

Příklady z kvantové mechaniky k domácímu počítání

(<http://www.physics.muni.cz/~tomtyc/kvant-priklady.pdf> (nebo .ps))

1. *Počet kvant: 1*

Ionizační energie atomu vodíku v základním stavu je $E = 13,6$ eV. Najděte frekvenci, vlnovou délku a vlnové číslo fotonu, který je právě schopen atom ionizovat.

2. *Počet kvant: 1*

Helium–neonový laser emituje záření s vlnovou délkou $\lambda = 633$ nm s výkonem $P = 5$ mW. Kolik fotonů vyletí z tohoto laseru za jednu sekundu?

3. *Počet kvant: 1*

Ke zkoumání struktury krystalů se používá neutronová difrakce. Odhadněte energii a rychlost neutronů, které jsou pro tento účel vhodné. (Vhodné jsou ty, které mají podobnou vlnovou délku, jako je vzdálenost sousedních atomů v krystalu.)

4. *Počet kvant: 1*

Vysvětlete, proč v řešení Schrödingerovy rovnice elektronu v atomu vodíku významným způsobem vystupuje osa z , ačkoli potenciál, v němž se elektron pohybuje, je kulově symetrický a nemá tedy žádnou význačnou osu.

5. *Počet kvant: 1*

Jakou hodnotu má energie základního stavu (a) elektronu, (b) protonu v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky $0,2$ nm?

6. *Počet kvant: 2*

Jak by se změnila vlnová délka čáry Balmerovy série s $\lambda = 486,1$ nm (odpovídá přechodu $n = 4 \rightarrow n = 2$) atomu vodíku, kdyby atomové jádro zůstávalo na místě, tj. kdyby bylo nekonečně těžké? Jaká vlnová délka odpovídá stejnému přechodu $n = 4 \rightarrow n = 2$ v atomu deutéria? Lze tak jemné rozdíly vlnových délek v současnosti měřit?

7. *Počet kvant: 1*

Elektron a foton mají oba vlnovou délku $\lambda = 0,5$ nm. Určete jejich hybnost a energii.

8. *Počet kvant: 2*

Excitovaný atom neonu vyzářil foton o vlnové délce 400 nm. Atom se nacházel v klidu. Jakou rychlost má atom po vyzáření fotonu?

9. *Počet kvant: 2*

Magnetický dipólový moment proudové smyčky je definován vztahem $\mu = IA$, kde I , A je po řadě proud a plocha smyčky. Proudová smyčka může být reprezentována elektronem, který krouží kolem jádra konstantní rychlostí po kruhové dráze. Ukažte klasickou úvahou, že magnetický dipólový moment tohoto elektronu je dán vztahem $\mu = eL/2m$, kde e , L a m je náboj, moment hybnosti a hmotnost elektronu.

10. *Počet kvant: 1*

Dokažte, že všechny vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné.

11. *Počet kvant: 2*

Dokažte, že jestliže je $\hat{A}$ hermitovský operátor, je operátor $e^{i\hat{A}}$ unitární.

12. *Počet kvant: 1*

Ukažte, že operátory $\hat{A}\hat{A}^\dagger$, $\hat{A} + \hat{A}^\dagger$, $i(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)$ jsou hermitovské pro libovolný $\hat{A}$.

13. *Počet kvant: 1*

Operátor $\hat{A}$ v trojrozměrném Hilbertově prostoru je reprezentován maticí

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 3i & 17 \\ -2i & 2+6i & 4 \\ 0 & 5 & 4-2i \end{pmatrix}.$$

Nalezněte matici reprezentující operátor $\hat{A}^\dagger$.

14. *Počet kvant: 1*

Dokažte, že operátor parity definovaný vztahem $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ je hermitovský. Dále ukažte, že vlastní vektory odpovídající vlastním hodnotám 1 a -1 jsou ortogonální.

15. *Počet kvant: 1*

Odvoďte komutační relace $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ pro operátory souřadnice a hybnosti na Hilbertově prostoru L^2 kvadraticky integrovatelných funkcí $\psi(x)$, kde působení operátorů $\hat{x}$, $\hat{p}$ je dáno vztahy

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x), \quad \hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$$

16. *Počet kvant: 2*

Odvoďte komutační relace pro složky operátoru momentu hybnosti definovaného vztahem $\hat{L} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$.

17. *Počet kvant: 2*

Najděte stacionární řešení Schrödingerovy rovnice volné částice v jedné dimenzi s hamiltoniánem $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$, kde V je konstantní potenciál. Vypočtěte fázovou a grupovou rychlost vlny. Jak si vysvětlíte závislost fázové rychlosti na potenciálu V ?

18. *Počet kvant: 3*

Uvažujme fyzikální systém a v něm fyzikální veličinu A , která nekomutuje s Hamiltonovým operátorem. A má vlastní stavy tvaru $\varphi_1 = (u_1 + u_2)/\sqrt{2}$ a $\varphi_2 = (u_1 - u_2)/\sqrt{2}$ s vlastními hodnotami a_1, a_2 , kde u_1, u_2 jsou vlastní stavy hamiltoniánu s vlastními hodnotami E_1, E_2 . Je-li v čase $t = 0$ systém ve stavu φ_1 , vypočtěte střední hodnotu veličiny A v čase t .

19. *Počet kvant: 3*

Vlnová funkce volné částice v čase $t = 0$ je $\psi(x, 0) = c \exp(-x^2/4\Delta^2)$. Ukažte, že neurčitost polohy částice Δ_t v čase t je dána vztahem $\Delta_t^2 = \Delta^2 + (\Delta v)^2 t^2$, kde Δv je neurčitost rychlosti částice v čase $t = 0$.

20. *Počet kvant: 2*

Dokažte, že pro stacionární stavy harmonického oscilátoru jsou střední hodnoty hybnosti i souřadnice nulové.

21. *Počet kvant: 2*

Dokažte, že pro stacionární stavy harmonického oscilátoru je střední hodnota kinetické energie stejná jako střední hodnota potenciální energie.

22. *Počet kvant: 3*

Dokažte, že pro střední kvadratické odchylky souřadnice a hybnosti v n -tém stacionárním stavu harmonického oscilátoru platí $\Delta x \Delta p = \hbar(n + 1/2)$.

23. *Počet kvant: 3*

Najděte rekurentní diferenciální relaci mezi jednotlivými stacionárními řešeními Schrödingerovy rovnice harmonického oscilátoru. Pomocí této relace odvoďte tvar vlnové funkce $\psi_1(x)$ pro první energiovou hladinu, víte-li, že vlnová funkce základního stavu (nulové hladiny) má tvar $\psi_0(x) = \sqrt[4]{m\omega/\pi\hbar} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$.

24. *Počet kvant: 2*

Najděte vlnovou funkci $\psi_0(x)$ základního stavu harmonického oscilátoru z toho, že víte, že $\hat{a}\psi_0(x) = 0$. Anihilační operátor $\hat{a}$ vyjádřete v souřadnicové reprezentaci a řešte vzniklou diferenciální rovnici např. metodou separace proměnných.

25. *Počet kvant: 2*

V Heisenbergově obraze nalezněte pohybové rovnice operátorů souřadnice a hybnosti harmonického oscilátoru s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}.$$

26. *Počet kvant: 3*

Elektron se nachází v harmonickém potenciálu s minimem v počátku souřadnic, v němž má frekvenci oscilací $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ rad/s. Střední hodnoty operátorů hybnosti a souřadnice elektronu v čase $t = 0$ byly $\bar{p} = 10^{-27}$ kg m/s a $\bar{x} = 10^{-5}$ m. Jaké budou střední hodnoty těchto operátorů v čase $t = 2,5 \cdot 10^{-8}$ sekundy? Kolik kvant je přibližně nabuzeno?

27. *Počet kvant: 3*

Najděte vlastní hodnoty energie částice uzavřené v dutině tvaru kvádra o rozměrech L_1, L_2, L_3 . Kolikrát je degenerován základní a první (nejnižší) excitovaný stav, jestliže (a) $L_1 < L_2 < L_3$, resp. (b) $L_1 = L_2 = L_3$?

28. *Počet kvant: 1*

Může se světlo o vlnové délce $1 \mu\text{m}$ (resp. 500 nm) šířit světlovodným vláknem čtvercového průřezu o straně 500 nm?

29. *Počet kvant: 2*

Kolik možných stavů světla (módů) ve viditelné části spektra se nachází v krychlové dutině o hraně 1 cm? Přibližně kolik viditelných fotonů bude v této dutině při teplotě (a) 20 stupňů Celsia, (b) 1500 stupňů Celsia?

30. *Počet kvant: 2*

Najděte vázané stavy částice v potenciálu tvaru Diracovy delta-funkce $V = -A\delta(x - x_0)$.

31. *Počet kvant: 2*

Částice se nachází v základním stavu v nekonečně hluboké potenciálové jámě, jejíž stěny mají souřadnice $-a/2$ a $a/2$. Náhle stěny posuneme do poloh $-b/2$ a $b/2$, kde $b > a$. S jakou pravděpodobností bude nyní částice v základním, resp. prvním excitovaném stavu? Jaké je jednoduché zdůvodnění pro druhou odpověď?

32. *Počet kvant: 2*

Částice se nachází v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky a v prvním excitovaném stavu. Jak se změní energie tohoto stavu, jestliže zapneme přídavné elektrické pole, které vytvoří harmonický potenciál s rovnovážnou polohou ve středu jámy?

33. *Počet kvant: 4*

Atom tritia se nachází v základním stavu. Vtom dojde k rozpadu jádra, při němž z jádra vyletí velmi rychlý elektron, který nestačí ovlivnit původní orbitální elektron atomu. Jaká je pravděpodobnost toho, že se vzniklý iont hélia ${}^3_2\text{He}$ bude těsně po rozpadu (a) v základním stavu, (b) ve stavu $2s$? Může se iont po rozpadu nacházet ve stavu $2p$?

34. *Počet kvant: 3*

Částice v harmonickém potenciálu se nachází v základním stavu. V čase $t = 0$ zapneme na velmi krátkou dobu Δt poruchu $\hat{V} = -\frac{A\hat{x}}{\Delta t}$, kde A je velmi malá konstanta. Vypočtěte v první aproximaci teorie poruch pravděpodobnost, že částice přejde do prvního, resp. druhého excitovaného stavu.

35. *Počet kvant: 3*

Najděte v první aproximaci teorie poruch energii a vlnovou funkci základního stavu částice v harmonickém potenciálu s poruchou. Neporušený hamiltonián je

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2},$$

porucha pak $V = A\hat{x}$, kde A je malá konstanta. Dalo by se odpovědi dobrat i jednodušším způsobem než užitím poruchové teorie?

36. *Počet kvant:*

Variační metodou najděte přibližnou vlnovou funkci základního stavu harmonického oscilátoru s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}.$$

Hledejte ji v jednoparametrické množině funkcí

$$\psi_a(x) = \frac{e^{-x^2/4a^2}}{\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{a}}.$$

Jak si vysvětlíte, že řešení dává přesnou vlnovou funkci základního stavu?

37. *Počet kvant: 2*

Ukažte, že složky vektoru $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\vec{\sigma}} = \frac{\hbar}{2} (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ sestaveného z Pauliho spinových matic

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

splňují komutační relace $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$, $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x$ a $[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$. Najděte tvar operátoru $\hat{S}^2 = \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{S}}$ a jeho vlastní hodnoty a vektory.

38. *Počet kvant: (a) – 2, (a) + (b) – 4, (a) + (b) + (c) – 6*

(a) Odvoďte vztahy pro transformaci spinové části vlnové funkce elektronu (spin 1/2) při otočení o úhel φ kolem osy z , víte-li, že platí $|\psi\rangle' = \exp(i\varphi\hat{S}_z/\hbar)|\psi\rangle$, kde $\hat{S}_z$ je operátor z -tové složky spinu elektronu. Jak se změní vlnová funkce při otočení o plný úhel 2π ?

Nápověda: spinová část vlnové funkce je reprezentována dvourozměrným vektorem (tedy maticí typu 2/1), operátor $\hat{S}_z = \hbar\hat{\sigma}_z/2$, kde $\hat{\sigma}_z$ je Pauliho spinová matice, pak maticí 2/2. Exponenciální funkce operátoru (matice) je definována obvyklou Taylorovou řadou.

(b) Totéž co v (a), ale pro rotaci o úhel φ kolem osy y .

(c) Odvoďte vztahy pro transformaci spinové části vlnové funkce při obecné rotaci dané Eulerovými úhly φ, ψ, θ , víte-li, že tuto rotaci lze provést ve třech krocích: 1) rotace o úhel ψ kolem osy z , 2) rotace o úhel θ kolem osy y , 3) rotace o úhel φ kolem osy z .

39. *Počet kvant: 3*

Uvažujme dvě částice, jednu se spinem 1/2 a druhou se spinem 1. Označme $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ celkový operátor spinu systému obou částic. Nalezněte společné vlastní stavy operátorů $\hat{S}_z$ a $\hat{S}^2$ pomocí analogických vlastních stavů pro operátory spinu obou částic.

40. *Počet kvant: 2*

Tzv. Bellovy stavy dvojice částic se spinem 1/2 jsou dány takto:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle),$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle),$$

kde $|0\rangle$ a $|1\rangle$ označují stavy jedné částice se spinem ve směru a proti směru osy z . Provedením stopy přes druhou částici najdete matici hustoty první částice pro všechny čtyři Bellovy stavy.

41. *Počet kvant: 4*

Nejobecnější matice přechodu od jedné ortonormální báze k jiné je tzv. $U(2)$ matice

$$A = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{i\alpha} \sin \theta \\ e^{i\beta} \sin \theta & e^{i(\alpha+\beta)} \cos \theta \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ jsou reálná čísla. Najděte vyjádření Bellových stavů (viz příklad 40) v nové bázi, znáte-li z předchozího příkladu jejich vyjádření v původní bázi.

Návod: v maticovém zápisu máme

$$|0\rangle_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e, \quad |1\rangle_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e,$$

kde e značí původní bázi. Vektor v nové bázi získáme násobením vektoru ve staré bázi zleva maticí přechodu, tedy např.

$$|1\rangle_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \sin \theta \\ e^{i(\alpha+\beta)} \cos \theta \end{pmatrix}_{e'} = e^{i\alpha+\gamma} \sin \theta |0\rangle_{e'} + e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \cos \theta |1\rangle_{e'}.$$

Dosazením vektorů $|0\rangle_e$ a $|1\rangle_e$ v nové bázi do Bellových stavů pak dostaneme vyjádření Bellových stavů v nové bázi.)

42. *Počet kvant: 2*

Najděte vlastní vektory a vlastní hodnoty Pauliho matic σ_z a σ_x . Lze nějak fyzikálně interpretovat to, že vlastní hodnoty σ_x jsou stejné jako vlastní hodnoty σ_z ?

43. *Počet kvant: 2*

Dokažte, že Greenberger-Horne-Zeilingerův stav tří částic

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle|1\rangle)$$

je vlastním stavem operátoru $\sigma_x^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_y^{(3)}$ (horní index označuje částici) s vlastní hodnotou -1 a operátoru $\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_x^{(3)}$ s vlastní hodnotou 1 .

44. *Počet kvant: 2*

Nalezněte vyjádření tzv. koherentního stavu $|\alpha\rangle$ harmonického oscilátoru v bázi $\{|n\rangle\}$. Koherentní stav $|\alpha\rangle$ je vlastním stavem anihilačního operátoru $\hat{a}$ s vlastní hodnotou $\alpha \in \mathbb{C}$. Pokuste se stav správně normovat.

45. *Počet kvant: 3*

Tzv. dvoumódově stlačený stav dvojice harmonických oscilátorů lze vyjádřit jako

$$|\eta\rangle = c \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n |n\rangle |n\rangle,$$

kde $-1 \leq \eta \leq 1$.

(a) najděte konstantu c , aby byl tento stav správně normován

(b) najděte matici hustoty pouze prvního módu (oscilátoru) tak, že provedete stopu („Trace“) celkové matice hustoty přes druhý mód.

(c) – nepovinné – přesvědčte se, že výsledná matice hustoty popisuje termální stav, tedy že ji lze napsat jako

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{\text{Tr } e^{-\beta\hat{H}}},$$

kde $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ je hamiltonián systému a $\beta = 1/kT$ je vhodná konstanta související s konstantou η .

46. *Počet kvant: 3*

Uvažujme spektrální rozklad hamiltoniánu $\hat{H} = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|$ pomocí jeho vlastních stavů $|n\rangle$ a jim příslušných vlastních hodnot E_n . Dokažte, že pro evoluční operátor $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$ pak platí

$$e^{-i\hat{H}t} = \sum_n e^{-iE_n t} |n\rangle\langle n|$$

Nápověda: využijte toho, že projekční operátor $\hat{P}_n \equiv |n\rangle\langle n|$ má jen dvě vlastní hodnoty 0 a 1 a dále využijte vlastností funkce operátoru vzhledem k vlastním vektorům tohoto operátoru