Statistická fyzika – -domácí úkol #06

Info

1. **Úprava podmínek k zápočtu**
   Vzhledem k tomu, že bezkontaktní výuka byla prodloužena do 15.5., bude k získání zápočtu nutné pouze mít uznané všechny domácí úkoly. Domácí úkoly odevzdávejte prosím včas, jinak budu zadávat příklady k výpočtu navíc. Aktuální termíny odevzdávání (termín třetího je prodloužen):

n	Termín odevzdání
03	29.03.
04	02.04.
05	10.04.
06	16.04.

2. **Drobná oprava v DÚ # 04**
   energie $E(n) = nh\nu$ pro $n \in \{1, 2, \dots\}$.
3. **Možné konzultace online**
   pokud budete chtít, můžeme zařídit konzultace online, viz mail. Můžeme uspořádat session jako Klaus, viz `https://www.youtube.com/watch?v=nh7_dRWH_rc&feature=youtu.be`. Napište mi prosím, který způsob preferujete.

Příklady

1. **Tepelná kapacita plynu I**
   Uvažme plyn s dvouatomovými molekulami. Spočítejte tepelnou kapacitu daného plynu připadající na jednu molekulu. Počítejte pouze s vibračním pohybem molekul, kdy je energie dána vztahem
   $$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$
   Spočítejte nejprve statistickou sumu, ze které určíte volnou energii a z volné energie již lze určit hledanou tepelnou kapacitu. Výslednou tepelnou kapacitu můžete napsat v aproximaci nízkých a vysokých teplot.
2. **Tepelná kapacita plynu II**
   Uvažme plyn s dvouatomovými molekulami. Spočítejte molární tepelnou kapacitu daného plynu. Počítejte pouze s rotačním pohybem molekul, kdy je energie dána vztahem
   $$E_{j,m} = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I}, \tag{2}$$
   kde I je moment setrvačnosti molekuly. Jelikož nelze statistickou sumu spočítat analyticky, vyjádřete ji v aproximaci vysokých a nízkých teplot.
3. **Ověření jednotek**
   Ukažte, že tlak a hustota energie mají stejnou jednotku.
4. **Relativistické částice**
   Spočtěte hustotu stavů pro relativistické částice a najděte limitní vztahy pro klasické a ultra relativistické částice.

Domácí úkol

1. **Energie molekulového plynu**
   Když dvouatomová molekula vibruje, její moment hybnosti závisí na malém příspěvku jejího vibračního stavu. Důsledkem je, že rotační a vibrační pohyb nejsou kompletně nezávislé. Za vhodných podmínek může být energiové rotačně-vibrační spektrum aproximováno ve tvaru

$$E_{n,l} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1) + \alpha l(l+1)\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{3}$$

   kde první dva členy odpovídají vibračnímu a rotačnímu pohybu a poslední člen je malá korekce vycházející ze závislosti vibrací a rotací. Jednotlivé molekulární konstanty splňují nerovnost

$$\hbar\omega \gg \frac{\hbar^2}{2I} \gg \alpha. \tag{4}$$

   Spočítejte energii ideálního plynu z dvouatomových molekul, jehož teplota leží v intervalu

$$\hbar\omega \gg T \gg \frac{\hbar^2}{2I}. \tag{5}$$

2. **Hustota stavů**
   Spočtěte hustotu stavů $\rho(E)$ pro volnou nerelativistickou částici o hmotnosti m v jednorozměrném případě.

3. (NUM) **Platí skutečně Maxwell-Boltzman pro ideální plyn?**
   Pomocí generátoru náhodných čísel ověřte platnost Maxwellova-Boltzmannova rozdělení pro velikost rychlosti částic ideálního plynu. Spočtěte pro $N = 10^3$, 10^6 částic. Počítejte pro rychlosti vztažené relativně k $\sqrt{2kT/m}$.
   Návod: Předpokládejte, že máte funkci, která generuje náhodná čísla v intervalu $x \in [0,1]$ s rovnoměrným rozdělením. Jakou transformaci musíte provést, abyste získali náhodnou proměnnou y v intervalu $y \in [-1,1]$? Prostřednictvím počítačového experimentu a histogramu ověřte, že funkce $\mathrm{erf}^{-1}(y)$, kde erf^{-1} je inverzní funkce k chybové funkci

$$\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t,$$

   dává Gaussovo rozdělení náhodné proměnné. Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení pro velikost rychlosti částic získáte prostřednictvím kombinace tří náhodných proměnných s Gaussovým rozdělením.