Linearita a relativita

Jana Musilová, Tomáš Tyc

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Kotlářská 2, 611 37 Brno;
janam@physics.muni.cz, tomtyc@physics.muni.cz

Na příkladu z oblasti speciální teorie relativity ukazuje příspěvek přirozený vztah aparátu lineární algebry k fyzikálním teoriím. Předkládá elementární postup při odvození tzv. speciální Lorentzovy transformace na úrovni vstupního kursu obecné fyziky v univerzitním studiu fyzikálních, resp. technických oborů a ukazuje, že k tomu zcela stačí pochopení pojmu lineárního zobrazení a zvládnutí rutinních maticových operací. Na problémech souvisejících s pojmy současnosti a soumístnosti, tzv. kontrakce délek a dilatace času ukazuje efektivnost přímé aplikace Lorentzovy transformace oproti obvyklým, takzvaně „názorným" úvahám, které ji nevyužívají.

Úvodem – linearita a fyzikální zákony

Většinu fyzikálních zákonů lze formulovat matematicky, pomocí vztahů mezi různými fyzikálními veličinami. Mnoho takových vztahů je lineárních, z těch základních dokonce většina – zmiňme například druhý Newtonův zákon, lineárně spojující sílu a jí vyvolané zrychlení, Maxwellovy rovnice lineárně spojující časové a prostorové derivace elektromagnetických polí, dále vlnovou rovnici pro šíření vln s nepříliš velkou amplitudou, která vyjadřuje lineární vztah mezi druhými časovými a prostorovými derivacemi vlnové funkce, nebo Schrödingerovu rovnici v kvantové mechanice. Lineární vztahy ale najdeme také třeba při transformacích vektorových a tenzorových fyzikálních veličin při přechodu mezi bázemi, při rozkladu světla v optickém vlákně do jednotlivých módů vlákna a v řadě dalších situací. Takovýmito vztahy se zabývá lineární algebra, krásná oblast matematiky, která nachází rozsáhlé uplatnění ve všech oblastech fyziky – od ryze teoretické přes aplikovanou fyziku až po inženýrskou praxi.

Je pozoruhodné, že někdy lze ze samotného předpokladu, že mezi nějakými fyzikálními veličinami je lineární vztah, získat řadu zajímavých výsledků. V dnešním příspěvku si to ukážeme na příkladu speciální teorie relativity, kdy z předpokladu linearity vztahů mezi časoprostorovými souřadnicemi určité události v různých vztažných soustavách spolu s postulátem o konstantní rychlosti světla můžeme jednoduše dospět k Lorentzově transformaci, relativitě současnosti a dalším pozoruhodným relativistickým jevům.

V dalším předpokládáme, že čtenář je obeznámen se základy lineární algebry a maticovým počtem. Proto upustíme od jejich rekapitulace.

Relativita: Princip stálé rychlosti světla a symetrie časoprostoru

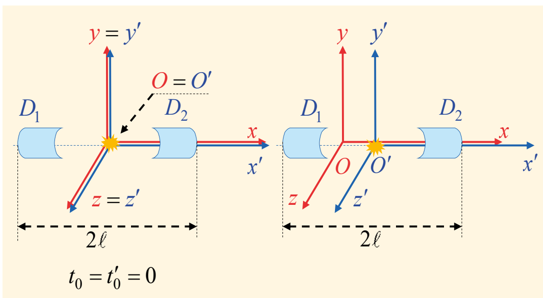
Rekapitulaci potřebného fyzikálního základu se však vyhýbat nebudeme s cílem později zdůraznit přímou návaznost na aparát lineární algebry. Speciální teorie relativity stojí na tzv. *principu stálé rychlosti světla*, za jehož experimentální východisko lze považovat Michelsonův a Morleyův pokus (1887), viz rámeček.

Světlo se ve vakuu šíří ve všech inerciálních vztažných soustavách stejnou rychlostí.

Z didaktických důvodů podotkněme, že rychlostí světla se většinou rozumí skalární veličina představující velikost rychlosti, nikoli tedy vektor. Hodnota rychlosti světla ve vakuu je jednou z univerzálních konstant a je stanovena definitoricky přesně, c = 299 792 458 ms^{-1}. Rychlost světla je zároveň mezní rychlostí – žádné těleso se nemůže pohybovat rychleji, větší rychlostí se nemůže přenášet ani energie či informace (je míněn pohyb těles v prostoru). V dalším budeme vztažné soustavy pokládat za inerciální.

Princip vypadá velmi jednoduše. Jak jej však převést do „řeči matematiky", tj. vyjádřit jej v souvislosti s pojmem *událost*, který představuje čtveřici souřadnic $U \ldots (t, x, y, z)_S \ldots (t', x', y', z')_{S'}$ v dané vztažné soustavě S, resp. S', kde t je čas a x, y, z jsou kartézské souřadnice? Taková „matematizace" se opírá o pojem *invariantu*: v klasické mechanice je invariantem (tj. veličinou vyjádřenou pomocí charakteristik události) časový interval mezi dvěma událostmi U_1, U_2, tj. $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$. (Z toho v klasické mechanice například vyplývá, že dvě události, které proběhly současně v jedné vztažné soustavě, proběhly současně ve všech vztažných soustavách, bez ohledu na místo. V teorii relativity díky principu stálé rychlosti světla ovšem toto tvrzení neplatí – hovoříme o *relativnosti současnosti*.)

Relativnost současnosti jako důsledek principu stálé rychlosti světla lze kvalitativně ukázat na jednodu-



Obr. 1 K pojmu relativnost současnosti.

chém často používaném myšlenkovém experimentu (viz např. [2]), na obr. 1.

Vztažná soustava $S' = \langle O'; x', y', z' \rangle$ se pohybuje vzhledem k soustavě $S = \langle O; x, y, z \rangle$ rychlostí $\vec{V}$.

V okamžiku míjení počátků jsou seřízeny hodiny $t_0 = t'_0 = 0$a odpovídající si souřadnicové osy splývají. Předpokládejme, že $\vec{V} = (V, 0, 0)_S$, tj. počátek O' se pohybuje po ose x (obr. 1). V počátku O' soustavy S' je umístěn zdroj světla (fotonů) a v bodech o souřadnicích $(-\ell, 0, 0)_{S'}$, $(\ell, 0, 0)_{S'}$ detektory D_1, D_2. Všimněme si tří událostí, jejichž časovou a x-ovou souřadnici v soustavách S a S' shrnuje následující tabulka (y-ová a z-ová souřadnice jsou v obou soustavách nulové).

událost		$(t, x)_S$	$(t', x')_{S'}$
vyslání fotonů různými směry	U_0	(0, 0)	(0, 0)
registrace fotonu v D_1	U_1	(t_1, x_1)	$(t'_1, -\ell)$
registrace fotonu v D_2	U_1	(t_2, x_2)	$(t'_2, +\ell)$
relativnost současnosti		$t_1 < t_2$	$t'_1 = t'_2 = \ell/c$

Z uspořádání experimentu zřejmé, že vzhledem k soustavě S' doletí fotony do obou detektorů současně, tj. $t'_1 = t'_2$. Pro okamžiky dosažení detektorů vzhledem k pozorovateli v soustavě S platí $t_1 < t_2$, neboť detektor D_1 se vzhledem k soustavě S pohybuje proti směru letu fotonu směřujícího k němu („jde fotonu naproti“), zatímco detektor D_2 ve směru letu fotonu směřujícího k němu („před fotonem utíká“). Tato úvaha je samozřejmě, jak jsme již konstatovali, pouze kvalitativní. Umíme sice zdůvodnit nerovnost $t_1 < t_2$, určit však okamžiky t_1, t_2 a polohy x_1, x_2 zatím nikoli.

Nyní je zřejmé, že časový a prostorový interval nejsou vlivem principu stálé rychlosti světla invarianty. Časové a prostorové údaje událostí od sebe nemůžeme „odtrhnout“. Události jsou body čtyřrozměrného prostoru $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ zvaného *časoprostor*. (Jak uvidíme za chvíli, měření „vzdáleností“ v časoprostoru je poněkud jiné, než jsme zvyklí – „vzdálenost“ není euklidovská.)

To vyvolává přirozenou otázku, zda vůbec existuje nějaký invariant utvořený z časových a prostorových souřadnic událostí a co jím případně je. Abychom to zjistili, uvažujme o dvou událostech $U_1 \sim (t_1, x_1, y_1, z_1)_S \sim (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)_{S'}$ a $U_2 \sim (t_2, x_2, y_2, z_2)_S \sim (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)_{S'}$ spojených světelným signálem ve vakuu – například vyslání fotonu zdrojem a jeho dopadem na detektor. V obou soustavách se světlo šíří rychlostí c. Prostorovou vzdálenost mezi body $(x_1, y_1, z_1)_S$ a $(x_2, y_2, z_2)_S$, resp. $(x'_1, y'_1, z'_1)_{S'}$ a $(x'_2, y'_2, z'_2)_{S'}$ urazí za dobu $t_2 - t_1$, resp. $t'_2 - t'_1$, tj.

$$(s_{12})^2 =$$
$$= c^2 (t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right] = 0,$$
$$(s'_{12})^2 =$$
$$= c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - \left[(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \right] = 0.$$

Výraz $(s_{12})^2$, resp. $(s'_{12})^2$ na levé straně, utvořený z časových a prostorových souřadnic, má svůj význam i pro dvojici událostí, které nejsou spojeny se světelným signálem. Nazývá se *kvadrát časoprostorového intervalu*. Může nabývat jak kladných hodnot (nastanou-li události U_1, U_2 ve vzdálenosti bližší, než kterou by urazilo světlo za dobu $t_2 - t_1$), tak hodnot záporných (jsou-li události U_1, U_2 naopak vzdálenější a světlo by jejich vzdálenost za dobu $c(t_2 - t_1)$ nepřekonalo). Matematicky to znamená, že „vzdálenost“ v časoprostoru, kterou, jak se přesvědčíme, reprezentuje v dané vztažné soustavě veličina s_{12}, se neřídí pravidly euklidovské geometrie. Hned uvidíme, že právě veličina $(s_{12})^2$ je hledaným invariantem – nabývá stejné hodnoty ve všech inerciálních vztažných soustavách:

Výraz $(s_{12})^2$ je kvadratickou formou v proměnných $c\tau = c(t_2 - t_1)$, $\xi = (x_2 - x_1)$, $\eta = (y_2 - y_1)$ a $\zeta = (z_2 - z_1)$, přičemž v každé vztažné soustavě je tato forma v tzv. *kanonickém tvaru*. Vzhledem k tomu, že nabývá-li výraz typu $(s_{12})^2$ vztahující se k událostem U_1, U_2 nulové hodnoty v některé vztažné soustavě S, nabývají výrazy $(s'_{12})^2$, $(s''_{12})^2$ atd., vztahující se rovněž k těmto událostem, nulové hodnoty ve všech vztažných soustavách S', S'' atd. a všechny inerciální soustavy jsou z hlediska principu stálé rychlosti světla ekvivalentní – to znamená, že mezi každými dvěma výrazy tohoto typu je úměra, např.

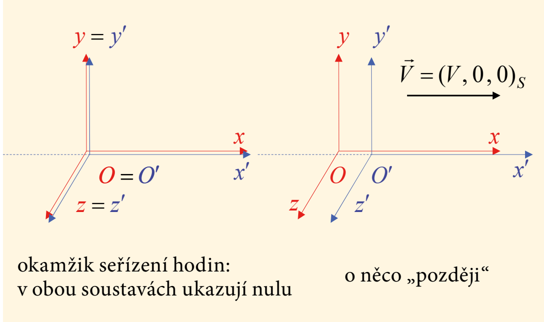
$$(s'_{12})^2 = f(?)(s_{12})^2 .$$

Otazník zde není omylem – zatím totiž nevíme, na čem může faktor f záviset. Jeho tvar vyplývá z obecných vlastností časoprostoru: *homogenita času, homogenita prostoru a izotropie prostoru*. Homogenita času znamená, že všechny okamžiky jsou ekvivalentní, homogenita prostoru vyjadřuje ekvivalenci všech bodů v prostoru a konečně izotropie prostoru odpovídá ekvivalenci všech směrů v prostoru. Jinými slovy, experiment provedený v inerciální soustavě dopadne vždy stejně nezávisle na tom, kdy, kde a při jaké orientaci experimentálního zařízení byl proveden. Typ závislosti faktoru f se nabízí – je funkcí pouze velikosti rychlosti $\vec{V}$ pohybu soustavy S' vzhledem k soustavě S, tj. $f = f(V)$. Na druhé straně se soustava S pohybuje vzhledem k soustavě S' rychlostí $(-\vec{V})$, jejíž velikost je ovšem stejná, tj. V. Faktor f je proto konstantní funkce $f = 1$. Můžeme tedy shrnout:

Kvadrát časoprostorového intervalu mezi událostmi je stejný ve všech inerciálních vztažných soustavách, je invariantem relativistické mechaniky:

$$c^2(t^2 - t^1)^2 - [(x^2 - x^1)^2 + (y^2 - y^1)^2 + (z^2 - z^1)^2] = \text{invariant}$$

Podařilo se nám vyjádřit fyzikální princip – princip stálé rychlosti světla – matematicky. Pomocí do jisté míry motivační, avšak pro daný účel relevantní úvahy o relativnosti současnosti jsme ukázali, že „euklidovské“ invarianty (prostorový a časový) zmíněnému principu nevyhovují, a s využitím základních vlastností symetrie časoprostoru jsme dospěli k nalezení prostoročasového invariantu, který je s tímto principem v souladu. Důslední zastánci přímých matematických postupů (k nimž se rovněž v rozumné míře řadíme) by mohli namítnout, že stačilo postulovat, že metrika v časoprostoru $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ není (na rozdíl od metriky v klasické mechanice) euklidovská, nýbrž Minkowského, tj. $g = c^2\, \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y - \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$, neboť respektuje princip stálé rychlosti světla i vlastnosti symetrie časoprostoru. Takový přístup by však již byl až příliš formalistický a pro úvodní kurs obecné fyziky ne zcela vhodný (nejen pro pravděpodobnou neobezná-



Obr. 2 K Lorentzově transformaci – vztažné soustavy.

menost studentů s problematikou metrických prostorů v dané fázi studia fyziky).

Teď už si připomeneme Lorentzovu transformaci a všimneme si velmi stručně některých způsobů jejího uvádění, resp. „odvození“ v literatuře.

Lorentzova transformace v textech

V univerzitní učebnicové literatuře, ale i v originálních pracích populárnějšího zaměření se Lorentzova transformace vyskytuje v různých podobách. Často bývá uváděna jen jako fakt sloužící později k výkladu kontrakce délek a dilatace času. Někde se objevuje i náznak jistého fyzikálního odvození např. prostřednictvím modifikace Galileiovy transformace, ale chybí přirozená algebraická argumentace vyplývající z invariantnosti časoprostorového intervalu. Nejprve si pro ilustraci stručně všimneme některých typických verzí Lorentzovy transformace. Poté ukážeme efektivnost jejího odvození pomocí aparátu lineární algebry.

Pro tento účel postačí, budeme-li uvažovat o nejjednodušší verzi Lorentzovy transformace, které se říká *speciální*. Ta odpovídá situaci na obr. 1, odmyslíme-li si zdroj světla i detektory. V okamžiku seřízení hodin souřadnicové osy splývají, rychlost soustavy S' vzhledem k soustavě S je $\vec{V} = (V, 0, 0)_S$. Pro pohodlí čtenáře obrázek přece jen překreslíme – obr. 2.

Lorentzova transformace odpovídající uvedené situaci má pro událost $U \sim (t, x, y, z)_S \sim (t', x', y', z')_{S'}$ tvar

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right),$$

$$\text{kde } \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \text{a zpět.}$$

V limitě $V/c \to 0$, která odpovídá neexistenci mezní rychlosti, přejde podle očekávání v transformaci Galileiovu. Přístupy k Lorentzově transformaci jsou různé, a jak již bylo řečeno, některé texty upouštějí od odvození zcela:

- například učebnice [3], deklarovaná jako vysokoškolská, se sice zabývá problematikou kontrakce délek a dilatace času, která je ovšem až důsledkem LT, samotnou LT však paradoxně uvádí pouze jako fakt;
- „fyzikální“, často intuitivní přístupy, spočívající v „opravě“ Galileiovy transformace (GT) tak, aby byla respektována mezní rychlost a limitní podoba transformačních vztahů, tj. $\lim_{V/c \to 0} LT = GT$ (viz např. [3]);
- přístupy formálně sledující odvození (samozřejmě lineárních) transformačních vztahů mezi kartézskými soustavami souřadnic v trojrozměrném euklidovském prostoru s rozšířením o jednu dimenzi a s parametrem ψ, který je na rozdíl od úhlu φ s geometrickým významem otočení souřadnicových os v rovině ryze formální,

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi & & x_1 = x_1'\cos\psi - x_4'\sin\psi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi & \to\quad & x_4 = x_1'\sin\psi + x_4'\cos\psi \\ z &= z' & & x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \end{aligned}$$

kde při dosazení $x_4 = ict$, $x_4' = ict'$ dostaneme „euklidovsky vypadající“ invariant $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2$ (viz např. popularizační text samotného A. Einsteina [4]);
- přístupy formálně analogické předchozím, využívající však rovnou hyperbolických funkcí; ty totiž na rozdíl od funkcí goniometrických, pro něž je $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$, splňují vztah $\cosh^2\psi + \sinh^2\psi = 1$, díky němuž se v zápisu invariantu objeví „správné“ znaménko,

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi & & x = x'\cosh\psi - ct'\sinh\psi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi & \to\quad & ct = x'\sinh\psi + ct'\cosh\psi \\ z &= z' & & y = y', \quad z = z'. \end{aligned}$$

Zdůvodnění linearity transformace a její nalezení pomocí lineární algebry se závěrečným využitím jednoduché fyzikální úvahy je přitom velmi pochopitelné a zcela přímočaré. Nespornou výhodou takového přístupu je vedle jeho jednoduchosti také obecnost: umožňuje získat Lorentzovu transformaci takříkajíc rovnou, tj. bez předběžných úvah o kontrakci délek a dilataci času (viz např. [5]), které jsou ovšem ve skutečnosti přirozeným důsledkem právě Lorentzovy transformace. (Jsou případy, kdy se v učebnicích uvádějí pouze vztahy pro kontrakci délek a dilataci času, aniž je Lorentzova transformace vůbec zmíněna – viz např. [3].)

Linearita v relativitě: Lorentzova transformace a lineární algebra

V tomto odstavci ukážeme na příkladu tzv. speciální Lorentzovy transformace, jak snadné je její elementární odvození pomocí jednoduchých a v podstatě rutinních úvah lineární algebry. Z hlediska algebry je funkce $(s_{12})^2$, jak jsme již uvedli, kvadratickou formou v proměnných $(c\tau, \xi, \eta, \zeta) = (ct_2 - ct_1, x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, a to v tzv. kanonickém tvaru (obsahuje jen kvadráty jednotlivých proměnných). Vzhledem k tomu, že může nabývat hodnot všech znamének, včetně nuly, jedná se o formu *indefinitní*. Transformace souřadnic převádí kvadratickou formu opět v kvadratickou formu. Musí proto jít o transformaci lineární. Uvažujme už jen o speciální situaci odpovídající obr. 6, jíž odpovídají transformační vztahy pro y-ovou a z-ovou souřadnici $y = y'$, $z = z'$. Každou událost tedy popisujeme jen dvojicí $U \sim (u) = (ct, x)_S$, $U \sim (u') = (ct', x')_{S'}$. Matici (lineárního) přechodu mezi soustavami souřadnic označme P. Maticově vyjádříme také invariant:

$$(u) = (u')P, \quad (u') = (u)P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$c^2t^2 - x^2 = (ct\ \ x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (u)G(u)^T = (u\ )PGP\ \ (u\ )$$

$$= (u')PGP^T(u')^T$$

$$(ct')^2 - (x')^2 = (u')G(u')^T,$$

kde horní index T značí transpozici matice. Vzhledem k invarianci kvadrátu časoprostorového intervalu platí $(u')G(u')^T = (u')PGP^T(u')^T$ pro každou matici (u'), tj. $G = PGP^T \Rightarrow GP^T = P^{-1}G$. Z poslední rovnosti plyne, že determinant matice P je $\det P = \pm 1$. Naší volbě vztažných soustav odpovídá kladná hodnota determinantu, tj. $p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12} = 1$. Dále je

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}G = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{12} \\ -p_{21} & -p_{11} \end{pmatrix},$$

$$GP^T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ -p_{12} & -p_{22} \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti $GP^T = P^{-1}G$ plyne zjednodušený tvar matice P získaný pouze jako důsledek invariance kvadrátu časoprostorového intervalu a linearity transformace souřadnic,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{11} \end{pmatrix}, \text{ kde } p_{11}^2 - p_{12}^2 = 1.$$

Zbývá určit poslední nezávislou podmínku pro prvky matice P, která již umožní všechny jednoznačně určit. K tomu poslouží závěrečná fyzikální úvaha. Prvky matice P nepochybně závisejí na velikosti rychlosti V. Použijeme proto získaný „polotovar" matice P pro nějakou událost, která s touto rychlostí souvisí. Uvažujme o události $U \sim (u') = (ct', 0)_{S'} \sim (u) = (ct, x)_S$, která v okamžiku t' nastala v počátku O' soustavy S'. Vzhledem ke speciální volbě vztažných soustav (počátky i osy splývají v okamžiku seřízení hodin na nulový čas) platí $x = Vt$, tedy

$$(ct, Vt) = \\ = (ct', 0)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow p_{11} = \frac{t}{t'}, \quad p_{12} = \frac{Vt}{ct'} = \frac{V}{c}p_{11},$$

odkud vzhledem k rovnosti $p_{11}^2 - p_{12}^2 = 1$ dostaneme definitivní tvar matice P

$$p_{11} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma, \quad p_{12} = \frac{V}{c}\gamma, \quad P = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{V}{c}\gamma \\ \frac{V}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

a odtud už samotnou LT, jak je uvedena v předchozím odstavci. Obdobně, jen s trochou počítání navíc, můžeme dostat LT v obecném tvaru.

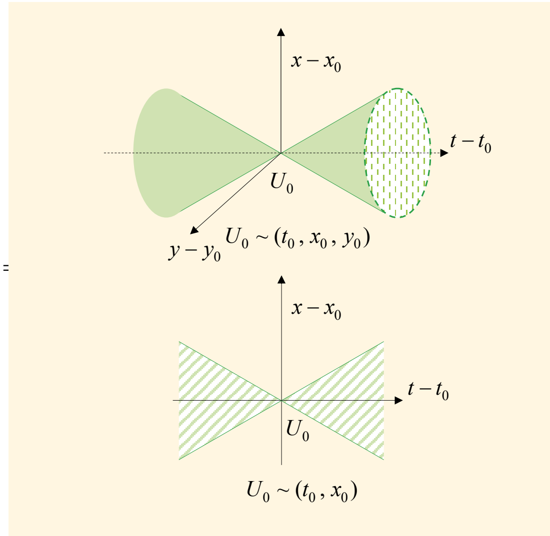
Jednoduché důsledky invariance časoprostorového intervalu: minulost a budoucnost

Abychom studenta nevrhli jen do „zajetí" algebry, zkusme z toho, co jsme si na samém začátku pro zapojení matematického aparátu připravili, vytěžit nějaké názorné informace, které mohou být zajímavé, resp. poněkud překvapivé. K některým z nich dospějeme i bez Lorentzovy transformace, pouze na základě invariance časoprostorového intervalu (resp. jeho kvadrátu, s nímž se jako s kvadratickou formou lépe pracuje). Půjde o pojmy „minulost" a „budoucnost".

Hypotetický pokus na obr. 1 ukázal, že události, které jsou současné v jedné vztažné soustavě, nemusí být současné v jiné soustavě. V našem příkladu nastaly události U_1, U_2 v soustavě S' současně, v soustavě S událost U_1 předcházela události U_2. Mohlo by tomu být i naopak? Nebo jinak – je možné, že jistá událost U_1 v jedné soustavě předchází události U_2 a v jiné po ní následuje? Relativní by takto nebyla jen současnost, ale i následnost. A jak je to s příčinností? Poznáme, zda dvě události mohou/nemohou příčinně souviset? K přinejmenším částečnému zodpovězení těchto otázek poslouží *světelný kužel* (správně jde o kuželovou plochu, ale termín „kužel" je již tak zažitý, že jej raději nebudeme opravovat). Rovnice

$$c^2(t - t_0)^2 - \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right] = 0,$$

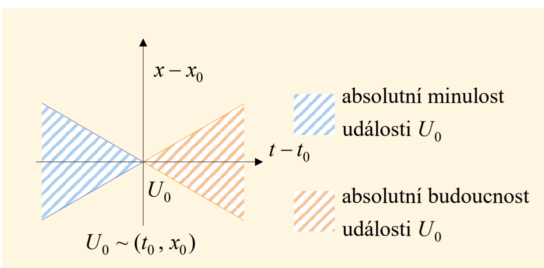
zapsaná v soustavě S, představuje trojrozměrnou kuželovou plochu ve čtyřrozměrném prostoru, s vrcholem v bodě $(t_0, x_0, y_0, z_0)_S$. Nazýváme ji *světelný kužel události* $U_0 \sim (t_0, x_0, y_0, z_0)_S$. Představit si ji dokážeme snadno, „ubereme-li" jednu, nebo dvě dimenze. V prvním případě půjde o kuželovou plochu, jak ji známe v trojrozměrném prostoru, ve druhém se jedná o dvojici různoběžek (obr. 3). V situaci vlevo je $z = 0$, vpravo pak $y = 0$, $z = 0$.



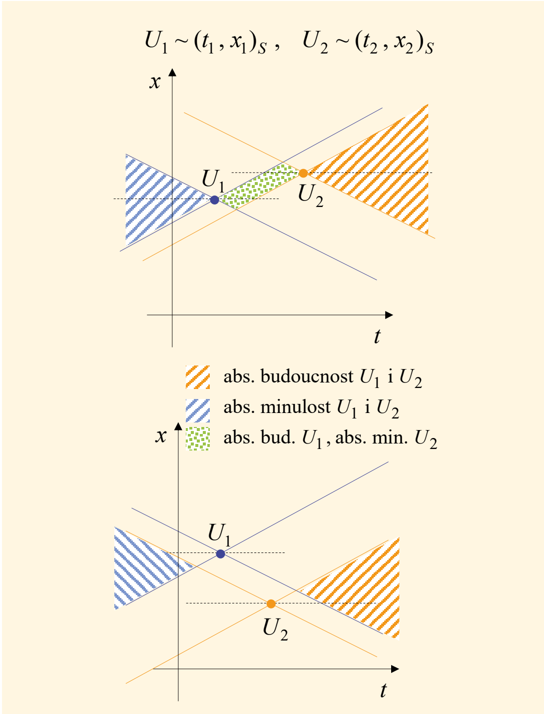
Obr. 3 Světelný „kužel" v $\mathbf{R}^3$ a v $\mathbf{R}^2$.

Kvadrát časoprostorového intervalu $s^2 = c^2 (t - t_0)^2 - \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]$, resp. $s^2 = c^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2$ je pro každou událost na kuželové ploše, resp. různoběžkách nulový, v oblasti „uvnitř" (šrafováno) je kladný, vně záporný. Protože jde o invariant, budou stejné nerovnosti platit v každé vztažné soustavě.

Každá událost, která leží vně světelného kužele události $U_0 \sim (t_0, x_0, y_0, z_0)_S$, může v některé vztažné soustavě nastat současně s událostí U_0. V takové soustavě platí $c^2 (t' - t'_0)^2 - \left[(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2\right] < 0$, takže pro $t' - t'_0$ nedojde ke sporu. Naopak žádná událost ležící uvnitř světelného kužele nemůže s událostí U_0 nastat současně v žádné vztažné soustavě. Bude tedy události U_0 buď vždy předcházet (bude ležet v levé části



Obr. 4 Absolutní minulost a absolutní budoucnost události.



Obr. 5 Vztahy budoucnosti a minulosti.

vnitřku světelného kužele), nebo po ní bude vždy následovat (bude ležet v pravé části vnitřku světelného kužele). Uvedené dvě oblasti představují *absolutní minulost*, resp. *absolutní budoucnost události* U_0.

Obr. 5 ukazuje oblasti minulosti a budoucnosti pro dvě události U_1, U_2. Událost U_2 v levém obrázku nastane ve všech vztažných soustavách až po události U_1, neboť leží v oblasti její absolutní budoucnosti. Naopak v obrázku vpravo leží událost U_2 vně světelného kužele události U_1. Obrázek odpovídá situaci, kdy v soustavě S nastane událost U_2 až po události U_1, tj. $t_2 > t_1$. Existují však vztažné soustavy, v nichž se „časové poměry" obrátí, tj. událost U_2 bude předcházet události U_1. Kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby v každé vztažné soustavě S' platilo $t'_2 > t'_1$, znamenalo by to, že událost U_2 leží v oblasti absolutní budoucnosti události U_1. (Obdobně bychom mohli uvažovat o prostorové odlehlosti událostí.)

Jednoduché důsledky Lorentzovy transformace: kontrakce délek a dilatace času

O tzv. *kontrakci délek* a *dilataci času* se nejen v popularizační literatuře (např. [6]), ale i v učebnicích často vedou až spekulativní úvahy, které porozumění jednoduchému problému spíše znesnadňují. Použití Lorentzovy transformace, samozřejmě při jasné definici toho, co rozumíme „délkou", resp. „trváním děje", je přitom velmi jednoduché. Opět uvažujeme o vztažných soustavách podle obr. 2.

Předpokládejme, že určitá tyč je v klidu vzhledem k soustavě S' a je uložena podél osy x'. *Vlastní délkou* této tyče budeme rozumět vzdálenost jejích konců $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ v soustavě S'. (Tato hodnota bude samozřejmě stejná pro každou dvojici událostí, jež nastanou na koncích tyče, tj. v pevných polohách x'_1 a x'_2 a v libovolných okamžicích t'_1 a t'_2.) Délku tyče v soustavě S musíme nějak definovat. Zavedeme ji jako prostorovou vzdálenost $\Delta x = x_2 - x_1$ událostí $U_1 \sim (t_1, x_1)_S$ a $U_2 \sim (t_2 = t_1, x_2)_S$ *současných* v soustavě S, představujících např. *současné* změření poloh konců tyče. Platí

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 + Vt'_2) - \gamma(x'_1 + Vt'_1) =$$

$$= \gamma(x'_2 - x'_1) + \gamma^2 V\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right) - \gamma^2 V\left(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1\right) = \gamma\Delta x' + \gamma \quad \Delta x,$$

$$= \gamma\Delta x' + \gamma\frac{V^2}{c^2}\Delta x,$$

$$\Delta x\left(1 + \gamma^2\frac{V^2}{c^2}\right) = \gamma\Delta x' \Rightarrow \Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Délka tyče, která se vzhledem k soustavě, v níž provádíme *současné* měření polohy jejích konců, pohybuje, se oproti vlastní délce tyče jeví zkrácena. Nějaké „názorné" vysvětlování tohoto výsledku může být spíše kontraproduktivní. Vztah vyplývá z definice délky (prostorové vzdálenosti dvou bodů pevných v jedné ze vztažných soustav – v našem případě S') a Lorentzovy transformace.

Obdobně snadno vyložíme pojem *dilatace času*. Předpokládejme, že se nějaký děj, započatý událostí U_1 a ukončený událostí U_2, odehrál v soustavě S' v tomtéž místě (uvedené události jsou v soustavě S' soumístné, $U_1 \sim (t'_1, x'_1)_{S'} \sim (t_1, x_1)_S$, $U_2 \sim (t'_2, x'_2 = x'_1)_{S'} \sim (t_2, x_2)_S$. *Vlastní dobou* trvání děje označíme hodnotu $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Doba trvání zmíněného děje v soustavě S je přirozeně definována jako rozdíl $\Delta t = t_2 - t_1$. Platí

$$\Delta t = t_2 - t_1 =$$

$$= \gamma\left(t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_2\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_1\right) = \gamma\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Doba trvání děje se v soustavě S oproti vlastnímu času trvání děje prodlužuje. Hovoříme proto o dilataci času.

Závěrem – lineární algebra v univerzitním kursu matematiky

Lineární algebra je sama o sobě svébytnou disciplínou, vyznačující se především přímočarou logikou svých úvah: odvození či dokazování zásadních tvrzení na základě přirozeným způsobem definovaných pojmů nevyžaduje žádné umělé, resp. ryze formální konstrukce či obraty. Jejím typickým rysem je elegance na jedné straně a praktičnost na straně druhé. (Vedle STR a fyziky vůbec je například nepostradatelná pro geometrii lineárních útvarů ve vícerozměrných prostorech, kde umožňuje nahradit selhávající geometrickou představivost výpočetními procedurami.) Úvodní odstavec, v němž jsme uvedli jen velmi omezený výčet situací, kdy se linearita objevuje ve fyzikálních zákonitostech nebo v aproximativních přístupech k jejich aplikacím, je dokladem toho, že lineární algebra je, resp. měla by být nepominutelnou disciplínou v základním kursu matematiky ve studijních programech zaměřených na fyziku. Pro její nezbytnost jako efektivního matematického aparátu prakticky ve všech zásadních fyzikálních teoriích by měla být dokonce jedním z pilířů kursu. Bohužel tomu tak vždy není – vzhledem k současným formálně svazujícím a často nepříliš smysluplným požadavkům na akreditaci studijních programů se jí v kontaktní výuce často nemůže věnovat takový rozsah, jaký by byl potřebný k pochopení jejích základů a schopnosti aplikovat je ve fyzice, o pokročilejších pasážích nemluvě. V důsledku toho se studentům jeví lineární algebra obtížnou, přestože pochopení a schopnost používání jejích základů nevyžaduje víc než porozumět pojmu linearity jako takové a mít dobré logické myšlení. A že by dokázali ocenit eleganci a vnitřní konzistenci této disciplíny, lze snad doufat jen u některých. Další nedostatek bývá na straně vyučujících fyziky, kteří leckdy nenavazují na znalosti studentů získané v matematických předmětech a budují si „svoji matematiku“ pro „svůj předmět“ účelově sami. Studenti pak nevidí přímou souvislost fyziky a jejího (skutečně matematického) aparátu a mohou považovat výuku lineární algebry za samoúčelnou.

Prakticky ve všech fyzikálních předmětech však existují situace, v nichž je použití lineární algebry nutné. Jen je třeba jich dobře využít, jejich souvislost s fyzikou explicitně zdůraznit a od samého začátku matematizace fyzikálního výkladu znalosti získané v kurzu lineární algebry přímo, bez fyzikálně-motivačních oklik či nadbytečných a někdy i zavádějících analogií, použít. Typickým příkladem je právě již zmíněná Lorentzova transformace, jejímž prostřednictvím jsme se snažili tento přístup osvětlit.

V příspěvku jsme se zabývali lineární algebrou jako matematickým aparátem pro speciální teorii relativity. Dnešní studenti se však spíše než o relativistické zkracování tyčí a prodlužování doby života částic zajímají o černé díry, fungování navigací GPS a další populární fyzikální či technická témata, která však již spadají do obecné teorie relativity. Ta už ovšem není teorií lineární a je (nejen proto) podstatně komplikovanější z fyzikálního i matematického hlediska. K jejímu skutečnému pochopení již nestačí nějaká povrchní znalost odpovídající matematiky. Je jistě na uvážení každého učitele fyziky, jakým způsobem pracuje s matematickým aparátem při výkladu fyzikálních teorií. Domníváme se, že přímé využívání matematických znalostí studentů, tak jak je získají v kursech vedených kvalifikovanými matematiky, je nejúčinnější cestou od fyzikálních principů k odvozeným tvrzením a jejich aplikacím na konkrétní situace. Navíc to studenty přesvědčí, že matematika předepsaná ke studiu ve fyzikálních programech není od fyziky „odtržená“ a že není samoúčelná.

Literatura

[1] J. Musilová, P. Musilová: *Matematika pro porozumění i praxi II/1 a III/1, III/3*. VUTIUM, Brno 2012 a 2017.

[2] https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/teorie-relativity/zakladni-principy/relativnost-soucasnosti

[3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. (Překlad z anglického originálu *Fundamentals of Physics*, 5th Ed., Wiley & Sons, Inc., 1997.) VUTIUM, Brno 2000.

[4] A. Einstein: *Smysl relativity*. (Překlad z anglického originálu *The Meaning of Relativity: Including the Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field*, 5th Ed. Estate of Albert Einstein 1956.) Vyšehrad, Praha 2016.

[5] http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/683-odvozeni-lorentzovy-transformace.

[6] G. Gamow: *Pan Tompkins v říši divů*. Mladá fronta, Praha 1986.