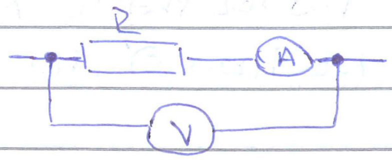
①

# METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

## ZAVEDENÍ NA PŘÍKLADU:

- BUDEME MĚŘIT PROUD A NAPĚTÍ NA REZISTORU R




ODPOR VOLTMETRU → ∞

ODPOR AMPÉRMETRU → 0

| U[V] | I[A] |
|---|---|
| $U_1$ | $I_1$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $U_m$ | $I_m$ |

- m MĚŘENÍ U & I

ZÁVISLOST MEZI PROUDEM A NAPĚTÍ BY MĚLA BÝT LINEÁRNÍ $U = R \cdot I$ (TOTO JE MODEL TÉ ZÁVISLOSTI). PRO VELKÝ PROUD UŽ TO NEMUSÍ PLATIT, VODIČ SE BUDE ZAHŘÍVAT.

SLOUPEC PRAVÝCH STRAN

BUDEME MÍT MATICI SOUSTAVY: $B = (A|\vec{b})$

$$B = \left( \begin{array}{c|c} I_1 & U_1 \\ \vdots & \vdots \\ I_m & U_m \end{array} \right)$$

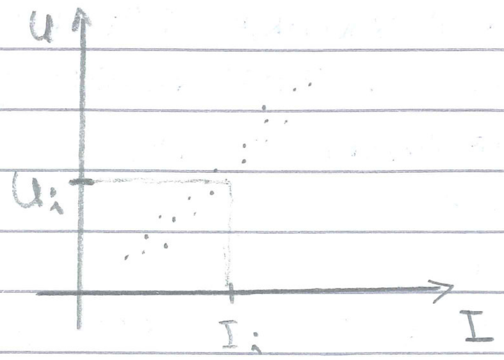
$\underbrace{\phantom{I_m}}_{A}$ $\underbrace{\phantom{U_m}}_{\vec{b}}$

$h(A) = 1$ HODNOST MATICE A

$h(\vec{B}) = 2$ HODNOST MATICE B

JE TO 2 PROTOŽE TAM MÁME CHYBY MĚŘENÍ. TAKTO, SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ, TAKTO BY R VYŠLO POKAŽDÉ JINAK. NEOVĚŘÍM MODEL.

OVĚŘÍM HO TEDY (TEN MODEL) POMOCÍ GRAFU:




JAK TO PROLOŽIT?

"METODA LINEÁRNÍ REGRESE

— 〃 — NEJMENŠÍCH □"

SOUČET ODCHYLEK MODELU OD DAT CO NEJMENŠÍ!

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{m} (U_i - RI_i)^2}^{\text{SUMA ČTVERCŮ}} = \text{OBECNĚ NEBUDE NULA} = \underbrace{\sigma(R)}_{\text{ODCHYLKA}}$$

NULA BY TO BYLA, KDYBY MODEL PLATIL NAPROSTO PŘESNĚ. CHCEME ABY $\sigma(R)$ BYLO CO NEJMENŠÍ, MUSÍ PAK POVAŽOVAT ŽE DERIVACE JE NULOVÁ!

$$\frac{d\sigma(R)}{dR} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} (U_i - RI_i)^2 \cdot (-I_i) = 0$$

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{m} (U_i \cdot I_i)}{\sum_{i=1}^{m} I_i^2}$$

A TEĎ POMOCÍ LINEÁRNÍ ALGEBRY. DO ZAVEDENÍ NAMONTUJEME VEKTOROVÝ PROSTOR.

SLOŽKY VEKTORŮ $U$; $I$ V ORTONORMÁLNÍ BÁZI $\alpha$ $E_m(I)$ A $\alpha$ $U_m(U)$

$\underline{U}$ MÁ HODNOTY $(U_1; U_2; \dots; U_m)$ $m$-ROZMĚRNÉM PROSTORU

$\underline{I}$ ——— " ——— $(I_1; I_2; \dots; I_m)$

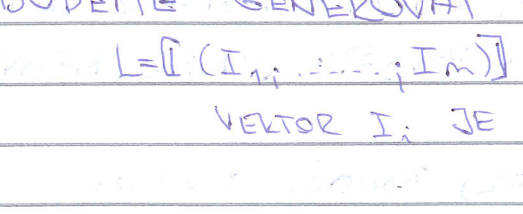
$U$ & $I$ DANÉ TĚMITO HODNOTAMI BUDU CHÁPAT JAKO VEKTORY. ŘEKNEME SI, ŽE V TOMTO PROSTORU MÁME SKALÁRNÍ SOUČIN A SLOŽKY VEKTORŮ JSOU V ORTONORMÁLNÍ BÁZI.

V $U_m$ BUDEME GENEROVAT PODPROSTOR:

$$L = [(I_1; \dots; I_m)]$$

VEKTOR $I_i$ JE GENEROVÁN PODPROSTOR $\underline{L}$.

KDYBY VŠECHNO BYLO ABSOLUTNĚ PŘESNÉ PAK BY VEKTOR $\underline{U}$ LEŽEL TAKÉ V PODPROSTORU $\underline{L}$, ALE NELEŽÍ, PROTOŽE MÁME EXPERIMENTÁLNÍ CHYBY.




PRŮMĚT $\underline{U}$ DO PODPROSTORU $\underline{L}$ $U_L = RI$

2)

PRAVÝ ÚHEL MEZI U & L TAM JE KVŮLI TOMU ABY TA ODCHYLKA BYLA CO NEJMENŠÍ.

$$|U - \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{KONST.}}}{\alpha}\cdot I| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(U_i - \alpha I_i)^2}$$

HLEDÁME $\alpha$ ABY BYLO CO NEJKRATŠÍ ($\perp$ KOLMOST!)

ORTONORMÁLNÍ BÁZE V $\underline{L}$ VYPADÁ TAKTO:

NORMOVANÉ $\underline{I}$

$$u_1 = \frac{I}{\sqrt{(I;I)}} = \underbrace{\left(\frac{I_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}}; \dots ; \frac{I_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}}\right)}_{\text{MATICE } \underline{C}}$$

MATICE PROJEKCE $P = C^T \cdot C$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}} \\ \vdots \\ \frac{I_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}} \end{pmatrix} \left(\frac{I_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}}; \dots ; \frac{I_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{I_1^2}{\sum_{i=1}^{n} I_i^2} & \frac{I_1 I_2}{\sum_{i=1}^{n} I_i^2} & \dots & \frac{I_n \cdot I_1}{\sum \dots} \\ \vdots & & & \\ \frac{I_n \cdot I_1}{\sum \dots} & & \dots & \frac{I_n \cdot I_n}{\sum \dots} \end{pmatrix}$$

$$P_j^l = \frac{I_j \cdot I_l}{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}$$

PRŮMĚT NAPĚTÍ DO SMĚRU PROUDU DOSTANEME

$$U_L = (U_1; \dots ; U_n) \cdot P$$

PRVNÍ SLOUPEC

$$U_{L_1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} I_i^2} \cdot [U_1 \cdot I_1 + U_2 I_1 I_2 + \dots + U_n \cdot I_n \cdot I_1] =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} U_i I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}\right)}_{R} \cdot I_1 = U_{L_1}$$

$$U_{L_2} = \underbrace{\left(\text{— ‖ —}\right)} \cdot I_2$$

TA ZÁVORKA JE POTOM TEN ODPOR $\underline{R}$

OBECNĚ ~~VE VÍCE DIMENZÍCH~~ KDYŽ BUDEME MÍT VELIČINY $x_1; \dots ; x_k$ (NEZÁVISLÉ VELIČINY) A VELIČINA $\underline{Y}$

BUDE JEJICH LINEÁRNÍ KOMBINACÍ:

$$Y = \alpha X_1 + \ldots + \alpha_k X_k \quad \text{(MODEL)}$$

MĚŘÍM HODNOTY $X_1$ AŽ $X_k$ A MĚŘÍM TAKY $Y$

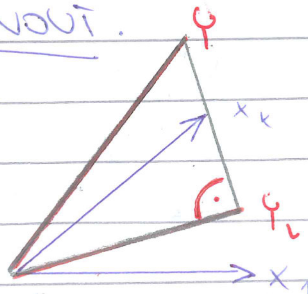
$$\left.\begin{array}{l} X_1 = (X_1^1; \ldots; X_1^m) \\ \vdots \\ X_k = (X_k^1; \ldots; X_k^m) \end{array}\right\}$$ BÁZE V $L$ NENÍ ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ

$$Y = (Y^1; \ldots Y^m)$$

ZASE BUDEME MÍT $m$-ROZMĚRNÝ EUKLIDOVSKÝ PROSTOR A VELIČINY $\underbrace{x_1; \ldots; x_k}_{\text{NEZÁVISLÉ}}$ GENERUJÍ VEKTOROVÝ PODPROSTOR $L$

$k$-ROZMĚRNÝ PODPROSTOR

BUDEME POSTUPOVAT SKORO-STEJNĚ, BUDEME PROMÍTAT NAMĚŘENOU HODNOTU $Y$ (PŘESNÁ MĚŘENÍ (IDEÁLNÍ) PADLI BY DO PODPROSTORU ALE MĚŘENÍ MAJÍ CHYBU TAK TAM $Y$ NEPADNE, HLEDÁM TU NEJLEPŠÍ KOMBINACI TAK, ŽE UDĚLÁM ORTOGONÁLNÍ PRŮMĚT. BUDEME POTŘEBOVAT MATICI PROJEKCE => POTŘEBUJI MATICI $C$ => V NÍ JSOU SLOŽKY BÁZE PODPROSTORU $L$. NEJDŘÍV ALE MUSÍM ORTOGONALIZOVAT – ZKUSÍME SE JÍ ALE VYHNOUT.



$$L = [x_1; \ldots; x_k]$$

POKUD SE NÁM PODAŘÍ $Y$ PROMÍTNOUT TAK DOSTANEME:

$$Y_L = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k \quad / \cdot X_j$$ (VYNÁSOBÍME SKALÁRNĚ

KONSTANTY $\alpha$ NAJDEME JAKO ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC.

(3)

$(Y; X_j) = (Y_L; X_j) = \alpha_1 (X_1; X_j) + \dots + \alpha_k (X_k; X_j)$

NEZNÁME - $Y_L$

$$Y = Y_L + Y_{L_\perp} \Rightarrow (Y; X_j) = (Y_L; X_j) + \underbrace{(Y_{L_\perp}; X_j)}_{0}$$

$\Pi_{PF}$:
$X_1 = (1; 2; 3; 4)$

$X_2 = (2; 3; 4; 5) \quad k = 2 \quad n = 4$

$Y = (2; 3; 5; 8)$

PRŮMĚT DO PROSTORU $\underline{L}$ BUDE:

$Y_L = \alpha_1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_2 \quad / \cdot X_1$

$(Y; X_1) = \alpha_1 (X_1; X_1) + \alpha_2 (X_2; X_1)$

$(Y; X_2) = \alpha_1 (X_1; X_2) + \alpha_2 (X_2; X_2)$

$(X_1; X_1) = 30 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4$

$(X_1; X_2) = 40$

$(X_2; X_2) = 54$

$(Y; X_1) = 2 + 6 + 15 + 32 = 55$

$(Y; X_2) = 73$

$55 = 30\alpha_1 + 40\alpha_2$

$\underline{73 = 40\alpha_1 + 54\alpha_2} \quad \alpha_1 = \frac{55 - 40\alpha_2}{30}$