Plšek

4. Domácí úkol

1) Kvantované pole záření – fotonový plyn se spektrem $E(n) = nh\nu$, $n = 0, 1, 2, \dots$

– za předpokladu Boltzmannova rozdělení určete pro teplotu T:

a) partiční fce

$$\sum_{n=0} e^{-\frac{nh\nu}{kT}} = 1 + e^{-\frac{h\nu}{kT}} + e^{-\frac{2h\nu}{kT}} \dots$$

$$x = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \Rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \; x<1$$

pro 1 foton $Z = \sum_n e^{-\frac{nh\nu}{kT}}$

$$\Rightarrow \sum e^{-\frac{nh\nu}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

pro N fotonů $$Z_N = \prod_i^N Z_i = \prod_i^N \left(\sum e^{-\frac{nh\nu}{kT}}\right) = \prod_i^N \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu_i}{kT}}}$$

b) entropii $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln\left(\prod_i^N \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu_i}{kT}}}\right) = \left| \ln \prod_i^N = \sum_i^N \ln \right| = -\sum_i^N kT \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu_i}{kT}}}$$

$$= \sum_i^N kT \ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu_i}{kT}}\right) = \left| \begin{array}{l} \text{viz přednáška} \\ \text{– přejdeme k integraci} \\ \text{přes fázový prostor} \end{array} \right| = -\frac{4}{3c} \sigma T^4 V, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

$$\Rightarrow S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{16}{3c} \sigma T^3 V$$

2) Satelity
- Slunce $L = 3.83 \cdot 10^{26}$ W, AČT
- družice vodivá, AČT, S_1, S

a) nevodivá, rovinná, $S = S_1$

$L_\odot = 4\pi r^2 F$ $\quad F = \frac{L}{4\pi r^2}$, $r = 1\,\text{au} = 1.5 \cdot 10^{11}$ m

$L_{\text{deska, absorbuje}} = L_{\text{deska, vyzáří}}$

$$\frac{L}{4\pi r^2} \cdot S = S \cdot \sigma T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi r^2 \sigma}} = 393.15\ \text{K}$$

b) obecný vztah

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi r^2 \sigma} \frac{S_1}{S}}$$

c) kulový tvar $\quad T_2 = \sqrt[4]{\dfrac{L}{4\pi r^2 \sigma} \cdot \dfrac{\pi R^2_{spotřebič}}{4\pi R^2_{spotřebič}}} = T_1 \sqrt[4]{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{T_1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{278\,K}}$

d) krychle $\quad T_3 = T_1 \sqrt[4]{\dfrac{1}{6}} = \underline{\underline{251\,K}}$

e) válec $d,\ h = 3d$ $\quad T_4 = T_1 \sqrt[4]{\dfrac{3d \cdot d}{\frac{7}{2}\pi d^2}}$

$S_{válec} = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
$= \frac{1}{4}\pi d^2 + \pi d h$
$= \frac{1}{4}\pi d^2 + 3\pi d^2$
$= \frac{14}{4}\pi d^2 = \frac{7}{2}\pi d^2$

$T_4 = T_1 \sqrt[4]{\dfrac{6}{7\pi}}$

$\underline{\underline{T_4 = 284\,K}}$

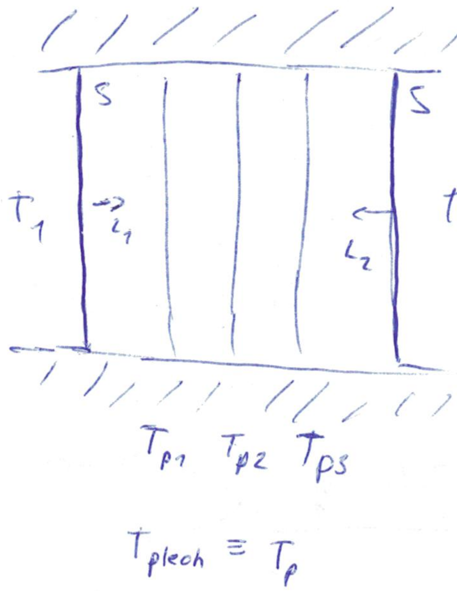
3) Tepelná izolace – dva ACT povrchy $S = 2\,m^2$, $t_1 = 20\,°C$, $t_2 = 120\,°C$

a) Q_0 za $\tau = 60\,s$

$L_1 = S \cdot \sigma T_1^4$ $\quad T_1 = 293{,}15\,K$
$L_2 = S \cdot \sigma T_2^4$ $\quad T_2 = 393{,}15\,K$

$Q = E = L \cdot t$

$Q_{2\to1} = L_2 \cdot t = S\sigma T_2^4 \doteq \underline{\underline{162{,}5\,kJ}}$



b) se třema deskama

plech se zahřeje na nějakou teplotu a na obě strany vyzáří polovinu výkonu co přijme

$T_{plech} \equiv T_p$

$L_{1\to p_1} = L_1$
$L_{p_1\to p_2} = \frac{1}{2} L_1$
$L_{p_2\to p_3} = \frac{1}{4} L_1$
$L_{p_2\to 2} = \frac{1}{8} L_1$

$L_{1\to2} = \frac{1}{8} L_1$
$L_{2\to1} = \frac{1}{8} L_2$

$\Delta Q = \frac{1}{8}(L_2 - L_1) \cdot t = \frac{1}{8} S\sigma (T_2^4 - T_1^4) \cdot t \doteq \underline{\underline{14\,kJ}}$

$Q_{p_1} = (L_1 + \frac{1}{4}L_2) \cdot t \Rightarrow L_1 + \frac{1}{4}L_2 = 2 \cdot S\sigma T_{p_1}^4$

c) teploty plechů

$T_{p_1} = \sqrt[4]{\dfrac{L_1 + \frac{1}{4}L_2}{2S\sigma}} = \sqrt[4]{\dfrac{S\sigma T_1^4 + \frac{1}{4}S\sigma T_2^4}{2S\sigma}} = \underline{\underline{285\,K}}$ $\quad T_{p_2} = \sqrt[4]{\dfrac{\frac{1}{2}T_1^4 + \frac{1}{2}T_2^4}{2}} = \underline{\underline{297\,K}}$

$T = \sqrt[4]{\frac{1}{4}T_1^2 + T_2^2} = 33?\,K$