Statistická fyzika – domácí úkol #02

1. **Vyjádření entropie pomocí statistické sumy**
   Dokažte, že entropii lze vyjádřit ve tvaru

$$S = \frac{\langle E \rangle}{T} + k_\mathrm{B} \ln(Z) = k_\mathrm{B} T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V + k_\mathrm{B} \ln(Z). \tag{1}$$

2. **Tepelná kapacita**
   Ověřte přímým výpočtem, že tepelnou kapacitu lze spočítat vzorcem

$$c_V = \frac{1}{k_\mathrm{B} T^2} \langle \Delta E \rangle^2 , \tag{2}$$

   pro jednoatomový ideální plyn.

3. (NUM) **Objem n-dimenzionální sféry pomocí Monte Carlo**
   Pro dimenze $n \in \{1, 2, \ldots 10\}$ zkuste numericky ověřit platnost vzorce

$$\mathrm{Vol}\left(B^d\right) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)}. \tag{3}$$

   Postup: Pokud jste již měli zapsané nějaké numerické metody, pravděpodobně jste tam počítali číslo π. Ve 2D je postup následující: pomocí generátoru náhodných čísel vygenerujete dvě čísla: $\mathbf{r} \in [0, 1] \times [0, 1]$, následně otestujete, zda se nachází ve čtvrtkruhu o poloměru jedna, tj. $\|\mathbf{r}\| \leq 1$. Poměr počtu bodů, které se nachází v kruhu a celkového počtu vygenerovaných bodů by měl být roven:

$$\frac{1}{4} \mathrm{Vol}\left(B^2\right).$$

   Tento postup použijte obecně pro d dimenzí:

   - Nejprve vygenerujte d náhodných čísel, resp. vektor o dimenzi d:

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_d),\ x_i \in [0, 1],\ i \in \{1, 2, \ldots, d\}.$$

   - Následně otestujte, zda leží uvnitř jednotkové sféry:

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2} \leq 1,$$

     počet bodů ve sféře označme $n_\circ$, celkový počet N_tot.
   - Tento postup proveďte pro co největší počet bodů, např. padesát milionů.
   - Hledaný objem potom bude

$$\mathrm{Vol}\left(B^d\right) = 2^d \frac{n_\circ}{N_\mathrm{tot}}. \tag{4}$$

   Zdrojový kód může být napsán ve Fortranu, příp. C++, Pythonu, Matlabu (Octave), apod. Zdroják mi následně pošlete mailem.