

Fyzikální praktikum

Zpracování měření

Jana Jurmanová, Zdeněk Navrátil

Ústav fyzikální elektroniky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity, Brno

únor 2017

Měření

Měření

proces experimentálního získávání jedné nebo více hodnot veličiny, které mohou být důvodně přiřazeny veličině

- Žádné měření není přesné. Výsledek měření závisí na měřicím systému, metodě, dovednostech obsluhy, laboratorních podmínkách apod.
- I při snaze zachovat všechny parametry měření dostáváme různé hodnoty.
- Měřená hodnota je tedy pouze přiblížením či odhadem měřené veličiny a musí být doplněna o hodnocení kvality tohoto odhadu.

Měření

- Pro porovnání výsledků měření (hodnot) používáme mezinárodní soustavu jednotek SI.
- Pro porovnání kvality měření bychom se měli řídit
 - BIPM: JCGM 100:2008 „Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement“
 - ČSN P ENV 13005 Směrnice pro vyjádření nejistoty měření

Koncept chyby měření a nejistoty měření

chyba měření

naměřená hodnota veličiny minus pravá hodnota veličiny

nejistota měření

parametr přidružený k výsledku měření, který charakterizuje rozptýlení hodnot, jež by mohly být důvodně přisuzovány k měřené veličině

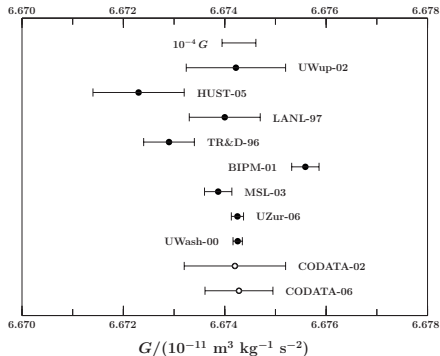
(Konvenční) pravá hodnota fyzikální veličiny

Pravou hodnotu bychom změřili v ideálním měření, které však neexistuje. Pravá hodnota je tedy v principu nepoznatelná.

- Př. Rydbergova konstanta (nejpřesněji známá konstanta)

$$R_{\infty} = 10973731,568508(65) \text{ m}^{-1}, r(R_{\infty}) = 5,9 \cdot 10^{-12}, \text{ variace } \lesssim 10^{-15} / \text{rok}$$

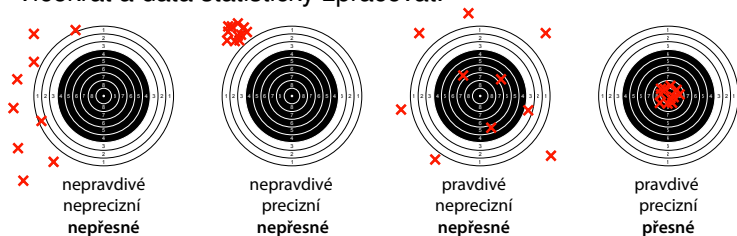
- Př. gravitační konstanta



$$\kappa = 6,67384(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, r(\kappa) = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ (CODATA 2010)}$$

Vlivy ovlivňující měření

- **hrubé chyby a omyly**
- **systematické vlivy** – ovlivňují měření deterministickým způsobem, za předpokladu dobré znalosti těchto jevů lze vlivy odstranit korekcemi.
- **náhodné vlivy** – ovlivňující měření nepředvídatelným způsobem, nelze je vyloučit ani kompenzovat → musíme měřit vícekrát a data statisticky zpracovat.



přesnost (*accuracy*) = pravdivost (správnost, *trueness*) + preciznost (*precision*)

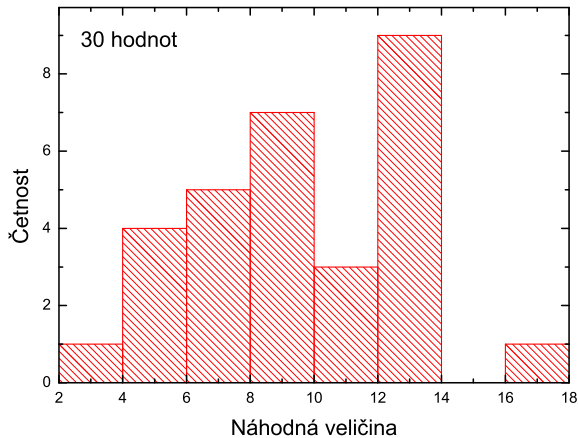
popisuje chyba měření

systematické vlivy
popisuje systematická chyba

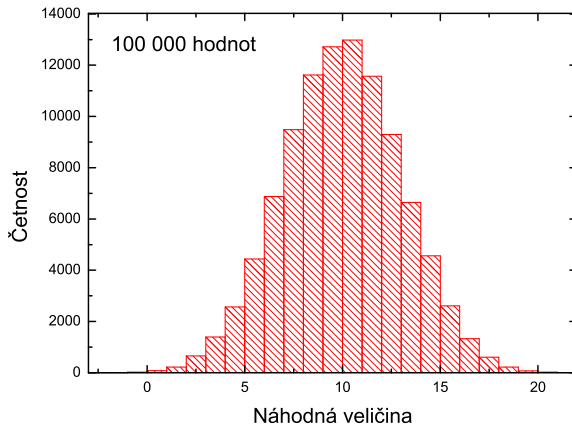
náhodné vlivy
popisuje směrodatná odchylka

Terminologie r. 2008, dříve jinak (přesnost byla správnost, preciznost byla přesnost).

Simulovaný experiment 1



Simulovaný experiment 2



Normální (Gaussovo) rozdělení

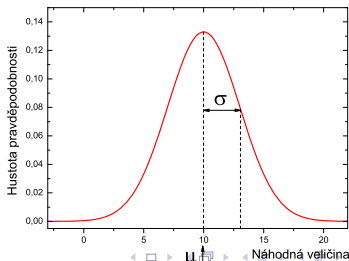
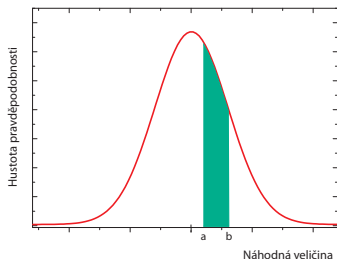
- rozdělení je vyjádřeno pomocí hustoty pravděpodobnosti:

$$f_{\text{gauss}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

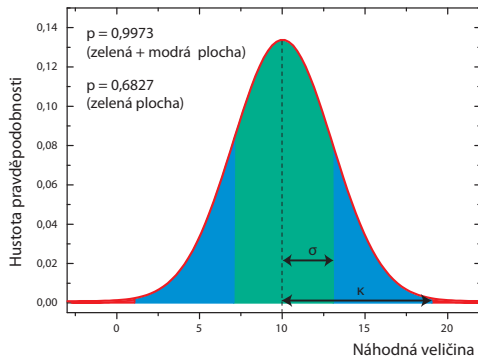
μ je střední hodnota, σ směrodatná odchylka.

- obecný význam hustoty pravděpodobnosti:

$$\text{pst}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



Statistický význam směrodatné odchylky



σ – směrodatná odchylka, $\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx \doteq 0,6827$

$\kappa = 3\sigma$ – krajní odchylka, $\int_{\mu-\kappa}^{\mu+\kappa} f(x)dx \doteq 0,9973$

Odhad parametrů Gaussova rozdělení

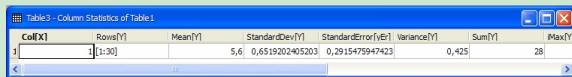
- Ideální je získat velké množství hodnot, zkonstruovat histogram a nalézt jeho střední hodnotu a šířku. To většinou nelze.
- Nejlepším odhadem střední hodnoty μ je aritmetický průměr

$$\hat{\mu} = \bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

- Nejlepším odhadem směrodatné odchylky σ je

$$\hat{\sigma} = s(x) \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}.$$

QtiPlot



Col[X]	Rows[Y]	Mean[Y]	StandardDev[Y]	StandardError[Y]	Variance[Y]	Sum[Y]	Max[Y]
1	1[1:30]	5,6	0,6519202405203	0,2915475947423	0,425	28	28

- směrodatná odchylka = *standard deviation*
- směrodatná odchylka aritmetického průměru = *standard error*

Výsledek měření, nejistota typu A

- Výsledkem opakovaného měření fyzikální veličiny X je aritmetický průměr \bar{x} z naměřených hodnot.
- Za odhad **nejistoty měření** $u(x)$ se proto bere směrodatná odchylka **aritmetického průměru**

$$u(x) \equiv s(\bar{x}) \equiv \frac{s(x)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}}.$$

- Průměrováním se rozptýlení hodnot snižuje. Směrodatná odchylka **aritmetického průměru** $s(\bar{x})$ je proto menší než směrodatná odchylka $s(x)$ a nelze je vzájemně zaměňovat.

Rozšířená nejistota $U(x)$

Kolem aritmetického průměru můžeme pomocí nejistoty zkonstruovat interval

$$\bar{x} - u(x) \leq X \leq \bar{x} + u(x),$$

kvalita stanovení $u(x)$ však závisí na počtu měření.

Chceme-li jej považovat za interval, který zahrne velkou část rozdělení s určitou pravděpodobností (tzv. hladinou spolehlivosti), spočteme rozšířenou nejistotu

$$U(x) = t_{p,\nu} u(x),$$

kde $t_{p,\nu}$ je Studentův koeficient pro hladinu p a stupňů volnosti $\nu = N - 1$. Do intervalu

$$\bar{x} - t_{p,\nu} u(x) \leq X \leq \bar{x} + t_{p,\nu} u(x)$$

pak opakované měření aritmetického průměru \bar{x} spadne s pravděpodobností p .

Excel

Studentův koeficient počítá funkce $t_{p,\nu} = \text{TINV}(1 - p; \nu)$.

Test konzistence – odstranění hrubých chyb

Spočteme-li krajní odchylku $\kappa(x)$ a některá měřená hodnota leží mimo interval daný $\kappa(x)$, je pravděpodobnější, že vychýlení měřené hodnoty způsobila hrubá chyba, než souhlasné působení mnoha náhodných vlivů (s pravděpodobností $1 - 0,9973$).

Postup:

- 1 Určete aritmetický průměr \bar{x} a odhad krajní odchylky

$$\hat{\kappa}(x) = 3\hat{\sigma}(x) = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}.$$

Pokud počet měření N je malý, místo trojky můžeme vzít lépe Studentův koeficient $t_{0,9973,N-1}$.

- 2 Určete hraniční body intervalu $\bar{x} - \hat{\kappa}(x) \leq X \leq \bar{x} + \hat{\kappa}(x)$ a vyškrtejte ty naměřené hodnoty, které leží **vně** tohoto intervalu.
- 3 Tento postup opakujte tak dlouho, dokud všechny veličiny neleží uvnitř uvedeného intervalu.

Nejistota typu B

- Nejistotu měření můžeme získat i jiným postupem než statisticky, např. ze specifikace přístroje od výrobce.
- Typicky nejistota přístrojů, konstant, hodnot etalonů apod. (např. konstanta A Ubbelohdeho viskozimetru)
- Nejistota typu B zahrnuje systematické i náhodné vlivy.

Nejistota typu B, kombinovaná nejistota

Existují dvě situace:

- 1 Čtená hodnota na přístroji se při opakovaném měření nemění, neboť náhodné fluktuace jsou menší než poslední zobrazené místo (obvykle měření elektrických veličin nebo vážení).
V tomto případě měříme jen jedenkrát a nejistota měření je dána nejistotou u_B .
- 2 Čtená hodnota na přístroji se při opakovaném měření mění. Ukazuje-li přístroj při opakovaném měření různé hodnoty, statistickým zpracováním stanovíme nejistotu u_A . Celkovou **kombinovanou** nejistotu vypočteme jako


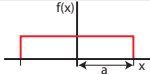
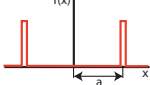
$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}$$

Nalezení nejistoty typu B

- Výrobce většinou udává krajní nejistotu „*accuracy*“ jako $\pm a$.
- Standardní nejistotu spočteme podle vztahu

$$u_B(x) = a/k,$$

k závisí na typu předpokládaného statistického rozdělení.

Rozdělení		k	Příklad užití
normální		3	kalibrované přístroje (multimetry, váhy)
rovnoměrné		$\sqrt{3}$	odhad z nejmenšího dílku (měřítka délky)
bimodální Diracovo		1	třída přesnosti (analogová el. měřidla)

- U analogových přístrojů nejistotu můžeme odhadnout podle nejmenšího dílku, který je typicky 1 mm ($a = 0,5$ mm).
- Počet stupňů volnosti u nejistoty specifikované výrobcem je $\approx 30-50$ — „dobře změřeno“.

Nejistota typu B digitálních vah

Výrobce vah udává většinou dva údaje

- citlivost, *readout* d – nejmenší hodnota čtená na displeji, může být shodná s reprodukovatelností,
- ověřovací dílek, *verification value* e – nejvyšší dovolený rozdíl mezi údajem vah a etalony hmotnosti použitými při ověření vah.

Za krajní nejistotu měření tedy vezmeme ověřovací dílek e .

Standardní nejistota je tedy $u_B = e/3$.

V praxi máme váhy, u kterých platí $e = 10d$.

Nejdůležitějším údajem vah je ovšem váživost.

Nejistota typu B digitálních měřidel elektrických veličin

- nejistota je udána v závislosti na aktuální měřené hodnotě i na maximální hodnotě rozsahu
- Př. V manuálu multimetru Metra nalezneme „základní chybu“
 $z = 100 \text{ ppm } MH + 20 \text{ ppm } MHMR$, po určení $MHMR$ v tabulce rozsahů spočteme standardní nejistotu jako $u_B = z/3$.
- Př. U multimetru UNI-T krajní nejistotu stanovíme z měřené hodnoty a z posledního zobrazeného místa *digit*. Termín „accuracy“ (přesnost) zahrnuje náhodné i systematické odchylky.

Accuracy Specification (1)

Accuracy: $\pm(a\% \text{ reading} + b \text{ digits})$, guarantee for 1 year.

Operating temperature: $23^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$.

Relative humidity: $<80\%$.

A. DC Voltage

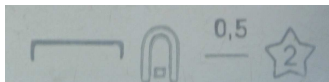
Range	Resolution	Accuracy	Overload Protection
400mV	100μV	±(0.8%+3)	1000V DC 750V AC
4V	1mV	±(0.8%+1)	
40V	10mV		
400V	100mV		
1000V	1V	±(1%+3)	

Remarks: Input impedance $\geq 10\text{M}\Omega$.



Nejistota typu B ručkových měřidel elektrických veličin

- třída přesnosti přístroje je uvedena nad symbolem měření stejnosměrné/střídavé veličiny
- je to standardní nejistota typu B uvedená jako procento z rozsahu ($k = 1$)
- rozsah je dán použitými svorkami přístroje



Standardní zápis výsledku s rozšířenou nejistotou

Zápis výsledku:

$$x = (\bar{x} \pm U_C(x))_j \quad (p = \dots, \nu = \dots)$$

Nejistota se zaokrouhlí na jednu platnou číslici, aritmetický průměr pak na stejné desetinné místo.

Příklady

$$l = (209,9 \pm 0,1) \text{ m} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

$$l = (2099 \pm 1) \text{ dm} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

$$l = (20990 \pm 10) \text{ cm} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

Výjimkou je zápis nejistoty, která by zaokrouhlením značně klesla (vzrostla)

$$l = (20990 \pm 14) \text{ cm} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

$$l = (20990 \pm 15) \text{ cm} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

Zákon šíření nejistoty (ZŠN)

Nechť nepřímo měřená veličina y závisí na nezávislých, přímo měřených veličinách x_1, x_2, \dots, x_p

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Nechť tyto veličiny mají standardní kombinované nejistoty $u_c(x_1), u_c(x_2), \dots, u_c(x_p)$. Pak nejistotu nepřímo měřené veličiny lze určit jako

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2_{[x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2, \dots, x_p=\bar{x}_p]} u_c^2(x_k)},$$

kde $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ jsou odhady přímo měřených veličin.

Derivace funkce f podle zvolené proměnné x_k jsou parciální, čili při tomto derivování považujeme ostatní proměnné $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p$ za konstanty.

Pravidla pro počítání s nejistotami

Nechť x_1, x_2 jsou přímo měřené veličiny se standardními (kombinovanými) nejistotami $u(x_1), u(x_2)$ a y je nepřímo měřená veličina z nich počítaná. Dále označme $r(x) = \frac{u(x)}{\bar{x}}$ relativní nejistotu veličiny x .

$y = x_2 \pm x_1$	$u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$
$y = A \cdot x_1$	$u(y) = A \cdot u(x_1)$
$y = x_1 \cdot x_2, y = \frac{x_1}{x_2}$	$r(y) = \sqrt{r^2(x_1) + r^2(x_2)}$
$y = x^n$	$r(y) = n \cdot r(x)$

Rozšířená nejistota nepřímo měřené veličiny

Postup podle *GUM*

- 1 Do ZŠN nebo pravidel pro počítání s nejistotami dosadíme standardní nejistoty $u_C(x_1) \dots u_C(x_p)$ přímo měřených veličin $x_1 \dots x_p$ (kombinované nejistoty **nerozšířené** Studentovým koeficientem).
- 2 Při tomto výpočtu si všimneme příspěvků od jednotlivých přímých měření $u_i(y)$:

$$u_C(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u_C^2(x_1) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right)^2 u_C^2(x_p)} = \sqrt{u_1^2(y) + \dots + u_p^2(y)}.$$

- 3 Rozšířenou nejistotu nepřímo měřené veličiny y pak spočteme

$$U(y) = t_{p, \nu_{\text{eff}}} u(y),$$

kde však ν_{eff} označuje efektivní počet stupňů volnosti, počítaný Welchovou-Satterthwaiteovou formulí

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^p \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}.$$

Rozšířená nejistota nepřímo měřené veličiny

Alternativy – jak si ulehčit práci:

- Za efektivní počet stupňů volnosti vezmeme nejnižší hodnotu:
 $\nu_{\text{eff}} = \min(\nu_i)$.
- Stanovíme pouze standardní kombinovanou nejistotu $u_C(y)$, výsledek ale zapíšeme jiným způsobem, protože interval $\langle \bar{y} - u_C(y), \bar{y} + u_C(y) \rangle$ nemá stanovenou spolehlivost. Standardní nejistota se píše do závorky za aritmetický průměr:

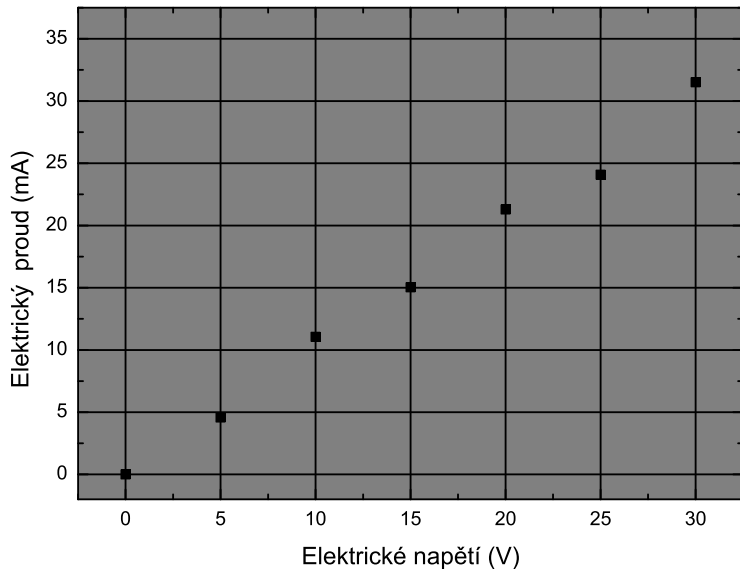
$$x = \bar{x}(u_C(x)) \text{ jedn.}$$

Např. současné měření gravitační konstanty κ (CODATA 2010) má standardní nejistotu $80 \cdot 10^{-16} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Možné zápisy jsou

$$\kappa = 6,673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\kappa = 6,673\,84(0,000\,80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

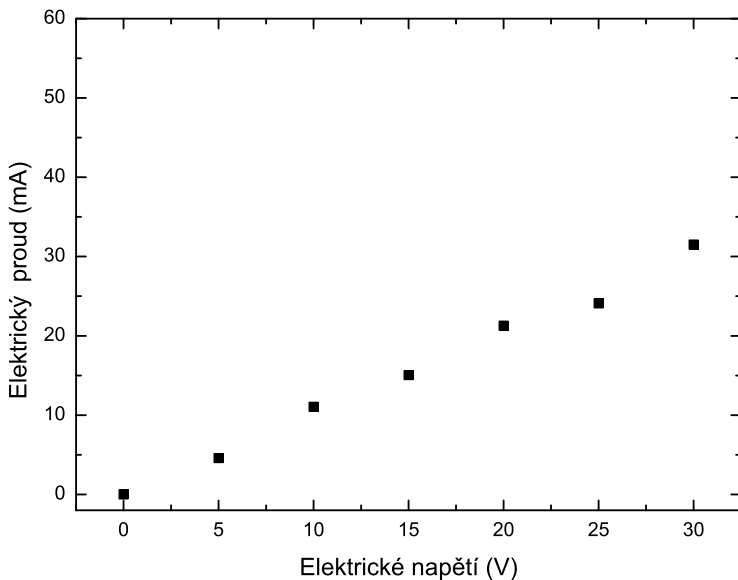
Jak (ne)má vypadat graf



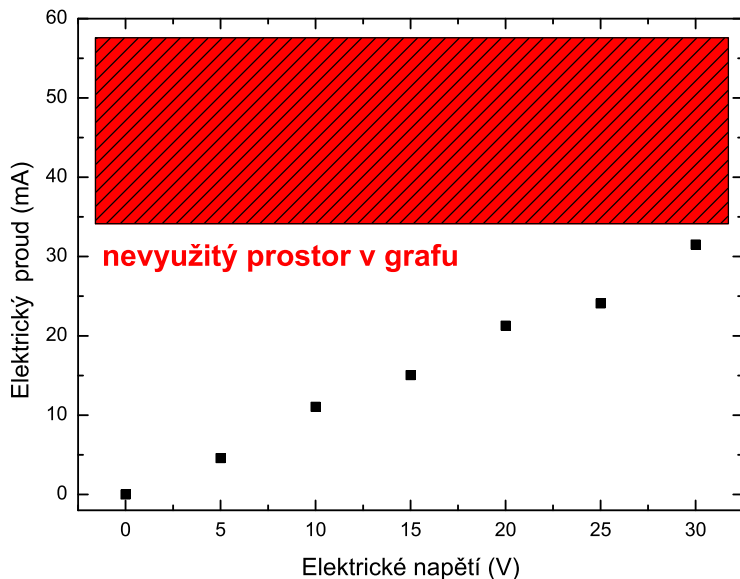
Jak (ne)má vypadat graf



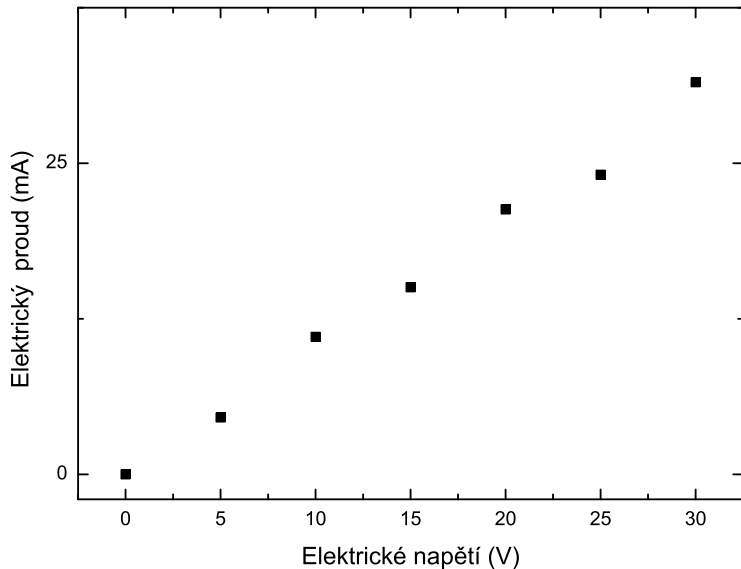
Jak (ne)má vypadat graf



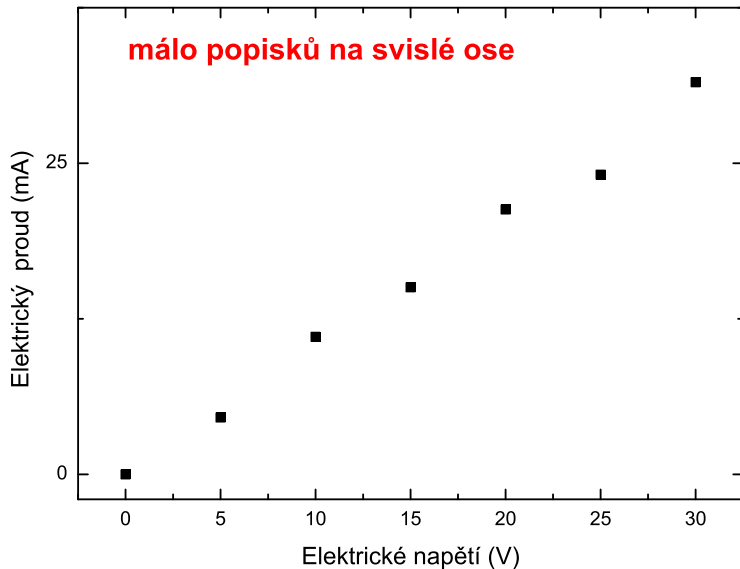
Jak (ne)má vypadat graf



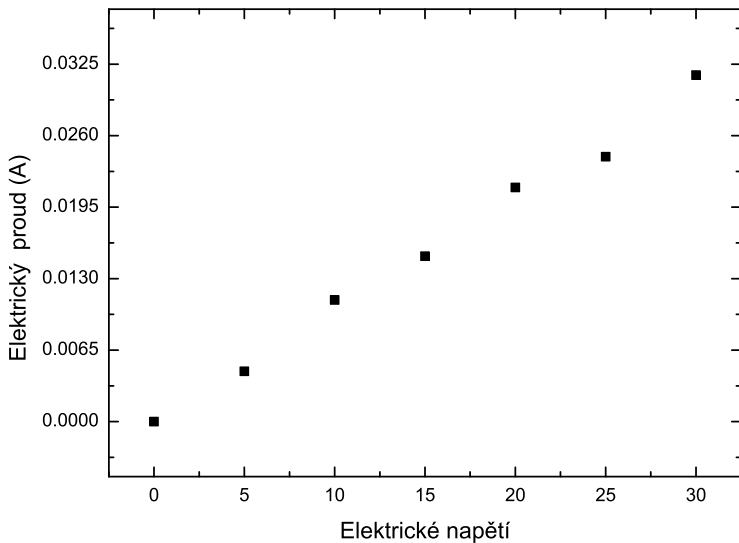
Jak (ne)má vypadat graf



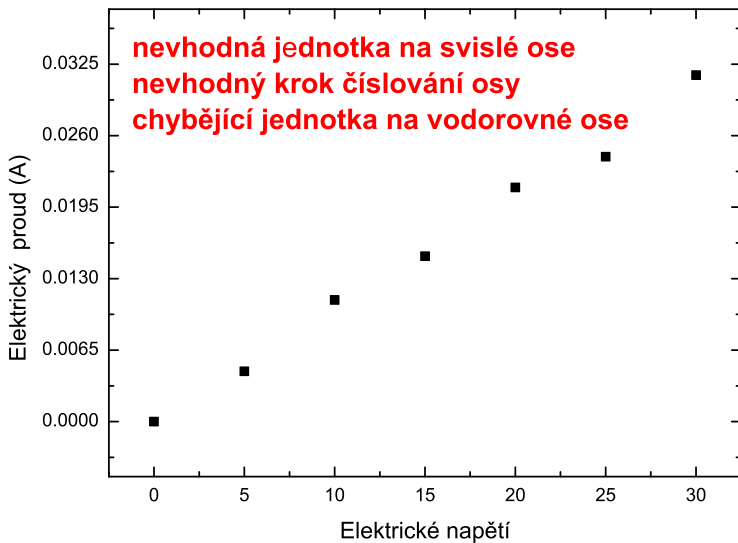
Jak (ne)má vypadat graf



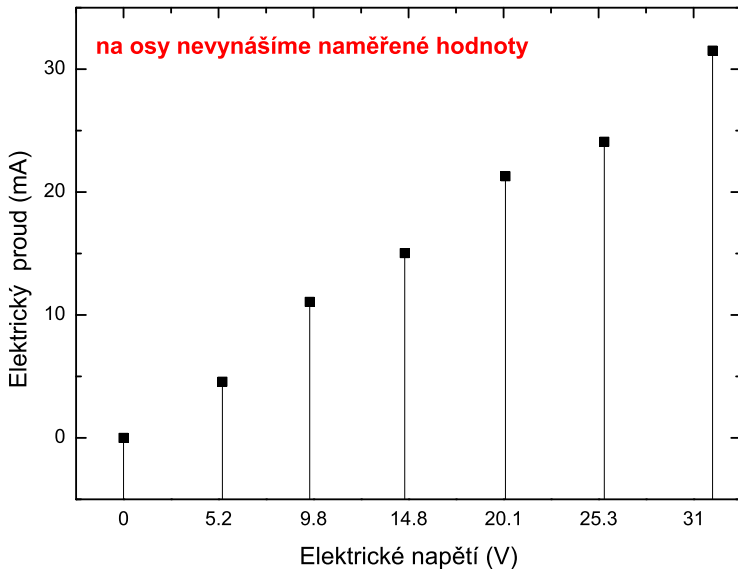
Jak (ne)má vypadat graf



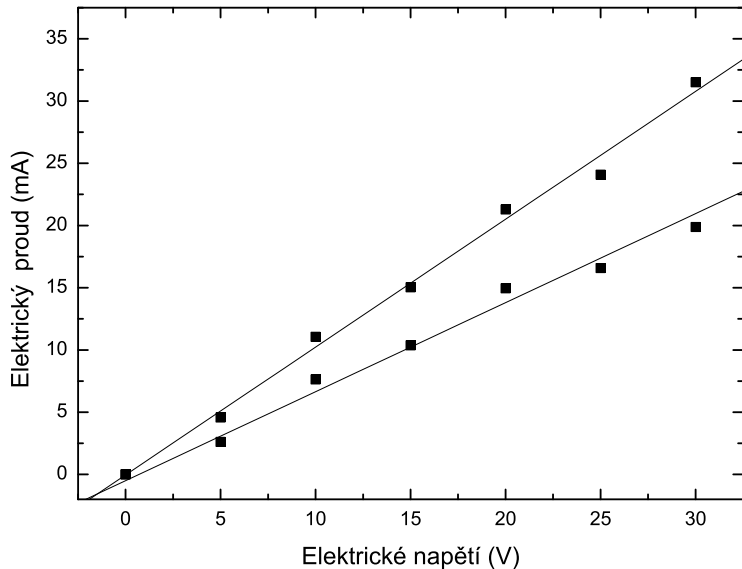
Jak (ne)má vypadat graf



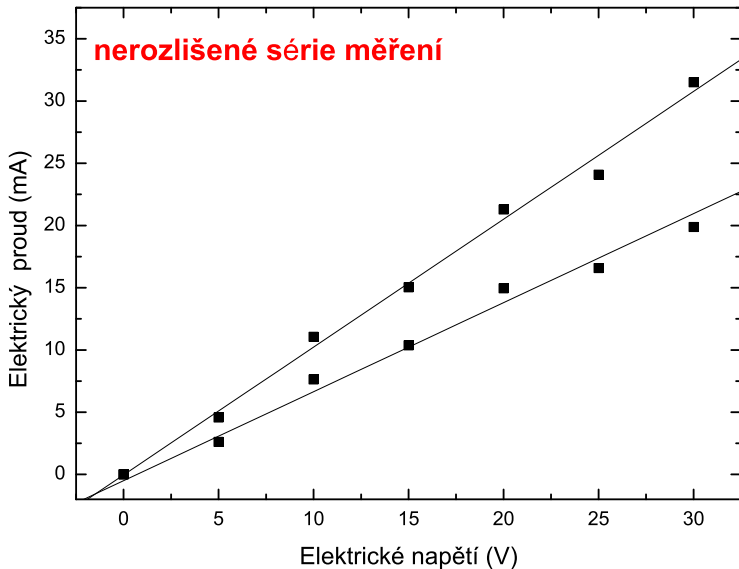
Jak (ne)má vypadat graf



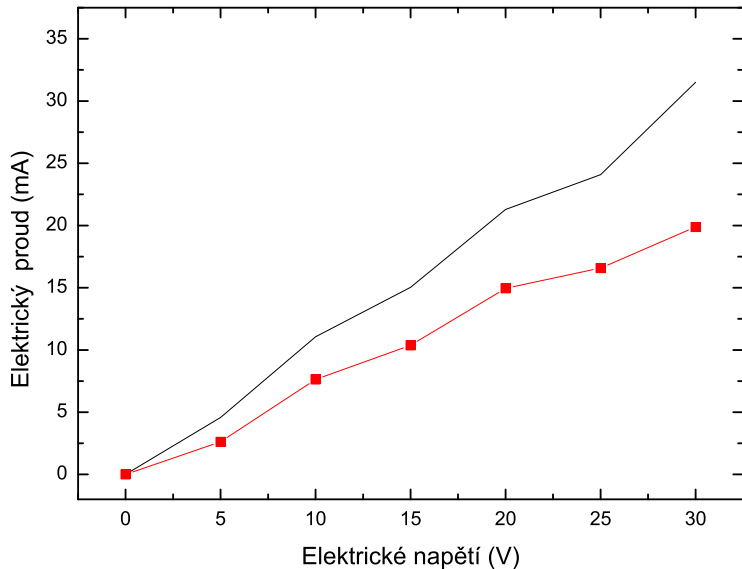
Jak (ne)má vypadat graf



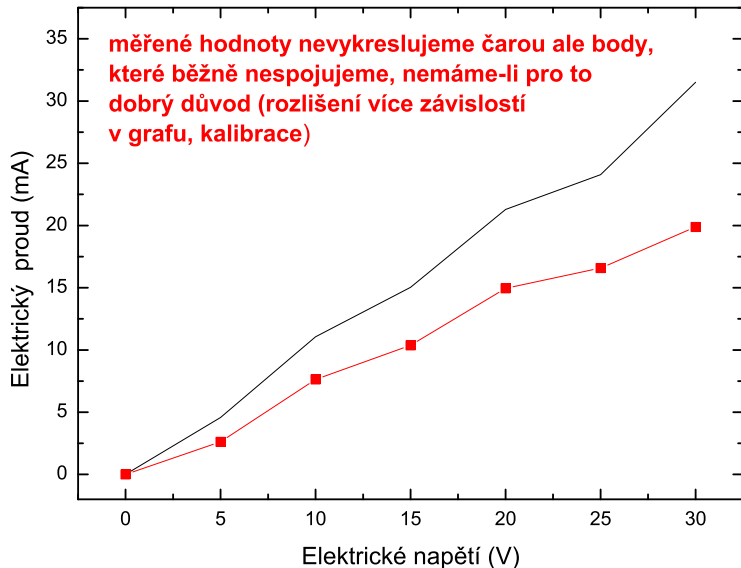
Jak (ne)má vypadat graf



Jak (ne)má vypadat graf

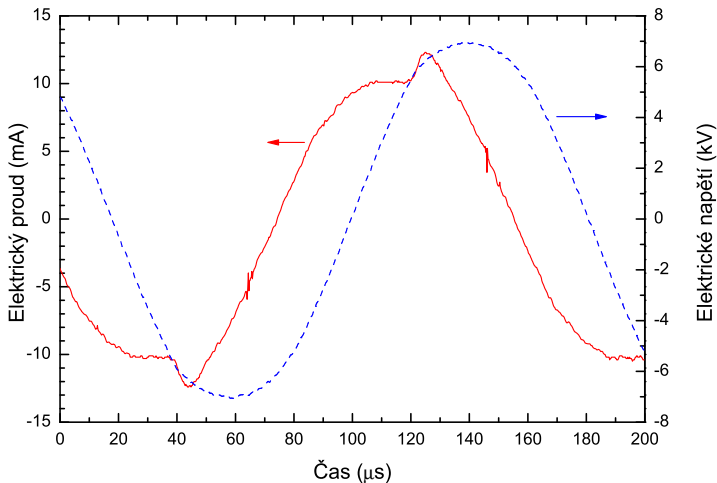


Jak (ne)má vypadat graf



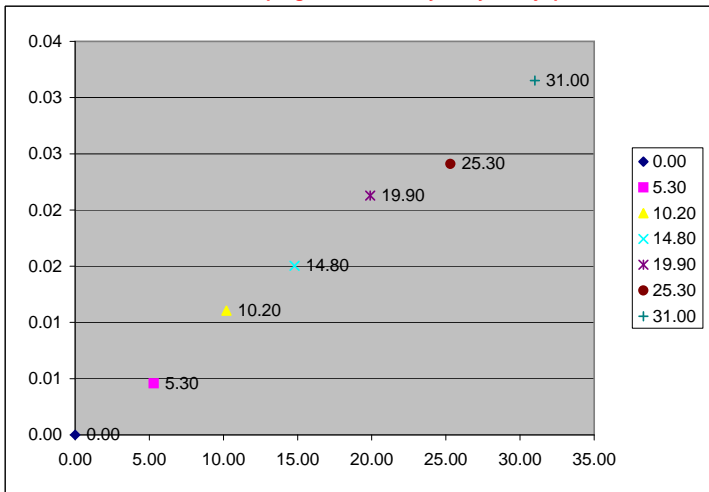
Jak (ne)má vypadat graf

Hustě měřené závislosti (spektra, osciloskopická měření) kreslíme čarami.

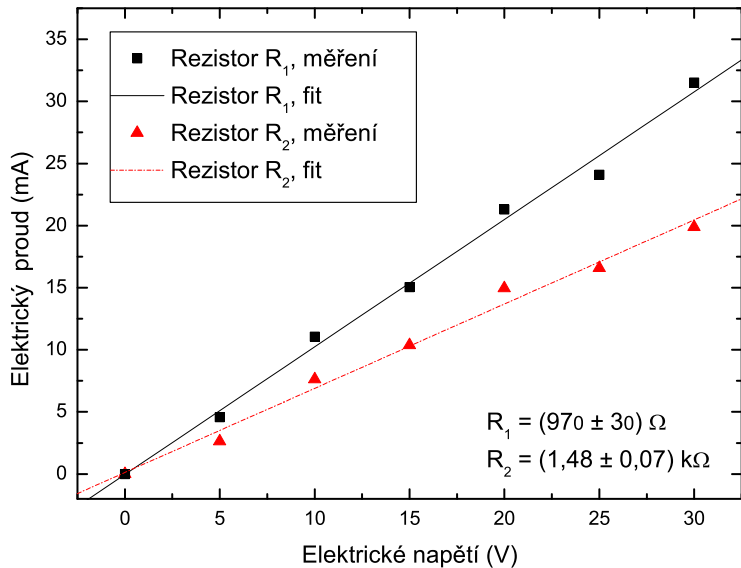


Jak (ne)má vypadat graf

Standardní nastavení programu nemusí být vždy to nejlepší



Jak má vypadat graf



Jak má vypadat graf

- Na vodorovnou osu vynášíme nezávisle proměnnou, na svislou závisle proměnnou.
- Jednotky na osách, počátek os a další parametry grafu volíme tak, aby graf pokryl na šířku i výšku cca 80% plochy, graf by neměl být natěsnán v úzkém proužku.
- Do grafů nezakresluje mřížky ani pozadí.
- Stupnice popisujeme rovnoměrně, nevynášíme na ně naměřené hodnoty. Vhodné řady pro popis úseček jsou

0, 1, 2, 3 ...

0, 2, 4, 6 ...

0, 5, 10, 15, 20 ...

0, 25, 50, 75, 100 ...

- U každé osy uvedeme měřenou veličinu a její vhodnou jednotku (10^{11} Pa, μ A).

Jak má vypadat graf

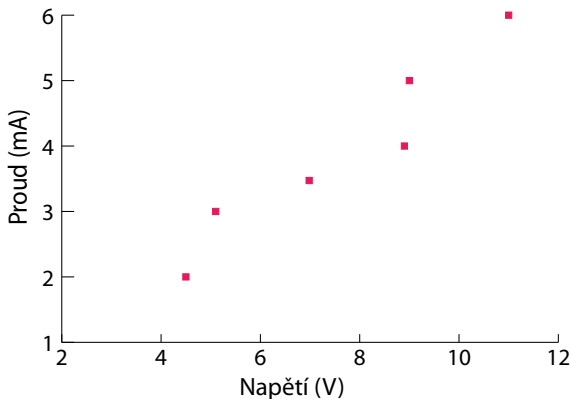
- Body vyznačujeme křížky, kolečky, čtverečky atd. vhodné velikosti, ne tečkami, nikdy k nim nevypisujeme hodnoty.
- Místo propojení jednotlivých bodů se snažíme body proložit předpokládaný typ závislosti.
- Pokud pro stanovení výsledku měření bylo nutné body proložit křivku (regrese), proložená křivka musí být součástí grafu.
- Je-li v grafu více křivek, odlišíme je barevně i typem čáry a přidáme legendu.
- Do záhlaví grafu nebo do popisku obrázku zapíšeme název vystihující obsah grafu.

Doporučený program

Máme kampusovou licenci k programu *QtiPlot* (obdoba *Originu*).
Ke stažení na <https://is.muni.cz/auth/el/1431/jaro2011/F2180/um/25320694/QtiPlot.zip>.

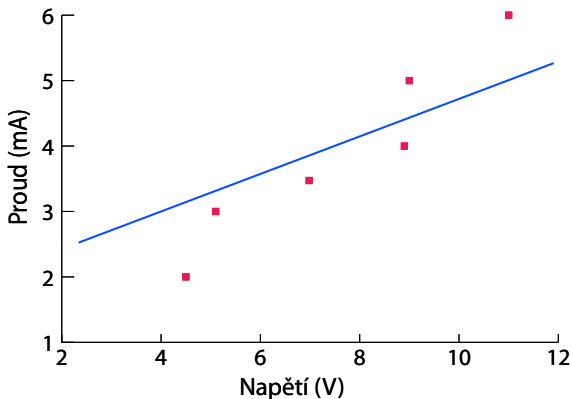
Aproximace závislostí

- Máme změřenou závislost $y = f(x)$, tj. řadu dvojic $[x_i, y_i]$. Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci $y = f(x)$?



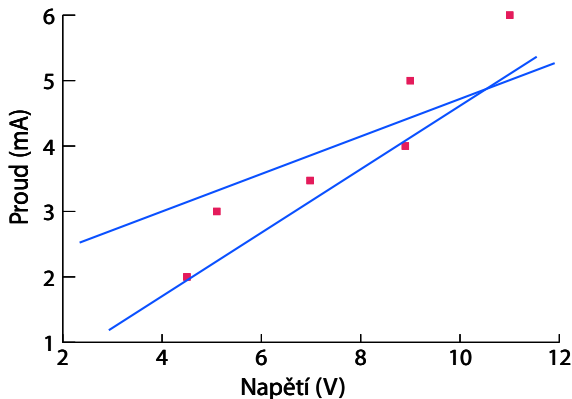
Aproximace závislostí

- Máme změřenou závislost $y = f(x)$, tj. řadu dvojic $[x_i, y_i]$. Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci $y = f(x)$?



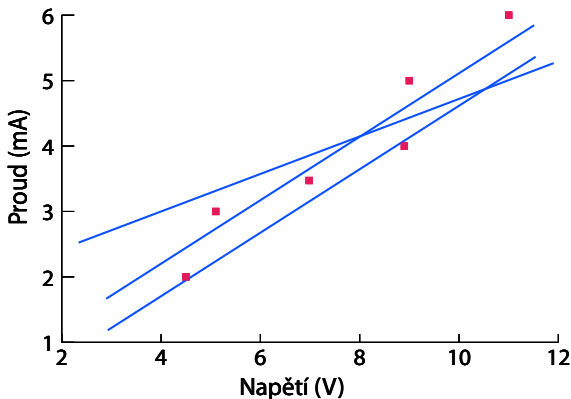
Aproximace závislostí

- Máme změřenou závislost $y = f(x)$, tj. řadu dvojic $[x_i, y_i]$. Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci $y = f(x)$?



Aproximace závislostí

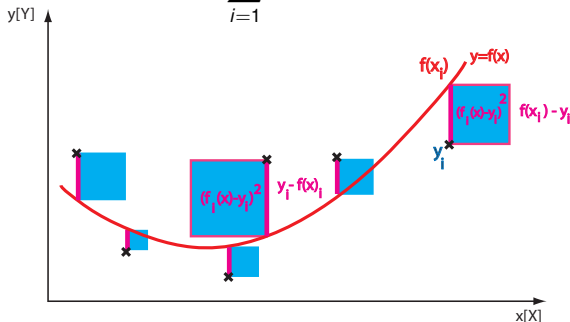
- Máme změřenou závislost $y = f(x)$, tj. řadu dvojic $[x_i, y_i]$. Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci $y = f(x)$?



Metoda nejmenších čtverců

Typ a hodnoty parametrů funkce $f(x; b_0, b_1, b_2 \dots)$ hledáme tak, aby tzv. suma čtverců S měla minimální hodnotu

$$S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$



Kdyby byl proklad přesný, bylo by $S = 0$, obvykle je S malé kladné číslo.

Metoda nejmenších čtverců

Hledání optimálních hodnot parametrů b_i funkce f , při které suma S nabývá minima, se provádí derivováním S podle parametrů b_i a položením derivací rovným nule. Řeší se tak systém m rovnic

$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Je vhodné rozlišit dva případy:

lineární regrese

funkce f závisí lineárně na parametrech $b_0, b_1 \dots$

Př: $f(x; b_0, b_1, b_2) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

Obecné vztahy pro optimální hodnoty parametrů odvodit lze.

nelineární regrese

Př: $f(x; b_0, b_1) = b_0 \cdot e^{b_1 x}$

Obecné vztahy odvodit nelze, optimální hodnoty se hledají iteračně (někdy je možnost, jak převést druhý případ na první – linearizace).

Lineární regrese lineární závislosti $y = b_0 + b_1 x$

Měření poskytlo n dvojic $[x_i, y_i]$, $n \geq 3$

Odhady optimálních hodnot parametrů (sčítáme přes všechna n)

$$b_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Odhady nejistot parametrů jsou

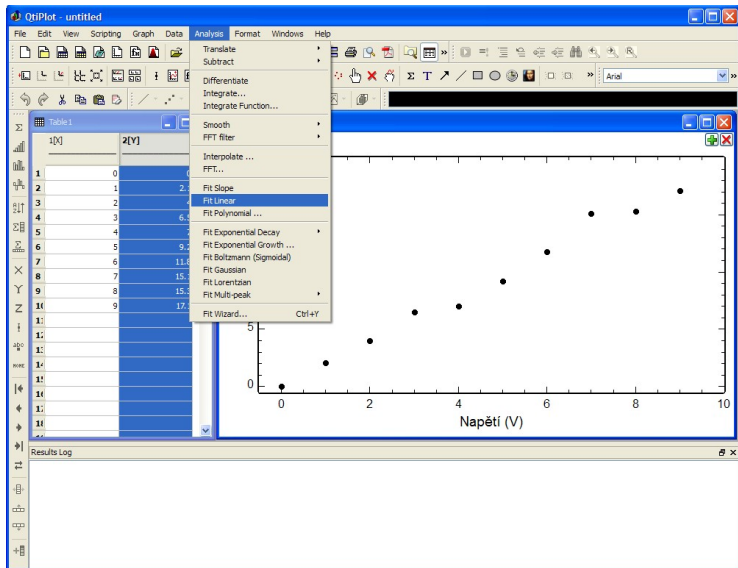
$$u(b_0) = s \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad u(b_1) = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$
$$s = \sqrt{\frac{S_0}{n-2}}, \quad S_0 = \sum (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2$$

Výsledkem je tedy intervalový odhad parametrů b_0 a b_1

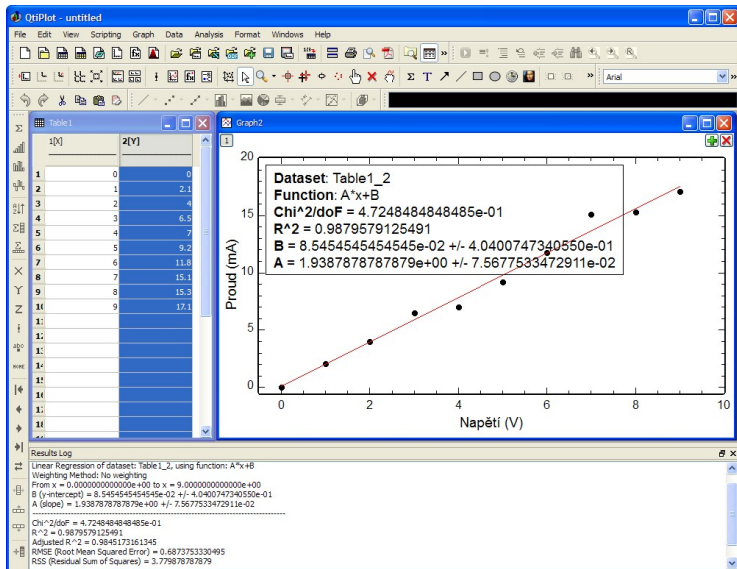
$$b_0 = b_0 \pm u(b_0) t_{p,n-2} \quad b_1 = b_1 \pm u(b_1) t_{p,n-2},$$

kde $t_{p,n-2}$ jsou koeficienty Studentova rozdělení.

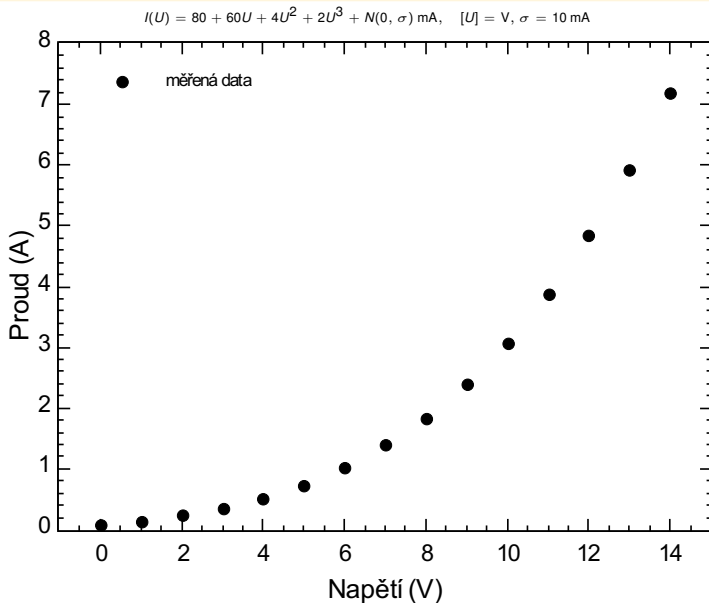
Lineární regrese v *QtiPlotu*



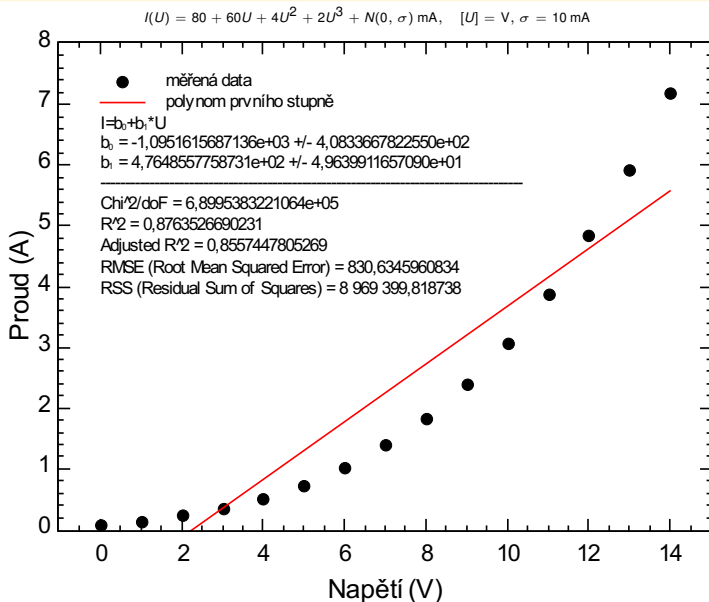
Lineární regrese v QtiPlotu



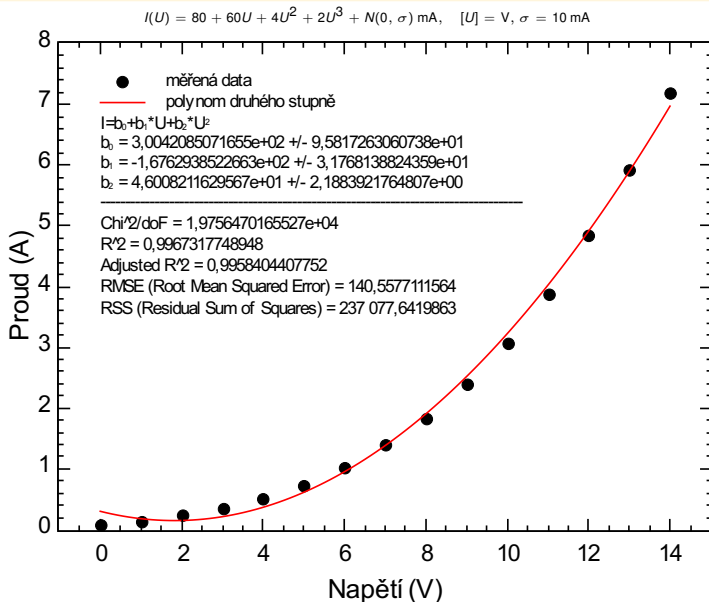
Lineární regrese polynomem



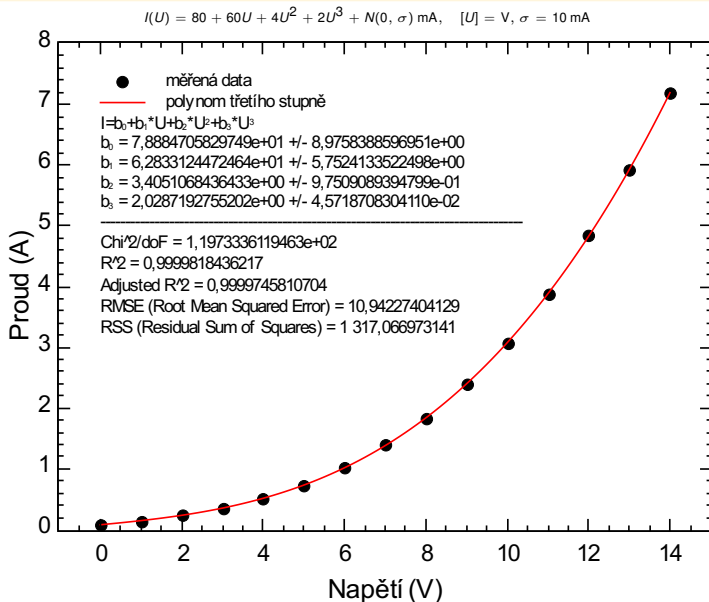
Lineární regrese polynomem



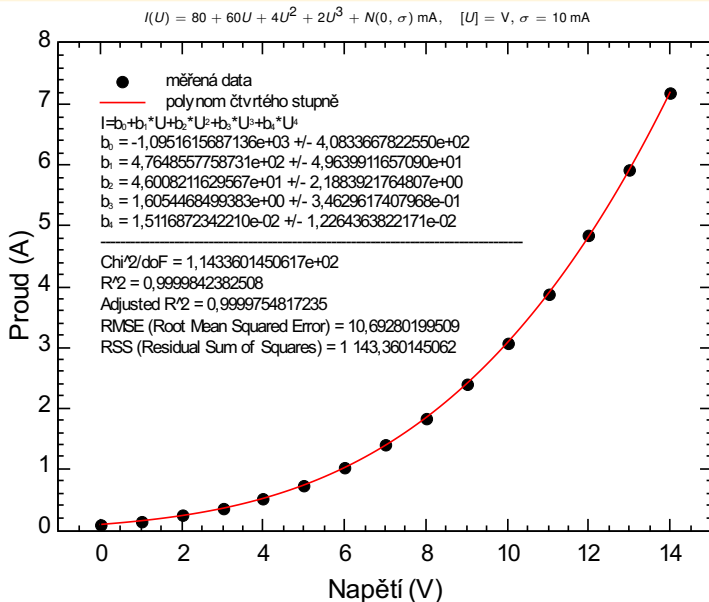
Lineární regrese polynomem



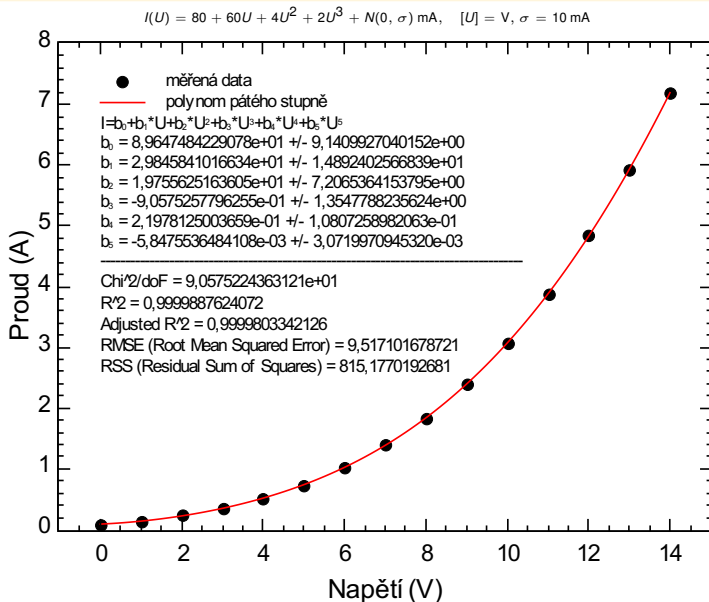
Lineární regrese polynomem



Lineární regrese polynomem



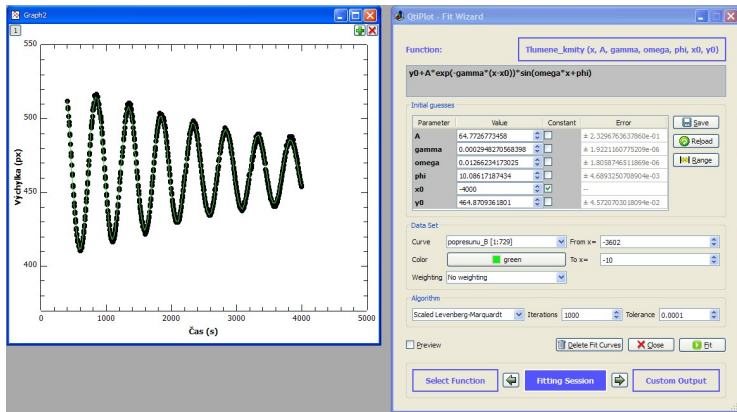
Lineární regrese polynomem



Nelineární regrese v QtiPlotu

Přesné nalezení rovnovážné polohy, frekvence kmitání a koeficientu tlumení Cavendishových torzních vah

$$y(t) = y_0 + Ae^{-\gamma(t-t_0)} \sin(\omega t + \phi)$$



Platnost metody nejmenších čtverců

- Mezi veličinami x a y opravdu existuje závislost.
- K určení hledaných parametrů funkce f stačí teoreticky naměřit alespoň tolik různých dvojic $[x_i, y_i]$, kolik je hledaných parametrů (např. na proklad přímkou $y = b_0 + b_1 x$ alespoň dvě dvojice).
- Ve skutečnosti potřebujeme mnohem více hodnot. Např. 10–12 pro posouzení linearity.
- Předpokládáme, že hodnoty x nejsou zatíženy žádnou chybou. (Pokud tento předpoklad neplatí, používáme tento postup vědomě se systematickou chybou. Přesnější je v takovémto případě použít ortogonální regresi.)
- Hodnoty y_i jsou náhodné, nejsou však zatíženy hrubými nebo systematickými chybami.

Linearizace exponenciální závislosti $y = b_0 \cdot e^{b_1 x}$

Závislost převedeme na lineární tvar:

$$\begin{aligned}y &= b_0 \cdot e^{b_1 x} \\ \ln y &= \ln (b_0 \cdot e^{b_1 x}) \\ \ln y &= \ln b_0 + \ln (e^{b_1 x}) \\ \underbrace{\ln y}_{\text{ozn. } Y} &= \underbrace{\ln b_0}_{\text{ozn. } B_0} + (b_1 x) \\ Y &= B_0 + b_1 x.\end{aligned}$$

- Stačí tedy do grafu vynášet místo dvojic hodnot $[x, y]$ dvojice hodnot $[x, \ln y] = [x, Y]$, a pak těmito body proložit přímkou. $\ln y$ si předem spočítáme v tabulce.
- Prokladem stanovíme optimální hodnoty a nejistoty konstant B_0 a b_1 . Optimální hodnoty a nejistoty původních konstant b_0 a b_1 dopočítáme.

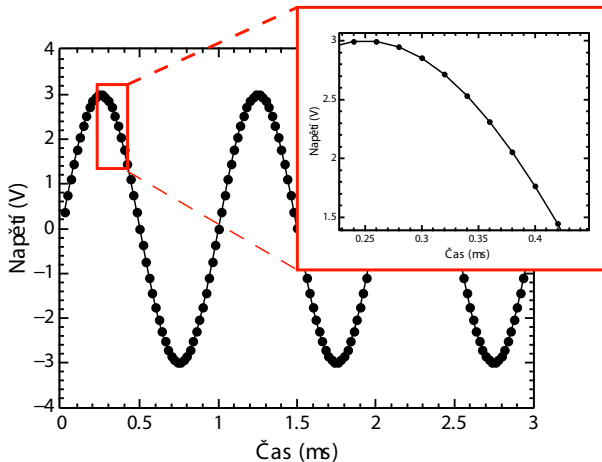
Interpolace a extrapolace

Interpolace a extrapolace jsou metody nalezení odhadu hodnoty veličiny uvnitř a vně intervalu dvojic veličin $[x_i, y_i]$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$

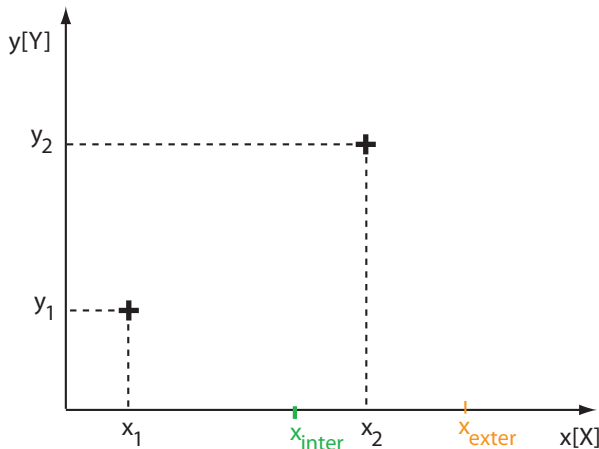
- Typické použití: přesný odečet hodnoty funkce dané tabulkou.
- Hodnoty, ze kterých vycházíme, považujeme za přesné.
Požadujeme tedy, aby závislost body procházela.
- Interpolace přímkou, polynomem, splajnem ...

Interpolace a extrapolace

Pokud o závislosti nic nevíme, použijeme většinou lineární interpolaci. Předpokládáme, že hodnoty v tabulce jsou natolik blízké, aby funkční závislost mezi nimi byla přibližně lineární.



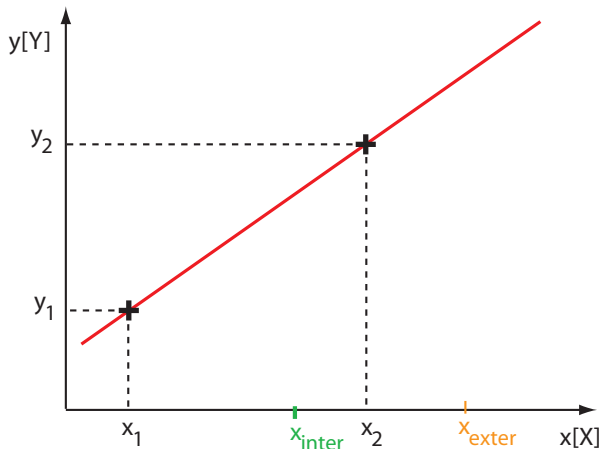
Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu y příslušnou k danému x vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

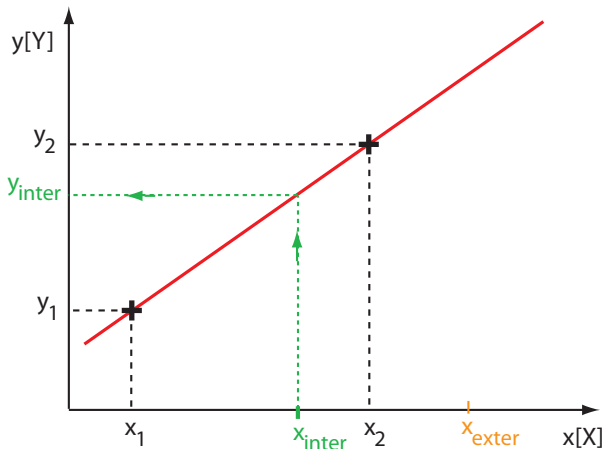
Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu y příslušnou k danému x vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

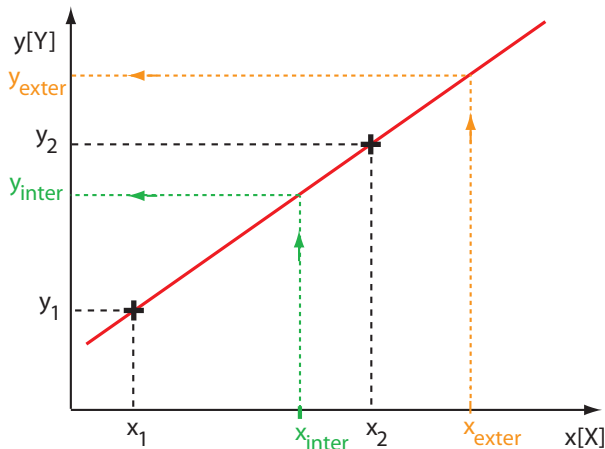
Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu y příslušnou k danému x vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu y příslušnou k danému x vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Interpolace v tabulce

4E. Hustota vzduchu v závislosti na tlaku a teplotě

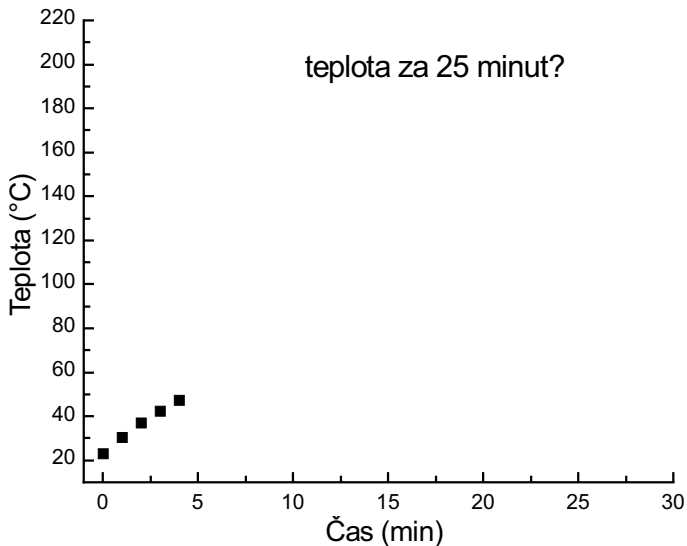
ρ_{vz} [kg·m⁻³] – hustota suchého vzduchu.

1014,1 Pa

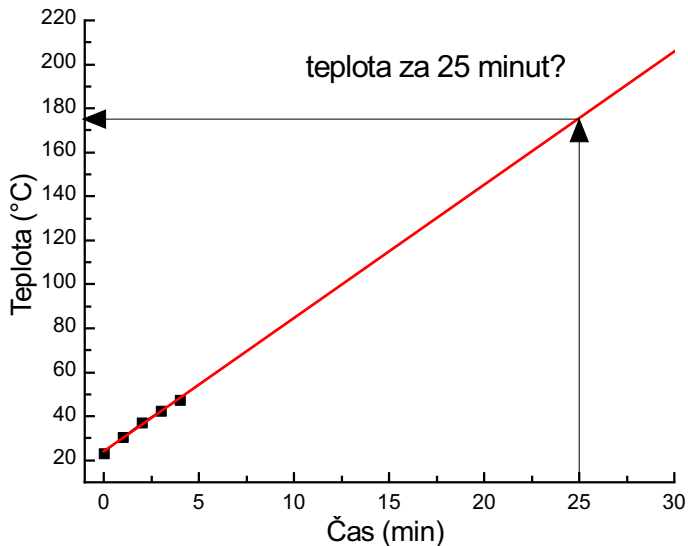
21,3 °C

tlak [hPa]	993	1 000	1 007	1 011	1 013	1 016	1 019	1 021	1 024	1 027	1 033
tlak [mmHg]	745	750	755	758	760	762	764	766	768	770	775
teplota [°C]	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}	ρ_{vz}
15	1,201	1,210	1,218	1,223	1,226	1,229	1,232	1,236	1,239	1,242	1,250
16	1,197	1,205	1,213	1,218	1,221	1,224	1,228	1,231	1,235	1,238	1,246
17	1,193	1,201	1,209	1,214	1,217	1,220	1,223	1,227	1,230	1,233	1,241
18	1,189	1,197	1,205	1,210	1,213	1,216	1,219	1,223	1,226	1,229	1,237
19	1,185	1,193	1,201	1,206	1,209	1,212	1,215	1,219	1,222	1,225	1,233
20	1,181	1,189	1,197	1,202	1,205	1,208	1,211	1,215	1,218	1,221	1,229
21	1,177	1,185	1,193	1,198	1,201	1,204	1,207	1,210	1,213	1,216	1,224
22	1,173	1,181	1,189	1,194	1,197	1,200	1,203	1,206	1,209	1,212	1,220
23	1,169	1,177	1,185	1,190	1,193	1,196	1,199	1,202	1,205	1,208	1,216
24	1,165	1,173	1,181	1,186	1,189	1,192	1,195	1,198	1,201	1,204	1,212
25	1,161	1,169	1,177	1,182	1,185	1,188	1,191	1,194	1,197	1,200	1,208
26	1,157	1,165	1,173	1,178	1,181	1,184	1,187	1,190	1,193	1,196	1,204
27	1,153	1,161	1,169	1,174	1,177	1,180	1,183	1,186	1,189	1,192	1,200
28	1,150	1,157	1,165	1,170	1,173	1,176	1,179	1,182	1,185	1,188	1,196
29	1,146	1,153	1,161	1,166	1,169	1,172	1,175	1,178	1,181	1,184	1,192
30	1,142	1,150	1,158	1,163	1,165	1,168	1,171	1,174	1,177	1,180	1,188

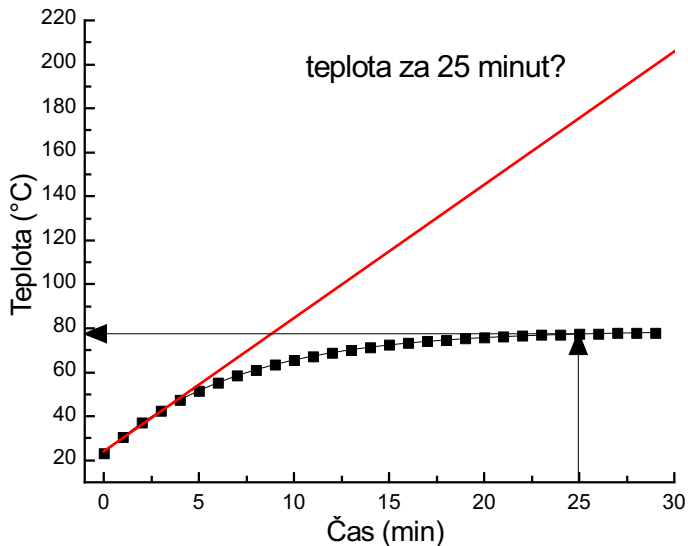
Extrapolace – odstrašující případ









Extrapolace – odstrašující případ



Extrapolace – odstrašující případ



Literatura

-  BIPM: JCGM 100:2008 *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*
-  Pánek Petr, *Úvod do fyzikálních měření*, Masarykova univerzita, Brno 2001
-  Novák Miroslav, *Úvod do praktické fyziky*, výrobní skript rektorátu UJEP Brno, Brno 1989
-  Anděl Jiří, *Statistické metody*, MATFYZPRESS, Praha 2003
-  Humlíček Josef, *Statistické zpracování výsledků měření*, UJEP Brno 1984
-  Meloun Milan, Militký Jiří, *Statistické zpracování experimentálních dat*, PLUS Praha 1994