1.)

STATISTICKÁ FYZIKA JE O TOM, JAK POPSAT SYSTÉMY S VELKÝM POČTEM STUPŇŮ VOLNOSTI.

TŘEBA 10^{20} ČÁSTIC - DOST OBTÍŽNÉ POPSAT (NEMOŽNÉ)

ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLAD

„V ROVNOVÁŽNÉM STAVU, JSOU VŠECHNY STAVY STEJNĚ PRAVDĚPODOBNÉ"
(V ROVNOVÁZE)

CELÝ PROBLÉM JE TAK REDUKOVÁN NA POČÍTÁNÍ STAVŮ.

$$\text{PRAVDĚPODOBNOST} = \frac{\text{VYBRANÉ}}{\text{VŠECHNY}}$$

TEDY JE UŽITEČNÉ PŘEDPOKLÁDAT, ŽE EXISTUJE FUNKCE, KTERÁ NÁM ZA DANÝCH OKOLNOSTÍ ŘEKNE, KOLIK MOŽNÝCH STAVŮ ODPOVÍDÁ TÉTO KONFIGURACI. POMOCÍ TĚCHTO SYSTÉMŮ VÍME VŠE CO JE POTŘEBA VĚDĚT.

$\Gamma(E, V \dots)$

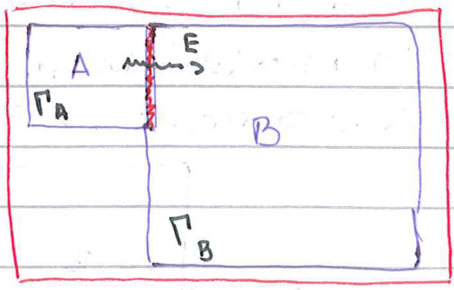
POČET STAVŮ S TĚMITO VLASTNOSTMI, S URČITOU HODNOTOU ENERGIE, OBJEMU ATD.

Z HISTORICKÝCH DŮVODŮ SE PRACUJE S S (ENTROPIÍ) A NE S Γ

$S = \ln \Gamma$; $S = k_B \cdot \ln \Gamma$

$k_B = 1$

PŘEDSTAVÍME SI SOUSTAVU S PODSYSTÉMY A A B



CELÉ IZOLOVANÉ

Γ - POČET STAVŮ CELÉHO SYSTÉMU

$$\Gamma = \Gamma_A \cdot \Gamma_B$$

$$S = \ln \Gamma = \ln \Gamma_A + \ln \Gamma_B = S_A + S_B$$

MÁME IZOLOVANÝ SYSTÉM - ENERGIE (CELKOVÁ) JE KONSTANTNÍ

$$E = E_A + E_B$$

$$S(E) = S_A(E_A) + S_B(E_B)$$

V ROVNOVÁZE MÁ NEJPRAVDĚPODOBNĚJŠÍ KONFIGURACI TA PRO KTEROU JE ENTROPIE $\underline{S}$ MAXIMÁLNÍ.

$$\frac{d}{dE_A}\left(S_A(E_A) + S_B(E_B)\right) = 0$$

$$\frac{dS_A}{dE_A} + \frac{dS_B}{dE_A} = \frac{dS_A}{dE_A} - \frac{dS_B}{dE_B} = 0 \qquad \underbrace{\frac{dS_A}{dE_A} = \frac{dS_B}{dE_B}}_{\text{NEJPRAVDĚPODOBNĚJŠÍ KONFIGURACE}}$$

MÍNUS PROTOŽE ZÁMĚNA (JE TO NAVÍC IZOLOVANÉ)

CHCEME ZJISTIT, CO SE DĚJE S ENTROPIÍ V ČASE. MÁM OBA SYSTÉMY ODDĚLENÉ A PAK JE NARÁZ SPOJÍM.

$$0 < \frac{dS}{dt} = \frac{dS_A}{dt} + \frac{dS_B}{dt} = \left(\frac{dS_A}{dE_A} - \frac{dS_B}{dE_B}\right)\frac{dE_A}{dt}$$

PRO TENTO VZTAH MÁME 2 ŘEŠENÍ:

1) $\frac{dS_A}{dE_A} > \frac{dS_B}{dE_B}$; $\frac{dE_A}{dt} > 0$ BUĎ ENERGIE $\underline{A}$ SYSTÉMU ROSTE ~~NEBO~~ A $\underline{B}$ SYSTÉMU KLESÁ.

NEBO

2) $\frac{dS_A}{dE_A} < \frac{dS_B}{dE_B}$; $\frac{dE_A}{dt} < 0$ ENERGIE $\underline{B}$ SYSTÉMU ROSTE A $\underline{A}$ SYSTÉMU KLESÁ.

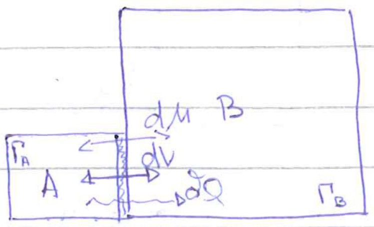
$$\frac{dS}{dE} = \beta = \frac{1}{T}$$ ← TEPLOTA

$$dE = \underbrace{TdS}_{\substack{\delta Q \\ \text{TEPLO}}} - \underbrace{pdV}_{\substack{dW \\ \text{PRÁCE}}} + \underbrace{\mu dN}_{\text{CHEMICKÝ POTENCIÁL}}$$

U PŘEDCHOZÍHO SYSTÉMU NEMUSÍ DOCHÁZET JEN K VÝMĚNĚ TEPLA, MŮŽE SE POHYBOVAT PŘÍČKA (ZMĚNA OBJEMU), NEBO PŘEPÁŽKA BUDE PROPUSTNÁ (VÝMĚNA ČÁSTIC)

KDYŽ E=KONST. & V=KONST.

PAK $\frac{dS}{dN} = -\frac{\mu}{T}$



$$S(E,N) = S_A(E_A; N_A) + S_B(E_B; N-N_A)$$

$$0 = \frac{dS}{dN_A} = \left(\frac{dS_A}{dN_A}\right)_{E_A,V_A} - \left(\frac{dS_B}{dN_B}\right)_{E_B,V_B} = -\frac{\mu_A}{T} + \frac{\mu_B}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_A = \mu_B$$

②

NYNÍ SYSTÉM POUZE S VÝMĚNOU TEPLA

- ZAVEDEME SI OTÁZKU, JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST (w_r) NAJÍT SYSTÉM **A** VE STAVU $|r\rangle$?

$$w_r \propto \frac{\Gamma_B(E_B, \dots)}{\text{VŠECHNY STAVY}} = c \cdot \Gamma_B = c \cdot e^{S_B(\overbrace{E-E_r}^{E_B})}$$

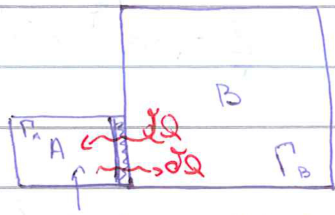
KONSTANTA

$$\approx c \cdot \underbrace{e^{S_B(E) - E_r \frac{dS_B}{dE_B}}}_{\text{KONST.}} = c' \cdot e^{-E_r/T}$$

$E_A = E_r$

$E = E_A + E_B$

$E_B = E - E_A = E - E_r$



TADY BUDEME SLEDOVAT POUZE KONFIGURACI $|r\rangle$

$$\frac{1}{T} = \frac{dS_A}{dE_A} = \frac{dS_B}{dE_B}$$

PRAVDĚPODOBNOST NALEZENÍ VE STAVU $\underline{E_r}$ (PRO VÝMĚNU TEPLA)

$$w_r = c' \cdot e^{-E_r/T}$$

JEŠTĚ DOVOLÍME ABY SI SYSTÉMY VYMĚŇOVALY ČÁSTICE:

$$w_r = c \cdot e^{S_B(E-E_r, N-N_r)} \approx c \cdot \underbrace{e^{S_B(E,N)}}_{\text{KONST}} {}^{- E_r \frac{dS_B}{dE_B} - N_r \frac{dS_B}{dN_B}} = c' \cdot e^{-E_r/T + \mu N_r / T} =$$

$$= c' \cdot e^{\frac{-E_r + \mu N_r}{T}} \quad \text{VÝMĚNA TEPLA \& ČÁSTIC}$$

DÍKY TĚMTO ZNALOSTEM MŮŽEME SPOČÍTAT ENERGII SYSTÉMU A POČET ČÁSTIC

$$E = \sum_r E_r \cdot w_r \quad ; \quad N = \sum_r N_r \cdot w_r$$

TROCHU PROBLÉM JE KONSTANTA $\underline{c}$, O KTERÉ TOHO MOC NEVÍM, MOHU JI ZJISTIT POMOCÍ $\sum_r w_r = 1$ KDYŽ DOSADÍM, PAK DOSTANU:

$$\sum_r c' e^{-\frac{E_r}{T}} = c' \sum_r e^{-E_r/T} = 1 \qquad c' = \frac{1}{\sum_r e^{-\frac{E_r}{T}}} \qquad \text{DOSADÍM DO } w_r$$

$$\underbrace{w_r = \frac{e^{-\frac{E_r}{T}}}{\sum_s e^{-\frac{E_s}{T}}}}_{\text{PRO VÝMĚNU TEPLA}} \quad ; \quad \underbrace{w_r = \frac{e^{\frac{-E_r - \mu N_r}{T}}}{\sum_s e^{-\frac{(E_s - \mu N_s)}{T}}}}_{\text{PRO VÝMĚNU TEPLA A ČÁSTIC}}$$

MŮŽEME ZJISTIT, ŽE TA SUMA MÁ ZAJÍMAVOU INTERPRETACI, NAPŘÍKLAD, BUDEME POČÍTAT PRŮM. ENERGII

$$\langle E \rangle = \sum_r w_r E_r = \sum_r \left(E_r \frac{e^{-E_r/T}}{\sum_s e^{-E_s/T}} \right) = \frac{1}{\sum_s e^{-E_s/T}} \sum_r E_r e^{-E_r/T}$$

NEZÁVISÍ NA r -> KONSTANTA

ZKUSÍME NYNÍ NAPSAT DERIVACI:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\sum_r e^{-\frac{E_r}{T}}\right) = \sum_r e^{-E_r/T} \cdot \left(\frac{E_r}{T^2}\right) = \frac{1}{T^2}\sum_r E_r e^{-E_r/T}$$

$$\sum_r E_r \cdot e^{-E_r/T} = T^2 \frac{\partial}{\partial T}\sum_r e^{-\frac{E_r}{T}}$$ MOHU TEDY PŘEPSAT VE VÝRAZU PRO $\langle E \rangle$ (STŘEDNÍ ENERGII)

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\sum_s e^{-E_s/T}} T^2 \frac{\partial}{\partial T}\sum_r e^{-E_r/T} = T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\ln \sum_r e^{-\frac{E_r}{T}}\right) = T^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln z$$

TOTO JE ZAJÍMAVÉ

NYNÍ ZAJÍMAVÝ PŘIROZENÝ LOGARITMUS NAHRADÍME VÝRAZEM $-\frac{F}{T}$, KDE F JE VOLNÁ ENERGIE A TA JE ROVNA $F = E - TS$,

$$\ln \sum_r e^{-E_r/T} = -\frac{F}{T}$$

TO CO CHCI NYNÍ DOKÁZAT JE TOTO:

$$T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{F}{T}\right) = F - T \cdot \frac{\partial F}{\partial T}$$

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$E = E - T\frac{\partial E}{\partial T} + T\frac{\partial E}{\partial T} = \qquad \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right]$$

$$= E - T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) + T^2\frac{\partial S}{\partial T} = E - T\frac{\partial E}{\partial T} + T\left(\frac{\partial (TS)}{\partial T} - S\right) = \underbrace{E - TS}_{F} - T\frac{\partial}{\partial T}(\underbrace{E - TS}_{F}) =$$

$$= F - T\frac{\partial}{\partial T}F$$

$$\sum_r e^{-E_r/T} = e^{-F/T}$$

POKUD BUDEME MÍT I μN_r PAK TO BUDE VYPADAT TAKTO:

$$\sum_r e^{-(E_r - \mu N_r)/T} = e^{-\Omega/T}$$ JE TO ALE VÍCE NA POČÍTÁNÍ TEN DŮKAZ

$\Omega = E - TS - \mu N$ $\qquad$ Ω ... GRANDKANONICKÝ POTENCIÁL

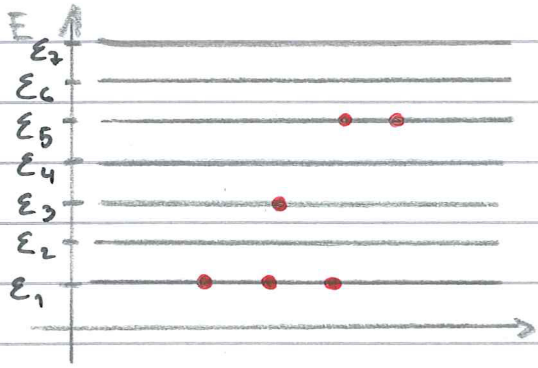
$d\Omega = -S dT - p dV - N d\mu$

3)

NYNÍ SE, TO CO JSME ZJISTILI, POKUSÍME POUŽÍT KONKRÉTNĚ NA NĚJAKÝ SYSTÉM. TÍM SYSTÉMEM BUDE KVANTOVÝ IDEÁL. PLYN.

KVANTOVÝ IDEÁLNÍ PLYN

- ČÁSTICE SPOLU NEINTERAGUJÍ, ČÁSTICE NEVÍ O SVÝCH SOUROZENCÍCH, PLATÍ ALE PAULIHO VYLUČOVACÍ PRINCIP A MY MUSÍME ROZLIŠIT MEZI FERMIONY A BOSONY. U FERMIONŮ NEMOHOU BÝT DVĚ ČÁSTICE VE STEJNÉM STAVU. (TAKŽE TAM DOCHÁZÍ K NĚJAKÝM INTERAKCÍM)
- PROTOŽE SPOLU ČÁSTICE NEINTERAGUJÍ MOHU POPSAT VŠECHNY STAVY $|r\rangle$ POMOCÍ STAVU, VE KTERÉM SE NACHÁZÍ 1 ČÁSTICE.
- MOHU ŘEŠIT SCHRÖDINGEROVU ROVNICI PRO 1 ČÁSTICI A ŘEŠIT JAKÉ JSOU MOŽNÉ ENERGIOVÉ HLADINY



JEDEN STAV SYSTÉMU $|r\rangle$, KDE ENERGIE JE $E_r = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_5$

POČET ČÁSTIC $N_r = 6$

BOZONY – MOHOU BÝT DVA A VÍCE V 1 STAVU

FERMIONY – JEDNA ČÁSTICE JEDEN STAV

KVANTOVÝ IDEÁLNÍ PLYN
- ŽÁDNÉ INTERAKCE

PRAVDĚPODOBNOST NAJÍT SYSTÉM VE STAVU $|r\rangle$ JE ROVNA:

$$w_r = \frac{e^{-(E_r-\mu N_r)/T}}{\sum_s e^{-(E_s-\mu N_s)/T}}$$

S ENERGIÍ E_r A POČTEM ČÁSTIC N_r.

JAK SPOČÍTAT STAVY PŘES KTERÉ SČÍTÁME?

$$\sum_s e^{-(E_s-\mu N_s)/T} = e^{-\Omega/T}$$

LANDAŮV POTENCIÁL $\Omega(T; V; \mu)$

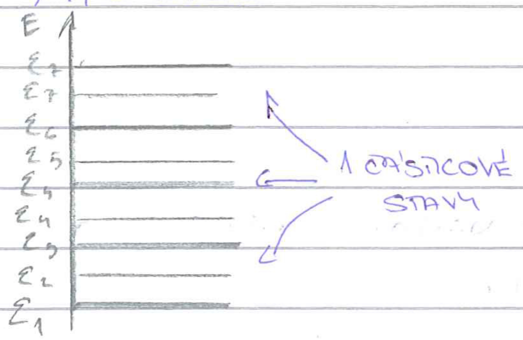
$$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu$$

KDYŽ ČÁSTICE NEINTERAGUJÍ, POUŽIJEME 1-ČÁSTICOVOU APROXIMACI ABYCHOM POPSALI VŠECHNY KVANTOVÉ STAVY SYSTÉMU.

PROCES ŘEŠENÍ

1) VYŘEŠÍME SCHRÖDINGEROVU ROVNICI PRO 1 ČÁSTICI

2) VÝSLEDEK



KVANTOVÉ ČÁSTICE

3) $|r\rangle \Leftrightarrow (n_1; n_2; n_3 \dots)$

$N_r = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$

POČET ČÁSTIC V 1 ČÁSTICOVÝCH STAVECH S N_r S ENERGIÍ E_r

$$E_r = \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \varepsilon_3 n_3 + \dots$$

$$\sum_r = (0;0;0;\dots) + (1;0;0;\dots) + (0;1;0;\dots) + (0;0;1;0;\dots) + \dots$$
$$+ (2;0;0;\dots) + (1;1;0;\dots) + (1;0;1;0;\dots) + \dots =$$

ČÁSTICE NEMAJÍ IDENTITU NELZE JE ROZLIŠIT

FERMIONY

$$= \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_2=0}^{1} \sum_{n_3=0}^{1} \dots$$

BOSONY

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \dots \sum_{n_r=0}^{\infty} \dots$$

$$\sum_r e^{-(E_r-\mu N)/T} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \left(e^{-(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + n_3\varepsilon_3 + \dots - \mu n_1 - \mu n_2 - \dots)/T}\right) = e^{n\cdot a} = \left(e^{a}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \dots \left(e^{-n_1(\varepsilon_1-\mu)/T} \cdot e^{-n_2(\varepsilon_2-\mu)/T} \cdot e^{-n_3(\varepsilon_3-\mu)/T} \dots \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_k \cdot b_l = \left(\sum_{k=0} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0} b_l\right) = \sum (a_k b_0 + a_k \cdot b_1 + \dots) =$$

$$= a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1 + \dots = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots) =$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) b_0 + (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) b_1$$

$$\left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_1-\mu)/T}\right)^{n_1}\right) \cdot \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_2-\mu)/T}\right)^{n_2}\right) \left(\sum_{n_3=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_3-\mu)/T}\right)^{n_3}\right) \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$e^{-\Omega/T} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}} = \frac{1}{1-e^{-(\varepsilon_1-\mu)/T}} \cdot \frac{1}{1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}}$$

FERMIONY:

$$e^{-\Omega/T} = \sum_{n_1=0} \left(e^{-(\varepsilon_1-\mu)/T}\right)^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_2-\mu)/T}\right)^{n_2} \dots = \left(1 + e^{-(\varepsilon_1-\mu)/T}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + e^{-(\varepsilon_2-\mu)/T}\right) \dots$$

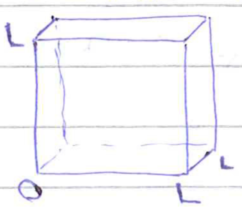
$$e^{-\Omega/T} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right) \quad \text{FERMIONY}$$

SUMA PŘES 1 ČÁSTICOVÉ STAVY ENERGIE

$$\Omega = \pm T \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)$$

− + FERMIONY   + − BOSONY

SPOČÍTÁME PRO ČÁSTICE V KRABICI



VYŘEŠÍME SCHRÖDINGEROVU ROVNICI PRO TENTO SYSTÉM.

$$\left(\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V\right)|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle$$

KONST

$$\langle \vec{r} | \left(\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V\right)|\psi\rangle = \varepsilon \langle \vec{r}|\psi\rangle$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi(\vec{r}) = \varepsilon \cdot \psi(\vec{r})$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(5)

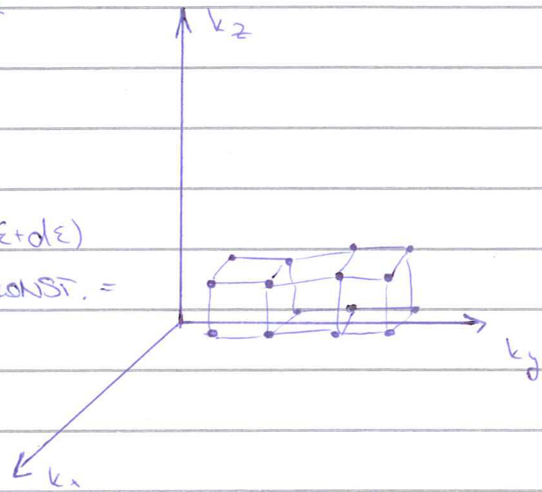
$$\psi = \psi_x(x)\,\psi_y(y)\,\psi_z(z) = N \cdot \sin\left(\frac{x \cdot n_x \cdot \pi}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{y \cdot n_y \cdot \pi}{L}\right) \cdot$$

$$\cdot \sin\left(\frac{z \cdot n_z \cdot \pi}{L}\right) = \psi_{n_z, n_x, n_y}$$

ENERGIE $\quad -\frac{\hbar^2 \cdot \Delta}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\left(\frac{n_x \pi}{L}\right)^2\psi - \left(\frac{n_y \pi}{L}\right)^2\psi - \left(\frac{n_z \pi}{L}\right)^2\psi\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

$\vec{k} = \frac{\pi}{L}(n_x + n_y + n_z) \qquad \varepsilon = \frac{\hbar^2 \cdot \vec{k}^2}{2m}$



$\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon$ = POČET STAVŮ S ENERGIÍ V INTERVALU $(\varepsilon; \varepsilon + d\varepsilon)$

$\rho(\vec{k})\,d^3\vec{k}$ = POČET STAVŮ V OBJEMU $d^3\vec{k}$ OKOLO $\vec{k}$ = KONST. =

$= \frac{L^3}{\pi^3}\,d^3\vec{k} \qquad k^2 = \frac{2m \cdot \varepsilon}{\hbar^2}$

$\frac{L^3}{\pi^3}\,d^3\vec{k} = \frac{L^3}{\pi^3}\,k^2\,dk\,d\Omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{L^3}{\pi^3}k^2 dk \frac{4\pi}{8} = 4\pi \frac{L^3}{(2\pi)^3} k^2 \frac{dk}{d\varepsilon} d\varepsilon = \underbrace{4\pi \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \frac{dk}{d\varepsilon}}_{\rho(\varepsilon)} d\varepsilon$$

$$\varepsilon_r = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

$\Omega = \pm T \sum_i^{\infty} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon_i - \mu)/T}\right)$

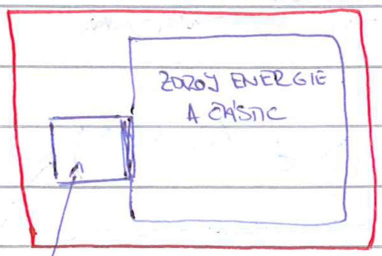
$\sum_i = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_3=1}^{\infty}$ ... KOMPLIKOVANÉ

$\Rightarrow \sum_i \Rightarrow \int_0^{\infty} d\varepsilon\,\rho(\varepsilon)$

$$\Omega = \pm T \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{\hbar^2} \cdot 2 \cdot m \cdot \varepsilon \cdot \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon - \mu)/T}\right)\frac{dk(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLAD STATISTICKÉ FYZIKY:

„PRO IZOLOVANÝ SYSTÉM V ROVNOVÁZE JSOU VŠECHNY STAVY STEJNĚ PRAVDĚPODOBNÉ“



TENTO SYSTÉM NENÍ IZOLOVANÝ, MŮŽE SI VYMĚŇOVAT ENERGIE ČÁSTICE S VĚTŠÍM SYSTÉMEM.

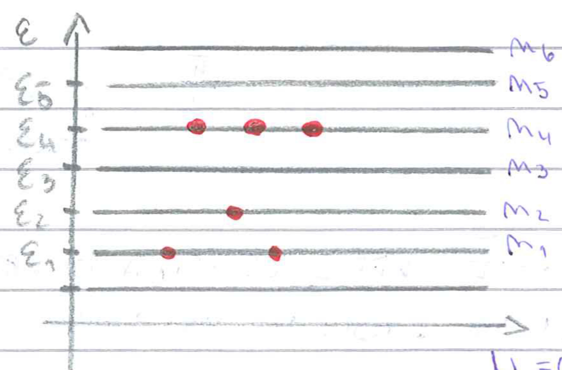
PRO PRAVDĚPODOBNOST w_r V NĚJAKÉM KONKRÉTNÍM STAVU $|r\rangle$ S ENERGIÍ E_r A POČTEM ČÁSTIC N_r. PAK JE PRAVDĚPODOBNOST ÚMĚRNÁ $w_r = c \cdot e^{-(E_r - \mu N_r)/T}$; T-TEPLOTA μ-CHEMICKÝ POTENCIÁL $\left(e^{-\Omega/T} = \sum_r e^{-(E_r - \mu N_r)/T}\right)$. CELÁ PRAVDĚPODOBNOST SPOČÍVÁ V TOM, ŽE KDYŽ ZNÁME JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST PRO KONKRÉTNÍ STAVY, TAK MŮŽEME SPOČÍTAT RŮZNÉ PRŮMĚRNÉ HODNOTY PRO MAKROSKOPICKÉ PARAMETRY SYSTÉMU (TLAK ...).

Ω - LANDAU POTENCIÁL, $\Omega(T;V;\mu)$ Z DERIVACE TOHOTO POTENCIÁLU PODLE $(T;V;\mu)$ ZÍSKÁME VÝRAZY PRO $S;P;N$ A MŮŽEME POČÍTAT LIBOVOLNÉ TERMODYNAMICKÉ VELIČINY Z TĚCHTO VÝRAZŮ.

JAK TO UDĚLAT KONKRÉTNĚ?

POPIS VŠECH STAVŮ TOHOTO

- POTŘEBUJEME NĚJAKÝ NE MOC KOMPLIKOVANÝ SYSTÉMU
- POTŘEBUJEME DEFINOVAT CO ZNAMENÁ SUMA $\sum_r$
  A PRO KAŽDÝ STAV POTŘEBUJEME ZNÁT ENERGII A POČET ČÁSTIC
- BUDEME TO DĚLAT PRO IDEÁLNÍ PLYN (ŽÁDNÉ INTERAKCE)



OPĚT ŘEŠÍME SCHRÖDINGEROVU ROVNICI PRO TEN SYSTÉM. $\hat{H}|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle$ ŘÍKÁ NÁM JAKÉ MOŽNÉ VLASTNÍ HODNOTY HAMILTONIÁNU

$N_r = 6$

$E_r = 2 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_4$

STAV SYSTÉMU BYCHOM POPSAL POMOCÍ:

$$|r\rangle \rightsquigarrow |n_1^{(r)}; n_2^{(r)}; n_3^{(r)}; \dots\rangle$$

$$N_r = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \qquad E_r = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \cdot n_i$$

NEMUSÍME SUMOVAT DO NEKONEČNA, PROTOŽE KAŽDÁ SUMA JE STEJNÁ.

$$\sum_r = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\dots \sum_r e^{-(E_r-\mu N_r)/T} = \sum_{n_1}\dots\sum_{i}\dots\left(e^{-(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+\dots-\mu n_1-\mu n_2-\dots)/T}\right) =$$

$$= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\dots\left(e^{-n_1(\varepsilon_1-\mu)/T}\cdot e^{-n_2(\varepsilon_2-\mu)/T}\dots\right) = \underline{\prod_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n_i} e^{-n_i(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)}$$

DVĚ MOŽNOSTI PRO DVA TYPY ČÁSTIC

PRO 1 ČÁSTICI

BOZONY $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\sum_{n_i=0}^{\infty}\left(e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)^{n_i} = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}}$

POČET HLADIN ← V KAŽDÉ 1 ČÁSTICOVÉ HLADINĚ LIBOVOLNÝ POČET ČÁSTIC

PRO 1 ČÁSTICI

FERMIONY $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\sum_{n_i=0}^{1}\left(e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)^{n_i} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1+e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)$

V KAŽDÉ 1 ČÁSTICOVÉ HLADINĚ MAXIMÁLNĚ JEDNA ČÁSTICE

ZBAVILI JSME SE SLOŽITOSTI MNOHO ČÁSTICOVÉHO SYSTÉMU A ZŮSTALA NÁM TADY JENOM INFORMACE, KTEROU MUSÍME ZÍSKAT Z <u>1</u> ČÁSTICOVÉHO SYSTÉMU.

POČÍTÁNÍ PRO ČÁSTICE V KRABICI

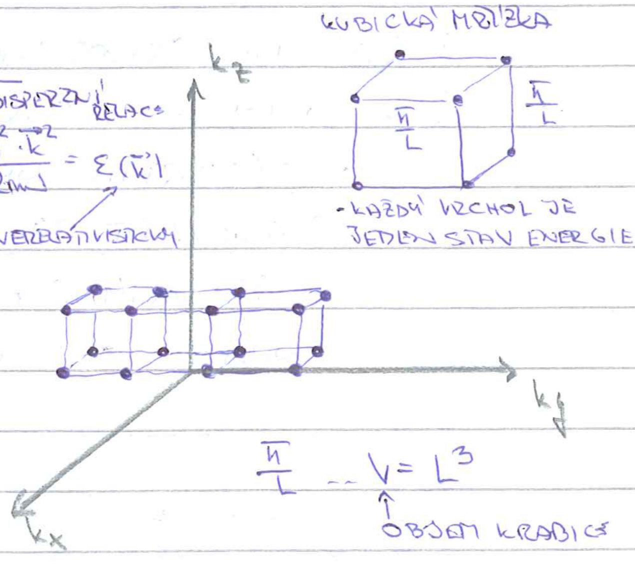
- KRABICE MÁ PEVNÉ HRANICE
- MIMO KRABICI JE POTENCIÁL = ∞
- UVNITŘ KRABICE NA ZAČÁTKU NEBUDE NIC A POTENCIÁL = <u>0</u>
- DO SYSTÉMU DÁME <u>1</u> ČÁSTICI A ZJISTÍME JAKÉ MÁ ENERGIOVÉ HLADINY. TYTO HLADINY SE DAJÍ POPSAT (VEKTORY) BODY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU VEKTORŮ JAKO MŘÍŽKA

$\varepsilon(k)$ - DISPERZNÍ RELACE

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \cdot \vec{k}^2}{2m} = \varepsilon(\vec{k})$$

NERELATIVISTICKY

KUBICKÁ MŘÍŽKA



- KAŽDÝ VRCHOL JE JEDEN STAV ENERGIE

$\frac{\pi}{L}$ ... $V = L^3$ ← OBJEM KRABICE

- VZDÁLENOST MEZI STAVY ($\underbrace{\bullet\!-\!-\!\bullet}_{\text{VZDÁL.}}$) JE $\frac{\pi}{L}$, KDE <u>L</u> JE HRANA TÉ KRABICE, ČÍM VĚTŠÍ JE KRABICE, TÍM BLÍŽE JSOU SI TY STAVY

$$\Omega = -T\cdot\ln\left(e^{-\Omega/T}\right) = -T\cdot\begin{cases}\ln\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)} & \text{BOZONY}\\ \ln\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right) & \text{FERMIONY}\end{cases}$$

b) 7)

$$= \begin{cases} T \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-(\varepsilon_i - \mu)/T}\right) & \text{BOSONY} \\ -T \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 + e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right) & \text{FERMIONY} \end{cases} = \pm T \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)$$

$-$	FERMIONY	$+$
$+$	BOSONY	$-$

NYNÍ ŘEKNEME, ŽE HLADINY JSOU HROZNĚ BLÍZKO U SEBE, ŽE Σ (SUMY) PŘEJDOU NA $\int$ (INTEGRÁL).

$$\Rightarrow \pm T \int d\varepsilon\, \rho(\varepsilon) \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right) = \pm T \int d\varepsilon \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \cdot k^2 \cdot \frac{dk}{d\varepsilon} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right)$$

HUSTOTA STAVŮ $\left(\rho(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \cdot k^2 \frac{dk}{d\varepsilon}\right)$

NE-RELATIVISTICKÝ ~~PŘÍPAD~~ (ČÁSTICE) $\varepsilon = \frac{\hbar^2 \cdot \bar{k}^2}{2m}$

RELATIVISTICKÝ ~~PŘÍPAD~~ (ČÁSTICE) $\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + (\hbar k \cdot c)^2}$

ULTRA-RELATIVISTICKÉ ČÁSTICE $\varepsilon = \hbar \cdot k \cdot c$

NYNÍ VYŘEŠÍME INTEGRÁL PRO NERELATIVISTICKÝ INTEGRÁL

$$k = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} \qquad \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{\sqrt{2m}}{2\hbar\sqrt{\varepsilon}}$$

DOSADÍM DO INTEGRÁLU

$$\Omega = \pm T \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \cdot \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \sqrt{\frac{m}{2\hbar\varepsilon}}\, \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right) =$$

$$= \pm \frac{TV}{2\pi\hbar^3} \cdot 4\pi \sqrt{2m^3} \underbrace{\int_0^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right)}_{\text{VYŘEŠÍM POMOCÍ PER PARTES}} =$$

$$= \pm \frac{4\pi \cdot TV \cdot \sqrt{2m^3}}{2\pi\hbar^3} \left\{ \cancel{\left[\frac{\varepsilon^{3/2}}{3/2} \cdot \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right)\right]_0^{\infty}} - \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{\left(\mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right)\frac{1}{T}}{1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}} \right. =$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \varepsilon^{3/2} \cdot e^{-\varepsilon/T} \to 0$$

PRO $\varepsilon = 0$ NEDOSTANEME ŽÁDNÝ PŘÍSPĚVEK A PRO $\varepsilon = \infty$, $\ln \to 1$ A ZÁVORKA BUDE ROVNA NULE. MOHU PAK ŠKRTNOUT.

$$= -\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\sqrt{2m^3}}{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} \cdot e^{-(\varepsilon-\mu)/T}}{1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}} \, d\varepsilon$$

SUBSTITUCE

$$\Omega_L = -\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\sqrt{2m^3}}{3/2} T^{5/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} \mp 1} = \left| \begin{array}{l} x = \varepsilon/T \\ dx = \frac{d\varepsilon}{T} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{4\pi \cdot V \cdot T^{5/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2m^3}}{3/2} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^x e^{-\mu/T} \mp 1}$$

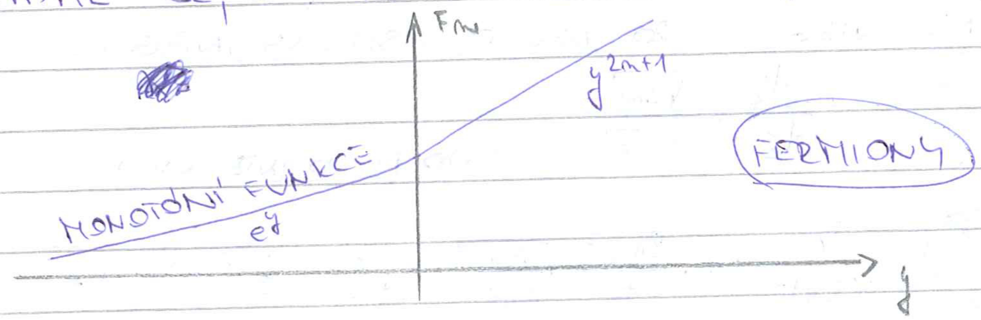
BOSONY $\quad B_n(y) \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^n}{e^x \cdot e^{-y} - 1}$

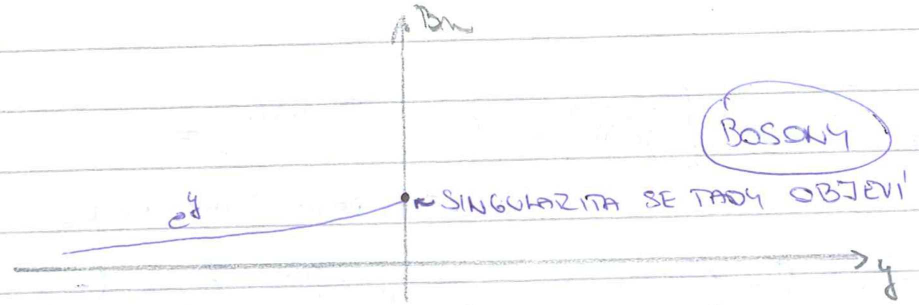
FERMIONY $\quad F_n(y) = \int_0^\infty dx \frac{x^n}{e^x \cdot e^{-y} + 1}$

$$\Omega_L = -\frac{4\pi V T}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{(2mT)^{3/2}}{3} \cdot (B_{3/2}, F_{3/2})\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

SCHOVALI JSME TAK TEN PROBLÉM

PODÍVÁME SE, JAK VYPADÁ FUNKCE $F_n(y)$ A $B_n(y)$:





FUNKCE $B(y)$ NENÍ DEFINOVANÁ PRO KLADNÉ HODNOTY,
V SINGULARITĚ SE DÁ HODNOTA NAPSAT JAKO $\Gamma(n+1)\zeta(n+1)$,
BOSONY MAJÍ VŽDY ZÁPORNÝ CHEMICKÝ POTENCIÁL.

CHEMICKÝ POTENCIÁL JSME DEFINOVALI JAKO ENERGII, KTEROU SYSTÉM ZÍSKÁ, KDYŽ PŘIDÁME 1 ČÁSTICI:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN$$

c)

8

NYNÍ MÁME $\ln\Omega$ A JDEME POČÍTAT POTENCIÁLY

$$p = -\left(\frac{\partial \ln\Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} = +\frac{4\pi \cdot T}{(2\pi\hbar)^3}\frac{(2mT)^{3/2}}{3}(B;F)_{3/2}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

$$N = -\left(\frac{\partial \ln\Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{4\pi V \cdot \cancel{T}}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{(2mT)^{3/2}}{3}\frac{d(B;F)_{3/2}}{dy}\left(\frac{\mu}{T}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{T}}$$

$$S = -\left(\frac{\partial \ln\Omega}{\partial T}\right)_{\mu,V} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{(2m)^{3/2}}{3}\left[\frac{5}{2}T^{3/2}\cdot(B;F)_{3/2}\cdot\left(\frac{\mu}{T}\right) + T^{5/2}\cdot\frac{d(B;F)_{3/2}}{d\mu}\left(\frac{\mu}{T}\right)\left(-\frac{\mu}{T^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{4\pi \cdot V \cdot T^{3/2}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\cdot\frac{(2m)^{3/2}}{3}\left[\frac{5}{2}(B;F)_{3/2}\cdot\left(\frac{\mu}{T}\right) - \frac{\mu}{T}\cdot\frac{d(B;F)_{3/2}}{dy}\right]$$

$$S = \frac{5}{2}\frac{V \cdot p}{T} - \frac{\mu \cdot N}{T} \Rightarrow TS = \frac{5}{2}Vp - \mu N$$

- TENTO VZTAH PLATÍ PRO NERELATIVISTICKÝ IDEÁLNÍ PLYN

ENERGIE SYSTÉMU

$$E = TS - pV + \mu N$$

$$dE = TdS - pdV + \mu dN$$ NYNÍ UDĚLÁME SYSTÉM λ-KRÁT VĚTŠÍ

$E \Rightarrow \lambda E$; $T \Rightarrow T$; $S \Rightarrow \lambda \cdot S$; $p \Rightarrow p$; $V \Rightarrow \lambda V$; $\mu \Rightarrow \mu$; $N \Rightarrow \lambda N$

$$d(\lambda E) = Td(\lambda S) - pd(\lambda V) + \mu d(\lambda N)$$

$$d\lambda E + \lambda dE = T(d\lambda \cdot S + \lambda dS) - p(d\lambda \cdot V + \lambda dV) + \mu(d\lambda \cdot N + \lambda dN)$$

$$d\lambda \cdot E + \cancel{\lambda dE} = d\lambda(TS - PV + \mu N) + \cancel{\lambda}\underbrace{(TdS - pdV + \mu dN)}_{dE}$$ KDYŽ TOTO PLATÍ MOHU SPOČÍTAT VÝRAZ PRO E.

$$E = \frac{5}{2}pV - \mu N - pV + \mu N = \frac{3}{2}pV$$

JE TO RELACE PRO KVANTOVÝ IDEÁLNÍ PLYN NERELATIVISTICKÝ

KVANTOVÝ IDEÁLNÍ PLYN

- PRAVDĚPODOBNOST, ŽE NAJDEME SYSTÉM NAJDEME V NĚJAKÉM URČITÉM STAVU r JE DÁNO:

$$P_r = \frac{e^{-(E_r - \mu N_r)/T}}{\sum_s e^{-(E_s - \mu N_s)/T}}$$

E_r - ENERGIE VE STAVU $|r\rangle$

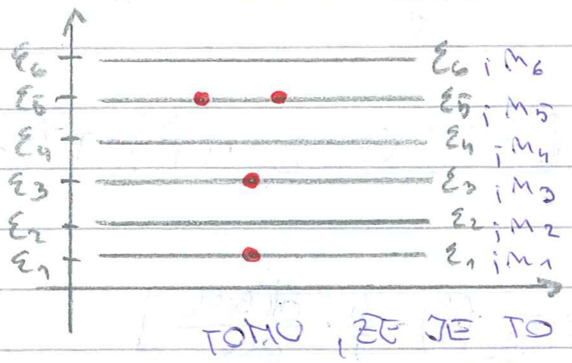
N_r - POČET ČÁSTIC VE STAVU $|r\rangle$

DOŠLI JSME K TOMU, ŽE NEJJEDNODUŠŠÍ ZPŮSOB JAK VYUŽÍVAT TUTO INFORMACI JE SPOČÍTAT PŘÍMO JEDEN Z TERMODYNAMICKÝCH POTENCIÁLŮ:

SUMA PŘES r, VŠECHNY KVANTOVÉ STAVY SYSTÉMU

$$e^{-\frac{\Omega}{T}} = \sum_r e^{-(E_r - \mu N_r)/T}$$

ZAVEDLI JSME 1. ČÁSTICOVOU APROXIMACI:



NAJDEME ENERGIOVÉ HLADINY PRO TEN SYSTÉM S 1 JEDNOU ČÁSTICÍ. A TO POTOM VZTÁHNU NA CELÝ SYSTÉM. TO ŽE TO MOHU TAKTO UDĚLAT, JE DÍKY TOMU, ŽE JE TO IDEÁLNÍ PLYN A ČÁSTICE SPOLU NEINTERAGUJÍ. KAŽDÝ STAV (ENERGIOVÝ) JE DÁN ENERGIÍ JEDNOČÁSTICOVÝCH STAVŮ A POČTEM ČÁSTIC V KAŽDÉ HLADINĚ. V KVANTOVÉM PLYNU ČÁSTICE NEMAJÍ IDENTITU.

CELKOVÝ POČET ČÁSTIC:

$$N_r = n_1 + n_2 + \dots$$
$$E_r = n_1 \cdot \varepsilon_1 + n_2 \cdot \varepsilon_2 + \dots$$

POTOM SE TO CELÉ DÁ PŘEPSAT NA:

$$\Omega = \pm T \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon_i - \mu)/T}\right)$$

SUMA PŘES i, PŘES 1 ČÁSTICOVÉ STAVY ŘEŠENÍ SCH. ROVNICE PRO 1 ČÁSTICOVÉ STAVY. (JEDNODUŠŠÍ)

KDYŽ MÁME VELKÉ SYSTÉMY A HLADINY JSOU BLÍZKO SEBE PAK SUMA Σ PŘECHÁZÍ NA INTEGRÁL $\int$

$$\sum_i \to \int_0^\infty d\varepsilon\, \rho(\varepsilon)$$

TADY ZOHLEDŇUJEME TO, INFORMACI O JEDNOČÁSTICOVÝCH STAVECH, TAK ŽE TAM DÁME HUSTOTU STAVŮ $\rho(\varepsilon)$.

HUSTOTU STAVŮ (PRO VOLNÉ ČÁSTICE V KRABICI V) JE ROVNA:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \cdot k^2 \frac{dk}{d\varepsilon}$$

$-+$ FERMIONY – SUMA OD 0 DO 1

$+-$ BOSONY – SUMA OD 0 DO ∞

$$\Omega = \pm \int_0^\infty d\varepsilon\, \rho(\varepsilon) \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon - \mu)/T}\right)$$

ABYCHOM TOTO MOHLI SPOČÍTAT POTŘEBUJEME POSLEDNÍ DÍLEK SKLÁDAČKY A TO JE DISPERZNÍ RELACE MEZI ε A k

ENERGIE (ε), VLNOVÝ VEKTOR (k)

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2 m}$$

PRO NERELATIVISTICKÝ PŘÍPAD, ENERGIE ROSTE JAKO k^2, V RELATIVISTICKÉ NAOPAK ROSTE LINEÁRNĚ.

d)

9

NYNÍ PRO ULTRARELATIVISTICKÝ PŘÍPAD

- POUŽIJEME DISPERZNÍ RELACI $\varepsilon = \hbar k c$, $k = \frac{\varepsilon}{\hbar c}$ $\frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{1}{\hbar c}$

$$\Omega_{UR} = \pm T \int d\varepsilon \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \cdot k^2 \frac{1}{\hbar c} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right) =$$

PROVEDEME PER PARTES A ZBAVÍME SE LOGARITMU

$$= \pm T \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{(\hbar c)^3} \int d\varepsilon \cdot \varepsilon^2 \cdot \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right) =$$

$$= \pm \frac{T \cdot V \cdot 4\pi}{(2\pi\hbar c)^3} \left[\left[\frac{\varepsilon^3}{3} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{3} \frac{\left(\mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right)\frac{1}{T}}{1 \mp e^{-(\varepsilon-\mu)/T}} \right] =$$

DOHROMADY VŽDYCKY DÁ MINUS

$$= -\frac{1}{3} \frac{4\pi \cdot V \cdot \cancel{T}}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{1}{\cancel{T}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} \mp 1} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{\varepsilon}{T} \\ dx = \frac{1}{T} d\varepsilon \\ d\varepsilon = T \cdot dx \end{array} \right|$$

$$\Omega_{UR} = -\frac{4\pi \cdot V \cdot T^4}{3(2\pi\hbar c)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x \cdot e^{-\mu/T} \mp 1} = -\frac{4\pi V T^4}{3(2\pi\hbar c)^3} (B_3; F_3)\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

$$\Omega_{NR} = -\frac{4\pi V T}{(2\pi\hbar)^3} \frac{(2mT)^{3/2}}{3} (B_{3/2}; F_{3/2})\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

VZTAHY MEZI TLAKEM, ENTROPIÍ, POČTEM ČÁSTIC A ENERGIÍ

$$p = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T;\mu} ; \quad N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T;V} ; \quad S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{\mu;V}$$

$E_{NR} = \frac{3}{2} p_{NR} \cdot V_{NR}$

↑ NERELAT. ENERGIE

PRO ULTRARELATIVISTICKÝ PLYN

$$p = \frac{4\pi \cdot T^4}{3(2\pi\hbar \cdot c)^3} (B;F)_3 \cdot \left(\frac{\mu}{T}\right)$$

$$N = \frac{4\pi V \cdot T^4}{3(2\pi\hbar c)^3} \frac{d(B;F)_3}{dy} \frac{1}{T}$$

$$S = \frac{4\pi V}{3(2\pi\hbar c)^3} \left(4T^3 (B;F)_3 + T^4 \frac{d(B;F)_3}{dy} \left(-\frac{\mu}{T^2}\right)\right)$$

$$S = \frac{4pV}{T} - \frac{N \cdot \mu}{T} ; \quad E = ST - pV + \mu N = (4pV - \mu N) - pV + \mu N = \underline{3pV}$$

PRO ULTRARELATIVISTICKÝ IDEAL PLYN

(MĚLO BY PLATIT OBECNĚ)

TATO RELACE PLATÍ PRO NEUTRINA, ALE MUSÍ MÍT VYSOKOU ENERGII.

STAVOVÁ ROVNICE PRO IDEÁLNÍ PLYN

- BUDEME ŘEŠIT ZATÍM PRO NERELATIVISTICKÝ PŘÍPAD

$$pV = NT$$

$$p(T;V;N) = \frac{N\cdot T}{V}$$

- ZKUSÍM JI DOSTAT ZE VZTAHŮ PRO P; N PRO NERELATIVISTICKÝ IDEÁLNÍ PLYN

$$P(T;V;\mu) = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} = \frac{4\pi T (2mT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3} (B;F)_{3/2}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

$$N(T;V;\mu) = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{4\pi \cdot V \cdot T (2mT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3T}\left(\frac{d(B;F)_{3/2}}{dy}\right)_{y=\frac{\mu}{T}}$$

MÁME SICE NĚJAKOU STAVOVOU ROVNICI, NENÍ TO ALE TA CO ZNÁME SE $\underbrace{\text{POTŘEBUJEME}}_{\text{KTEROU SI PORADÍME}}$ ODSTRANIT μ (TU ZÁVISLOST NA NĚM) A NAHRADIT JI ZÁVISLOSTÍ N. K TOMU VYUŽIJEME LEGENDROVY TRANSFORMACE.

LEGENDROVY TRANSFORMACE

$$\Omega - \mu N = \overset{\text{NĚJAKÁ FUNKCE}}{F}(T;V;N)$$

MÁME

$$F(T;V;N) = \Omega(T;V;\mu(T;V;N)) - N\cdot\mu(T;V;N)$$

MUSÍME NĚCO INVERTOVAT (ZJISTIT INVERZNÍ FUNKCI)

$$\left(\frac{d(B;F)}{dy}\right)_{y=\frac{\mu}{T}} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi V}\frac{3}{(2mT)^{3/2}}N$$

MĚLO BY TO BÝT MOŽNÉ PROTOŽE FUNKCE JSOU MONOTÓNÍ A CHOVAJÍ SE HEZKY

$$(B,F)_n\left(\frac{\mu}{T}\right) = \int_0^\infty dx \frac{x^n}{e^x \cdot e^{-\mu/T} \mp 1}$$

TOTO JE FUNKCE ČISTĚ $x-y$, TAKŽE TO MOHU NAPSAT JAKO DERIVACE PODLE x S MÍNUSEM, PAK UDĚLÁM PER PARTES.

e) 1c

MINUS KVŮLI DERIVACI

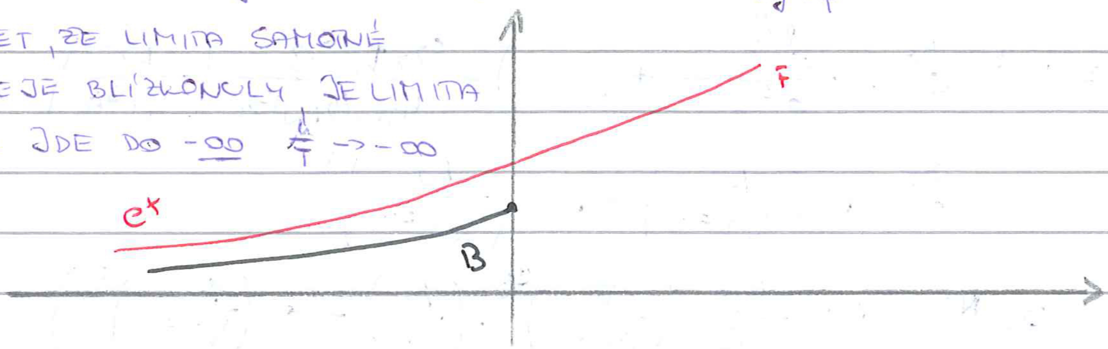
$$\frac{d(B;F)_m}{dy} = -\int_0^\infty dx \cdot x^m \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^{x-y}\mp 1}\right) = m\int_0^\infty dx \frac{x^{m-1}}{e^{x-y}\mp 1} = m(B;F)_{m-1}(y)$$

NYNÍ ZKUSÍME VYPOČÍTAT PŘÍMO TO CO POTŘEBUJEME PRO TU INVERZNÍ FUNKCI. PROVEDEME KLASICKÉ LIMITY PRO VYSOKÉ TEPLOTY $T \to \infty$ A NÍZKÉ HUSTOTY $N/V \to 0$. HMOTA SE CHOVÁ DIVNĚ PRO NÍZKÉ TEPLOTY A HUSTOTA VYSOKÁ!

CHCEME POŘÁD SPOČÍTAT INVERZNÍ FUNKCI

$$\left(\frac{d(B;F)_{3/2}}{dy}\right)_{y=\frac{\mu}{T}} = \left(\frac{3}{2}(B;F)_{1/2}\right)_{y=\frac{\mu}{T}} = \overbrace{\frac{(2\pi\hbar)^3\cdot 3}{4\pi(2m)^{3/2}}\left(\frac{N}{VT^{3/2}}\right)}^{\text{PRAVÁ STRANA JDE DO NULY}} \to 0$$

JE VIDĚT, ŽE LIMITA SAMOTNÉ FUNKCE JE BLÍZKO NULY JE LIMITA KDE x JDE DO $-\infty$ $\frac{\mu}{T} \to -\infty$



TEĎ SE PODÍVÁME NA TEN INTEGRÁL A ZKUSÍME TO SPOČÍTAT HEZKÝM ZPŮSOBEM PRO $y \to -\infty$ (VELKÉ A ZÁPORNÉ)

$$(B;F)_m = \int_0^\infty dx \frac{x^m}{e^{x-y}\mp 1} \longrightarrow \{y \to -\infty\} = \int_0^\infty dx \frac{x^m}{\underbrace{e^x \cdot e^{|y|}}_{\text{VELKÉ ČÍSLO}} \underbrace{+1}_{\text{MŮŽU ZANEDBAT}}} =$$

PRO FERMIONY A BOSONY VÝSLEDEK STEJNÝ, DÁ SE ŘÍCT V KLAS. SVĚTĚ MEZI NIMI MOC ROZDÍL NEVIDÍME.

$$= e^y \int_0^\infty dx\, x^m e^{-x} = e^y \underbrace{\Gamma(m+1)}_{\text{GAMA FUNKCE}}$$

$m = 1/2$

$$\frac{3}{2} e^{\mu/T}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{(2\pi\hbar)^3\cdot 3}{4\pi(2m)^{3/2}}\left(\frac{N}{VT^{3/2}}\right)$$

$$e^{\mu/T} = \frac{(2\pi\hbar)^3\cdot 3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)4\pi\cdot(2m)^{3/2}}\left(\frac{N}{VT^{3/2}}\right)$$

STAČÍ NÁM URČIT TOTO A PAK TO STRČIT DO VÝRAZU NAHOŘE

$$P = \frac{4\pi T(2mT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3\cdot 3}\cdot e^{\mu/T}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{4\pi}\, T\, \cancel{(2\pi m T)^{3/2}}}{\cancel{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3}} \cancel{\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)} \cdot \frac{\cancel{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3}}{\cancel{\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) \cdot 4\pi \cdot (2m)^{3/2}}} \left(\frac{N}{V \cancel{T^{3/2}}} \right) = \frac{N}{V} \cdot T = P$$

TOTO JE TEN KLASICKÝ PŘÍPAD PRO IDEÁLNÍ PLYN

NYNÍ ZKUSÍME ŘÍCT, ŽE TEPLOTA NEBUDE TAK MOC VYSOKÁ. JAK SE OBJEVÍ TO, ŽE NENÍ KLASICKÝ IDEÁLNÍ PLYN, ALE KVANTOVÝ IDEÁLNÍ PLYN. UDĚLÁME ROZVOJ VYŠŠÍHO ŘÁDU.

OPĚT VYUŽIJEME Γ FCI

$$= e^{y} \int_0^\infty dx \cdot x^m \cdot e^{-x} \left(1 \pm e^{-x} \cdot e^{y} + \ldots\right) = e^{y}\Gamma(m+1) \pm \frac{e^{2y}}{2^{m+1}} \int_0^\infty dz \cdot z^m \cdot e^{-z} + \ldots =$$

$$= e^{y}\Gamma(m+1) \pm \frac{e^{2y}}{2^{m+1}} \Gamma(m+1) + \mathcal{O}(e^{3y})$$

$$\Gamma(3/2)\, \frac{3}{2} \left(e^{\mu/T} \pm \frac{e^{2\mu/T}}{e^{3/2}} + \ldots \right) = \frac{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3}{4\pi \cdot (2m)^{3/2}} \left(\frac{N}{V T^{3/2}} \right)$$

$$e^{\mu/T} = \alpha_1 \left(\frac{N}{V T^{3/2}} \right) + \alpha_2 \left(\frac{N}{V T^{3/2}} \right)^2 + \ldots$$

$$P = \frac{NT}{V} \left(1 \mp \frac{\hbar^3}{2} \left(\frac{\pi}{mT} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{N}{V} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{N}{V T^{3/2}} \right)^2 \right)$$

SPOČÍTANÁ PRVNÍ APROXIMACE

NULTÁ APROXIMACE

TADY UŽ SE OBJEVÍ ROZDÍL MEZI FERMIONY A BOSONY, KDYŽ ZVÝŠÍME HUSTOTU A SNÍŽÍME TEPLOTU, PAK TLAK PRO FERMIONY SE ZVĚTŠÍ, ALE TLAK PRO BOSONY SE SNÍŽÍ. TO JE Z TOHO KVANTOVÉHO DŮVODU, ŽE FERMIONY NEMŮŽE BÝT VÍCE V JEDNOM STAVU, BUDOU SE BRÁNIT. TÍMTO ZPŮSOBEM TEDY MŮŽEME POČÍTAT VŠECHNY RCE, KTERÉ ZNÁME PRO KLASICKÝ IDEÁLNÍ PLYN PLUS KOREKCE. ALE MUSÍME PAMATOVAT TRIK, ŽE ABYCHOM SE ZBAVILI μ, MUSÍME UDĚLAT INVERZNÍ FUNKCI MEZI N A μ.

DAJÍ SE OVĚŘIT KVANTOVÉ VLASTNOSTI SVĚTA MĚŘENÍM MAKROSKOPICKÝCH VELIČIN.

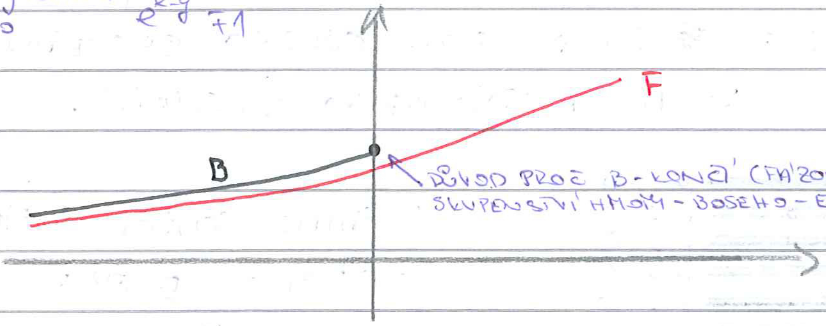
(11)

NYNÍ TO UDĚLÁME OBRÁCENĚ $T \to 0K$

- POSTUP BUDE STEJNÝ, MUSÍME NEJDŘÍV NAJÍT INVERZNÍ VZTAH MEZI μ A N ABYCHOM SE ZBAVILI μ A DOSTALI ZÁVISLOST NA N.

(NÍZKÉ TEPLOTY & VYSOKÉ HUSTOTY)

$$(B;F)_m = \int_0^\infty dx \, \frac{x^m}{e^{x-y} \mp 1}$$



$$\frac{3}{2}(B;F)_{1/2} = \frac{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3}{4\pi \cdot V \cdot 2m \cdot T^{3/2}} \longrightarrow \infty$$ HUSTOTA ROSTE TLESÁ TEPLOTA JDE TEDY DO NEKONEČNA

VIDÍME VELKÝ ROZDÍL MEZI BOSONY A FERMIONY, PROTOŽE B-FUNKCE KONČÍ NA y-OSE A VÝŠŠÍ UŽ NEBUDE.

$$F_m(y) = \int_0^\infty dx \, \frac{x^m}{e^{x-y}+1} = \{x - y = z\} = \int_{-y}^\infty dz \, \frac{(z+y)^m}{e^z+1} = \int_0^\infty dz \, \frac{(z+y)^m}{e^z+1} +$$

$$+ \int_{-y}^0 dz \, \frac{(-z+y)^m}{e^{-z}+1} = \int_0^\infty dz \, \frac{(z+y)^m}{e^z+1} - \int_0^\infty dz \, \frac{(y-z)^m}{e^z+1} + \int_0^y dz \, (y-z)^m$$

$$\frac{1}{e^{-z}+1} = \frac{e^z}{e^z+1} = 1 - \frac{1}{e^z+1}$$

$$F_m(y) = \frac{y^{m+1}}{m+1} + 2my^{m-1} \cdot F_1(0) + \dots$$

UDĚLÁME INVERZNÍ FUNKCI

$$P = \frac{N}{V} \, \frac{2}{5} \, \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{2} (2\pi)^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \underbrace{\text{NĚJAKÉ ČÍSLO}}_{\text{KONST.}} \cdot \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

TLAK NEZÁVISÍ NA TEPLOTĚ PRO FERMIONY! PŘI NÍZKÉ TEPLOTĚ A VYSOKÉ HUSTOTĚ.

SUMARIZACE

← POTENCIÁL LANDAŮV

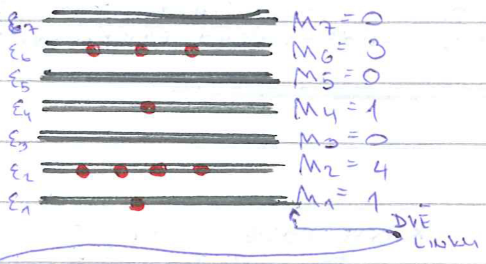
$$e^{-\Omega_L/T} = \sum_r e^{-(E_r - \mu N_r)/T}$$

← SUMA PŘES STAVY CELÉHO SYSTÉMU

E_r – ENERGIE TOHO STAVU

N_r – POČET ČÁSTIC V TOMTO STAVU

VYUŽIJEME 1 ČÁSTICOVOU APROXIMACI, TA NÁM ŘÍKÁ, ŽE MŮŽEME POPSAT STAVY CELÉHO SYSTÉMU POMOCÍ STAVU JEDNOČÁSTICOVÉHO SYSTÉMU.



ZÍSKÁME SOUBOR 1 ČÁSTICOVÝCH STAVŮ S RŮZNOU ENERGIÍ A K MNOHOČÁSTICOVÉ STAVY POPSANÉ POMOCÍ 1 ČÁSTICOVÝCH STAVŮ ZÍSKÁME TÍM, ŽE ŘEKNEME KOLIK MÁME ČÁSTIC V KAŽDÉ HLADINĚ.

POTOM SI MŮŽEME PŘEDSTAVIT JAK VYPADÁ SUMA, PROTOŽE TO BUDE SUMA PŘES VŠECHNY 1 ČÁSTICOVÉ STAVY

ČÁSTICE MAJÍ POLOVIČNÍ SPIN

$$\Omega_L = \pm 2T \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon_i - \mu)/T}\right)$$ BOSONY / FERMIONY

PRO BOSONY AŽ DO ∞; PRO FERMIONY 0 NEBO 1. PAULIHO VYLUČOVACÍ PRINCIP. PRO VELKÉ SYSTÉMY, KDE JSOU HLADINY BLÍZKO SEBE PŘEJÍT OD Σ DO $\int$.

$$\Omega_L = \pm T \int_0^{\infty} d\varepsilon\, \rho(\varepsilon) \ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon - \mu)/T}\right)$$

$\sum_{i=1}^{\infty}$ HUSTOTA STAVŮ

POTŘEBUJEME INTEGROVAT → ZJISTÍME CO JE $\rho(\varepsilon)$

$$d\varepsilon\, \rho(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k = \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \frac{dk}{d\varepsilon}\, d\varepsilon$$

~~DISPERZNÍ RELACE~~

PŘI ZJIŠŤOVÁNÍ $\rho(\varepsilon)$ JSME VYUŽILI TOHO, ŽE V k PROSTORU (V PROSTORU VLNOVÝCH VEKTORŮ) ZE SCHRÖDINGEROVY ROVNICE, KDE HUSTOTA STAVŮ JE KONSTANTNÍ.

VLN. VEKTOR

DŮLEŽITÉ JAKÝM ZPŮSOBEM ZÁVISÍ ENERGIE ε NA $\vec{k}$, TO NÁM ŘÍKÁ DISPERZNÍ RELACE. NERELATIVISTICKÁ, RELATIVISTICKÁ, ULTRARELATIVISTICKÁ DISP. RELACE.

ZÁŘENÍ ČERNÉHO TĚLESA

- NENÍ TO NIC JINÉHO NEŽ IDEÁLNÍ FOTONOVÝ PLYN. PRO NĚJ PLATÍ ULTRARELATIVISTICKÝ PLYN

$\varepsilon = \hbar \cdot k \cdot c$ (LINEÁRNÍ DISPERZNÍ RELACE)

A ZNÁME PRO NĚJ Ω.

$$\Omega = -\frac{4\pi \cdot V}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{T^4}{3} B_3\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

$\boxed{\text{FOTONY JSOU BOSONY}}$

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar c)^3} T^3 \cdot B_2\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

$$P = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} = \frac{4\pi T^4}{(2\pi\hbar c)^3 \cdot 3} \cdot B_3\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar c)^3} \cdot \frac{T^3}{3}\left(4 \cdot B_3\left(\frac{\mu}{T}\right) - 3 B_2\left(\frac{\mu}{T}\right)\frac{\mu}{T}\right)$$

ČÁSTICE NEMAJÍ ŽÁDNOU KLIDOVOU HMOTU, TO ZNAMENÁ ŽE MŮŽEME Z LIBOVOLNĚ MALÉHO MNOŽSTVÍ HMOTY MŮŽEME VYTVOŘIT FOTON. TO ZNAMENÁ, ŽE CHEMICKÝ POTENCIÁL SYSTÉMU JE $\mu = 0$.

$$N = 2\frac{4\pi \cdot V}{(2\pi\hbar c)^3} \cdot T^3 \cdot B_2(0) \quad ; \quad P = 2\frac{4\pi}{(2\pi\hbar c)^3} \cdot \frac{T^4}{3} \cdot B_3(0) =$$

ÚPRAVA O POLARIZACI

$$= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{T^4}{3} \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2 \cdot T^4}{45(\hbar c)^3}$$

$$S = 2\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{T^3}{3} \cdot 4 \cdot B_3(0) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{\pi^4}{15} = \frac{4\pi^2 \cdot V \cdot T^3}{45(\hbar c)^3}$$

FOTONY MAJÍ POLARIZACI (1 LEVOTOČIVÝ A DRUHÝ PRAVOTOČIVÝ), KAŽDÝ STAV MŮŽE BÝT LEVOTOČIVÝ/PRAVOTOČIVÝ FOTON!

$$B_n(y) = \int_0^y dx \, \frac{x^n}{e^x e^{-y} - 1}$$

$e^{-x} < 1$ ... MOHU TO PAK NAPSAT JAKO GEOMETRICKOU ŘADU

$$B_n(0) = \int_0^\infty dx \, \frac{x^n}{e^x - 1} = \int_0^\infty dx \, x^n \cdot e^{-x} \, \frac{1}{1 - e^{-x}} = \int_0^\infty dx \, x^n \cdot e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) =$$

$$= \int_0^\infty dx \, x^n e^{-x} + \int_0^\infty dx \, x^n \cdot e^{-2x} + \dots + \int_0^\infty dx \, x^n e^{-kx} + \dots$$

INTEGRÁL NAPÍŠEME JAKO ŘADU

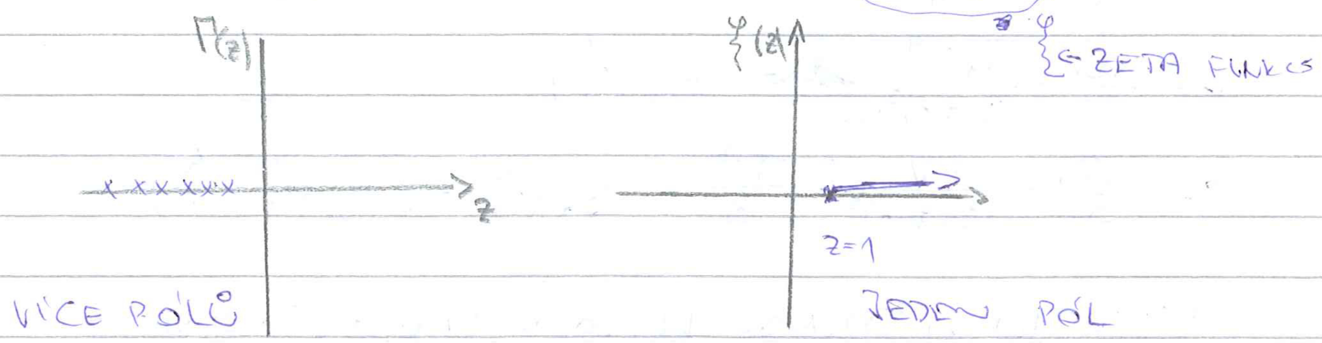
VYPOČÍTÁME INTEGRÁL PRO LIBOVOLNÉ **k** A DOSTANEME TAK VÝSLEDEK PRO VŠECHNY ČLENY.

$$\int_0^\infty dx \cdot x^n \cdot e^{-kx} = \begin{Bmatrix} z = kx \\ dz = k\,dx \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \frac{dz}{k} \cdot \frac{z^n}{k^n} e^{-z} = \frac{1}{k^{n+1}} \int_0^\infty dz \cdot z^n \cdot e^{-z} =$$

$$= \frac{1}{k^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

$$B_n(0) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n+1}} \Gamma(n+1) = \Gamma(n+1) \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n+1}} = \Gamma(n+1)\, \zeta(n+1)$$

ζ ← ZETA FUNKCE



$$\zeta(z=0) = \sum \frac{1}{k^0} = 1 + 1 + 1 + 1 \dots$$

$$\zeta(z=-1) = \sum \frac{1}{k^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \frac{1}{12}$$

$$B_2(0) = \zeta(3)\,\Gamma(3) = 2\,\zeta(3) \approx 2{,}404 \dots$$

$$B_3(0) = \zeta(4)\,\Gamma(4) = 6 \cdot \zeta(4) \approx 6 \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{15}$$

↑ KDYŽ SUDÁ MOCNINA MOHU POUŽÍT FOURIEROVU ŘADU.

$$E = 3PV = \frac{\pi^2}{15(\hbar c^3)} \cdot T^4 \cdot V$$

BOLTZMANŮV ZÁKON (ENERGIE FOTONOVÉHO PLYNU)

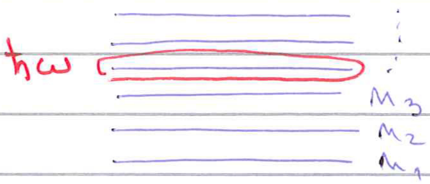
$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{4}{15} \pi^2 \cdot \frac{T^3 \cdot V}{(\hbar c)^3}$$

h)

(13)

Z TOHO CO VÍME, MŮŽEME VYTÁHNOUT JEŠTĚ VÍCE INFORMACÍ, VIZ TŘEBA c_V NA PŘEDCHOZÍ STRANĚ. CO KDYŽ CHCEME SPOČÍTAT PRŮMĚRNÝ POČET FOTONŮ V URČITÉM / KONKRÉTNÍM 1-ČÁSTICOVÉM STAVU S ENERGIÍ $\hbar\omega$? TO NEZÍSKÁM, PROTOŽE JSME UŽ VLASTNĚ PRŮMĚROVALI PŘES VŠECHNY STAVY, ZTRATILI JSME INFORMACE O KONKRÉTNÍCH ENERGIOVÝCH HLADINÁCH, ALE TÍM ŽE ZNÁME ODVOZENÍ, NENÍ PROBLÉM TO SPOČÍTAT. TEĎ TO TEDY ZKUSÍME ZJISTIT PRO TO $\hbar\omega$

OPĚT MÁME 1 ČÁSTICOVÉ STAVY



$$\overset{\text{POČET ČÁSTIC VE STAVU } \hbar\omega}{\langle n_\omega \rangle} = \frac{\sum_r n_\omega \cdot e^{-(E_r - \mu N_r)/T}}{\sum_s e^{-(E_s - \mu N_s)/T}}$$

BUDEME SE DÍVAT JAKÝ JE PRŮMĚRNÝ POČET ČÁSTIC V TOMTO STAVU. PRO KAŽDÝ KONKRÉTNÍ STAV ZNÁM POČET FOTONŮ, VÍM JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST NALÉZT V SYSTÉMU KOMBINACE S RŮZNÝMI ENERGIEMI. OPĚT 1 ČÁS. APROXIMACE, SUMU ROZEPÍŠI ~~JAKO~~ PŘES VŠECHNA n

$$= \frac{\cancel{\sum_{n_1=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_1-\mu)/T}\right)^{n_1}} \cdot \cancel{\sum_{n_2=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_2-\mu)/T}\right)^{n_2}} \cdots \sum_{n_\omega=0}^{\infty} n_\omega \cdot \left(e^{-(\hbar\omega-\mu)/T}\right)^{n_\omega}}{\cancel{\sum_{n_1=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_1-\mu)/T}\right)^{n_1}} \cdot \cancel{\sum_{n_2=0}^{\infty} \left(e^{-(\varepsilon_2-\mu)/T}\right)^{n_2}} \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(\hbar\omega-\mu)/T}\right)^{k}} =$$

$$= \frac{\sum_{n_\omega=0}^{\infty} n_\omega \left(e^{-(\hbar\omega-\mu)/T}\right)^{n_\omega}}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(\hbar\omega-\mu)/T}\right)^{k}} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} l \cdot x^l}{\sum_{n_\omega=0}^{\infty} x^{n_\omega}} = \frac{\frac{x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{(1-x)}} = \underline{\underline{\frac{x}{1-x}}}$$

POZN. $\sum_{n_\omega=0}^{\infty} x^{n_\omega} = \frac{1}{1-x}$; $\sum_{l=0}^{\infty} l x^l = x \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{\infty} x^l = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$

PRŮMĚRNÁ HODNOTA FOTONŮ VE STAVU $\langle n_\omega \rangle$ SE ROVNÁ

$$\langle n_\omega \rangle = \left. \frac{e^{-(\hbar\omega-\mu)/T}}{1 - e^{-(\hbar\omega-\mu)/T}} \right|_{\mu=0} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

PLANCKOVO ROZDĚLENÍ

CELKOVÁ ENERGIE VŠECH FOTONŮ VE STAVECH S ENERGIÍ V INTERVALU $(\hbar\omega ; \hbar\omega + \hbar d\omega)$.

KDYŽ MÁME TEDY VELKOU ENERGII, TAK POČET FOTONŮ JE MALÝ, KDYŽ MÁME MALOU ENERGII POČET FOTONŮ VELKÝ.

~~ENERGIE~~

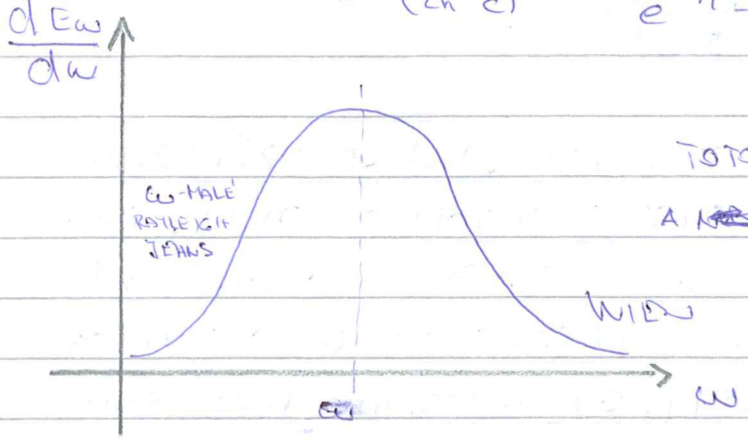
HUSTOTA STAVŮ

$$dE_\omega = \langle n_\omega \rangle \hbar\omega \, \rho(\hbar\omega)\hbar \, d\omega$$

$$\rho(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{k} = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} k^2 \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon^2}{(\hbar c)^3} \frac{d\varepsilon}{\hbar c}$$

$$dE_\omega = \frac{2\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1} \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar c)^3} (\hbar\omega)^2 \hbar \, d\omega =$$

$$= \frac{4\pi V \cdot 2}{(2\pi c)^3} \cdot \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/T}-1} d\omega$$



TOTO NÁM ŘÍKÁ PRO KTERÉ FREKVENCE A ~~...~~ ENERGIE NOSÍ FOTONY NEJVÍCE ENERGIE.

ZAJÍMÁ NÁS TEĎ SMĚR POHYBU, VYBEREME SI NĚJAKÝ KONKRÉTNÍ VLNOVÝ VEKTOR $\vec{k}'$. V NĚJAKÉM MALÉM OBJEKTU KOLEM NĚJAKÉHO STAVU. BUDEME POČÍTAT KOLIK FOTONŮ MÁ ZHRUBA VLNOVÝ VEKTOR $\underline{k}$

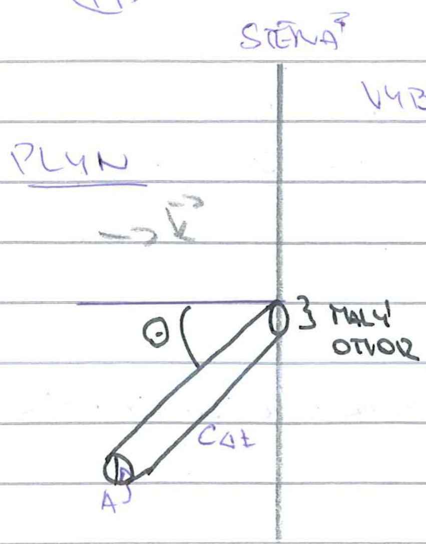
KVŮLI POLARIZACI

$$dn_\omega = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1} 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{k} =$$

$$= \frac{2}{e^{\hbar\omega/T}-1} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{c^3} d\omega \, d\Omega$$

UDĚLÁME KOLEM PLYNU STĚNU S MALÝM OTVOREM A KOLIK FOTONŮ UTEČE Z TOHO PLYNU PŘES TU STĚNU.

č. (14)



VYBERU SI VLNOVÝ VEKTOR $\vec{k}$.

KOLIK JICH UTEČE? (JSOU TO TY CO MAJÍ VLN. VEK. $\vec{k}$)

$$dN_\omega = dn_\omega(\vec{k})\,\frac{A\cdot c\cdot \Delta t\cdot\cos\Theta}{V}\cdot\frac{1}{A\cdot\Delta t}$$

ZA JEDNOTKOVOU PLOCHU A ČAS!!!

ČÁST CELÉHO OBJEMU CO UTEČE

$$dN_\omega(\Omega) = \frac{2}{e^{\hbar\omega/T}-1}\,\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\omega^2}{c^2}d\omega\, d\Omega\,\frac{c}{V}\cos\Theta$$

POČET VŠECH FOTONŮ S ~~VLN. VEK.~~ $\vec{k}$ KONKRÉTNÍM VEKTOREM $\vec{k}$

TED POTŘEBUJI SPOČÍTAT INTEGRÁL PŘES VŠECHNY MOŽNÉ SMĚRY $\vec{k}$.

$\pi/2$ ← PROTOŽE $\vec{k}$ NEMŮŽE JET VZAD (NEVYLEZLO BY VEN)

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\Theta \sin\Theta$$

$$dN_\omega = \frac{2}{(e^{\hbar\omega}-1)}\,\frac{\omega^2}{c^2}d\omega\,\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{\pi/2} d\Theta \sin\Theta\cos\Theta$$

$$dN_\omega = \frac{1}{(e^{\hbar\omega}-1)}\cdot\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 d\omega$$ TAKTO BYCH ZÍSKAL CELKOVÝ POČET FOTONŮ CO UTEČE

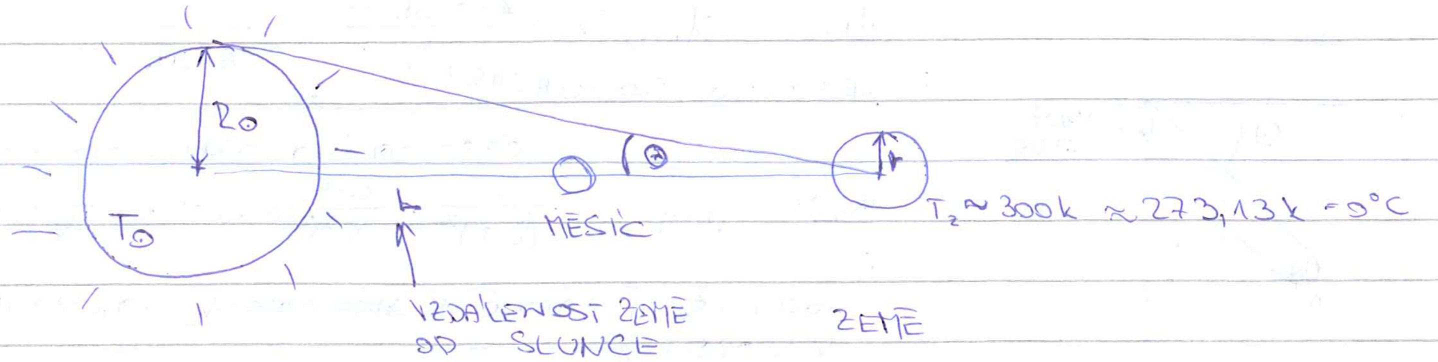
$$\frac{1}{\hbar}\int_0^\infty d(\hbar\omega)\,\frac{\hbar\omega}{(e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1)}\left(\frac{\hbar\omega}{2\pi\hbar c}\right)^2 = \frac{T^4}{\hbar(2\pi\hbar c)^2}\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x-1}\; B_3(0) =$$

$$B_3(0) = \Gamma(4)\,\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$$

$$= \frac{\pi^2}{60\hbar^3c^2}T^4 = \sigma\cdot T^4$$

σ

DOMÁCÍ ÚKOL – ZJISTIT TEPLOTU SLUNCE V NOCI. VÍME, ŽE NEDÁVNO BYLA DOBA LEDOVÁ … 0°C, JE ÚPLNĚK.



SLUNCE (ZÁŘÍ JAKO ABS. ČERNÉ TĚLESO)

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{R_\odot}{L}$$

MŮŽEME SPOČÍTAT KOLIK ENERGIE PŘITEČE OD SLUNCE A KOLIK ENERGIE ZASE UTEČE VEN (ZEMĚ BUDE ZÁŘIT JAKO ČERNÉ TĚLESO). BUDEME PŘEDPOKLÁDAT, ŽE JE TO V ROVNOVÁZE.

(ENERGIE) VÝKON SLUNCE: $\sigma T_\odot^4 \cdot 4\pi R_\odot^2 \cdot \overbrace{\frac{\pi r^2}{4\pi L^2}}^{\text{PLOCHA NA ZEMĚKOULI VE SROVNÁNÍ S } L}$

(ENERGIE) VÝKON ZEMĚ: $\sigma \cdot T_2^4 \cdot 4\pi r^2$

DVĚ ROVNICE SPOJÍM

$$\frac{R_\odot}{L} \approx \frac{0{,}5}{60} \approx \operatorname{tg} 30'$$

$$\cancel{\sigma} \cdot T_\odot^4 \cdot \cancel{4\pi} R_\odot^2 \cdot \frac{\cancel{\pi r^2}}{4\pi L^2} = \cancel{\sigma} \cdot T_2^4 \cdot \cancel{4\pi} \cdot \cancel{r^2}$$

$$T_\odot^4 \cdot \frac{R_\odot^2}{4L^2} = T_2^4$$

$$T_\odot^4 = T_2^4 \cdot 4 \cdot \frac{L^2}{R_\odot^2}$$

O MĚSÍCI VÍME, ŽE MÁ STEJNÝ ÚHLOVÝ PRŮMĚR JAKO SLUNCE (30')

$$T_\odot = T_2 \cdot \sqrt[4]{\frac{4 \cdot L^2}{R_\odot^2}} = \underline{\underline{5847{,}63\,K}}$$

TOTO JE APLIKACE KVANTOVÉHO BOSONOVÉHO, ULTRARELATIVISTICKÉHO IDEÁLNÍHO PLYNU.

(15)

APLIKACE FERMIONOVÉHO PLYNU V ASTROFYZICE

TVOŘÍ SE PLYN JADER
VŠECHNY ATOMY IONIZOVANÉ (ELEKTRONY ODLETĚLY)

- BÍLÝ TRPASLÍK – $M \sim 10^{30}\,kg$; $T \sim 10^{7}\,K$; $\rho \sim 10^{10}\,kg/m^3$
- NEUTRONOVÁ HVĚZDA – NEUTRONOVÝ PLYN

1000 eV/NA ATOM

KDYŽ BYCHOM CHTĚLI POPSAT OBA SYSTÉMY, TAK SE UKAZUJE
- Z TEPLOTY MŮŽEME ODHADNOUT KOLIK ENERGIE DOPADÁ NA KAŽDÝ ATOM : $E \approx NkT \sim kT$ (KLASICKÝ IDEÁLNÍ PLYN)

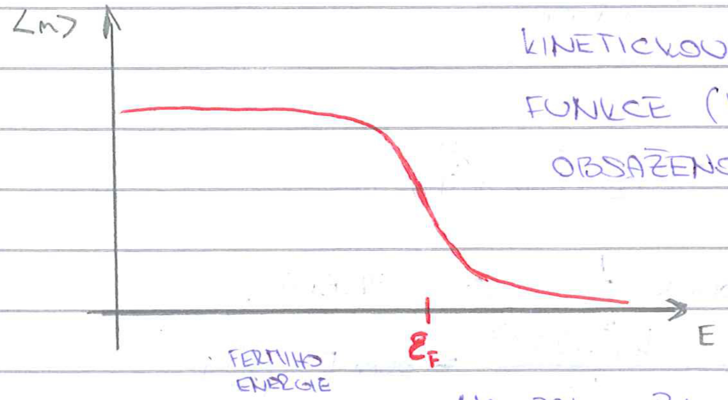
$m_{He} \sim 4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg \Rightarrow \frac{\text{POČET ATOMŮ}}{V} \sim 1{,}5 \cdot 10^{36}/m^3$

- MÁME TAM (BÍLÝ TRPASLÍK) ELEKTRONOVÝ PLYN (ELEKTRONY JSOU VOLNÉ), MUSÍME ZJISTIT V JAKÉM REŽIMU TEN PLYN JE A JESTLI JE VŮBEC IDEÁLNÍ (NA PRVNÍ POHLED NEVYPADÁ).
- IDEÁLNÍ PLYN TO BUDE KDYŽ KINETICKÁ ENERGIE BUDE MNOHEM VĚTŠÍ NEŽ POTENCIÁLNÍ ENERGIE. $E_{kin} \gg E_{pot}$

POTENCIÁLNÍ ENERGII ZJISTÍME ZE VZTAHU:

$$z \sim \frac{e^2}{r} \sim \frac{e^2}{\sqrt[3]{\frac{V}{N}}} \sim e^2 \sqrt[3]{\frac{N}{V}}$$

HUSTOTA $\frac{N}{V} = 3 \cdot 10^{36}\,m^{-3}$



KINETICKOU ENERGII ZJISTÍM Z ROZDĚLOVACÍ FUNKCE (KDYŽ JSOU TO FERMIONY), Z PRŮMĚRNÉ OBSAZENOSTI STAVŮ $\langle n \rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1}$

PRO NÍZSKÉ ENERGIE JSOU TY STAVY PLNÉ A PRO VYSOKÉ ENERGIE NAOPAK PLNÉ.

$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \frac{d\varepsilon}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m}$

INTEGRÁL PŘES VŠECHNY MOŽNÉ STAVY; HUSTOTA STAVŮ

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, \rho(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{V \cdot 4\pi}{(2\pi\hbar)^3} k^2 \frac{m}{\hbar^2 k}\, d\varepsilon$$

$$N = \int_0^{\varepsilon_p} \frac{V \cdot 4\pi}{(2\pi)^3} \cdot \frac{m}{\hbar} \cdot \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}\, d\varepsilon = \frac{4\pi V \cdot m^{3/2} \sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon =$$

$$= \frac{V \cdot m^{3/2} \cdot 4\pi \cdot \sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2}{3} \varepsilon_F^{3/2}$$

$$\varepsilon_F = \left[\frac{N}{V} \frac{3 \cdot (2\pi\hbar)^3 \cdot 4\pi}{(2m)^{3/2}} \right]^{2/3} \sim \# \left[\frac{N}{V} \right]^{2/3}$$

HUSTOTA; ČÍSLO

ZVĚTŠÍM HUSTOTU A PLYN BUDE VÍCE IDEÁLNÍ.
POTENCIÁLNÍ ENERGIE ROSTE JAKO $\rho^{1/3}$ A KINETICKÁ JAKO $\rho^{2/3}$.

$$\varepsilon_F \gg z$$
$$\varepsilon_F \gg e^2 \sqrt[3]{\frac{N}{V}}$$

$$\left[\frac{N}{V}\right]^{1/3} \gg \left[\frac{(2m)^{3/2}\cdot e^3}{4\pi\cdot 3(2\pi\hbar)^3}\right]^2 \sim \left[2\cdot 10^{10}\right]^3$$

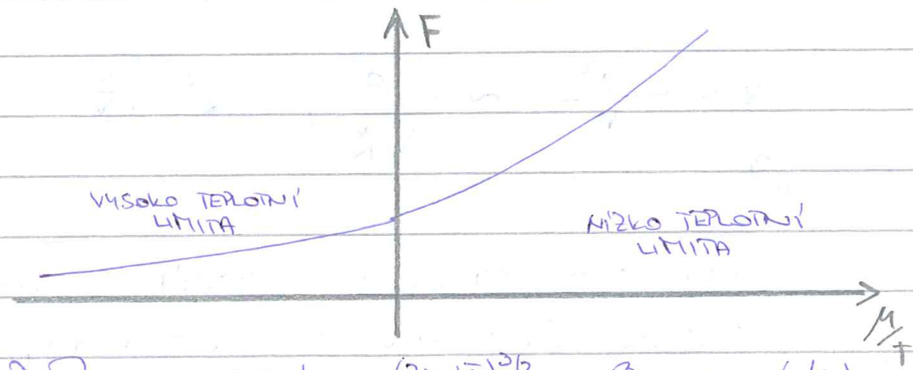
$$3\cdot 10^{36} \gg 6\cdot 10^{30}$$

TAKŽE TEN PLYN JE IDEÁLNÍ

$$\boxed{\Omega_1 = -2\cdot T\cdot \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{(2mT)^{3/2}}{3}\, F_{3/2}\left(\frac{\mu}{T}\right)}$$

SPIN

JEŠTĚ JE NUTNÉ ZJISTIT ZDA 10^7K JE VYSOKÁ TEPLOTA.



$$N = -\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mu} = +2\,\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{(2mT)^{3/2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\,F_{1/2}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

OPĚT POUŽIJEME ZLOMEK $\frac{N}{V}$, KTERÝ ZNÁME.

$$\frac{N}{V\cdot(2mT)^{3/2}}\,\frac{4\pi^3\cdot(2\hbar)^3}{4\pi} = F_{1/2}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

BUDEME ZJIŠŤOVAT JESTLI JE LEVÁ STRANA VELKÁ NEBO MALÁ, JESTLI JE BLÍZKO NULE. $\frac{N}{V}$ POROVNÁVÁME S $\varepsilon^{3/2}$.

$$\frac{N}{V}\quad \frac{\hbar^3}{(k_B T)^{3/2}}\quad \frac{1}{m^3}\,\frac{J^3 s^3}{(kg\, J)^{3/2}} \sim \frac{J^{3/2}\cdot s^3}{kg^{3/2}\cdot m^3} \longrightarrow \left[\frac{kg\,\frac{m^2}{s^2}\,s^2}{kg\, m^2}\right]^{3/2}$$

$\frac{N}{V} = 10^{36}\, m^{-3}$

$T \sim 10^7 K$

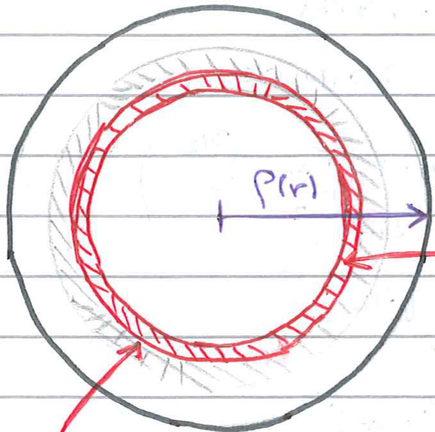
$\hbar \sim 6{,}6 \cdot 10^{-16}\ eVs$

$m \sim 511\ keV$

$$\frac{10^{36} \cdot (6{,}6 \cdot 10^{-16})^3}{(\underbrace{1000\,eV}_{10^7 K} \cdot 511 \cdot 10^3)^{3/2}} = \left[\frac{10^{12} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-16}}{(1000 \cdot 511 \cdot 10^3)^{1/2}}\right]^{3/2}$$

$\approx \left(\frac{10^{-4}}{10^3}\right) \to 0$ MALÉ ČÍSLO, TEDY VYSOKO TEPLOTNÍ REŽIM

ASTROFYZIKÁLNÍ OBJEKT (MÁ NEKONSTANTNÍ HUSTOTU)



POTŘEBUJEME NOVÉ ÚVAHY, PROTOŽE TU MÁME GRAVITACI.

NEWTONŮV SLUPKOVÝ TEORÉM
NA TUTO SLUPKU PŮSOBÍ HMOTA, KTERÁ JE UVNITŘ (JAKO BY BYLA TA HMOTA SOUSTŘEDĚNA DO JEDINÉHO BODU).

CELÁ TATO SLUPKA CÍTÍ STEJNÝ GRAVITAČNÍ POTENCIÁL.

VOLNÁ ENERGIE JE ROVNA SUMĚ VŠECH MIKROSTAVŮ:

$$e^{-F/T} = \sum e^{-E_r/T}$$

PRO KAŽDOU SLUPKU ZVLÁŠŤ, JE NUTNÉ PŘIDAT DO ENERGIE STAVŮ I TU GRAVITAČNÍ (POTENCIÁL): $E_r \to E_r + \Phi \cdot m' \cdot N$

HMOTA ČÁSTIC, POČET ČÁSTIC

ENERGIE KAŽDÉHO MIKROSTAVU SE ZVĚTŠÍ O GRAVITAČNÍ POTENCIÁL.

$$e^{-F/T} \to \sum e^{-(E_r + \Phi m' \cdot N)/T} = \underbrace{e^{-\Phi m' \cdot N/T}}_{\text{FAKTOR PRO VŠECHNY STAVY STEJNÝ}} \sum e^{-E_r/T} = e^{-F_0/T} \cdot e^{-\Phi m' \cdot N/T}$$

$$F = F_0 + \Phi\, m' \cdot N$$

CHEM. POTENCIÁL $\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = \mu_0 + \Phi m'$

GRAVITAČNÍ POTENCIÁL Φ ODPOVÍDÁ POISSONOVĚ ROVNICI:

$$\Delta \Phi = 4\pi \cdot G_N \cdot \rho$$

PRO SFÉRICKY SYMETRICKÝ SYSTÉM:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) = 4\pi\, G_N \cdot \rho$$

TADY POPISUJEME TROCHU JINÝ REŽIM (NÍZKO ENERGIOVÁ LIMITA).

$$N = -\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \mu} \approx \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{(2m_e T)^{3/2}}{3/2} \left(\frac{\mu}{T}\right)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0 = \left[\frac{N}{V} \frac{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3/2}{2 \cdot 4\pi (2m_e)^{3/2}}\right]^{2/3} = \left[\frac{\rho}{m'} \cdot \frac{(2\pi\hbar)^3 \cdot 3/2}{2 \cdot 4 \cdot \pi (m_e \cdot 2)^{3/2}}\right]^{2/3}$$

V ROVNOVÁZE NEPLATÍ ŽE $\mu_0 = $ KONST, ALE ŽE $\mu =$ KONST.

$$\mu = \mu_0 + \phi\, m' = \text{KONST.}$$

$$\rho = m' \frac{N}{V} \qquad + \text{ POISSONOVA ROVNICE}$$

$$-\Delta\left(\frac{\mu_0}{m'}\right) = 4\pi \cdot G_N \left(\frac{\mu_0^{3/2} \cdot m' \cdot 16 \cdot \pi (2m_e)^{3/2}}{3 \cdot (2\pi\hbar)^3}\right)$$

$$-\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \mu_0) = +\lambda \mu^{3/2}$$

$$\lambda = 2 \cdot \frac{4\pi \cdot G_N}{3 \cdot \pi^2} \frac{(2m_e)^{3/2}}{\hbar^3} \cdot (m')^2$$

MÁME TEDY LINEÁRNÍ DIF. ROVNICI. TU JE NUTNÉ ŘEŠIT NUMERICKY, ALE JE MOŽNÉ ZJISTIT NĚKTERÉ VLASTNOSTI ŘEŠENÍ.

$$\mu_0(r) = \frac{1}{\lambda^2 \cdot R^4} f\left(\frac{r}{R}\right) \qquad R = \text{KONST}$$

$$\frac{1}{R} \frac{R^2}{r^2} \partial_{\frac{r}{R}} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{R} \cdot f'\right)\right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^3 R^6}\right) f^{3/2}$$

$$\frac{1}{\lambda^2 R^4} \frac{1}{R^2} \frac{1}{\xi^2} \partial_\xi (\xi^2 \partial_\xi f) = -\frac{1}{\lambda^2 R^6} f^{3/2}$$

$$\frac{1}{\xi^2} \partial_\xi (\xi^2 \partial_\xi f) = -f^{3/2}$$

KDYBY $f(\xi)$ JE ŘEŠENÍ, PAK $\beta f(\alpha\xi) \to \frac{1}{\alpha^4} f(\alpha\xi)$ JE TAKÉ ŘEŠENÍM

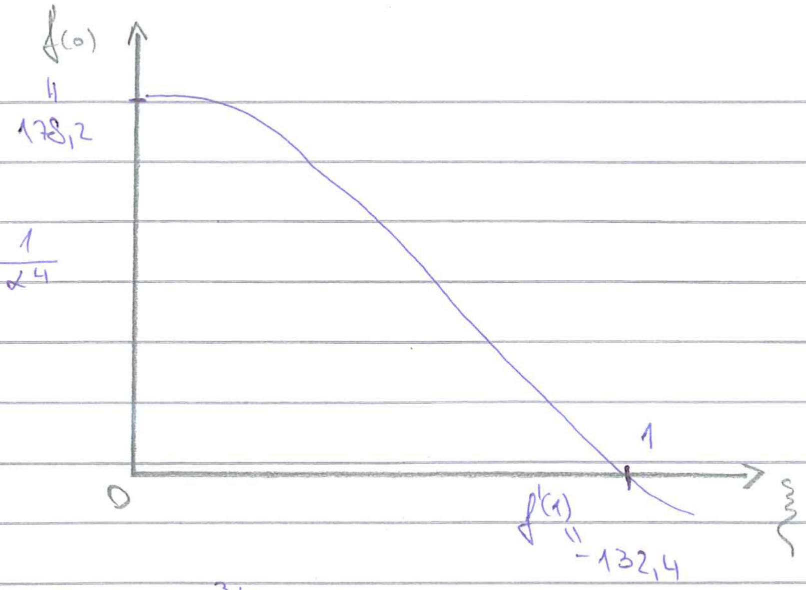
$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\beta}{(\alpha\xi)^2} \partial_{\alpha\xi} ((\alpha\xi)^2 \partial_{\alpha\xi} f(\alpha\xi)) = -f^{3/2}(\alpha\xi) \cdot \beta^{3/2}$$

TEDY ROVNICE SE ŘEŠÍ NUMERICKY PRO f A ŘEŠENÍ VYPADÁ TAKTO:

(17)

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = \beta^{3/2}$$

$$\beta^{1/2} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad \beta = \frac{1}{\alpha^4}$$



$$\mu_0(r) = \frac{1}{\lambda^2 R^4} f\left(\frac{r}{R}\right) \sim \rho^{3/2}$$

R JE POLOMĚR HVĚZDY

$$\rho = \frac{\lambda}{4\pi m' \cdot G_N} \mu_0^{3/2} = \frac{\lambda}{4\pi m' \cdot G_N} \left(\frac{1}{\lambda^2 R^4} f\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{3/2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot m' \cdot G_N} \frac{f^{3/2}}{\lambda^2} \frac{1}{R^6}$$

VIDÍME JAK SOUVISÍ HUSTOTA S POLOMĚREM HVĚZDY. ZVĚTŠÍM HUSTOTU ρ A POLOMĚR R SE ZMENŠÍ. MŮŽEME SPOČÍTAT CELKOVOU HMOTNOST.

$$M = 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \frac{1}{4\pi m' G_N} \frac{1}{\lambda^2 R^6} f^{3/2}\left(\frac{r}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{m' \cdot G_N \cdot \lambda^2} \frac{1}{R^3} \int_0^1 d\xi\, \xi^2 f^{3/2}(\xi)$$

$$M = \frac{\#(\ )\ \text{ČÍSLO}}{R^3}$$

$$MR^3 = 2 \cdot 10^{-6}\ [M_\odot R_\odot^3]$$