – U trubicí a průmyslovým diferenciálním tlakovým čidlem. Diferenciální tlakové čidlo stejně jako U trubice měří tlakový rozdíl Δp, v našem případě mezi nádobou a okolním vzduchem. Výstupem čidla je ale elektrický proud I, který čidlo automaticky reguluje v měřicím obvodě podle rozdílu tlaků

$$I = I_0 + c\Delta p. \tag{5}$$

Závislost proudu na rozdílu tlaků je tedy lineární, avšak nulovému rozdílu tlaků odpovídá hodnota proudu I_0!

Postup měření

1. Prvním dějem posloupnosti dějů je izotermická komprese, která se ale nesnadno realizuje. Stejný finální stav dosáheme polytropickým stlačením s následným ustanovením termodynamické rovnováhy s okolím. Po otevření oddělovacího ventilu zvýšíme ruční pumpou tlak v komoře o několik hPa až několik málo desítek hPa, což odpovídá několika cm až dm vodního sloupce na U trubici, a oddělovací ventil opět uzavřeme. Pomocí tlakoměru sledujeme pokles tlaku. Měl by se blížit k určité hodnotě vyšší než je nulový přetlak. Po ustanovení termodynamické rovnováhy tuto hodnotu p_1 zaznamenáme. Jestli pokles neustává a údaj směřuje k nulovému přetlaku, je v aparatuře netěsnost.
2. Adiabatickou expanzi uskutečníme krátkým, ale úplným otevřením hlavního ventilu. Po adiabatické expanzi musí následovat izochorický, nikoliv izobarický ohřev, a proto je nutno ponechat ventil otevřený jen po dobu úniku vzduchu z nádoby.

   Po ukončení izochorického ohřevu, tj. po ustanovení termodynamické rovnováhy, zaznamenáme hodnotu přetlaku p_2. I v této fázi sledujeme příznaky možné netěsnosti ventilu aparatury podobným způsobem jako v předchozím kroku.
3. Kritičnost doby otevření ventilu posoudíme v pomocném měření z grafu závislosti výsledné veličiny na délce časového intervalu, po dobu kterého je ventil otevřený. V tomto měření použijeme elektromagnetický ventil. Naměřené hodnoty průběžně vynášíme do grafu. Příliš krátká doba otevření se projevuje vyšší hodnotou κ, příliš dlouhá doba je charakteristická postupně narůstajícím vlivem izobarické části děje s hodnotou κ jdoucí k 1. Tolerance doby otevření ventilu odpovídá oblasti plato v naměřené závislosti. Pokud v grafu nenalezneme plato, ale pouze inflexní bod, pravděpodobně to není správná doba expanze. Děj je totiž komplikován dalšími vlivy. Je třeba mít na paměti, že správný okamžik zavření ventilu je dán ukončením expanze, nikoliv „správným“ výsledkem.

Poznámka. Ve skutečnosti není adiabatická expanze adiabatickou v celém objemu plynu. Striktně vzato, jedná se o polytropu s koeficientem polytropy závisejícím na vzdálenosti od stěny nádoby (a poloze v nádobě). U stěny limitně odpovídá izotermě, velmi daleko od stěny adiabatě. Systematická chyba je zřejmě daná poměrem objemu plynu takto stěnou ovlivněného k celkovému objemu, a je tedy přibližně úměrná objemu k povrchu nádoby. Čím větší nádoba, tím by měla být systematická chyba v důsledku tepelné výměny mezi stěnou nádoby a plynem při expanzi menší.

Stav plynu je vhodné popsat intenzívními parametry, teplotou a tlakem, atmosférický tlak označíme p_0 a teplotu okolí T_0.

1. Ustálený stav po izotermickém stlačení je určen parametry p_1 a T_0, tento stav označme I.
2. Adiabatickou expanzí dospěje systém ze stavu I do stavu popsaném parametry p_0 a T_2, tento stav označme II. Dosadíme do rovnice adiabaty pro ideální plyn v proměnných p a T a obdržíme:

$$p_0^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)}\,T_2 = p_1^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)}\,T_0 \tag{6}$$

3. Izochorickým ohřevem dospěje systém ze stavu II do stavu popsaného parametry p_2, T_0. Dosadíme do rovnice izochory pro ideální plyn:

$$\frac{p_0}{T_2} = \frac{p_2}{T_0} \tag{7}$$

Vynásobíme rovnici (6) rovnicí (7), zlogaritmujeme a vyjádříme Poissonovu konstantu

$$\kappa = \frac{\ln p_1 - \ln p_0}{\ln p_1 - \ln p_2} = \frac{\ln \frac{p_1}{p_0}}{\ln \frac{p_1}{p_2}} \tag{8}$$

Měříme-li přetlak pomocí U trubice, platí:

$$p_1 = p_0 + kh_1 \tag{9}$$
$$p_2 = p_0 + kh_2, \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

kde h_1, h_2 jsou výšky vodního sloupce (v pracovních jednotkách), k je konstanta přepočtu výšky vodního sloupce na tlak, p_0 je okolní atmosférický tlak. Výraz (8) pak má tvar

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_0+kh_1}{p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_0+kh_1}{p_0+kh_2}\right)} \tag{12}$$

Rozvoj výrazu (12) podle h_1 a h_2 do třetího řádu

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_0+kh_1}{p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_0+kh_1}{p_0+kh_2}\right)} \doteq \frac{h_1}{h_1-h_2} + \frac{1}{2}\,\frac{h_1\,h_2\,k}{p_0\,(h_1-h_2)} - \frac{1}{12}\,\frac{k^2(h_1+h_2)h_2h_1}{p_0^2(h_1-h_2)} \tag{13}$$

Je-li změna tlaku ve srovnání s atmosférickým tlakem dostatečně malá, pak

$$\kappa \doteq \frac{h_1}{h_1-h_2}. \tag{14}$$

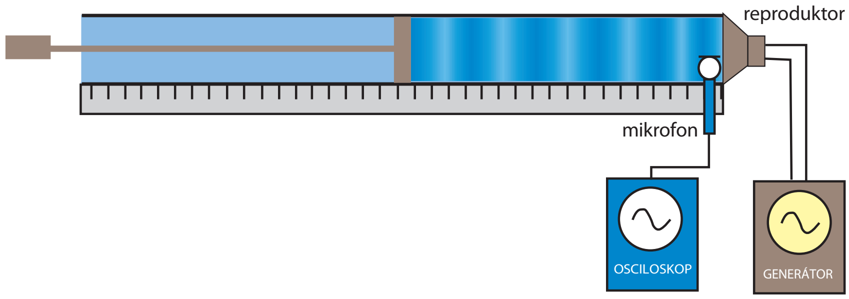
Poznámka. Místo U trubice můžeme použít i jiné lineární tlakoměry, absolutní cejchování není podmínkou, důležitá je pouze poloha nuly. Při malém rozdílu tlaků můžeme tedy zjednodušený vztah (14) použít i pro diferenciální čidlo. Místo h_i dosazujeme

$$h = \frac{\Delta p}{k} = \frac{1}{kc}(I - I_0).$$

V tomto případě není třeba čidlo cejchovat, protože konstanta úměrnosti $\frac{1}{kc}$ ve zjednodušeném vztahu vypadne, nikoliv proud I_0 odpovídající nulovému přetlaku. Vzhledem k pozvolnému driftu parametrů čidla nelze spoléhat na konstantnost I_0 a je vhodné tuto veličinu určit vždy znovu.

Otázka

Určete, jaký je maximální přípustný přetlak h_1 vyjádřený v cm vodního sloupce, nemá-li chyba výpočtu při použití zjednodušeného vztahu (14) překročit 1 %. Určete, jaké změně teploty aparatury odpovídá změna tlaku o 10 Pa, tj. o 1 mm vodního sloupce?



Obrázek 3: Aparatura pro měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku v plynu.

Námět k přemýšlení:

Vytipujte hlavní zdroje systematické chyby měření. Jakou roli hraje objem aparatury?

3 Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku v plynu

Pro rychlost zvuku c platí vztah

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$$

kde p je tlak, ρ hustota, závorka s indexem S znamená parciální derivaci tlaku podle hustoty při konstantní entropii, tedy při vratném adiabatickém ději.

Pro ideální plyn platí pro rychlost vztah

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \tag{15}$$

Dosadíme-li ze stavové rovnice pro ideální plyn do (15) za p

$$p = \frac{\rho RT}{M_{mol}},$$

vidíme, že rychlost zvuku v ideálním plynu nezávisí na hustotě, ale pouze na teplotě.

Pro stanovení Poissonovy konstanty je zapotřebí určit tlak a hustotu plynu a změřit rychlost šíření zvuku.

Rychlost zvuku lze spočítat ze změřené délky stojatého vlnění v rezonanční Kundtově trubici (viz obr. 3). Akustické pole v trubici je buzeno reproduktorem, který je napájen z laditelného generátoru sinusového signálu. Rezonanční podmínka se nastavuje posuvným pístem, detekuje se měřením amplitudy akustického pole pomocí mikrofonku.

Postup měření

Zasuneme píst do výchozí pozice, tj co nejblíže reproduktorku. Na generátoru sinusového signálu nastavíme vhodnou frekvenci a amplitudu a postupně vysouváme píst z trubice. Zaznamenáváme polohy maxim. Rozdíl poloh sousedních maxim je polovina vlnové délky.

Při výpočtu $\overline{\frac{\lambda}{2}}$ použijeme metodou nejmenších čtverců. Pro každou frekvenci zvlášť do grafu vyneseme polohu každého naměřeného maxima jako funkci jeho pořadí ($i = 1,\ 2\ldots$) a závislost proložíme lineární funkcí. Pro rychlost zvuku platí vztah,

$$c = 2\overline{\frac{\lambda}{2}}f,$$

kde f je nastavená frekvence.

Z takto stanovené rychlosti zvuku, změřeného tlaku vzduchu a z tabulek odečtené hustoty vzduchu při daném tlaku a teplotě spočteme ze vztahu (15) Poissonovu konstantu.

Otázky:

1. Jak z prokladu závislosti polohy maxima na jeho pořadí určíme $\overline{\lambda}$?
2. Jak závisí hustota vzduchu na jeho vlhkosti při stejném tlaku a teplotě?
3. Odhadněte krajní nejistotu určení tlaku, teploty a vlhkosti vzduchu v laboratoři, aby její vliv na výsledek měření byl zanedbatelný.
4. Které z korekcí na čtenou hodnotu rtuťového barometru, tj. korekce na kapilární depresi, na hustotu rtuti a na místní tíhové zrychlení, je třeba započítat?

Námět k přemýšlení:

Jak ovlivňuje průměr trubice naměřenou rychlost zvuku? Uplatní se tento vliv v popsaném měření?

Úkoly

1. Pomocí U trubice ocejchujte diferenciální tlakové čidlo. Změřte nulový proud diferenciálního tlakového čidla (proud při nulovém rozdílu tlaků), změřte a vyneste závislost proudu čidlem na rozdílu výšek hladin vodního sloupce v U trubici.
2. Pro několik dob otevření elektromagnetického ventilu τ natlakujte aparaturu na několik různých tlaků p_1, určete tlaky p_2 a spočítejte Poissonovu konstantu. Závislost $\kappa(\tau)$ vyneste do grafu.
3. Pro několik různých frekvencí určete vlnovou délku stojatého vlnění v Kundtově trubici. Pro každou frekvenci najděte všechny polohy maxim d_i v trubici, vyneste je do grafu v závislosti na indexu i a metodou nejmenších čtverců stanovte vlnovou délku. Určete rychlost zvuku ve vzduchu a stanovte Poissonovu konstantu vzduchu včetně nejistoty měření.
4. Změřte tlak, teplotu a relativní vlhkost vzduchu v laboratoři.