Statistická fyzika – -domácí úkol #12

Info

1. Ve čtvrtek v **17:00** konzultace přes Skype z učebny F4, kde budu na tabuli počítat příklady.
2. **Konzultace**
   nyní je možné organizovat konzultace max. pro pět lidí přímo na univerzitě, tak pokud bude zájem, můžeme nějaké domluvit.

Příklady

1. **Bílý trpaslík**
   Uvažujte hvězdu složenou z elektronově degenerované látky.
   (a) Je-li N počet nukleonů, jaký je počet elektronů? (hvězda je složena z ^{12}C a ^{16}O.
   (b) Spočtěte energii připadající na jeden elektron za předpokladu, že plyn je
      i. relativistický,
      ii. nerelativistický.
   (c) Spočtěte energii připadající na jeden nukleon.
   (d) Najděte minimum energie jako funkce poloměru hvězdy, ukažte, že v extrémně relativistickém případě nastane minimum pro $R \to 0$.
   (e) Nalezněte limitní hmostnost pro extrémně relativistický případ, pro kterou je celková energie nulová.
2. **Hlednání rovnice pro chemický potenciál** Najděte rovnici pro chemický potenciál v případě látky v symetrickém gravitačním poli. Předpokládejte, že
   $$\mu + ku\varphi = \mu' + mc^2 + ku\varphi = \text{konst.},$$
   kde k je počet nukleonů na jeden elektron a u je hmotnost nukleonu. Rovnici zdůvodněte. Zanedbejte vliv tlaku nedegenerované látky a hmotnosti elektronů.
3. **Rovnice pro chemický potenciál v integrálním tvaru**
   Zintegrujte rovnici pro chemický potenciál za předpokladu, že
   $$\left.\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0,$$
   kde R je poloměr hvězdy. Výsledek vyjádřete pomocí celkové hmotnosti hvězdy.
4. **Přeškálování rovnice pro chemický potenciál**
   Přepište rovnici pro chemický potenciál do bezrozměrných proměnných
   $$\xi = \frac{r}{R}, \mu(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}R} f(\xi),$$
   kde
   $$\lambda = \frac{4}{3}\frac{k^2}{\pi}\frac{6u^2}{(\hbar c)^3},$$
   a určete okrajové podmínky.

Domácí úkol

1. **Matice hustoty harmonického oscilátoru**
   Spočítejte matici hustoty harmonického oscilátoru v
   (a) energiové
   (b) souřadnicové

reprezentaci. V případě souřadnicové reprezentace stačí jen napsat základní vzorec pro přechod od energiové k souřadnicové reprezentaci a následně vyjádřit příslušné prvky rovnice. Do následujících výpočtů (od součtu sumy dál) se mohou pustit ti odvážnější.
Nápověda: Vlastní funkce v souřadnicové reprezentaci je dána:

$$\Psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}, \tag{1}$$

kde $x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$ a vlastní hodnoty energie $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Použijte integrální reprezentaci

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \exp\left(-x^2\right) = \frac{\exp\left(x^2\right)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\,(-2iu)^n \exp\left\{-u^2+2ixu\right\}. \tag{2}$$

2. **Ze života funkce F**

   (a) Vytvořte funkci, která numericky spočte integrál

   $$F_{3/2}(y) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x-y}+1}\,\mathrm{d}x.$$

   Spočtěte $F_{3/2}(0)$.

   (b) Pomocí vhodné numerické metody nalezněte $\tilde{\mu}_x$, které splňuje

   $$F_{3/2}(\tilde{\mu}_x) = x \equiv \frac{N\lambda_T^3}{gV}$$

   pro zadané x. Spočtěte $\tilde{\mu}_{80}$, $\tilde{\mu}_{10}$ a $\tilde{\mu}_{0.1}$.

   (c) Nakreslete graf funkce

   $$N(\varepsilon, \tilde{\mu}_x) = \frac{1}{e^{\varepsilon-\tilde{\mu}_x}+1}$$

   pro nalezené hodnoty $\tilde{\mu}_{100}$, $\tilde{\mu}_1$ a $\tilde{\mu}_{0.01}$. Diskutujte.