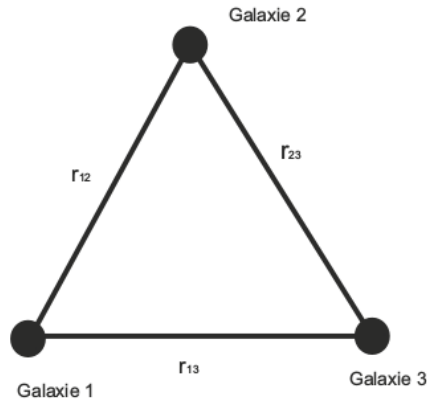


F6550 Stavba a vývoj vesmíru
Zápisky z přednášek

Poslední úprava: 29. října 2014

Kapitola 1

Spektroskopická paralaxa



Obrázek 1.1: Vzdálenost mezi galaxiemi.

Vesmír je homogenní a izotropní, je tedy všude stejný a rozpíná se ve všech směrech stejně. Pro r_{12} , r_{23} a r_{13} platí následující vztah:

$$r_{12} = a(t) \cdot r_{12,0} \quad , \quad (1.1)$$

$$r_{23} = a(t) \cdot r_{23,0} \quad , \quad (1.2)$$

$$r_{13} = a(t) \cdot r_{13,0} \quad , \quad (1.3)$$

kde $a(t)$ je škálovací faktor. Pro rychlosti jednotlivých složek potom platí:

$$v_{12} = \frac{dr_{12}}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \cdot r_{12,0} \quad , \quad (1.4)$$

$$v_{23} = \frac{dr_{23}}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \cdot r_{23,0} \quad , \quad (1.5)$$

$$v_{13} = \frac{dr_{13}}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \cdot r_{13,0} \quad . \quad (1.6)$$

Vztah pro rychlost je možné přepsat do této podoby:

$$v_{12} = \frac{da(t)}{dt} \cdot \frac{r_{12}}{a(t)} = \left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right| \cdot r_{12} . \quad (1.7)$$

Pro zlomek se škálovacím faktorem platí:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} , \quad (1.8)$$

kde H zastupuje Hubbleovu konstantu (67.80 ± 0.77) $\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Vztahy pro rychlosti můžeme přepsat na tento tvar:

$$v_{12} = H \cdot r_{12} , \quad (1.9)$$

$$v_{23} = H \cdot r_{23} , \quad (1.10)$$

$$v_{13} = H \cdot r_{13} . \quad (1.11)$$

Z Hubbleovy konstanty je možné vypočítat stáří vesmíru podle následujícího vztahu:

$$t_H = \frac{r_{12}}{v_{12}} = \frac{r_{12}}{H \cdot r_{12}} = \frac{1}{H} . \quad (1.12)$$

Pomocí t_H můžeme spočítat i dohlednost

$$s_{dohled} = c \cdot t_H , \quad (1.13)$$

kde c je rychlost světla.

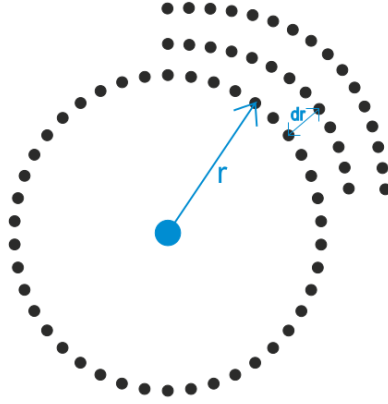
1.1 Olbersův paradox

Olbersův paradox říká, že pokud jsou ve vesmíru hvězdy rozmístěny rovnoměrně a pokud je vesmír nekonečný, tak by měl být konstantní jas oblohy ve dne i v noci.

$$\varrho = ndr , \quad (1.14)$$

kde n je číselná hustota. Zavedeme si rovněž jasnost f , pro kterou platí:

$$f = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot r^2} . \quad (1.15)$$



Obrázek 1.2: Olbersův paradox.

Počet hvězd je definován takto:

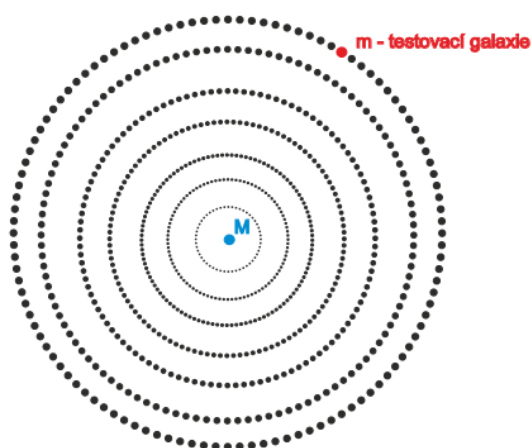
$$P_H = \int (4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot n) dr = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot n , \quad (1.16)$$

tedy jako součin objemu a číselné hustoty. Předpoklad pro nekonečný jas oblohy vyplývá z tohoto vztahu:

$$dJ = P_H \cdot \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \int_0^\infty 4 \cdot \pi \cdot r^2 dr \cdot \frac{L \cdot n}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = L \cdot n \int_0^\infty \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot r^2} dr = \infty . \quad (1.17)$$

Kapitola 2

Fridmanovy rovnice



Obrázek 2.1: Působení naší Galaxie M , na testovací galaxii m .

Vydeme z toho, že platí zákon zachování energie a jedinou interakcí je gravitační interakce, potom platí:

$$U = T + V , \quad (2.1)$$

kde U je celková energie, T je kinetická energie a V je potenciální energie. Nezájímá nás hmota která je mimo obrázek 3.2, protože platí Newton-Shellův teorém - hmota, která je mimo vymezenou oblast se výpočtů netýká.

Budeme vycházet ze známých vztahů pro gravitační potenciální energii a kinetickou energii:

$$V_G = -\frac{m \cdot M \cdot G}{r} , \quad (2.2)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 , \quad (2.3)$$

hmotnost M si můžeme rozepsat pomocí hustoty a objemu:

$$M = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \quad (2.4)$$

a pro vzdálenost r platí tento vztah se škálovacím faktorem:

$$r = a(t) \cdot r_0 \quad (2.5)$$

Vztah 2.1 pro celkovou energii U můžeme nyní rozepsat takto:

$$U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}^2 + \left(-\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot m \cdot G}{3 \cdot r} \right) , \quad (2.6)$$

který můžeme dále upravit:

$$U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{a}_{(t)}^2 \cdot r_0^2 + \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot m \cdot G \right) . \quad (2.7)$$

Rovnice výše vynásobíme výrazem $\frac{2}{m}$ a dostaneme:

$$\frac{2 \cdot U}{m} = \dot{a}_{(t)}^2 \cdot r_0^2 - \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot a_{(t)}^2 \cdot \rho \cdot G , \quad (2.8)$$

opět vztah pro celkovou energii vynásobíme, tentokrát ale tímto vztahem $\frac{1}{a_{(t)}^2 \cdot r_0^2}$:

$$\frac{2 \cdot U}{m \cdot a^2 \cdot r_0^2} = \frac{\dot{a}_{(t)}^2}{a_{(t)}^2} - \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G , \quad (2.9)$$

v tomto vztahu je výraz $\frac{\dot{a}_{(t)}^2}{a_{(t)}^2}$ roven druhé mocnině Hubbleovy konstanty. Tu, když si nyní vyjádříme, dostaneme:

$$H^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G + \frac{2 \cdot U}{m \cdot a^2 \cdot r_0^2} . \quad (2.10)$$

Nyní provedeme menší substituci, popsanou tímto vztahem:

$$k \cdot c^2 = -\frac{2 \cdot U}{m \cdot r_0^2} , \quad (2.11)$$

kde c je rychlost světla a k souvisí s křivostí vesmíru. Nyní si můžeme napsat Fridmanovu rovnici pro vývoj škálovacího faktoru:

$$\left(\frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \right)^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G - \frac{k \cdot c^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} . \quad (2.12)$$

Proměnná Λ souvisí se skrytou hmotou a temnou energií. Získali jsme tak první Fridmanovu rovnici. Pro odhalení další Fridmanovy rovnice využijeme první zákon Termodynamiky:

$$dU = TdS - pdV . \quad (2.13)$$

Vesmír se nám adiabaticky rozpíná, potom nepřitéká žádné teplo ($\delta Q = 0 \Rightarrow \delta Q = TS = 0$), potom platí:

$$dU + pdV = 0 . \quad (2.14)$$

Pro odvození další Fridmanovy rovnice využijeme následující vztahy:

$$dU = m_p \cdot c^2 , \quad (2.15)$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{(t)}^3 . \quad (2.16)$$

Energie je uzavřená v kouli, potom objem počítáme takto:

$$m_p = V \cdot \rho_{(t)} , \quad (2.17)$$

$$r = a \cdot r_0 . \quad (2.18)$$

Do vztahu pro vnitřní energii nyní dosadíme místo hmotnosti objem a hustotu:

$$dU = \underbrace{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{(t)}^3 \cdot \rho}_{m_p} \cdot c^2 , \quad (2.19)$$

$$dU = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a_{(t)}^3 \cdot r_0^3 \cdot \rho_{(t)} \cdot c^2 , \quad (2.20)$$

dále provedeme časovou derivaci objemu:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a_{(t)}^2 \cdot \dot{a}_{(t)} \cdot 3 \cdot r_0^3 \quad (2.21)$$

a stejnou operaci provedeme i pro vnitřní energii, kde za derivaci objemu dosadíme ze vztahu 2.21:

$$\frac{dU}{dt} = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot a_{(t)}^2 \cdot \dot{a}_{(t)} \cdot \rho_{(t)} \cdot c^2 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot a_{(t)}^3 \cdot \dot{\rho}_{(t)} \cdot c^2 . \quad (2.22)$$

Tento vztah nyní dosadíme do první zákona termodynamiky a upravíme pro adiabatické rozpínání:

$$\underbrace{4 \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot a^2 \cdot \dot{a}_{(t)} \cdot \rho \cdot c^2 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot a^3 \cdot \dot{\rho}_{(t)} \cdot c^2}_{dU} + \underbrace{4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \dot{a}_{(t)} \cdot r_0^3 \cdot p}_{pdV} = 0 , \quad (2.23)$$

$$4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot r_0^3 \cdot \left(\dot{a}_{(t)} \cdot \rho \cdot c^2 + \frac{1}{3} \cdot \dot{\rho}_{(t)} \cdot c^2 \cdot a + p \cdot \dot{a}_{(t)} \right) = 0 , \quad (2.24)$$

$$\dot{a}_{(t)} \cdot \rho \cdot c^2 + \frac{1}{3} \cdot \dot{\rho}_{(t)} \cdot c^2 \cdot a + p \cdot \dot{a}_{(t)} = 0 , \quad (2.25)$$

nyní tuto rovnici vynásobíme $\frac{3}{a_{(t)} \cdot c^2}$ a dále upravíme:

$$\dot{\rho}_{(t)} + 3 \cdot \frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \cdot \rho + 3 \cdot \frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \cdot \frac{p}{c^2} . \quad (2.26)$$

Po těchto úpravách můžeme nyní napsat Fridmanovu rovnici pro tekutiny:

$$\dot{\rho}_{(t)} + 3 \cdot \frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 . \quad (2.27)$$

Pro poslední Fridmanovu rovnici je důležité, abychom znali jaká je ve vesmíru hmota. Pokud je tam klasická hmota, tak máme zanedbatelný tlak. Pokud je tam například fotonový plyn, pak už tam nějaký tlak máme.

Nyní se pokusíme obě Fridmanovy rovnice dát dohromady:

$$\left(\frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \right)^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G - \frac{k \cdot c^2}{a_{(t)}^2} , \quad (2.28)$$

$$\dot{\rho}_{(t)} + 3 \cdot \frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 , \quad (2.29)$$

kde první Fridmanovu rovnici zderivujeme podle času a za $\dot{\rho}$ dosadíme výraz z druhé Fridmanovy rovnice.

$$2 \cdot \left(\frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \right) \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \right) - 2 \cdot \left(\frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \right) \cdot \frac{\dot{a}_{(t)}^2}{a_{(t)}^2} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \dot{\rho} \cdot G + \frac{2 \cdot k \cdot c^2}{a} \cdot \frac{1}{a_{(t)}^3} . \quad (2.30)$$

Teď nás bude zajímat, čemu je rovno $\frac{\ddot{a}_{(t)}}{a_{(t)}}$:

$$2 \cdot \left(\frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \right) \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{(t)} \cdot a_{(t)} - \dot{a}_{(t)}}{a^2} \right) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \dot{\rho} + 2 \cdot \frac{k \cdot c^2}{a_{(t)}^2} \cdot \dot{a}_{(t)} , \quad (2.31)$$

za $\dot{\rho}$ dosadíme z druhé Fridmanovy rovnice:

$$2 \cdot \left(\frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \right) \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} - \frac{\dot{a}_{(t)}^2}{a_{(t)}^2} \right) = -8 \cdot \pi \cdot G \cdot \frac{\dot{a}_{(t)}}{a_{(t)}} \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + 2 \cdot \frac{k \cdot c^2}{a_{(t)}^3} \cdot \dot{a}_{(t)} , \quad (2.32)$$

tento výraz nyní vynásobíme $\frac{a}{2 \cdot \dot{a}}$ a získáme :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{k \cdot c^2}{a_{(t)}^2} + \frac{\dot{a}_{(t)}^2}{a_{(t)}^2} . \quad (2.33)$$

Na pravé straně si můžeme všimnout výrazu $\frac{\dot{a}_{(t)}^2}{a_{(t)}^2}$, za který dosadíme z první Fridmanovy rovnice.

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{k \cdot c^2}{a_{(t)}^2} + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G - \frac{k \cdot c^2}{a_{(t)}^2} . \quad (2.34)$$

Výraz $\frac{k \cdot c^2}{a_{(t)}^2}$ můžeme pokrátit a výraz dále upravit:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} - \frac{2}{3} \cdot \rho \right) , \quad (2.35)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\frac{\rho}{3} + \frac{p}{c^2} \right) , \quad (2.36)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\rho + \frac{3 \cdot p}{c^2} \right) . \quad (2.37)$$

Získali jsme tak výraz pro $\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}$ pomocí obou Fridmanových rovnic.

2.1 Decelerační parametr

Rozvedeme si škálovací faktor $a(t)$ pomocí Taylorova rozvoje:

$$a(t) = a_{(t_0)} + \dot{a}_{(t_0)} \cdot (t - t_0) + \frac{\ddot{a}_{(t_0)} \cdot (t - t_0)^2}{2} + \text{ČVŘ} \dots \quad (2.38)$$

za tečkami následují členy vyšších řádů, pro náš výpočet není nutné je uvádět. Celý tento vztah vynásobíme převrácenou hodnotou $a_{(t_0)}$ a dostaneme :

$$\frac{a(t)}{a_{(t_0)}} = 1 + \frac{\dot{a}_{(t_0)}}{a_{(t_0)}} \cdot (t - t_0) + \frac{\ddot{a}_{(t_0)}}{a_{(t_0)}} \cdot (t - t_0)^2 \cdot \frac{1}{2} . \quad (2.39)$$

Nyní si zavedeme decelerační parametr q , který je roven:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_{(t_0)}}{a_{(t_0)}} \cdot \frac{1}{H_0^2} = -\frac{\ddot{a}_{(t_0)}}{a_{(t_0)}} \cdot \left(\frac{a_{(t_0)}}{\dot{a}_{(t_0)}} \right)^2 , \quad (2.40)$$

kde H_0 je Hubbleova konstanta. Decelerační parametr je kladný při akceleraci a záporný při deceleraci. Teď si přepíšeme Taylorův rozvoj škálovacího faktoru pomocí deceleračního parametru a Hubbleovy konstanty:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0 \cdot (t - t_0) - q_0 \cdot \frac{H_0^2}{2} \cdot (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.41)$$

Máme tedy 3 základní Friedmanovy rovnice, rovnici pro škálovací faktor:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G - \frac{k \cdot c^2}{a^2} , \quad (2.42)$$

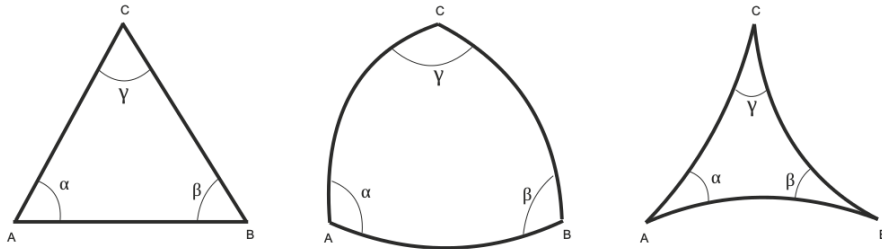
rovnici pro tekutinu:

$$\dot{\rho}(t) + 3 \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (2.43)$$

a stavovou rovnici:

$$p = f(\rho) . \quad (2.44)$$

2.2 Něco málo o trojúhelnících



Obrázek 2.2: Klasický trojúhelník, sférický trojúhelník a hyperbolický trojúhelník.

Součet úhlů v trojúhelníku v Euklidovském prostoru je roven 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (2.45)$$

Pro sférický trojúhelník tento součet však není roven 180° , ale je větší.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \frac{A}{R^2} , \quad (2.46)$$

kde A je povrch trojúhelníku a R je poloměr křivosti (koule). Součet úhlů v posledním trojúhelníku je menší než 180° a platí pro něj vztah:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - \frac{A}{R^2} , \quad (2.47)$$

Kapitola 3

Kritická hustota energie

3.1 Gravitační potenciál

$$\nabla^2 \cdot \phi = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \quad (3.1)$$

Einstein chtěl konstantní vesmír, aby se nerozpínal $\rho = 0$, potom by zrychlení bylo:

$$\vec{a} = -\nabla \cdot \phi \Rightarrow \phi = \text{konst.} \Rightarrow a = 0 \quad (3.2)$$

tato situace je ale nestabilní, zavedeme proto korekci:

$$\nabla^2 \cdot \phi = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho + \Lambda \Rightarrow 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot G = -\Lambda \quad (3.3)$$

Hledáme takové kritické množství hmoty, že bude křivost rovna nule. Hustota energie je rovna:

$$\varepsilon = \rho \cdot c^2 \Rightarrow \rho = \frac{\varepsilon}{c^2} \quad (3.4)$$

Za hustotu dosadíme tento vztah do první Fridmanovy rovnice:

$$H_0^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \rho - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a_{(t_0)}^2} \quad (3.5)$$

$$H_0^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a_{(t_0)}^2} \quad (3.6)$$

$$-H_0^2 + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a_{(t_0)}^2} \quad (3.7)$$

Celý tento výraz vynásobíme převrácenou hodnotou H_0 :

$$-1 + \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot H_0^2 \cdot c^2} \cdot \varepsilon = \frac{1}{H_0^2} \cdot \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a_{(t_0)}^2} \quad (3.8)$$

Pokud bude výraz na levé části rovnice roven nule, pak bude i křivost rovna nule. Kritická hustota energie je potom rovna:

$$\varepsilon_{0,krit} = \frac{3 \cdot c^2 \cdot H_0^2}{8 \cdot \pi \cdot G} . \quad (3.9)$$

Nyní menší změna:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{1}{H_0^2} - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a^2 \cdot H_0^2} , \quad (3.10)$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \frac{1}{H_0^2 \cdot c^2} \cdot \varepsilon - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a^2 \cdot H_0^2} . \quad (3.11)$$

Na pravé straně rovnice si všimneme výrazu pro $\varepsilon_{0,kryt}$ a dostaneme:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{0,krit}} - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a^2 \cdot H_0^2} , \quad (3.12)$$

v čase t_0 pak $H_0 = H$ a $\Omega = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{0,krit}}$, potom můžeme psát:

$$1 - \Omega = - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a^2 \cdot H_0^2} . \quad (3.13)$$

Druhou Fridmanovu rovnici si můžeme přepsat rovněž pomocí hustoty energie:

$$\dot{\epsilon} + 3 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot (\epsilon + p) = 0 . \quad (3.14)$$

Pro hodnotu p máme tři stavové rovnice, vycházející z tohoto vztahu:

$$p = w \cdot \epsilon , \quad (3.15)$$

kde ϵ může nabývat tří hodnot. Může být 0 pro nerelativistickou hmotu, může být rovno 1/3 pro záření, nebo -1 pro kosmologickou konstantu. Nyní si vztah pro tlak p dosadíme do rovnice pro tekutinu:

$$\dot{\epsilon} + 3 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot (\epsilon + \epsilon \cdot w) = 0 . \quad (3.16)$$

Výraz můžeme dále upravit:

$$\dot{\epsilon} + 3 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot \epsilon \cdot (1 + w) = 0 \quad (3.17)$$

a získáme tak diferenciální rovnici:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -3 \cdot \epsilon \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot (1 + w) , \quad (3.18)$$

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -3 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot (1+w) dt , \quad (3.19)$$

$$\ln\epsilon = -3 \cdot \frac{da}{dt} \cdot \frac{dt}{a} \cdot (1+w) , \quad (3.20)$$

$$\ln\epsilon = -3 \cdot \ln a \cdot (1+w) . \quad (3.21)$$

Výsledkem je pak vztah pro hustotu energie:

$$\epsilon = a^{-3 \cdot (1+w)} + \text{konst.} . \quad (3.22)$$

Nyní budeme do tohoto vztahu dosazovat za w hodnoty 0, 1/3, -1 pro jednotlivé možnosti hmoty. Pro nerelativistickou hmotu 0:

$$\epsilon_{\text{klas.hmota}} = a^{-3} , \quad (3.23)$$

hustota energie pak klesá se třetí mocninou. Pro záření 1/3:

$$\epsilon_{\text{zareni}} = a^{-4} , \quad (3.24)$$

hustota energie pak klesá se čtvrtou mocninou, nemění se totiž pouze vzdálenost, ale i vlnová délka. Pro kosmologickou konstantu (temnou energii) -1 :

$$\epsilon_{\Lambda} = a^0 = 1 \Rightarrow \epsilon = \text{konst.} , \quad (3.25)$$

tady si všimneme, že hustota energie nezávisí na škálovacím faktoru pro kosmologickou konstantu. Ve vesmíru jsou však všechny tři hmoty:

$$\epsilon = \epsilon_{\text{klas.hmota}} + \epsilon_{\text{zareni}} + \epsilon_{\Lambda} , \quad (3.26)$$

$$\Omega = \Omega_{\text{klas.hmota}} + \Omega_{\text{zareni}} + \Omega_{\Lambda} . \quad (3.27)$$

Poslední vztah určuje jaká je geometrie vesmíru (viz kapitola s trojúhelníky 2.2). Pokud je součet větší než 1, pak má vesmír zápornou křivost, pokud je menší než 1, pak má kladnou křivost.

Pro velký úspěch si znovu napíšeme první Fridmanovu rovnici:

$$H^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \frac{G}{c^2} \cdot \epsilon - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a^2} \quad (3.28)$$

a nyní pro $a_{(t_0)}$ tedy pro současnost:

$$H_0^2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \frac{G}{c^2} \cdot \epsilon - \frac{k \cdot c^2}{R_0^2 \cdot a^2} , \quad (3.29)$$

z předchozích vztahů si můžeme vyjádřit hustotu energie a hustotu kritické energie jako Ω a dosadit do první Fridmanovy rovnice:

$$1 - \Omega_0 = -\frac{k \cdot c^2}{H_0^2 \cdot R_0^2 \cdot a_0^2} , \quad (3.30)$$

pokud si nyní $a_{(t_0)}$ položíme rovno 1 a výraz lehce upravíme, dostaneme:

$$\frac{k}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} \cdot (-1 + \Omega_0) . \quad (3.31)$$

Vztah pro k/R_0^2 nyní dosadíme do vztahu 3.28 a vynásobíme převrácenou hodnotou H_0^2 :

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot c^2 \cdot H_0^2} \cdot \epsilon - \frac{\Omega_0 - 1}{a^2} , \quad (3.32)$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \underbrace{\frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{krit}}}_{\Omega} - \frac{\Omega_0 - 1}{a^2} . \quad (3.33)$$

Z předchozí části známe vztah pro celkovou geometrii vesmíru Ω , která je rovna podílu $\frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{krit}}$, Ω si můžeme rozepsat takto :

$$\Omega = \Omega_{zar} + \Omega_{hmota} + \Omega_{\Lambda} , \quad (3.34)$$

pro jednotlivá Ω platí:

$$\Omega_{zar} = \frac{\Omega_{zar0}}{a^4} \quad \Omega_{hmota} = \frac{\Omega_{hmota0}}{a^3} \quad \Omega_{\Lambda_0} = \Omega_{\Lambda} , \quad (3.35)$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{zar0}}{a^4} + \frac{\Omega_{hmota0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda_0} - \frac{\Omega_0 - 1}{a^2} , \quad (3.36)$$

nyní si rozepíšeme H^2 pro škálovací faktor:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{H_0^2} = \frac{\Omega_{zar0}}{a^4} + \frac{\Omega_{hmota0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda_0} - \frac{\Omega_0 - 1}{a^2} , \quad (3.37)$$

$$\dot{a} \cdot \frac{1}{H_0} = \sqrt{\frac{\Omega_{zar0}}{a^2} + \frac{\Omega_{hmota0}}{a} + \Omega_{\Lambda_0} \cdot a^2 - (\Omega_0 - 1)} , \quad (3.38)$$

$$dt \cdot H_0 = \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{zar0}}{a^2} + \frac{\Omega_{hmota0}}{a} + \Omega_{\Lambda_0} \cdot a^2 - (\Omega_0 - 1)}} , \quad (3.39)$$

$$t \cdot H_0 = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{zar0}}{a^2} + \frac{\Omega_{hmota0}}{a} + \Omega_{\Lambda_0} \cdot a^2 - (\Omega_0 - 1)}} . \quad (3.40)$$

3.1.1 Hubbleova konstanta

Změny Hubbleovy konstanty, jak se měnily podle družic:

$$H_{0[\text{WMAP}]} = 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} \quad (3.41)$$

$$H_{0[\text{PLANCK}]} = 67.3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} \quad (3.42)$$

$$\Omega_{zar, \text{WMAP}} = 0.00008 \quad \Omega_{hmota, \text{WMAP}} = 0.27 \quad \Omega_{\Lambda, \text{WMAP}} = 0.73 \quad (3.43)$$

$$\Omega_{zar, \text{PLANCK}} = \dots \quad \Omega_{hmota, \text{PLANCK}} = 0.32 \quad \Omega_{\Lambda, \text{PLANCK}} = 0.685 \quad (3.44)$$

Množství hmoty ve vesmíru se určuje podle průměrné hustoty hvězd. Vezmu malé místo, spočítám v něm počet hvězd a vztáhnou to na celý vesmír (statistické průměrování).

$$dp = c \cdot \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.45)$$

čas t_e značí čas emise záření, když ho neznáme, rozvedeme si škálovací faktor do Taylorova rozvoje:

$$a(t) = 1 + H_0 \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot H_0^2 \cdot (t - t_0)^2 + \dots \quad (3.46)$$

$$f_{(a;t)} = \frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a(t_0)} - \frac{1}{a_{(t_0)}^2} \cdot \dot{a}_{(t_0)} (t - t_0) + \dots \quad (3.47)$$

$$\dot{a}_{(t_0)} = H_0 - q_0 \cdot H_0^2 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{\dot{a}_{(t_0)}^3} \cdot \dot{a}_{(t_0)}^2 - \frac{\ddot{a}_{(t_0)}}{a_{(t_0)}^2} \right] \cdot [t - t_0]^2 \dots \quad (3.48)$$

$$\ddot{a}_{(t_0)} = -q_0 \cdot H_0^2, \quad (3.49)$$

$$a_{(t)} = 1 - \frac{1}{a_{(t_0)}^2} \cdot (H_0 - q_0 \cdot H_0^2 \cdot (t - t_0)) \approx 1 - H_0 \cdot (t - t_0) + \left[\frac{H_0^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot H_0^2 \right] \cdot (t - t_0)^2, \quad (3.50)$$

nyní dosadíme do 3.45:

$$dp = c \cdot \int_{t_e}^{t_0} \left[1 - H_0 \cdot (t - t_0) + \left[\frac{H_0^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot H_0^2 \right] \cdot (t - t_0)^2 \right], \quad (3.51)$$

$$dp = c \cdot \left(\int_{t_e}^{t_0} dt - H_0 \cdot \int_{t_e}^{t_0} (t - t_0) dt + \frac{H_0^2}{2} \cdot \int_{t_e}^{t_0} (t - t_0)^2 dt + \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot H_0^2 \cdot \int_{t_e}^{t_0} (t - t_0)^2 dt \right), \quad (3.52)$$

$$dp = c \cdot \left[[t]_{t_e}^{t_0} - H_0 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t_e}^{t_0} - H_0 \cdot t_0 [t]_{t_e}^{t_0} + \frac{H_0^2}{2} \cdot \left(\left[\frac{t^3}{3} \right]_{t_e}^{t_0} - \left[\frac{2 \cdot t^2 \cdot t_0}{2} \right]_{t_e}^{t_0} + t_0^2 \cdot [t]_{t_e}^{t_0} \right) \right] + \quad (3.53)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot H_0 \cdot \left(\left[\frac{t^3}{3} \right]_{t_e}^{t_0} - \left[\frac{2 \cdot t^2 \cdot t_0}{2} \right]_{t_e}^{t_0} + t_0^2 \cdot [t]_{t_e}^{t_0} \right), \quad (3.54)$$

mocniny vyššího řádu než druhého lze zanedbat.

$$dp \approx c \cdot (t_0 - t_e) - H_0 \cdot \left(\frac{(t - t_e)^2}{4} \right) - H_0 \cdot t_0 \cdot (t_0 - t_e) + \dots \quad (3.55)$$

t_e čas emise je těžké stanovit, lepší je vzít rudý posuv:

$$z = \frac{1}{a(t_e)} - 1 ; \quad \frac{1}{z+1} = a(t_e) ; \quad H = \frac{\dot{a}(t_e)}{a(t_e)} \quad (3.56)$$

$$dp \approx c \cdot (t_0 - t_e) - H_0 \cdot \left(\frac{(t - t_e)^2}{4} \right) - H_0 \cdot t_0 \cdot (t_0 - t_e) + \dots \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{a(t_e)} = 1 - H_0 \cdot (t_e - t_0) + \left(\frac{1+q_0}{2} \right) \cdot H_0^2 \cdot (t_e - t_0)^2 + \dots \quad (3.58)$$

$$z \approx -H_0 \cdot (t_e - t_0) + \left(\frac{1+q_0}{2} \right) \cdot H_0^2 \cdot (t_e - t_0)^2 + \dots \quad (3.59)$$

potřebujeme znát rozdíl $(t_e - t_0)$, když chceme znát vzdálenost objektu, musíme zahrnout i to, že se vesmír rozpíná, vzdálenost je dána dráhou, kterou urazí foton. Jsme schopni změřit decelerační parametr, Hubbleovu konstantu a rudý posuv, z něj určíme $(t_e - t_0)$, použijeme kvadratickou rovnici.

$$(t_e - t_0) \approx H_0^{-1} \cdot \left(z - \frac{1+q_0}{2} \cdot z^2 \right) \quad (3.60)$$

$$dp \approx c \cdot \left[H_0^{-1} \cdot \left(z - \frac{(1+q_0)}{2} \cdot z^2 \right) \right] + c \cdot \frac{H_0}{2} \cdot \left[H_0^{-1} \cdot \left(z - \frac{(1+q_0)}{2} \cdot z^2 \right) \right]^2 \approx \quad (3.61)$$

$$\approx c \cdot H_0^{-1} \cdot z \cdot \left[1 - \frac{(1+q_0)}{2} \cdot z \right] . \quad (3.62)$$

Můžu tak z rudého posuvu určit vzdálenost objektu. Jak určit množství hmoty ve vesmíru? Máme galaxii, známe její svítivost a zastoupení hvězd, určíme množství záření na množství hmoty. Poměr zářivé hmoty vůči hmotě, co nezáří. Důkaz skryté hmoty v galaxiích.

3.1.2 Keplerovský profil rychlostí

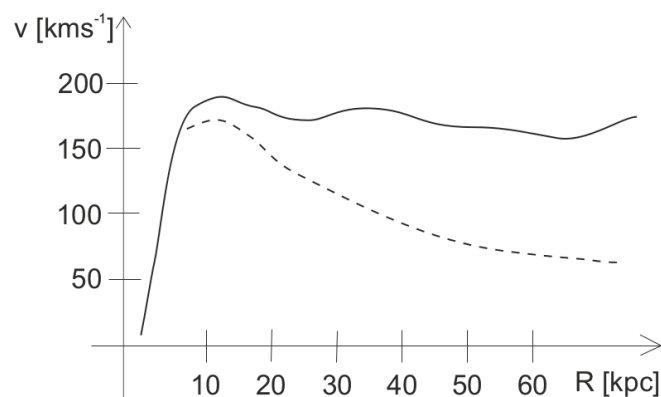
Rozepíšeme si vztah, kde odstředivá síla bude rovna gravitační:

$$F_{\text{ODST}} = F_G , \quad (3.63)$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{M \cdot G}{R^2} , \quad (3.64)$$

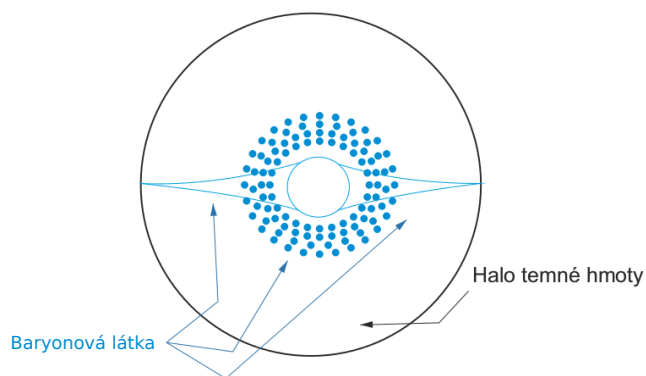
$$v = \sqrt{\frac{M \cdot G}{R}} . \quad (3.65)$$

Předpokládalo se, že galaxie budou mít nějaký podobný profil rychlostí, ale neměli.



Obrázek 3.1: Keplerovský profil rychlostí.

Rovněž se předpokládalo, že rychlost bude se vzdáleností klesat (čárkovaná čára), rychlost však se vzdáleností neklesala (plná čára).



Obrázek 3.2: Naše Galaxie s rozložením temné hmoty.

Temná hmota

Možná neutrína, nebo Higgsova částice, všeobecně se jedná o velmi slabě interagující částice.

Kapitola 4

Reliktní záření

První předpověď Gamov (autor modelu vzniku vesmíru => Big bang, (horký počátek)). Gamov byl v otázce vzniku vesmíru ve sporu s Fredem Hoylem, který prosazoval stacionární vesmír. Pozorování reliktního záření byla jedna z ran tohoto modelu. V rané fázi vývoje vesmíru dominovalo záření, horká hustá hmota. Rozpínáním chladne. Záření interaguje s hmotou a dochází k ionizaci/rekombinaci. Vesmír chladne a záření přestane účinně interagovat s hmotou, natáhne se střední volná dráha fotonu natolik, že už ho hmota neobtěžuje. Záření volně pokračuje a my ho pak detekujeme. Foton nese informace o době, ze které pochází. Reliktní záření má planckovský charakter, tedy absolutně černého tělesa.

$$\lambda \cdot T = b . \quad (4.1)$$

1940

- Studium spektra molekul (mezihvězdných), McKellar, pozoroval vyšší energiové stavy molekul. Z toho energie, která byla potřeba pro vybuzení do vyššího stavu mu vyšla 2.7 K.

1946

- Měření jasové teploty oblohy v závislosti na elevaci (vyzdvihování), astronom Dicke.

1965

- Penzias & Wilson - Bellovy laboratoře. Měřili odrazivost ionosféry, snažili se zjistit příčinu šumu, záření z Vesmíru. Kontaktoval je Dicke, ztotožnil s teorií Gamova.

1978

- Nobelova cena

Podstatný faktor pro vznik reliktního záření je rekombinační proces (energie eV).

4.1 Vlastnosti reliktního záření

Vidíme otisk doby, kdy se záření oddělilo od hmoty, interakce s hmotou přestala být účinná a střední volná dráha se prodloužila. Můžeme určit teplotu při které k tomuto došlo:

$$2.7 \cdot k \cdot T = 13.6 \text{ eV} ; T = \frac{13.6}{2.7 \cdot k} = 60\,000 \text{ K} \quad (4.2)$$

Není to moc přesný odhad, určujeme kinetickou energii fotonu, akorát je jich strašně moc, víc než částic baryonové hmoty a některé mají o trochu vyšší nebo nižší teplotu. Reliktní záření má maximum okolo $\lambda = 0.2 \text{ cm}$ se škálovacím faktorem souvisí jako a^{-4} . Mikrovlnné záření lze na Zemi měřit jen těžko, pouze díky balónům a družicím.

Poprvé naměřila reliktní záření družice COBE, zjistila, že přichází ze všech stran vesmíru, který je homogenní a izotropní.

Reliktní záření není dokonale homogenní, jsou tam chladnější a teplejší místa. Dipólový efekt tam vzniká kvůli tomu, že Země rotuje kolem Slunce a Slunce zase kolem středu Galaxie, takže kvůli tomuto pohybu.

Chladnější a teplejší zhustky odpovídají menší a větší hustotě. V místech s větší hustotou se tvořili velké struktury ve vesmíru. Je to takový otisk. Zkoumáme pomocí Fourierovy analýzy. Při zpracování potřeba odstranit dipólovou anizotropii danou Dopplerovským posuvem. Pomocí zhustků můžeme zkoumat geometrii vesmíru, buď se nám zdají větší než mají být nebo menší a nebo přesně takové jak mají být.

Geometrie vesmíru

- plochý - plocha - křivost = 0
- otevřený - sedlo - křivost < 0
- uzavřený - sférický - křivost > 0

Kosmologické paradoxy

- Vesmír je konečně starý
- Za dobu jeho existence světlo urazilo dráhu d_H ta charakterizuje pozorovaný vesmír

Kapitola 5

Počátky vesmíru

Dominantní prvek ve vesmíru H, po něm He. Slučování těžších prvků - urychlovače a hvězdy. Neutron těžší než proton, rozpad samostatného neutronu (přibližně 10 minut) na proton a elektron.

5.0.1 Maxwillovo - Boltzmanovo rozdělení

Pro protony a neutrony.

$$\frac{N_p}{N_n} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{-c^2(m_n - m_p)}{k \cdot T}} . \quad (5.1)$$

Klidová energie $E = m_{p/n} \cdot c^2$, rozdíl klidové energie mezi protonem a neutronem je $E_n - E_p \approx 1.3 \text{ MeV} = \Delta E$, platí rovněž $k \cdot T \gg \Delta E$ dokud byla teplota dostatečně velká neutronů a protonů bylo stejně, jak klesala, klesal i počet neutronů. Když začala být teplota po velkém třesku příznivá ke slučování těžších prvků docházelo k těmto reakcím:



Absence antihmoty

Porušení c_p symetrie, porušení zákona zachování barevného čísla.

Paradox magnetických monopolů

Problém inflace 1 částice na vesmír.

Vzdálenost ve vesmíru

Paralaxa - použít lze pouze na nejbližší hvězdné okolí. Družice Hipparcos (1989) a družice Gaia.

Spektroskopická paralaxa - ze spektra určím pozici na HR diagramu, pak pomocí Pogsonovy rovnice i vzdálenost.

Pohybové hvězdokupy - znám rychlost pohybu hvězd z hvězdokupy a jejich změnu, můžu pak určit vzdálenost. Nebo z měření spekter znám radiální složku rychlosti, zjistím tangenciální složku $v_t = v_r \cdot \tan\Theta$, dlouhodobé pozorování určím změnu úhlu a získám vzdálenost

$$D = \frac{v_t}{\frac{d\Theta}{dt}} . \quad (5.5)$$

Světelné echo po supernově, nebo standardní svíčky (Cefeidy), hvězdokupy v HR diagramu, supernovy typu Ia. Metoda fluktuace jasu, bližší galaxie 100 hvězd na 1 pixel, vzdálenější 1000 hvězd na 1 pixel. Nebo také z Hubbleova vztahu.