

Úloha: Hmotnost černé díry v centru Galaxie

Jméno: Tomáš Plšek, 461281

Datum odevzdání: 3.5.2017 . .

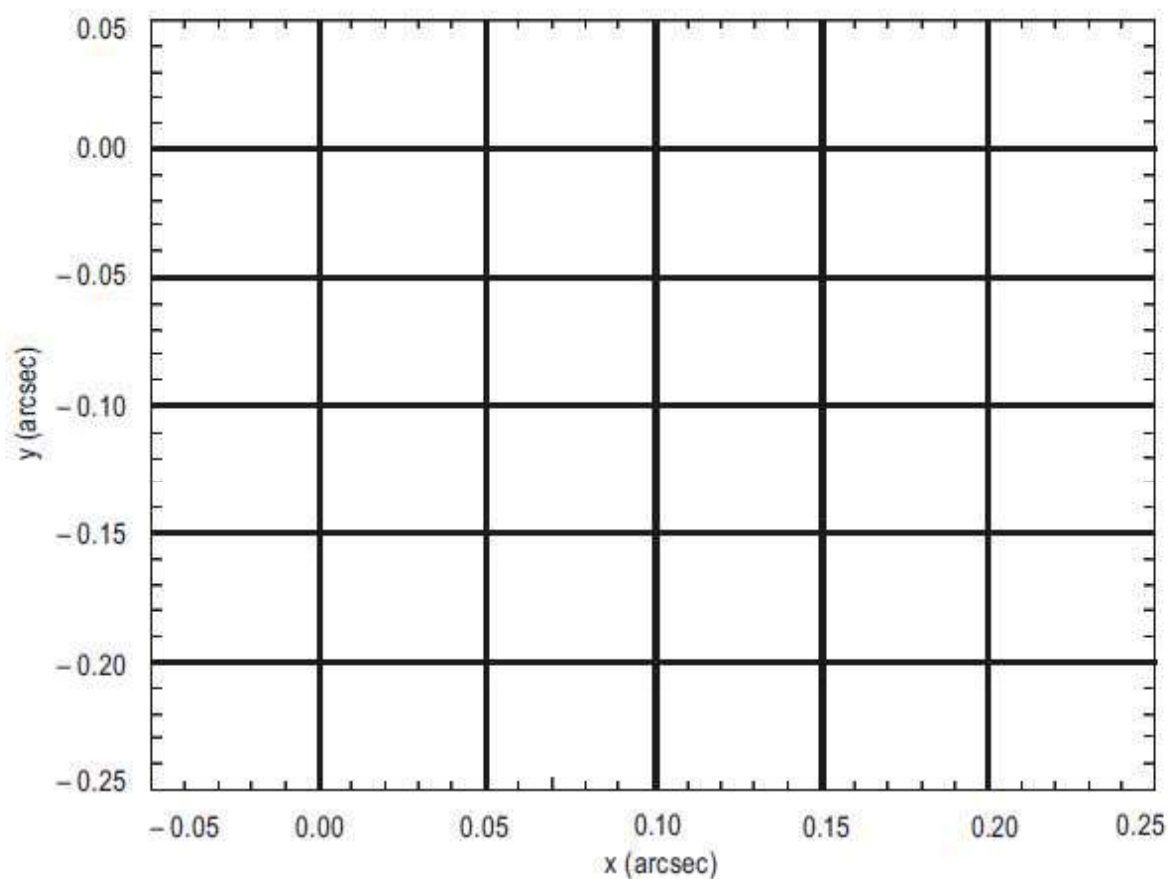
Shrnutí úkolů:

1. Zakreslete do grafu na obrázku 5 polohy hvězdy *S2* z tabulky 26 včetně nejistot jejich určení. Nejistoty v obou osách vyznačte jako příslušně dlouhé úsečky. Úlohu můžete opět řešit na počítači, jen nezapomeňte při tvorbě grafu na jemnou souřadnou síť, budete ji ještě potřebovat. Můžete využít i milimetrový papír.

Tabulka 26: Přepočtené souřadnice hvězdy *S2*. Předpokládaná černá díra má souřadnice (0.0, 0.0).

Měření	Datum [rok]	x ["]	dx ["]	y ["]	dy ["]
1	1992.226	0.104	0.003	-0.166	0.004
2	1994.321	0.097	0.003	-0.189	0.004
3	1995.531	0.087	0.002	-0.192	0.003
4	1996.256	0.075	0.007	-0.197	0.010
5	1996.428	0.077	0.002	-0.193	0.003
6	1997.543	0.052	0.004	-0.183	0.006
7	1998.365	0.036	0.001	-0.167	0.002
8	1999.465	0.022	0.004	-0.156	0.006
9	2000.474	-0.000	0.002	-0.103	0.003
10	2000.523	-0.013	0.003	-0.113	0.004
11	2001.502	-0.026	0.002	-0.068	0.003
12	2002.252	-0.013	0.005	0.003	0.007
13	2002.334	-0.007	0.003	0.016	0.004
14	2002.408	0.009	0.003	0.023	0.005
15	2002.575	0.032	0.002	0.016	0.003
16	2002.650	0.037	0.002	0.009	0.003
17	2003.214	0.072	0.001	-0.024	0.002
18	2003.353	0.077	0.002	-0.030	0.002
19	2003.454	0.081	0.002	-0.036	0.002

2. Do grafu zakreslete elipsu, která nejlépe odpovídá napozorovaným polohám hvězdy *S2*. Uvědomte si, že elipsa nemusí nutně procházet přímo všemi naměřenými body. Každý bod je přece určen s nějakou nejistotou.
3. Změřte poloosy vykreslené elipsy v úhlových vteřinách a přepočítejte naměřené hodnoty na délku vyjádřenou ve světelných dnech, jestliže víme, že v tomto případě 2" odpovídají 82 světelným dnům. Odhadněte nepřesnost vašeho určení délky poloosy zakreslené elipsy diskutujte. Všechny zjištěné hodnoty запиšte do tabulky 27.



Obr. 5: Graf pro vykreslení poloh hvězdy $S2$.

Tabulka 27: Velikost poloos oběžné trajektorie hvězdy $S2$.

Poloosa	Délka		Nejistota určení	
	["]	[světelné dny]	["]	[světelné dny]
hlavní	0,127	5,21	0,004	0,159
vedlejší	0,055	2,26	0,003	0,121

4. Vypočtete plochu elipsy oběžné trajektorie $S_{el} = 0,0219''^2 = 36,89 \text{ Id}^2$
5. Určete periodu oběhu P hvězdy $S2$ s využitím vztahu 15. Využít můžete dvou přístupů:

a) použití kartonu a přesných vah

Elipsu vykreslenou na obrázku 5 si zkopírujte, nejlépe na tuhý papír, karton a vystříhněte. Vystřiženou elipsu zvažte na váhách s přesností 0,01 gramu. Zvážená hmotnost odpovídá ploše S_{el} . Nyní vystříhněte část, která dle měření v tabulce 26 nebyla opsána průvodičem, a opět ji zvažte. Dostane hodnotu pro plochu ΔS . Skutečné plochy bychom samozřejmě dostali jednoduchým přepočtem, ale protože potřebujete jen poměr ploch, není taková konverze zapotřebí. Přesnost metody zvýšíte, když elipsu nalepíte na nějaký karton, ale pozor, aby bylo lepidlo rozprostřeno rovnoměrně.

Hmotnost elipsy:, hmotnost segmentu

Časový interval odpovídající zvolenému segmentu:

Nyní ze vztahu 15 spočtete hodnotu periody $P =$

b) počítání čtverečků

Graf na obrázku 5 má naznačenou poměrně jemnou souřadnou síť. Pomocí čtverečků této sítě určete plochu elipsy S_{el} a plochy ΔS pro pět různých časových intervalů Δt . Okamžiky vymezující příslušné segmenty naleznete v tabulce 26. Do tabulky 28 запиšte čísla měření počátečního a konečného bodu zvolené výseče z tabulky 26, odpovídající Δt , vypočtenou plochu ΔS .

Plocha elipsy $S_{el} = \dots 192,3 \dots$ čtverečků.

Pro každou zvolenou dvojici měření spočítejte uvedeným postupem periodu P a запиšte do tabulky 28. Nakonec určete průměrnou hodnotu periody vyplývající z vašich pěti zvolených výsečí a její chybu.

Diskutujte nejistoty určení periody zvolenou metodou. Pokud se rozhodnete využít druhé metody, porovnejte chybu aritmetického průměru s odhadnutou nejistotou určení hodnoty periody na základě všech dosavadních kroků.

Tabulka 28: Vybrané segmenty trajektorie hvězdy S2.

Výseč	Počátek měření	Koncové měření	Δt [roky]	ΔS	Perioda [roky]
1	1992,226	1994,321	2,095	32	12,59
2	1994,321	2001,502	7,181	92	15,01
3	2001,502	2002,334	0,832	10,5	15,24
4	2002,334	2003,454	1,120	13	16,57
5	1992,226	2003,454	11,228	136,3	15,84

Průměrná hodnota periody je 15,1 let s nejistotou aritmetického průměru 0,7 let.

Výsledná nejistota je 8,8 % což odpovídá 1,3 rokům.

Na výsledné nejistotě se podílí mnoho faktorů: nejistoty měření polohy hvězdy v daném čase (chybové úsečky), nejistota fitu elipsy a nejistota měřidla (pravítko) při určování polohy ohniska. Výsledek však nejvíce ovlivní nejistota při určování počtu čtverečků reprezentujících danou výseč elipsy - tato nejistota nelze kvantifikovat => ovlivní tedy pouze výsledek, ale neprojeví se v určení nejistoty.

- Dosažením do třetího Keplerova zákona vypočítejte celkovou hmotnost hvězdy a černé díry $m = m_{BH} + m_S = 6,4 \times 10^6 \text{ kg}$..
- Spočítejte kolik hvězd sluneční hmotnosti ($2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) bychom potřebovali, abychom dostali stejnou hmotnost jako zjištěná hodnota m ?
Počet hvězd $N = 3,21 \times 10^6 \dots$
- Vypočítejte pozorovanou hvězdnou velikost Slunce, pokud bychom jej umístili do vzdálenosti centra naší Galaxie ($D \approx 8.0 \text{ kpc}$), a určete pozorovanou hvězdnou velikost v předchozím kroku zjištěného počtu hvězd.
Pozorovaná hvězdná velikost Slunce ve vzdálenosti D . 19,35 mag.
Pozorovaná hvězdná velikost N hvězd ve vzdálenosti D . 3,08 mag.

Přestože jsme v úvodu úlohy zmínili, že náš výhled směrem ke středu Galaxie je zastíněn množstvím mezihvězdné látky, v našich úvahách a výpočtech se zmínka o extinkci dosud neobjevila. Spočítejte znovu pozorovanou hvězdnou velikost Slunce, pokud bychom jej umístili do vzdálenosti 8.0 kpc, ale tentokrát uvažujte také mezihvězdnou extinkci ve vizuálním oboru $A_V = 30 \text{ mag}$. Vztah pro modul vzdálenosti pak bude mít podobu

$$m - M = 5 \log r - 5 + A. \quad (17)$$

Pozorovaná hvězdná velikost Slunce ve vzdálenosti D s uvažovanou extinkcí **49,34 mag** . . .

Pozorovaná hvězdná velikost N hvězd ve vzdálenosti D s uvažovanou extinkcí **33,08 mag**

9. Spočítejte únikovou rychlost z povrchu Země za různých předpokladů, kdy budeme měnit poloměr i hmotnost Země. Začneme ale s těmi správnými hodnotami, poloměrem $R_Z = 6378$ km a hmotností $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Výsledky запиšte do tabulky 29.

Tabulka 29: Únikové rychlosti z různých těles.

	$R_Z = 6378$ km	$R_Z = 0.5$ cm	$R_Z = 6378$ km
	$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg	$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg	$2200 M_\odot$
Úniková rychlost [km/s]	11,2	4×10⁵	3×10⁵

10. Nakonec spočítejte velikost černé díry vzniklé z vašeho těla. Jinak řečeno, určete poloměr tělesa o vaší hmotnosti, na jehož povrchu by byla úniková rychlost rovna rychlosti světla.

Poloměr černé díry z mého těla **1,067×10⁽⁻²⁵⁾ m**

Porovnejte tento poloměr s typickou velikostí atomu $2 \cdot 10^{-10}$ m. Diskutujte.

Černá díra o stejné hmotnosti, jako má moje tělo, by byla o 15 řádů menší než jsou typické rozměry atomu. Všechny atomy v mém těle by se tedy rozpadli a slily by se do jakési "kvarkové kaše".