Statistická fyzika – -domácí úkol #09

Info

1. Ve čtvrtek v 10:00 konzultace přes Skype z učebny F4, kde budu na tabuli počítat příklady. V případě zájmu můžeme takové konzultace pořádat každý týden. **Později může dojít ke změně termínu v závislosti na tom, jak se budou uvolňovat karanténní opatření!**
2. **Příklad – kritické parametry Boseho-Einsteinovy kondenzace**
   Uvažme ideální plyn složený z N Bosonů, každý o hmotnosti m a nulovým spinem v objemu V a teplotě T nad bodem kondenzace.
   (a) Jaký je ktitický objem, pod kterým nastane B-E kondenzace?
   (b) Jaká je odpověd na předchozí otázku pro případ 2D?

   Řešení:

   (a) Počet částic dN v elementu fázového prostoru je dána

   $$\mathrm{d}N = g\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1}, \tag{1}$$

   kde $g = 2S+1$. S disperzní závislostí pro ideální plyn $\varepsilon = p^2/(2m)$ a integraci přes dq nalezneme rozdělení částic podle energie

   $$N = g\frac{Vm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1}, \tag{2}$$

   po substituci $x = \varepsilon/(k_\mathrm{B}T)$ dostaneme

   $$\frac{N}{V} = g\frac{(mk_\mathrm{B}T)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{x}}{\exp\left(x-\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1}. \tag{3}$$

   Toto je parametrické vyjádřen počtu částic s parametrem μ. Zmenšení objemu (nebo teploty) zvětší hodnotu integrálu, a tedy i μ (které je v případě Boseho statistiky vždy negativní). Kritick parametry T_c a V_c odpovídají bodu, kde $\mu = 0$ (při dalším snižování V nebo T by se μ mělo dále zvyšovat, aby splňovalo řešení (3), ale nemůže nabývat kladných hodnot). Můžeme tedy zapsat určitou teplotu

   $$\frac{N}{V_\mathrm{c}} = g\frac{(mk_\mathrm{B}T)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\,\frac{\sqrt{x}}{\exp\left(x-\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1} \approx \frac{(mk_\mathrm{B}T)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}, \tag{4}$$

   potom

   $$V_\mathrm{c} \approx \frac{N\hbar^3}{(mk_\mathrm{B}T)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

   (b) Pro 2D integrál přejde na

   $$N \approx T\int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{1}{\exp\left(x-\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T}\right)}, \tag{6}$$

   a tedy k Boseho kondenzaci nedochází.
3. **Otázky ohledně B-E kondenzace**… proč ve 2-D nedochází k B-E kondenzaci? Podíváte-li se na rovnici 3 a vyjádříte z ní kritický objem, zjistíte, že ve 2-D integrál diverguje, tj. B-E kondenzace nastává pro objem $V < V_\mathrm{c} = 0$, což není z fyzikálního hlediska možné.

Příklady

1. **Plyn s elektron-pozitronovými páry**
   Při teplotách $k_B T \approx m_e c^2$ dochází k tvorbě párů elektron-pozitron. Najděte rovnovážný počet e^- a e^+.
2. **Počet částic bosonového plynu**
   Ze vztahu
   $$\Omega = -k_B T \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}} B_{\frac{5}{2}} \left(\frac{\mu}{k_B T} \right), \tag{7}$$
   platného pro nerelativistický ideální bosonový plyn spočtěte počet částic N.
3. **Rovnice adiabaty**
   Nalezněte rovnici adiabaty pro ideální fotonový plyn v proměnných p a V.
4. **Degenerace fermionového plynu**
   Přepište podmínku degenerace fermionového plynu $k_B T \ll \varepsilon_F$ jako vztah mezi vlnovou délkou de Broglieho vlny tepelného pohybu a Fermiho vlnové délky.

Domácí úkol

1. **Zkrocení zlé limity**
   Spočítejte limitu v závislosti na parametrech a a b:
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\exp\left(\frac{a-b}{x}\right) + 1}. \tag{8}$$
2. **Bose-Einsteinova kondenzace**
   Uvažte Boseho kondenzaci pro libovolnou disperzní relaci v D dimenzích. Předpokládejte $\varepsilon \propto |p^\sigma|$. Najděte závislost mezi D a σ, aby došlo k B-E kondenzaci.