

Fyzikální praktikum 2

8. Měření parametrů zobrazovacích soustav

Úkoly k měření

Povinná část

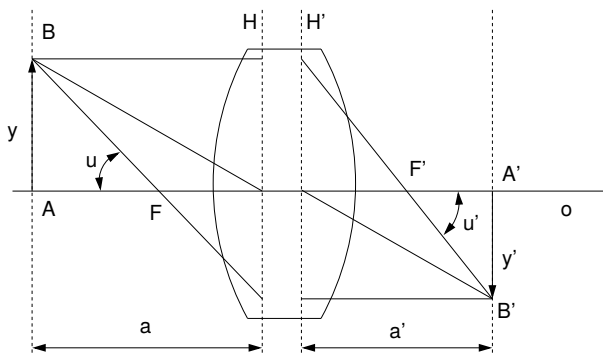
- Měření ohniskové vzdálenosti tenké spojky.
- Měření ohniskové vzdálenosti tenké rozptylky.

Varianty povinně volitelné části

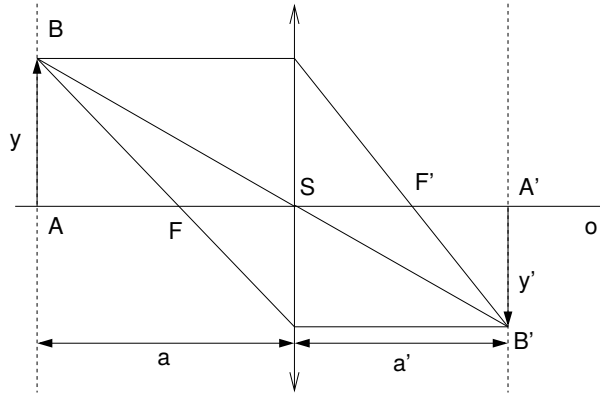
- A. Určení indexu lomu čoček z ohniskové vzdálenosti a měření křivosti.
- B. Měření ohniskové vzdálenosti tlusté čočky.

Povinná část

Průchod paraxiálních paprsků soustavou centrovaných kulových lámavých ploch je popsán základními zobrazovacími parametry, mezi něž patří hlavní a uzlové body (respektive roviny), ohniska a ohniskové vzdálenosti. Dopadá-li na zobrazovací soustavu (obr. 1) svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou O , pak po průchodu soustavou se paprsky protínají v obrazovém ohnisku F' . Naopak, svazek paprsků vycházejících z bodu F (předmětové ohnisko) se změní po průchodu soustavou na rovnoběžný svazek. Rovina kolmá k optické ose procházející předmětovým, respektive obrazovým ohniskem se nazývá předmětovou, respektive obrazovou ohniskovou rovinou. Na obr.



Obrázek 1: Zobrazení pomocí tlusté čočky.



Obrázek 2: Přímé měření ohniskové vzdálenosti tenké čočky.

1 jsou obrazem bodů A, B body A', B' . Poměr úseček $y' = A'B'$ a $y = AB$ se nazývá příčným zvětšením β ,

$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (1)$$

Poměr úhlů u' a u , které svírají sdružené paprsky s optickou osou, se nazývá úhlové zvětšení γ ,

$$\gamma = \frac{u'}{u}. \quad (2)$$

Hlavními rovinami soustavy nazýváme dvojici sdružených rovin, kolmých k optické ose, pro něž je příčné zvětšení rovno jedné. Hlavními body nazýváme průsečíky hlavních rovin s optickou osou. Uzlovými rovinami nazýváme dvojici sdružených rovin kolmých k optické ose, pro něž je úhlové zvětšení rovno jedné. Uzlovými body nazýváme průsečíky uzlových rovin s optickou osou. Vzdálenost předmětového (obrazového) ohniska od předmětového (obrazového) hlavního bodu se nazývá předmětová (obrazová) ohnisková vzdálenost soustavy. Je-li tloušťka čočky zanedbatelná ve srovnání s poloměry křivosti lámavých ploch, hovoříme o tenké čočce. V takovém případě hlavní roviny splývají a čočka je pak při výpočtech představována rovinou středního řezu.

Znaménková konvence a zobrazovací rovnice čočky

Předmětový a obrazový prostor jsou charakterizovány souřadnými soustavami, jejichž počátky v případě tenké čočky leží ve stejném bodě ve středu čočky. Při výpočtech je nutné rozlišovat kladné a záporné hodnoty v těchto souřadných soustavách. Definice kladného a záporného prostoru může být různá, avšak je-li zvolená určitá definice, všechny vztahy musí být v souladu s touto konvencí. Budeme důsledně používat následující znaménkovou konvenci: vzdálenost měříme od středu čočky a sice tak, že leží-li bod napravo od počátku bereme vzdálenosti kladně a v opačném případě záporně; leží-li bod nad osou O bereme vzdálenosti kladně a v opačném případě záporně. Na obr. 2 je znázorněno zobrazování spojkou – vidíme, že tady $a < 0$, $a' > 0$, $f < 0$, $f' > 0$, $y > 0$ a $y' < 0$. V uvedené znaménkové konvenci zobrazovací rovnice čočky má tvar

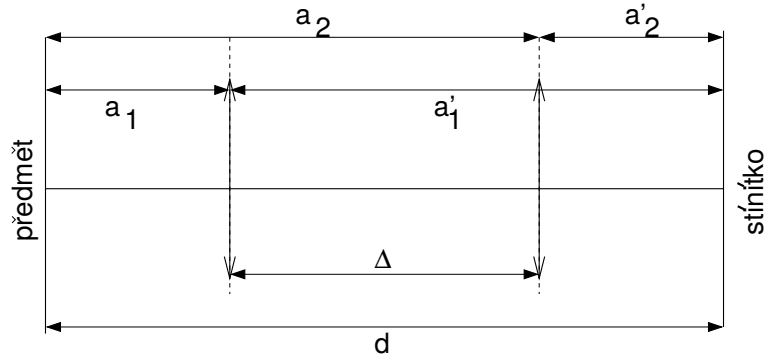
$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \quad (3)$$

kde a je předmětová vzdálenost, a' je obrazová vzdálenost a f' je obrazová ohnisková vzdálenost.

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké spojkky z polohy obrazu a předmětu

Ze zobrazovací rovnice (3) vyplývá pro ohniskovou vzdálenost f' vztah

$$f' = \frac{aa'}{a - a'}. \quad (4)$$



Obrázek 3: Besselova metoda měření ohniskové vzdálenosti.

Určíme-li tedy vzdálenosti a a a' , pak pomocí vztahu (4) vypočítáme f' . Měření se provádí na optické lavici s měřítkem, na které jsou umístěny předmět y (svítící šipka s vestavěným měřítkem), proměřovaná čočka S a stínítko, na něž zachycujeme obraz y' (viz obr. 2). Změnou polohy čočky nebo stínítka při stálé poloze předmětu hledáme co nejlépe zaostřený obraz a odečteme na měřítku optické lavice hodnoty a , a' .

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké čočky z příčného zvětšení

Podle obr. 2 pro příčné zvětšení platí

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}. \quad (5)$$

Rovnici (4) přepíšeme do tvaru

$$f' = \frac{a'}{1 - \beta} = \frac{a\beta}{1 - \beta}. \quad (6)$$

Zvětšení β určíme tak, že na stínítku změříme určitou část osvětleného milimetrového měřítka. K změřenému β přiřadíme odpovídající vzdálenost a nebo a' . Z rovnice (6) vypočítáme ohniskovou vzdálenost. Z hlediska dosažení maximální přesnosti je vhodné volit vzdálenost a co největší, na druhé straně bereme zřetel na to, aby obraz byl dostatečně velký, aby zvětšení bylo dobře měřitelné.

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké spojky Besselovou metodou

Uvažujeme uspořádání podle obr. 3. Vzdálenost d předmětu od stínítka ponecháme pevnou. Dá se ukázat, že pro $d > 4f$ existují dvě polohy spojky, ve kterých se na stínítku vytvoří ostrý obraz. Uvědomíme-li si, že polohy předmětu a obrazu mohou být vzájemně vyměněny,

$$a_1 = -a'_2, \quad a_2 = -a'_1 \quad (7)$$

Dále platí (viz.obr. 3)

$$d = |a_1| + |a'_1| = |a_2| + |a'_2| \quad (8)$$

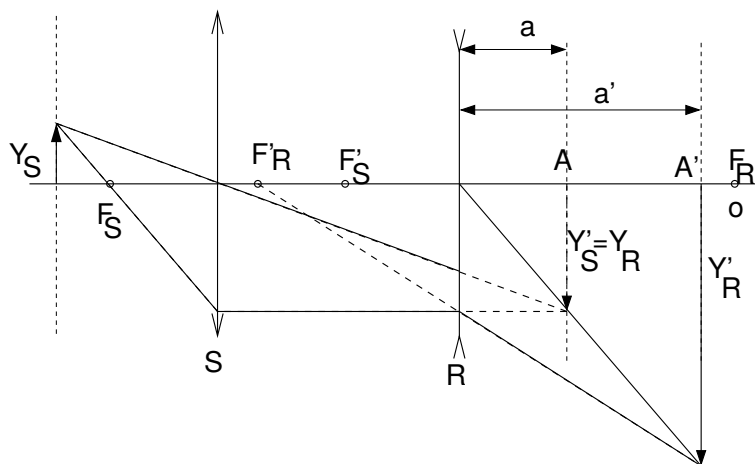
$$\Delta = |a'_1| - |a'_2| = |a_2| - |a_1|. \quad (9)$$

Ze vztahů (7)-(9) lze odvodit, že

$$d^2 - \Delta^2 = 4a_1a'_1 = 4a_2a'_2. \quad (10)$$

Dosadíme-li do vztahu (4) za čitatele aa' ze vztahu (10) a za jmenovatele d ze vztahu (8), dostaneme vztah pro určení ohniskové vzdálenosti

$$f' = \frac{d^2 - \Delta^2}{4d} \quad (11)$$



Obrázek 4: Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky.

Stanovení ohniskové vzdálenosti tenké rozptylky

Rozptylky vytvářejí vždy neskutečný obraz skutečného předmětu. Proto je v tomto případě nutno postupovat tak, že k měřené rozptylce se přidá spojka tak, aby obraz vytvořený spojkou mohl být neskutečným předmětem pro rozptylku. Podle obr. 4 umístíme na optickou lavici předmět y_s , a spojkou S vytvoříme reálný obraz y'_s v bodě A . Mezi tento obraz a spojku umístíme rozptylku R a na stínítku zase nalezneme ostrý obraz y'_r v bodě A' . Obraz y'_s je vlastně předmětem y_r pro rozptylku. Známe-li polohu rozptylky R , polohu obrazu spojky A a polohu obrazu rozptylky A' , můžeme vypočítat

$$a = A - R \quad a' = A' - R \quad (12)$$

a pro výpočet ohniskové vzdálenosti rozptylky použít vztah (4).

Úkoly

1. Změřte ohniskovou vzdálenost tenké spojky přímou metodou.
2. Změřte ohniskovou vzdálenost téže spojky ze zvětšení.
3. Změřte ohniskovou vzdálenost téže spojky Besselovou metodou.
4. Změřte ohniskovou vzdálenost rozptylky přímou metodou.
5. Porovnejte výsledky měření v bodech 1., 2. a 3. mezi sebou.

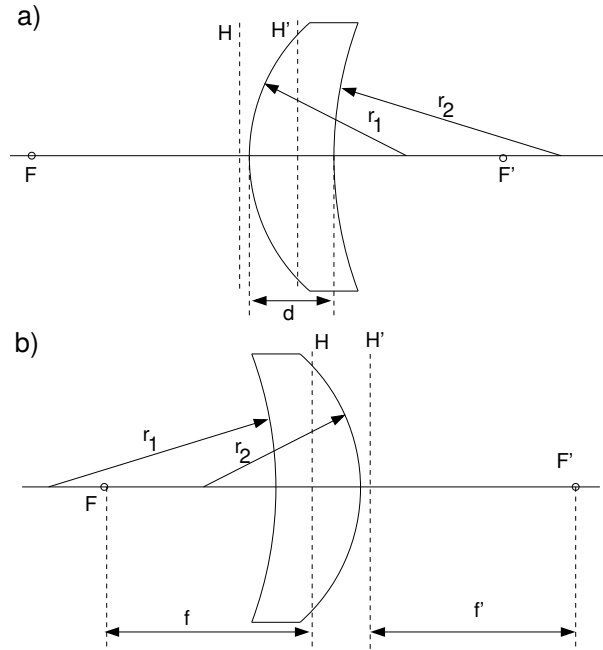
Pozn.: Soubor náhodných hodnot ohniskových vzdáleností dostaneme tak, že pro každé měření nastavíme jinou polohu čočky v úkolech 1., 2. a 4. a jinou hodnotu vzdálenosti mezi zdrojem a stínítkem v úkolu 3.

Varianta A: Určení indexu lomu čoček z ohniskové vzdálenosti a měření křivosti

Úvod

Index lomu určíme ze vztahu [3]

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d(n - 1)^2}{n r_1 r_2}, \quad (13)$$



Obrázek 5: Základní parametry tlusté čočky.

kde f' je ohnisková vzdálenost, r_1, r_2 poloměry kulových ploch, n index lomu a d tloušťka čočky. Na obr. 5 jsou vyznačeny tyto parametry pro různé polohy čočky. Vztah (13) předpokládá použití znaménkové konvence, která je popsána v předchozí povinné části. Na obr. 5 jsou uvedeny dvě polohy stejné čočky, kdy $r_1 > 0$ a $r_2 > 0$ (schéma (a)) a $r_1 < 0$ a $r_2 < 0$ (schéma (b)). Obrázek 5(a) představuje ten typ čoček, které budeme v této úloze měřit, tj. spojky s vypuklostí $Q = (1/r_1 - 1/r_2) > 0$. Pro spojku je poloměr vypuklé plochy menší, než poloměr plochy vyduté. Pro záporné r_1 a r_2 na obr. 5(b) dostaneme $Q > 0$, protože poloměry číslujeme po směru chodu paprsku. Druhý sčítanec v (13) je rovněž pro náš typ čoček kladný. Ze vztahu (13) vyjádříme n jako funkci f', r_1, r_2 a d . Pro zjednodušení výsledného vztahu pro n označíme

$$A = \frac{1}{f'}, \quad B = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}, \quad C = \frac{d}{r_1 r_2}. \quad (14)$$

Vztah (13) můžeme teď přepsat jako

$$A = (n - 1)B + (n - 1)^2 C / n \quad (15)$$

a n vypočítáme z kvadratické rovnice

$$(B + C)n^2 - (A + B + 2C)n + C = 0 \quad (16)$$

$$n = \frac{(A + B + 2C) + \sqrt{(A + B + 2C)^2 - 4C(B + C)}}{2(B + C)}. \quad (17)$$

V rovnici (17) bereme pro výpočet takové znaménko, abychom dostali fyzikálně smysluplnou hodnotu n .

Pro výpočet hodnot A, B a C potřebujeme znát hodnoty d, r_1, r_2 a f' . Tloušťka d je známa, ostatní veličiny změříme sférometrem a goniometrem.

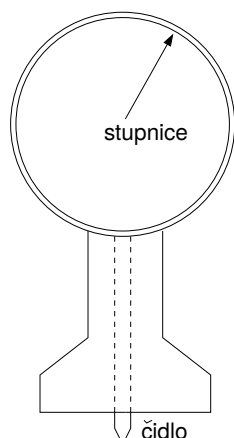
Pro případ tenké čočky předpokládáme $d = 0$ a index lomu pak můžeme vypočítat přímo ze vztahu (13) jako

$$n = 1 + \frac{1}{f'} / \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (18)$$

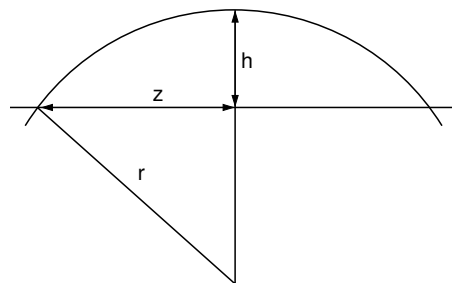
Měření křivosti lámavých ploch sférometrem

Poloměry křivosti lámavých ploch r_1, r_2 určíme sférometrem. Mechanický sférometr je nakreslen na obr. 6. Hodinkový indikátor s přesností čtení rozdílů výšek ± 0.01 mm je upevněn v držáku s kruhovou základnou, jehož středem prochází dotykové čidlo. Nulovou polohu sférometru určíme tak, že jej umístíme na rovinné sklo. Pak postavíme sférometr na měřenou kulovou plochu s poloměrem křivosti r . Z obr. 7 je zřejmé, že kruhová základna sférometru s poloměrem z vytne na povrchu měřené plochy kulovou úseč s výškou h . Rozdíl údajů sférometru na čočce a na rovinném skle právě udává tento parametr. Změříme-li průměr sférometru $2z$ posuvným měřítkem, pak zřejmě

$$r = \frac{z^2 + h^2}{2h}. \quad (19)$$



Obrázek 6: Sférometr.



Obrázek 7: Určení poloměru křivosti kulové plochy.

Úkoly

1. Změřte posuvným měřítkem hodnotu z sférometru a sférometrem hodnotu h pro měřené čočky z povinné části této úlohy.
2. Vypočítejte index lomu měřených čoček.

Varianta B: Měření ohniskové vzdálenosti tlusté čočky

Úvod

Definice základních parametrů optických soustav a metody jejich měření jsou popsány v předchozí části. Na obr. 8(a) jsou uvedeny základní parametry tlusté čočky, pro které platí čočková rovnice

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}. \quad (20)$$

Příčné zvětšení je definováno

$$\beta = \frac{Y'}{Y} \quad (21)$$

a z obr. 8(a) je vidět, že pro β platí rovněž

$$\beta = \frac{a'}{a}. \quad (22)$$

Při výpočtu pro vztahy (20)–(22) platí znaménková konvence, která je popsána v povinné části této úlohy.

Nyní vynásobíme rovnici (20) a' nebo a a použijeme vztah (22). Pak dostaneme pro ohniskovou vzdálenost

$$f' = \frac{a'}{1 - \beta} = \frac{a\beta}{1 - \beta}. \quad (23)$$

Pro spojku dostáváme skutečný převrácený obraz, tj. $f' > 0$, $a' > 0$, $a < 0$ a $\beta < 0$.

Budeme měřit parametry spojky. Použijeme znaménkovou konvenci na vztah (23)

$$f' = \frac{a'}{1 + \beta} = \frac{a\beta}{1 + \beta} \quad (24)$$

a dále bereme jen absolutní hodnoty všech veličin. Na rozdíl od tenké čočky, pro kterou je možné pomocí vztahu (24) vypočítat f' z naměřených veličin a , a' nebo případně β , pro tlustou čočku je obtížné změřit přesně a , a' . Provedeme měření od některého bodu O (obr. 8). Vzdálenost předmětu od bodu O bude $(a + l)$ a obrazu $[a' + (\delta - l)]$, kde $l = OH$ a $\delta = HH'$. Pro dvě měření dostaneme rozdíl $d_{ij} = a_i - a_j$ a $d'_{ij} = a'_i - a'_j$, tj. hodnoty d_{ij} a d'_{ij} nezávisí na poloze bodu O a vzdálenosti hlavních rovin. Bod O nemusí ležet mezi hlavními rovinami, jak je znázorněno na obr. 8.

Pro první část vztahu (24) máme

$$f'(1 + \beta_i) = a'_i \quad (25a)$$

$$f'(1 + \beta_j) = a'_j \quad (25b)$$

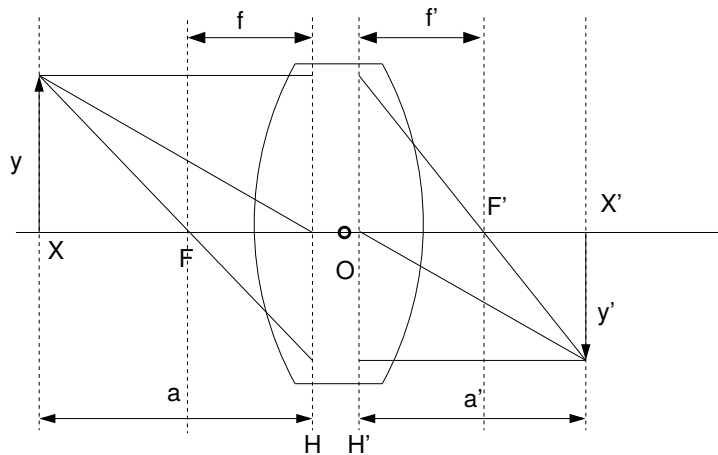
$$f'(1 + \beta_i - 1 - \beta_j) = a'_i - a'_j = d'_{ij} \quad (25c)$$

$$f' = \frac{d'_{ij}}{\beta_i - \beta_j}. \quad (25d)$$

Analogicky pro druhou část rovnice (24) dostaneme

$$f' = \frac{d_{ij}\beta_i\beta_j}{\beta_i - \beta_j}. \quad (26)$$

Ohniskovou vzdálenost tlusté čočky můžeme stanovit z měření v obou směrech. Na obr. (a) a (b) je znázorněno zobrazení téhož předmětu stejnou zobrazovací soustavou. Chod paprsku v případě (b) je opačný než v případě (a). V obou případech je zachována vzdálenost předmětu od



Obrázek 8: Základní parametry tlusté čočky: předmětové a obrazové ohnisko F a F' , hlavní roviny H a H' , předmětová ohnisková vzdálenost $f = HF$ a obrazová $f' = H'F'$. Velikosti předmětu a obrazu jsou označeny Y a Y' . Vzdálenost mezi předmětem a hlavní rovinou H a mezi obrazem a hlavní rovinou H' jsou a a a' . Na obrázku jsou $a, f > 0$ a $a', f' < 0$.

hlavní roviny, takže zůstává zachováno příčné zvětšení. Bod O je určitý bod spojený se soustavou; v našem případě je to ryska definující polohu čočky.

Zavedeme označení: $XX' = e$, $XH = a$, $X'H' = a'$, tedy v a) $XO = S_1$ a v b) $XO = S_2$. Pak podle obr. 8 platí

$$e = a + a' + \delta \quad (27a)$$

$$S_1 = a + l \quad (27b)$$

$$S_2 = a + \delta - l, \quad (27c)$$

odkud

$$a' - a = e - (S_1 + S_2). \quad (28)$$

Ze vztahu (24) dostáváme

$$a' = f'(1 + \beta) \quad (29a)$$

$$a = [f'(1 + \beta)]/\beta \quad (29b)$$

$$a - a' = f'(1 + \beta)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{f'(1 + \beta)(1 - \beta)}{\beta} = \frac{f'(1 - \beta^2)}{\beta}. \quad (29c)$$

Z (28) a (29c) dostáváme pro ohniskovou vzdálenost

$$f' = \frac{\beta[(S_1 + S_2) - e]}{1 - \beta^2}. \quad (30)$$

Úkoly

1. Určete ohniskovou vzdálenost tlusté čočky metodou dvojího zvětšení:

- Zafixujte polohu zdroje a pro různé polohy čočky změřte polohu stínítka a velikost obrazu. Měření proveďte $5\times$ až $10\times$.
- Pro různé dvojice měření vypočítejte ohniskovou vzdálenost čočky ze vztahu (25d) nebo (26). Naměřené hodnoty použijte pro výpočet ohniskové vzdálenosti ze vztahu (20). Porovnejte výsledky.

2. Určete ohniskovou vzdálenost tlusté čočky z měření v obou směrech:

- Předmět a stínítko umístíme na vzdálenost e ($e > 4f$). Posunutím čočky dostaneme ostrý obraz na stínítku a odečteme S_1 (XO) a zvětšení β ; otočíme čočku o 180° a po získání ostrého obrazu na stínítku odečteme S_2 . Zvětšení se mohou v obou případech lišit jen chybou měření. Měření proveďte pro 5 až 10 hodnot e .
- Vypočítejte f' ze vztahu (30) a statisticky zpracovanou hodnotu porovnejte s hodnotou z předchozího měření.

Literatura:

- [1] J. Brož a kol.: *Základy fyzikálních měření I*. SPN Praha, 1983.
- [2] A. Kučírková, K. Navrátil: *Fyzikální měření I*. SPN Praha, 1986.
- [3] P. Malý: *Optika*, Karolinum, Praha, 2008.