Geometrická fáze je nesmysl.

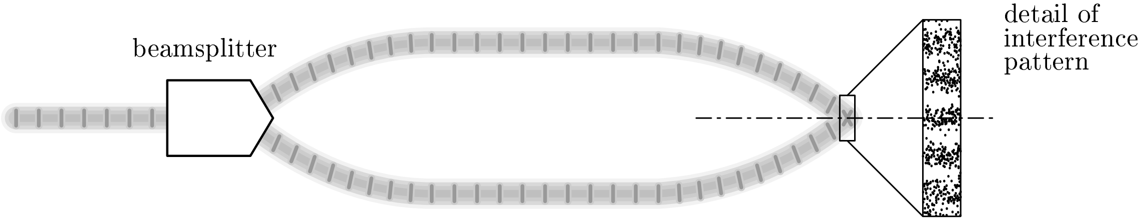
Nebo ne?

- Co se myslí slovy *Geometrická fáze*?
- Vlastnosti GF
- Příklad a názorné vysvětlení
- GF v klasické mechanice

Geometrická fáze je nesmysl. . .

- $|\psi\rangle$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|\psi\rangle$ reprezentují stejný stav. Výsledky jakéhokoliv měření dopadnou stejně pro $|\psi\rangle$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|\psi\rangle$
- Geometrická fáze = změna fáze stavu $\quad |\psi\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|\psi\rangle$

Interference dvou svazků



- Částice mohou být bez vnitřní struktury, ale mohou to být také fermiony, atomy, malé molekuly, velké molekuly, viry. . .
- Vnitřní stupně volnosti musíme zahrnout do popisu.
- Standardní kvantově mechanický popis:
  1. Sestavíme evoluční rovnici pro vlnovou funkci (zahrnující vývoj vnitřních stupňů volnosti).
  2. Vyřešíme ji.
  3. Ukážeme, že pravděpodobnost nalezení částice v určitém místě detektoru získaná z vlnové funkce odpovídá interferenčnímu obrazci.
- Příklad: Pauliho rovnice

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\Phi + \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

Feynmanův dráhový integrál

- $\langle x_2; t_2 | x_1; t_1 \rangle$ označuje amplitudu pravděpodobnosti pro nalezení částice bez vnitřní struktury v bodě $(x_2; t_2)$, byla-li v čase t_1 lokalizována v bodě x_1.
- Pro částice s vnitřní strukturou musíme uvažovat Hilbertův prostor s bazí $|x, \phi; t\rangle$, kde ϕ popisuje vnitřní stupně volnosti.
- Základní Feynmanova myšlenka:

$$\langle x_2; t_2 | x_1; t_1 \rangle \quad \text{je přímo úměrná} \sum_{\text{všechny dráhy}} \exp\left(\frac{\mathrm{i} S_{\text{dráha}}}{\hbar}\right)$$

- Největší příspěvek do amplitudy pravděpodobnosti $\langle x_2; t_2 | x_1; t_1 \rangle$ mají ty dráhy, které jsou "dovoleny" klasickou fyzikou.
- Můžeme aproximovat:

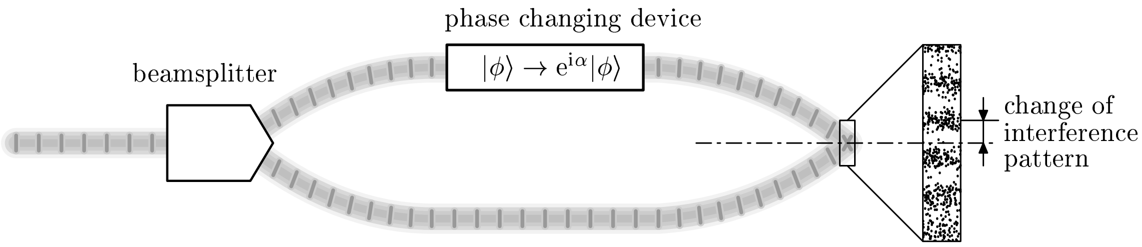
$$\langle x, \phi; t | x_0, \phi_0; t_0 \rangle \approx \sum_{\text{klasické dráhy}} \exp\left(\frac{\mathrm{i} S}{\hbar}\right) \langle \phi | \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{\text{dráha}} H_{\text{dráha}} \mathrm{d}t\right) | \phi_0 \rangle$$

- Prakticky to znamená, že předpokládáme, že rozměry aparatury jsou mnohem větší než vlnová délka částice. Potom se můžeme dívat na částici jako na lokalizovaný objekt s vnitřním stavem $\exp(\mathrm{i}S/\hbar)|\phi\rangle$.
- Interference dvou svazků = dvě možné klasické dráhy. Pokud je vývoj vnitřního stavu částice triviální, pak je pravděpodobnost dopadu částice do detektoru v místě $(x; t)$:

$$|\langle x; t | x_0; t_0 \rangle|^2 = \left| \exp \frac{\mathrm{i} S_1}{\hbar} + \exp \frac{\mathrm{i} S_2}{\hbar} \right|^2 = 4 \cos^2 \left(\frac{S_1 - S_2}{2} \right)$$

Měření změny fáze

- Posouvač fáze = částice vchází ve stavu $|\phi\rangle$ a vychází ve stavu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|\phi\rangle$
- Takovou změnu fáze můžeme měřit v interferenčním experimentu, kde se projeví posunem interferenčního obrazce.



$$|\langle x, t|x_0, t_0\rangle|^2 = \left|\exp\frac{\mathrm{i}(S_1+\alpha)}{\hbar} + \exp\frac{\mathrm{i}S_2}{\hbar}\right|^2 = 4\cos^2\left(\frac{S_1 - S_2 + \alpha}{2}\right)$$

Ponaučení:

- Interferenční experiment **neumožňuje** měřit změnu celkové fáze.
- Za určitých předpokladů je možné o částici uvažovat jako o lokalizovaném systému, jehož vnitřní stav se vyvýjí podle pravidel kvantové mechaniky, zatímco souřadnice a hybnost jsou řízeny klasickou fyzikou. Pravděpodobnost zaregistrování částice v určitém místě detektoru je pak určena součtem amplitud pravděpodobnosti všech nerozlišitelných způsobů, kterými může tato událost nastat. Fáze těchto amplitud závisí na akci (=integrál z Lagrangiánu) pro danou cestu.
- V takovémto případě má smysl uvažovat o celkové fázi vnitřního stavu částice.

Historie GF

- **M. V. Berry** ve svém článku z roku 1984 popisuje změnu fáze systému jehož vývoj je charakterizován pomalu se měnícím hamiltoniánem (využívá *Adiabatický teorém*). Ukazuje některé geometrické aspekty svého objevu a také souvislost s Aharonov-Bohmovým jevem.
- Na Berryho objev reaguje roku v článku z roku 1983 **Barry Simon**, který ukazuje, že . . . *Berry's geometrical phase factor is precisely the holonomy in a Hermitian line bundle, since the adiabatic theorem naturally defines connection in such bundle.*

Obecná konstrukce

- Hamiltonián je závislý na parametrech R_α. Tyto parametry jsou časově závislé a v prostoru parametrů procházejí uzavřenou křivku $\Gamma : (0, T) \to \{R^\alpha\}$.
- Systém se vyvýjí dle Schrödingerovy rovnice

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle = \mathbf{H}(R(t)) |\psi(t)\rangle$$

- Přirozená báze pro řešení takového problému je tvořena okamžitými vlastními stavy Hamiltoniánu $|\mathbf{n}(R(t))\rangle$, které splňují rovnici

$$\mathbf{H}(R)|\mathbf{n}(R)\rangle = E_n(R)|\mathbf{n}(R)\rangle$$

- Předpokládáme, že hamiltonián má diskrétní nedegenerované spektrum.
- Všechny báze, které se od původní liší pouze spojitou změnou fáze

$$|\mathbf{n}(R)\rangle \to \exp(\mathrm{i}\phi_n(R))|\mathbf{n}(R)\rangle$$

jsou stejně dobré, tj. jsou také tvořeny okamžitými vlastními stavy.

Adiabatický teorém

- Adiabatický teorém říká, že: *Pokud se hamiltonián mění dostatečně pomalu a systém je na počátku vývoje v nějakém vlastním stavu hamiltoniánu, pak systém stále zůstává v tomto vlastním stavu.*
- Dostatečně pomalu znamená, že vzdálenost mezi energetickými hladinami je mnohem větší než $\hbar\Omega$, kde Ω je charakteristická frekvence změny parametrů.
- Je-li systém na počátku v n-tém vlastním stavu, pak pro jeho vývoj je rozumné předpokládat následující tvar:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int\limits_0^t E_n(R(t'))\mathrm{d}t'\right)\exp(\mathrm{i}\gamma_n(t))|\mathbf{n}(R(t))\rangle$$

- Dosazením do Schrödingerovy rovnice dostáváme

$$\gamma_n(s) = \mathrm{i}\int\limits_0^s \langle\mathbf{n}(R^\alpha)|\,\frac{\partial}{\partial R^\alpha}|\mathbf{n}(R^\alpha)\rangle\frac{\mathrm{d}R^\alpha}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

- Adiabatický teorém také říká, že pokud vývoj probíhal po uzavřené křivce v prostoru parametrů, pak $|\psi(T)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi(0)\rangle$. Tuto změnu fáze můžeme měřit.
- Definujeme geometrickou fázi uzavřené křivky Γ:

$$\gamma_n(T) = \gamma_n(\Gamma) = \mathrm{i}\int_\Gamma \langle\mathbf{n}|\,\frac{\partial}{\partial R^\alpha}|\mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}R^\alpha.$$

Vlastnosti GF

- GF nezávisí na $\hbar$.
- GF nezávisí na parametrizaci.
- GF nezávisí na fázi báze. Spojitá změna fáze $|\mathbf{n}(R)\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(R)}|\mathbf{n}(R)\rangle$ báze nemá vliv na hodnotu GF křivky:
$$\gamma_n(\Gamma) = \int_\Gamma \langle \mathbf{n}| \frac{\partial}{\partial R^\alpha} |\mathbf{n}\rangle \, \mathrm{d}R^\alpha \qquad \longrightarrow \quad \int_\Gamma \langle \mathbf{n}| \frac{\partial}{\partial R^\alpha} |\mathbf{n}\rangle + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial R^\alpha} \phi(R) \, \mathrm{d}R^\alpha$$
- Hlavní myšlenka: *Adiabatický vývoj kvantového stavu podél uzavřené křivky v prostoru parametrů obsahuje kromě dynamického faktoru $\int E_n \mathrm{d}t$ také geometrický faktor, který nezávisí na parametrizaci křivky ani na volbě fáze okamžité báze.*

Poznámka k symbolice

- Násobení bracketů:

$$\langle m|n\rangle = \overline{m}_\mu n^\mu$$

- Zkrácené značení $|\mathrm{d}n\rangle = \partial_R|n\rangle \mathrm{d}R$:

$$\langle \mathbf{n}|\,\frac{\partial}{\partial R_\alpha}|\mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}R^\alpha = \overline{n}_\mu \frac{\partial n^\mu(R)}{\partial R^\alpha}\,\mathrm{d}R^\alpha \equiv \overline{n}_\mu\,\mathrm{d}n^\mu = \langle n|\mathrm{d}n\rangle$$

- Normalizační podmínka $\langle n|n\rangle = 1$ má za následek že $\langle n|\mathrm{d}n\rangle$ je čistě imaginární.

$$0 = \mathrm{d}\langle n|n\rangle = (\mathrm{d}\overline{n}_\mu)n^\mu + \overline{n}_\mu(\mathrm{d}n^\mu) = \langle n|\mathrm{d}n\rangle^\star + \langle n|\mathrm{d}n\rangle = 2\mathfrak{Re}\langle n|\mathrm{d}n\rangle$$

Stokesova věta

- Stokesova věta říká:
$$\int_{\Gamma=\partial S}\omega=\int_S \mathrm{d}\omega$$
- Pro geometrickou fázi tedy platí
$$\gamma_n(\Gamma)=\int_{S,\Gamma=\partial S}\mathrm{d}\left(\langle n|\mathrm{d}n\rangle\right)=\int_S\langle \mathrm{d}n|\wedge|\mathrm{d}n\rangle+\int_S\underbrace{\langle n|\wedge|\mathrm{dd}n\rangle}_{0}$$
- Je vidět, že pokud má být geometrická fáze nenulová, pak křivka musí uzavírat plochu o nenulovém obsahu.
- Alternativní vyjádření GF:
$$\gamma_n(\Gamma)=\int_{S,\Gamma=\partial S}\sum_{m\neq n}\frac{\langle n|\mathrm{d}H|m\rangle\wedge\langle m|\mathrm{d}H|n\rangle}{(E_n-E_m)^2}$$
- Z tohoto vyjádření je vidět, že do GF budou přispívat především ty stavy, jejichž energie je blízko E_n. Když je energetické spektrum degenerované, tak se dějí zajímavé věci...

Zajímavý problém

- Předpokládali jsme řešení ve tvaru:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int\limits_0^t E_n(R(t'))\mathrm{d}t'\right)\exp(\mathrm{i}\gamma_n(t))|\mathbf{n}(R(t))\rangle$$

- Víme, že pokud hamiltoniány v různých časech komutují, můžeme časový vývoj zapsat jako

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int\limits_0^t E_n(R(t'))\mathrm{d}t'\right)|\mathbf{n}(R(t))\rangle$$

- Zcela obecně lze operátor časového vývoje zapsat jako "Dysonovy řady":

$$\mathbf{U}(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\,\mathbf{H}(t_1)\,\mathbf{H}(t_2)\,\ldots\mathbf{H}(t_n)$$

$$\equiv \mathbf{T}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int\limits_0^t \mathbf{H}(t')\,\mathrm{d}t'\right)$$

- *Bylo by možné vyjádřit GF elegantně pomocí nějakých komutátorů hamiltoniánu v různých časech?*

Příklad

Částice se spinem $\frac{1}{2}$ v rotujícím magnetickém poli

- Magnetické pole

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0 \begin{pmatrix} \sin\theta\cos(\omega t) \\ \sin\theta\sin(\omega t) \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Interakční Hamiltonián je

$$H(t) = \mu\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mu B_0 \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory tohoto Hamiltoniánu odpovídající vlastním hodnotám $\pm\mu B_0$ jsou:

$$|+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad |-(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- Výpočet:

$$\gamma_\pm(s) = \mathrm{i}\int\limits_0^s \langle\pm|\,\frac{\partial}{\partial t}|\pm\rangle \mathrm{d}t$$

$$\langle+|\frac{\partial}{\partial t}|+\rangle = \mathrm{i}\omega\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\langle-|\frac{\partial}{\partial t}|-\rangle = \mathrm{i}\omega\cos^2\frac{\theta}{2}$$

Integrace přes jednu periodu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dává:

$$\gamma_\pm(\Gamma) = \mathrm{i} \int_0^T \langle \pm | \frac{\partial}{\partial t} | \pm \rangle \, \mathrm{d}t = -\pi(1 \mp \cos\theta)$$

- Tento výsledek nezávisí na síle pole ani na periodě rotace magnetického pole.
- Prostor parametrů hamiltoniánu je topologicky S^2. Plocha na jednotkové sféře, která je obkroužena křivkou $\theta(\phi)$ je:

  $$\Omega = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta(\phi)) \, \mathrm{d}\phi$$

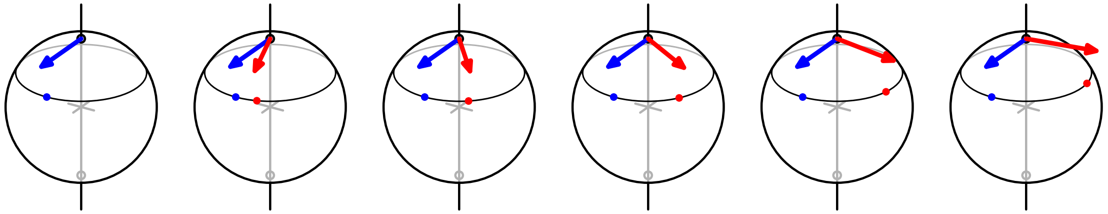
  GF může být vyjádřeno čistě pomocí geometrie prostoru parametrů jako

  $$\gamma_\pm(\Gamma) = \mp \frac{1}{2} \Omega(\Gamma)$$

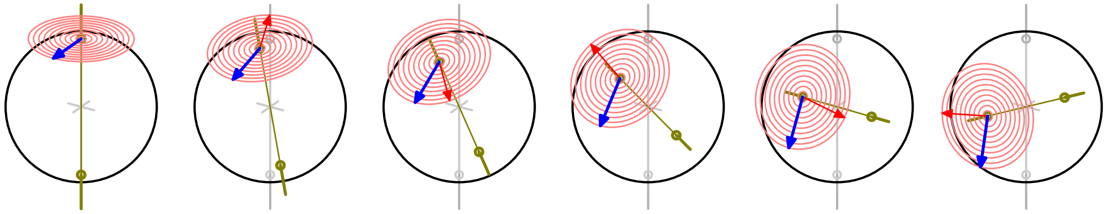
- Míra adiabatičnosti je $\varepsilon = \frac{\hbar\Omega}{2\mu B_0}$. Exaktní řešení se od adiabatického bude lišit v řádu ε pro amplitudu pravděpodobnosti přechodu do jiného stavu.

Názorné vysvětlení

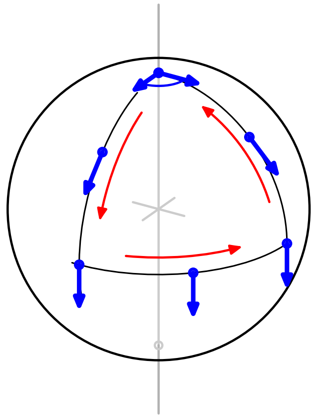
- Vektor spinu částice koná precesi kolem vektoru magnetického pole.



- Když se směr magnetického pole mění, pak se vektor spinu otáčí kolem okamžité osy magnetického pole.



GF v klasické mechanice



Shrnutí

- Fáze kvantového stavu systému, který je součástí nějakého většího systému, je měřitelná veličina.
- Vyvoj kvantového systému v pomalu se měnících vnějších podmínkách obsahuje fázový faktor, který závisí pouze na geometrických vlastnostech křivky kterou sledují vnější parametry.
- Analogii geometrické fáze lze najít také v klasické mechnice.