INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav fyzikální elektroniky
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 1

Úloha č. 5: Měření modulu pružnosti pevných látek

jarní semestr 2015

1 Teoretický úvod

Deformace v tahu

Normálové napětí je definováno vztahem

$$\sigma_\mathrm{n} = \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{n}}{\mathrm{d}S},$$

kde $\mathrm{d}F_\mathrm{n}$ je velikost průmětu síly působící na zvolenou (elementární) plošku $\mathrm{d}S$ do normály k plošce. Pro sílu rovnoměrně rozloženou na (makroskopickou) plochu S pak platí

$$\sigma_\mathrm{n} = \frac{F_\mathrm{n}}{S}. \tag{1}$$

Relativní prodloužení ε je určeno podílem změny délky zvoleného elementu pevné látky k jeho délce

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{2}$$

Není-li síla příliš velká, je deformace elastická (pružná) a pomine-li silové namáhání, obnoví se původní rozměry tělesa. Za těchto podmínek platí Hookův zákon – vztah lineární závislosti mezi normálovým napětím σ_n a poměrným prodloužením ε

$$\sigma_\mathrm{n} = \varepsilon \cdot E, \tag{3}$$

kde E je modul pružnosti v tahu (Youngův modul). Je to materiálová konstanta, která určuje schopnost látky odolávat deformaci při působení vnější síly. Čím je tato konstanta větší, tím méně se těleso pod vlivem působících sil deformuje.

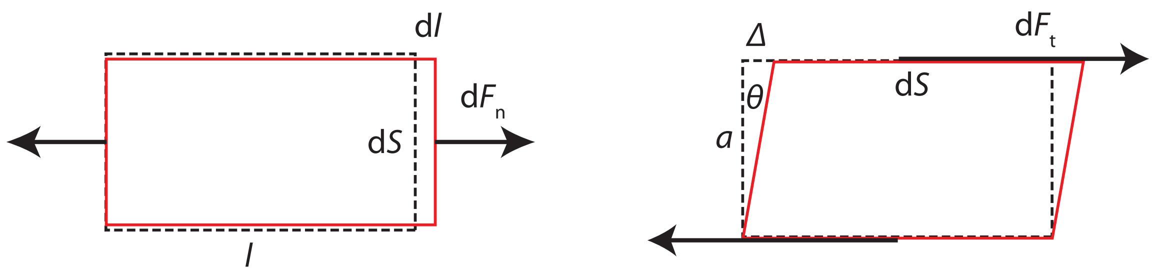
Deformace ve smyku

K deformaci ve smyku dochází při působení *tečné* síly, jednotlivé vrstvy materiálu se vůči sobě posouvají (viz obrázek 1).

Smykové tečné napětí je definováno vztahem

$$\sigma_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{t}}{\mathrm{d}S},$$

kde $\mathrm{d}F_\mathrm{t}$ je velikost průmětu síly působící na zvolenou (elementární) plošku $\mathrm{d}S$ do roviny plošky.



Obrázek 1: Deformace v tahu a deformace ve smyku

Relativní deformace je dána vztahem

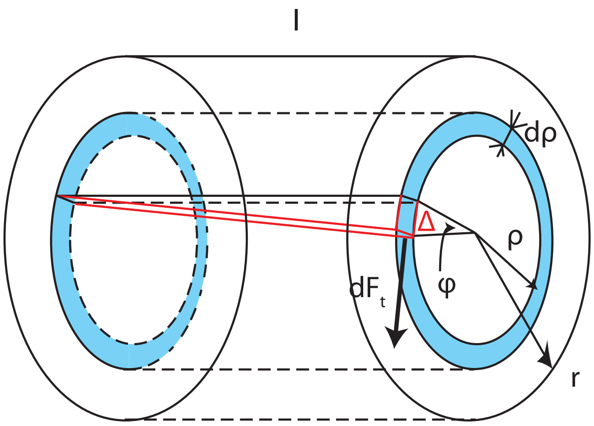
$$\gamma = \frac{\Delta}{a},$$

kde Δ je posunutí okrajových částí vrstvy tloušťky a vlivem tečné síly dF_{t} působící na plošku dS. Hookův zákon pro deformaci ve smyku má potom tvar

$$\sigma_{\mathrm{t}} = \gamma \cdot G. \tag{4}$$

Veličina G se nazývá modul pružnosti ve smyku.

Deformace ve zkrutu



Obrázek 2: Deformace ve zkrutu

V případě kroucení (torze) vlákna kruhového průřezu má deformace ve vlákně charakter prostého smyku (viz obrázek 2), přitom v ose vlákna je deformace nulová a s rostoucí vzdáleností od osy vlákna ρ deformace narůstá. Zkroutíme-li vlákno na volném konci o úhel φ, je relativní deformace ve smyku tenkého meziválcí o rozměrech $l \times \mathrm{d}\rho \times 2\pi\rho$

$$\gamma = \frac{\Delta}{l} = \frac{\rho}{l}\,\varphi.$$

Z Hookova zákova pro deformaci ve smyku obdržíme smykové napětí

$$\sigma_{\mathrm{t}} = \frac{\rho\, G}{l}\,\varphi,$$

které působí na plošku podstavy meziválcí ($\mathrm{d}S = 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho$). Pro tečnou sílu dostaneme

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{t}} = \sigma_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}S = \frac{2\pi\rho^2\, G}{l}\,\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

a pro její kroutící moment vůči ose drátu

$$\mathrm{d}M = \rho \cdot \mathrm{d}F_\mathrm{t} = \frac{2\pi\rho^3 G}{l}\,\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

Po integraci přes celý průřez drátu pro výsledný moment dostaneme

$$M = \int_0^r \frac{2\pi\rho^3 G}{l}\,\varphi\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi r^4 G}{2l}\,\varphi.$$

Vidíme, že moment síly M zkrucující drát je přímo úměrný úhlu zkroucení φ. Koeficient úměrnosti, závisející pouze na rozměrech vlákna a jeho modulu pružnosti ve smyku G,

$$D = \frac{\pi r^4 G}{2l} \tag{5}$$

nazýváme direkčním momentem.

2 Měření modulu pružnosti v tahu přímou metodou z prodloužení drátu

Po dosazení definičních vztahů (1), (2) do Hookova zákona (3) dostaneme pro prodloužení drátu o průměru d při namáhání v tahu silou F vztah

$$\Delta l = \frac{4l}{\pi d^2 E}\,F. \tag{6}$$

Sílu F realizujeme jednoduše tíhovou silou závaží o hmotnosti m. Prodloužení tedy závisí na hmotnosti závaží vztahem

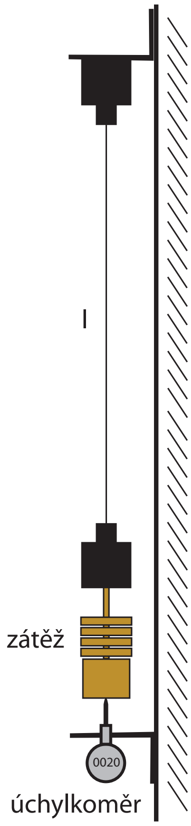
$$\Delta l = \underbrace{\frac{4gl}{\pi d^2 E}}_{k}\,m.[1] \tag{7}$$

Vztah (7) sice umožňuje přímý výpočet modulu pružnosti E z jediného měření m a Δl, vypočtený modul pružnosti by však byl zatížen značnou chybou a neměli bychom jistotu, že se pohybujeme v oblasti, kde platí Hookův zákon.

Výhodnější je stanovit modul pružnosti měřením závislosti $\Delta l(m)$. Modul pružnosti E pak stanovíme ze směrnice k prokladu lineární závislosti měřenými daty. Podle (7) je

$$k = \frac{4gl}{\pi d^2 E}. \tag{8}$$

Vztah (8) využijeme nejen ke stanovení hodnoty modulu pružnosti, ale i jeho nejistoty měření.



Obrázek 3: Přímá metoda

Postup měření

- Stanovíme hmotnosti zatěžovacích závaží na digitálních vahách. Rozhodneme, jestli je nutné počítat s individuální hmotností každého závaží, nebo jestli vzhledem k chybám měření stačí počítat s průměrnou hmotností.
- Průměr drátu měříme mikrometrem.

[1] Ve skutečnosti je změna polohy dolního konce drátu Δl dána nejen prodloužením drátu, ale i pružnou deformací horního závěsu drátu; také tato deformace je úměrná hmotnosti zátěže a koeficient úměrnosti je 37,6 kg/mm.

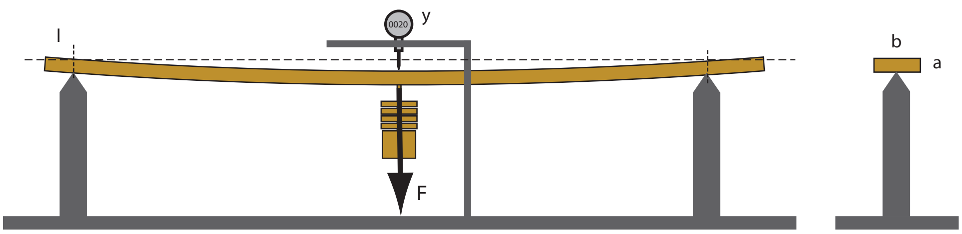
- Počáteční délka drátu byla změřena laserovým dálkoměrem a má hodnotu 1,567 m.
- Polohu dolního konce drátu měříme digitálním úchylkoměrem. Nejprve úchylkoměr vynulujeme ($\Delta l = 0$). Postupně přidáváme jednotlivá závaží a naměřené hodnoty m, Δl zapisujeme do tabulky.
- Naměřené hodnoty vyneseme do grafu závislosti $\Delta l(m)$. Grafem proložíme přímku a určíme její směrnici $k \pm u(k)$. Modul pružnosti drátu E pak vypočteme ze vztahu (8). Stanovíme nejistotu modulu pružnosti E.
- Výslednou hodnotu modulu pružnosti E porovnáme s údajem z tabulek.

3 Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Uvažujme nosník, který má obdélníkový průřez; uprostřed mezi podporami, jejichž vzdálenost je l, je zatížen silou F, realizovanou tíhou závaží o hmotnosti m. Vztah mezi průhybem daného nosníku y a zatížením F je

$$y = \frac{Fl^3}{4Ea^3b}, \tag{9}$$

kde E je Youngův modul pružnosti, b je šířka nosníku a a tloušťka (rozměr ve směru síly F).

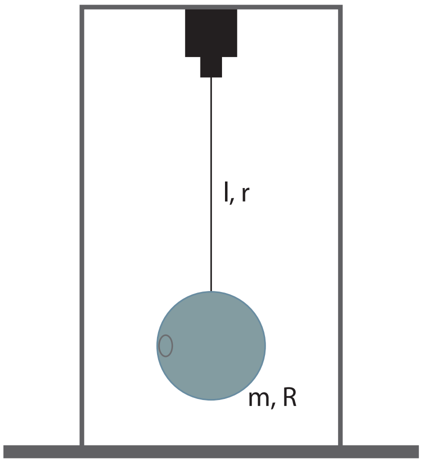


Obrázek 4: Průhyb nosníku

Stejně jako v předešlém případě i zde postupným zvyšováním zátěže dostaneme závislost $y(m)$, kterou vyhodnotíme obdobným způsobem.

Postup měření

- Geometrické rozměry nosníku změříme obvyklými měřidly. Při jejich výběru je třeba zvolit pro měření každého rozměru měřidlo takové přesnosti (pokud existuje), aby příspěvek k celkové nejistotě od každého měřidla byl přibližně stejný a měl takovou velikost, aby celková nejistota odpovídala požadované přesnosti měření.
- Nosník s navlečeným třmenem položíme na břity stojanu. Třmen umístíme doprostřed do kontaktu s digitálním úchylkoměrem. (Pozor, musíme zajistit, aby pracovní bod digitálního úchylkoměru umožnil proměření průhybu v celém rozsahu povolených zátěží.)
- Třmen zatěžujeme postupným přidáváním závaží a odečítáme velikost prohnutí nosníku. Váznutí mechanizmu uvolňujeme velmi lehkým poklepem na stojan.
- Měříme průhyb, jak při postupném zatěžování, tak i při postupném odlehčování.
- Dvojice naměřených hodnot závislosti $y(m)$ vyneseme do grafu a proložíme lineární závislostí. Posoudíme, zda je směrnice rozdílná při zatěžování a odlehčování. Srovnáním směrnice s teoretickou hodnotou získanou úpravou rovnice (9) do tvaru $y = k \cdot m$ stanovíme Youngův modul pružnosti.



Obrázek 5: Torzní oscilátor

4 Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Na homogenní drát délky l o poloměru r je zavěšena homogenní koule o poloměru R a hmotnosti m mnohem větší, než je hmotnost drátu (viz obr. 5). Když kouli pootočíme kolem svislé osy, vykonává torzní kmity. Pokud zkroucení drátu odpovídá pružné torzní deformaci, při níž platí Hookův zákon (4), pak závislost úhlové výchylky φ na čase je popsána diferenciální rovnicí

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0.$$

Přitom β je koeficient útlumu, J je moment setrvačnosti koule, $J = 2/5\, mR^2$, D je direkční moment daný vztahem (5). Zanedbáme-li tlumení, systém kmitá harmonicky

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi),$$

kde φ_0 je amplituda kmitů, ψ počáteční fáze a ω je úhlová frekvence daná vztahem

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}.$$

Pro periodu torzních kmitů koule tak máme vztah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}},$$

ze kterého lze, změříme-li periodu kmitů T a při znalosti momentu setrvačnosti oscilátoru J, stanovit direkční moment D a z (5) při znalosti r a l i modul pružnosti v torzi

$$G = \frac{16\pi m R^2 l}{5 r^4 T^2}. \tag{10}$$

Postup měření

- Geometrické rozměry drátu a koule změříme obvyklými mechanickými měřidly. Jejich výběr se řídí stejnými pravidly, jako při měření geometrických rozměrů nosníku. Kouli nenadzvedáváme! Pokud by se utrhla, mohla by způsobit vážné zranění.
- Hmotnost koule je vyražena na kouli.
- Kouli natočíme kolem svislé osy a uvolníme. Úhlovou výchylku koule z rovnovážné polohy je třeba omezit na úhly, které odpovídají pružné torzní deformaci.
  Doporučená počáteční výchylka je 45° až 90°.

- Po uvolnění koule koná torzní kmity. Opakovaně změříme dobu např. 10 kmitů, tj. $10\,T$.
- Z rovnice (10) stanovíme modul pružnosti v torzi G. Před výpočtem je vhodné vztah upravit tak, aby v něm vystupovaly skutečně přímo měřené veličiny.

Úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu přímou metodou pro ocelový drát zavěšený při stěně.
2. Změřte modul pružnosti v tahu z průhybu nosníku. Měření proveďte pro nosníky z oceli, z hliníkové slitiny, z mosazi a z uhlíkového kompozitu.
3. Změřte modul pružnosti ve smyku pro ocelový drát dynamickou metodou z torzních kmitů.

Otázky

1. Digitální úchylkoměr působí na měřený objekt silou, která při zatlačování tyčinky úchylkoměru roste lineárně, přibližně o 25 mN na 1 mm. U kterého měření to může způsobit velkou chybu? Existuje nějaké jednoduché opatření, kterým můžeme vliv síly úchylkoměru výrazně omezit?
2. Je vhodnější odečítat uplynutí periody torzních kmitů v poloze maximální výchylky, nebo v rovnovážné poloze?
3. Jaká je největší přípustná amplituda torzních kmitů koule a proč?
4. Jaký je vliv součinitele útlumu β na periodu a v jakém poměru je chyba způsobená jeho zanedbáním k ostatním chybám měření? (Viz Úloha č. 4: Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení)

A Užití v praxi

Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku je běžně využíváno ve stavebním průmyslu.

Zajímavým příkladem konkrétní aplikace je zkoušení radiálních vývrtů. Radiální vývrty se využívají pro zjištění fyzikálních, mechanických a pevnostních charakteristik dřeva – např. vzorků stavebního materiálu nebo vzorků odebraných z dřevěných konstrukcí. Pro vlastní zkoušku dřevěných radiálních vývrtů se používají čelisti s vyfrézovanými drážkami, které umožňují zatěžovaní kolmo na osu vývrtu a ve směru vláken dřeva. Měření modulu pružnosti je pak obdobou úlohy praktika. Jedná se o semidestruktivní analýzu; ze zkoumaného materiálu nebo konstrukce je odebrán vzorek způsobem, který nijak podstatně materiál nebo konstrukci nepoškodí.