Protože předpokládáme v tunelu vakuum, nikde tedy nedochází ke ztrátám energie, můžeme tedy použít zákon zachování energie. Aby se objekt dostal z dosahu působení gravitačních sil Země (teoreticky do nekonečné vzdálenosti), je potřeba vykonat dodat práci na překonání gravitačních sil (přitažlivé interakce Země-objekt). Aproximujeme-li objekty za homogenní koule, pak velikost gravitační síly mezi dvěma objekty závisí mj. na vzdálenosti jejich středů, proto je třeba použít integrál. Dodaná práce musí být rovna kinetické energii objektu v místě na povrchu Země, tedy od středu Země ve vzdálenosti rovné poloměru Země. Odsud lze odvodit druhou kosmickou rychlost.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= \int_{R_Z}^{\infty} F(r)\,\mathrm{dr} \\
&= \int_{R_Z}^{\infty} \varkappa \frac{mM}{r^2}\,\mathrm{dr} \\
&= \varkappa mM \int_{R_Z}^{\infty} \frac{\mathrm{dr}}{r^2} \\
&= \varkappa mM \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_Z}^{\infty} \\
&= \frac{\varkappa mM}{R_Z} \\
v &= \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R_Z}} \approx 11{,}2\ \mathrm{km/s}
\end{aligned}$$

Pokud necháme z klidu objekt padat volným pádem směrem ke středu Země, potenciální energie objektu na povrchu Země (a nulová kinetická energie) se přemění na kinetickou energii objektu ve středu Země (a nulová potenciální energie). Pokud bychom v průběhu průletu tunelem po celou dobu nezapnuli motory, objekt by proletěl celý tunelem a zastavil by se na povrchu Země na její opačné polokouli.

My ale motory zapneme, když objekt prochází středem Země. Pomocí motorů musíme urychlit objekt na takovou rychlost, aby byl schopen opustit Zemi, rychlost objektu na povrchu Země musí být opět druhá kosmická rychlost (za předpokladu, že na povrchu z nějakého důvodu vypneme motory). Pokud dodáváme systému energii pomocí motorů, pak samozřejmě neplatí zákon zachování energie, záleží na hmotnosti objektu a výkonu motorů. Rychlost odletu od povrchu Země může být tedy libovolně malá.

Moc nerozumím zadání, ale předpokládejme, že se autoři příkladu ptají na rozdíl dvou rychlostí, a to druhé kosmické rychlosti a rychlosti, kterou získá objekt volným pádem z povrchu do středu Země. Můžeme opět využít zákon zachování energie: Položme nulovou hladinu potenciální energie do středu Země. Potom kinetická energie ve středu Země (kde je potenciální energie nulová) je právě rovna potenciální energii na povrchu Země (kde je kinetická energie nulová). Pak platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_{0}^{R_Z} F(r)\,\mathrm{dr}$$

Problém se zjednodušuje na nalezení velikosti gravitační síly v závislosti na vzdálenosti od středu Země. Tento problém je popsán v příkladu 14.5 v literatuře *„HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika. 1. vyd. Brno, Praha: Vutium, Prometheus, 2001. ISBN 80-214-1868-0.“* na straně 363.

Převezmeme-li výsledný tvar pro sílu, za hustotu Země dosadíme pomocí veličin M a R_Z, dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= \int_0^{R_Z} \frac{4}{3}\pi\varkappa m\varrho r\,\mathrm{dr} \\
&= \frac{\varkappa mM}{R_Z^3}\int_0^{R_Z} r\,\mathrm{dr} \\
&= \frac{\varkappa mM}{R_Z^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{R_Z} \\
&= \frac{\varkappa mM}{2R_Z} \\
v &= \sqrt{\frac{\varkappa M}{R_Z}} \approx 5{,}6\ \mathrm{km/s}
\end{aligned}$$

což je polovina kosmické rychlosti.