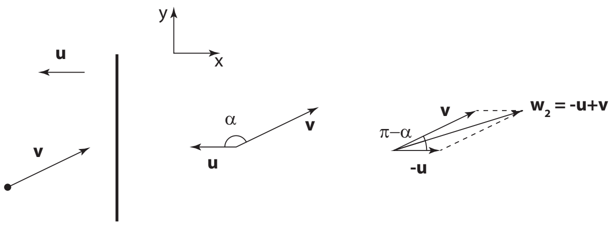
Protože tyč se pohybuje rovnoměrně přímočaře (soustava spojená s pozorovatelem, označme soustava 1), můžeme zvolit inerciální vztažnou soustavu spojenou s tyčí (označme soustava 2). Vůči ní je tyč v klidu jak před srážkou, tak po srážce, neboť uvažujeme, že tyč je řádově těžší než kulička. Srážkou se tedy zanedbatelně změní rychlost (potažmo hybnost) tyče. Kulička se v soustavě 1 pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$, pro převod ze soustavy 1 do soustavy 2 je potřeba odečíst rychlost $\boldsymbol{u}$. Kulička se tedy v soustavě 2 pohybuje vektorovým součtem rychlostí $-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. Tuto výslednou rychlost (v soustavě 2) označme jako $\boldsymbol{w_2}$.




Použije-li se soustava xy jako na obrázku, pak vektory mají složky

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (-u, 0) \\
\boldsymbol{v} &= (v\cos(\pi-\alpha), v\sin(\pi-\alpha)) = (-v\cos\alpha, v\sin\alpha) \\
\boldsymbol{w_2} &= -\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u - v\cos\alpha, v\sin\alpha)
\end{aligned}
$$

Nyní jsme v soustavě 2, v soustavě spojené s tyčí. Odrazem kuličky od tyče se pouze změní znaménko x-ové složky, kulička místo rychlosti $\boldsymbol{w_2}$ bude mít rychlost $\boldsymbol{w_2'}$ (značení s čárkou znamená po srážce).

$$\boldsymbol{w_2'} = (-u + v\cos\alpha, v\sin\alpha)$$

což je rychlost kuličky v soustavě 2. My však chceme rychlost kuličky v soustavě 1. Při převodu ze soustavy 1 do soustavy 2 bylo potřeba odečíst rychlost $\boldsymbol{u}$, proto při převodu ze soustavy 2 do soustavy 1 je potřeba přičíst rychlost $\boldsymbol{u}$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w_1'} &= \boldsymbol{w_2'} + \boldsymbol{u} \\
&= (-u + v\cos\alpha, v\sin\alpha) + (-u, 0) \\
&= (-2u + v\cos\alpha, v\sin\alpha)
\end{aligned}
$$

Velikost rychlosti získáme pomocí Pythagorové věty.

$$
\begin{aligned}
w_1' &= \sqrt{(-2u + v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2} \\
&= \sqrt{4u^2 + v^2\cos^2\alpha - 4uv\cos\alpha + v^2\sin^2\alpha} \\
&= \sqrt{4u^2 + v^2 - 4uv\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

Ve speciálním případě nepohybující se tyče ($u = 0$) získáme očekávaný výsledek $w_1' = v$.

Postup s použitím kosinové věty je složitější zejména v momentu odrazu od tyče.

Dodatek – odvození $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$$
\begin{aligned}
e^{i(\phi+\psi)} &= \cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi) \\
&= e^{i\phi}e^{i\psi} \\
&= (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\
&= \cos\phi\cos\psi + i\sin\phi\cos\psi + i\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\sin\psi
\end{aligned}
$$

Porovnají se reálné a imaginární části, z čehož se získá

$$\sin(\phi + \psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$$
$$\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi$$

Za využití posledních dvou výše získaných vztahů dostaneme

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos(-\alpha) + \sin\pi\sin(-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos(-\alpha) + \cos\pi\sin(-\alpha) = \sin\alpha$$

protože $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ze sudosti funkce cosinus, zatímco $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ z lichosti funkce sinus.