

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Tomáš Plšek, 461281

Naměřeno: 16.3.2017

Obor: Astrofyzika

Skupina: Čt, 8:00

Úloha: 5. Modul pružnosti pevných látek

$T = 22,3\text{ }^{\circ}\text{C}$

$\varphi = 31,7\text{ }\%$

$p = 99,45\text{ hPa}$

Úkoly

1. Změřte modul pružnosti v tahu přímou metodou pro ocelový drát zavěšený při stěně.
2. Změřte modul pružnosti v tahu z průhybu nosníku (ocel, mosaz, hliník a kompozit).
3. Změřte modul pružnosti ve zkrutu pro ocelový drát dynamickou metodou z torzních kmitů.

1. Úvod

1.1 Deformace v tahu

Deformace v tahu je způsobena normálovým napětím, které vyvolává tlaková síla působící na danou plochu: $\sigma_n = \frac{F_n}{S}$. Dále z Hookova zákona platí $\sigma_n = \varepsilon * E$, kde ε je relativní prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ a E je modul pružnosti v tahu (Youngův modul).

E ...materiálová konstanta (čím je větší, tím méně se těleso pod vlivem tlakových sil deformuje)

1.2 Deformace ve smyku

K deformaci ve smyku dochází při působení tečné síly (jednotlivé vrstvy materiálu se po sobě posouvají): $\sigma_t = \frac{F_t}{S}$. Podle Hookova zákona $\sigma_t = \gamma * G$, kde γ je relativní prodloužení (prohnutí) materiálu $\gamma = \frac{\Delta}{a}$ a G je modul pružnosti v tahu.

1.3 Deformace ve zkrutu

Při kroucení (torzi) vlákna kruhového průřezu má deformace charakter prostého smyku. Zkroučíme-li vlákno na volném konci o úhel φ , je relativní deformace meziválcí: $\gamma = \frac{\Delta}{l} = \frac{\rho}{l} \varphi$. Z Hookova zákona pro deformaci ve smyku pak platí $\sigma_t = \frac{\rho G}{l} \varphi$.

2. Postup měření

2.1 Ocelový drát zavěšený na stěně

Při výpočtu modulu pružnosti v tahu využijeme následující vztah:

$$\Delta l = \frac{4gl}{\pi d^2 E} m \quad (1)$$

Dané veličiny je tedy potřeba změřit, a to s takovou přesností, aby jejich příspěvky k celkové nejistotě byly přibližně stejné:

Délka drátu byla změřena laserovým dálkoměrem a její hodnota je $l = 1,567$ m, toto měření budeme považovat za dostatečně přesné. Průměr drátu určíme z alespoň 10 měření mikrometrem. Hmotnosti jednotlivých závaží měříme na laboratorních vahách a rozhodneme, zda je nutné počítat zvlášť s hmotností každého závaží nebo zda vzhledem k chybě měření stačí počítat s průměrnou hmotností.

Postupně přidáváme jednotlivá závaží a úchylkoměrem měříme výchylku Δl . Výsledné hodnoty vyneseme do grafu.

2.2 Průhyb nosníku

Tentokrát pro výpočet modulu pružnosti uijeme vztah:

$$y = \frac{gl^3}{4Ea^3b}m \quad (2)$$

Zadané veličiny je opět potřeba proměřit: vzdálenost mezi podporami měříme svinovacím metrem, šířku nosníku posuvkou a tloušťku nosníku mikrometrem.

Průhyb měříme úchylkoměrem, a to jak při zatěžování, tak i při odlehčování. Výsledné hodnoty vyneseme do grafu a porovnáme jejich směrnice.

2.3 Torzní kmity ocelové drátu

K výpočtu využijeme vztah po modul pružnosti v torzi:

$$G = \frac{16\pi m R^2 l}{5r^4 T^2} \quad (3)$$

Geometrické rozměry drátu a koule změříme obvyklými měřidly. Hmotnost koule je vyražena na kouli.

Kouli natočíme v rovině kolmé na osu drátu o určitou výchylku. Aby se jednalo o pružnou torzní deformaci, měla by se počáteční výchylka pohybovat v rozmezí 45° až 90°

3. Použité přístroje

Přístroj	Typ	Rozsah	Nejistota
metr	Úchylkoměr	12,5 mm	0,005 mm
metr	Mikrometr	25 mm	0,003 mm
metr	Posuvné měřidlo	150 mm	0,006 mm
metr	Posuvné měřidlo	250 mm	0,014 mm
metr	Katetometr	1000 mm	0,3 mm
metr	Svinovací metr	3000 mm	0,3 mm
váhy	Laboratorní váhy	310 g	0,0003 g

Tabulka 1: Použité přístroje

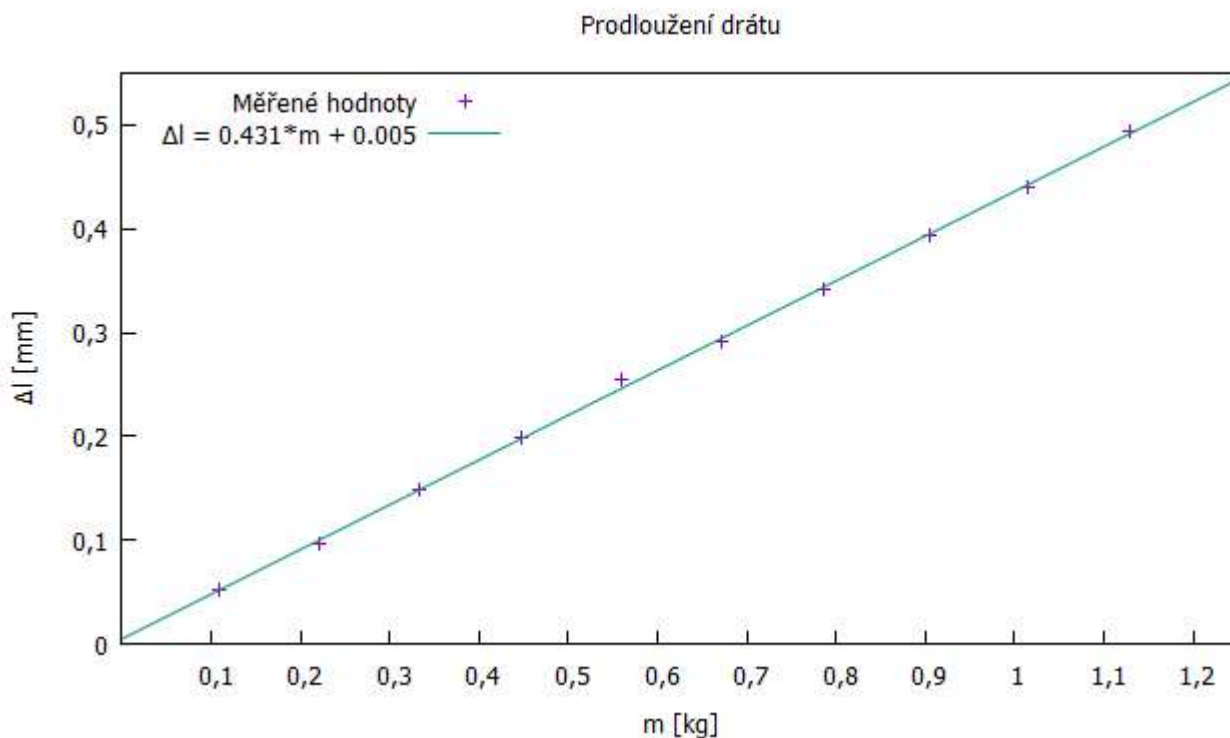
4. Měření

4.1. Prodloužení drátu měřené úchylkoměrem

Vzhledem k rozdílu mezi hmotnostmi jednotlivých závaží bude nutné počítat s individuálními hmotnostmi daných závaží:

i	Σm_i [kg]	Δl [mm]
1	0,108	0,052
2	0,221	0,097
3	0,333	0,148
4	0,447	0,198
5	0,560	0,254
6	0,672	0,291
7	0,785	0,342
8	0,905	0,393
9	1,014	0,440
10	1,129	0,494

Tabulka 2: Prodloužení drátu



Graf 1: Prodloužení drátu

Z výsledné směrnice z grafu 1 vypočteme (4) modul pružnosti E i s odpovídající odchylkou.

$$E = \frac{4gl}{\pi d^2 k} \quad (4)$$

$k = 0,431(3)$...směrnice závislosti prodloužení drátu na celkové hmotnosti závaží
 $l = 1,567\text{ m}$...délka drátu měřená laserovým dálkoměrem (bereme jako konstantu)
 $g = 9,81\text{ m/s}^2$...gravitační konstanta
 $d = 0,000490(6)\text{ m}$...průměr drátu měřený mikrometrem

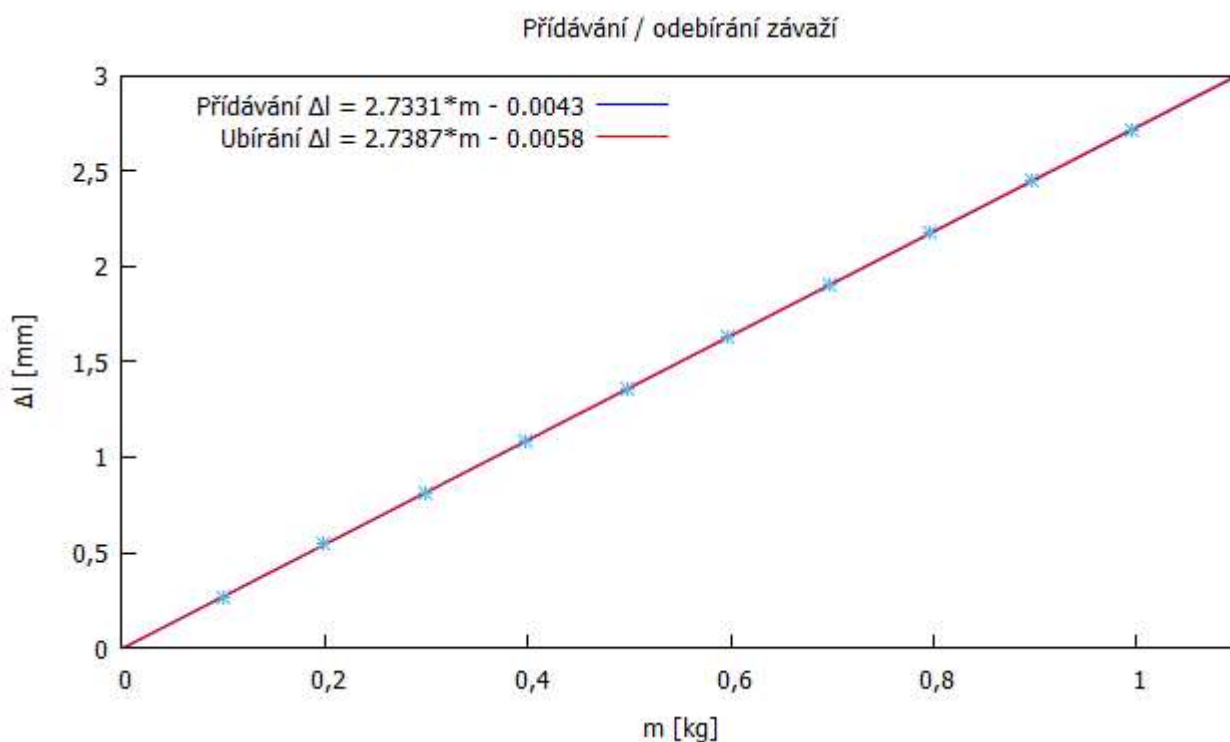
$$E = (189 \pm 3)\text{ GPa } (p = 0,6827, n = 9).$$

4.2. Průhyb nosníku měřený úchylkoměrem

Rozdíly hmotností jednotlivých závažíček jsou sice menší, než v předchozím úkolu, stále bychom je však vzhledem k chybám měření neměli zanedbávat.

Σm_i [kg]	Přidávání Δl [mm]	Odebírání Δl [mm]
0,0997	0,268	0,259
0,1993	0,547	0,543
0,2983	0,806	0,813
0,3980	1,079	1,088
0,4978	1,354	1,359
0,5975	1,632	1,630
0,6972	1,906	1,906
0,7965	2,171	2,176
0,8960	2,443	2,447
0,9951	2,716	2,716

Tabulka 3: Průhyb ocelového nosníku



Graf 2: Srovnání směrnic průhybu ocelového nosníku při přidávání a následném odebírání závaží

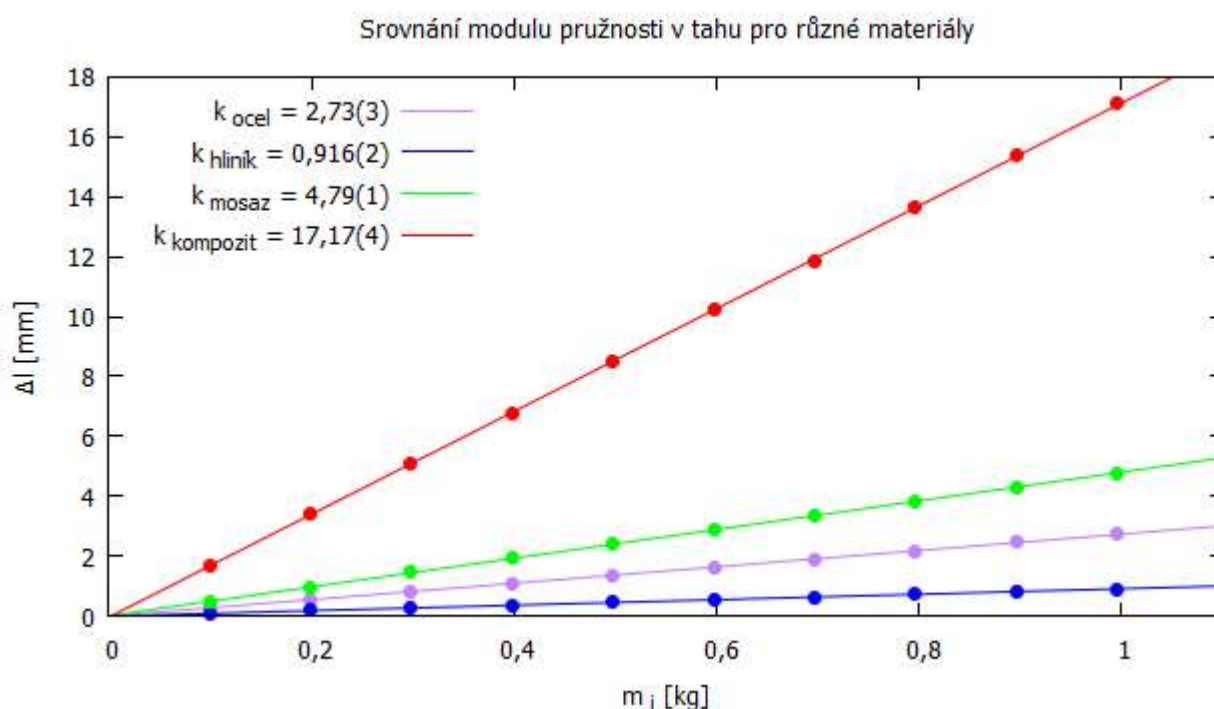
Modul pružnosti spočteme z průhybu ocelového nosníku podle vztahu (5) a určíme jeho nejistotu.

$$E = \frac{gl^3}{4a^3bk} \quad (5)$$

$k = 2,74(5)$...směrnice závislosti průhybu na hmotnosti
 $a = 5,29(1) \text{ mm}$...tloušťka nosníku měřená mikrometrem
 $b = 28,47(3) \text{ mm}$...šířka nosníku měřená posuvkou
 $l = 905(3) \text{ mm}$...vzdálenost mezi podpěrami
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$...gravitační konstanta

$$E = (157 \pm 4) \text{ GPa} \quad (p = 0,6827, n = 4).$$

Srovnání s dalšími materiály (hliník, mosaz a kompozit):



Graf 3: Srovnání modulu pružnosti (Youngova modulu) pro dané materiály

Veličina	Ocel	Hliník	Mosaz	Kompozit ¹
$a \text{ [mm]}$	5,29(1)	10,375(3)	5,035(3)	4,457(3)
$b \text{ [mm]}$	28,47(3)	28,50(1)	28,42(1)	15,04(1)
k	2,73(5)	0,916(4)	4,79(2)	17,17(6)
$E \text{ [GPa]}$	157(3)	62,3(8)	104,3(1,4)	79,3(1,2)

Tabulka 4: Srovnání rozměrů, směrnic a výsledných modulů pružnosti v tahu daných materiálů

¹⁾ Rozměry těchto materiálů jsou měřeny pouze jedenkrát (slouží pro přibližné srovnání). Kompozitový nosník navíc neměl ideální rozměry kvádru (na krajích zaoblený).

4.3. Modul pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Provedeme 10 měření celkem 10 period a určíme průměrnou hodnotu periody i s její odchylkou a spočteme modul pružnosti ve smyku.

Měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P [s]$	39,75	39,50	39,60	39,72	39,59	39,69	39,62	39,69	39,53	39,53

Tabulka 5: Periody torzních kmitů koule zavěšené na ocelovém drátu

Modul pružnosti ve smyku nyní spočítáme z upraveného vztahu (3):

$$G = \frac{\pi m D^2 l}{20 d^4 T^2} \quad (6)$$

$T = 3,962(3) s$...průměrná perioda jednoho kmitu

$m = 5,905 kg$...hmotnost koule (bereme jako konstantu)

$D = 96,51(2) mm$...průměr koule

$d = 1,487(3) mm$...průměr ocelového drátu

$l = 519,7(3) mm$...délka drátu

$$G = (58,5 \pm 0,5) GPa \quad (p = 0,6827, n = 4)$$

5. Závěr

Z prodloužení drátu jsme určily hodnotu modulu pružnosti v tahu (Youngova modulu) oceli na $(189 \pm 3) GPa$ ($p = 0,6827, n = 4$). Na celkové nejistotě se podílela nejistota metody nejmenších čtverců (fitu), nejistota úchylkoměru, nejistota laboratorních vah a nejistota měření průměru ocelového drátu (směrodatná odchylka aritmetického průměru 10 měření a nejistota typu B pro mikrometr).

Měřením průhybu nosníků jsme určily hodnoty modulu pružnosti v tahu (Youngova modulu) pro tyto materiály: ocel, hliník, mosaz a kompozit (viz Graf 3 a Tabulka 4). Na celkové nejistotě se podílela nejistota měření rozměrů nosníku a vzdálenosti břitů (směrodatná odchylka aritmetického průměru a nejistota typu B příslušných měřidel), nejistota fitu a nejistota laboratorních vah a úchylkoměru.

Ocel: $E = 157(3) GPa$

Hliník: $E = 62,3(4) GPa$

Mosaz: $E = 104,3(1,4) GPa$

Uhlíkový kompozit: $E = 79,3(1,2) GPa$

Z měření torzních kmitů a znalosti rozměrů soustavy jsme stanovily modul pružnosti ve smyku ocelového drátu na hodnotu $(58,5 \pm 0,5) GPa$ ($p = 0,6827, n = 4$). Na celkové nejistotě se podílela nejistota při měření rozměrů soustavy (směrodatná odchylka aritmetického průměru a nejistota typu B daných měřidel).

Pro různé druhy oceli je rozsah modulu pružnosti v tahu 160 až 220 GPa [1]. Modul pružnosti pro hliník: $E = 66$ až 68 GPa, mosaz: $E = 100$ až 110 GPa [2], uhlíkový kompozit: $E \doteq 85 GPa^2$ [3]. Modul pružnosti ve smyku pro ocelový drát $E = 85 GPa$ [2].

²⁾ Neznáme přesné vlastnosti a složení uhlíkového kompozitového nosníku; pro různé typy uhlíkových kompozitů se modul pružnosti pohybuje v rozmezí 25 až 300 GPa. Hodnota nejlépe odpovídá High modulus Carbon Fibre (Karbonové vlákno s vysokou hodnotou modulu pružnosti). [3]

6. Zdroje

[1] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-264-3.

[2] MIKULČÁK Jiří.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-264-9.

[3] PERFORMANCE COMPOSITES Ltd.: Mechanical Properties of Carbon Composite Materials. Dostupný z http://www.performance-composites.com/carbonfibre/mechanicalproperties_2.asp.