MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Bakalářská práce

BRNO 2020 ADAM ČEPIL

MASARYKOVA
UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Absolutní optické instrumenty a geodetické čočky

Bakalářská práce

Adam Čepil

Vedoucí práce: prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D. **Brno 2020**

Bibliografický záznam

Autor:	Adam Čepil Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název práce:	Absolutní optické instrumenty a geodetické čočky
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Fyzika
Vedoucí práce:	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20
Počet stran:	xii + 53
Klíčová slova:	Transmutace; Hamiltonovská optika; Geogetická čočka; Eatonova čočka; Luneburgova čočka

Bibliographic Entry

Author:	Adam Čepil Faculty of Science, Masaryk University Department of Theoretical Physics and Astrophysics
Title of Thesis:	Absolut optical instruments and geodesic lenses
Degree Programme:	Physics
Field of Study:	Physics
Supervisor:	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Academic Year:	2019/20
Number of Pages:	xii + 53
Keywords:	Transmutation; Hamiltonian optics; Geodesic lens; Eaton lens; Luneburg lens

Abstrakt

Tato bakalářská práce se v první polovině věnuje převážně vybudování teorie příslušné pojmu transmutace indexu lomu a odvození aparátu pro nalezení trajektorií paprsků v optických prostředích daných profilem indexu lomu. V druhé polovině se tyto nástroje aplikují na několik příkladů nejen z množiny absolutních optických instrumentů. Vyšetříme chování indexu lomu a paprsků při transmutaci a výsledky doplníme grafickými podklady. Dále prozkoumáme možnost odstranění singularit z indexu lomu a v závěrečné části se budeme věnovat problematice geodetických čoček.

Abstract

The first half of this thesis deals mostly with building theory of transmutation of refractive index and derivation of apparatus for calculating trajectory of light in optical media described by refractive index. In the second half we apply these theoretical instruments to several examples of absolut optical instruments and other optical media. We describe behaviour of refractive index and rays in context of transmutation and supplement the results with graphical content. Next we explore the possibility of removing singularities from the refractive index and in the final part we adress the issue of geodesic lenses.

MUNI
SCI

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KOTLÁŘSKÁ 2, 611 37 BRNO
IČ: 00216224
DIČ: CZ00216224

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2019/2020

Ústav:	Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Student:	Adam Čepil
Program:	Fyzika
Obor:	Fyzika

Ředitel *Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Absolutní optické instrumenty a geodetické čočky
Název práce anglicky:	Absolute optical instruments and geodesic lenses

Oficiální zadání:
Absolutní optický instrument neboli dokonalá čočka poskytuje v rámci geometrické optiky zobrazení zcela prosté optických vad pomocí vhodného prostorového rozložení indexu lomu. Toto rozložení indexu lomu v eukleidovském prostoru je často ekvivalentní vhodnému neeukleidovskému prostoru s konstantním indexem lomu (tzv. geodetické čočce), kde se světelné paprsky pohybují po geodetikách. V posledním desetiletí došlo k významnému rozvoji teorie absolutních optických instrumentů i geodetických čoček, které začínají nacházet uplatnění na optických čipech i jinde. Cílem bakalářské práce bude podrobně se seznámit s teorií absolutních optických instrumentů a geodetických čoček a jejich vzájemnou souvislostí, dále propočítat geodetiky na nich a pokusit se nalézt nové typy absolutních instrumentů a geodetických čoček.

Jazyk závěrečné práce:	
Vedoucí práce:	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Datum zadání práce:	26. 11. 2019
V Brně dne:	28. 11. 2019

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

.....	.....	.....
Adam Čepil	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.	prof. Rikard von Unge, Ph.D.
student	**vedoucí práce**	**ředitel Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky**

Poděkování

Od samého začátku mě podporoval, neustále motivoval jak z hlediska možnosti spolupráce s vědeckou kapacitou světové třídy, tak svým nekonečně vlídným osobním přístupem. Prof. Mgr. Tomaš Tyc, PhD., jakožto vedoucí mé práce, mi věnoval více času a trpělivosti, než jsem si zasluhoval. Jeho cenné rady a myšlenky posloužily nejen jako pevný základ pro tuto práci, ale otevřely pro mě cestu do oblasti teoretické fyziky. Za vše zde zmíněné i nezmíněné mu tímto hluboce děkuji.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 1. června 2020 .....

Adam Čepil

Obsah

Úvod **1**

Kapitola 1. Transmutace indexu lomu **3**
1.1 Matematická formulace transmutace 3
1.2 Transmutace mocninnou funkcí 6
1.2.1 Jednotkový index lomu 6
1.2.2 Eatonova a Luneburgova čočka 9

Kapitola 2. Pohybové rovnice paprsků **11**
2.1 Radiálně symetrický izotropní index lomu 11
2.1.1 Geometrický přístup 11
2.1.2 Přístup hamiltonovské optiky 14
2.2 Radiálně symetrický anizotropní index lomu 16
2.3 Tvar Hamiltonových rovnic pro polární souřadnice 17

Kapitola 3. Trajektorie paprsků pro radiálně symetrické profily indexu lomu . **19**
3.1 Index lomu daný mocninnou funkcí 19
3.1.1 Světlo vně okolí počátku 19
3.1.2 Světlo v okolí počátku 22
3.2 Eatonova čočka 25
3.3 Luneburgova čočka 26

Kapitola 4. Transmutace singularity **27**
4.1 Obecné řešení singularity 27
4.2 Transmutovaný jednotkový profil 30
4.2.1 Anizotropní index lomu 31
4.2.2 Trajektorie paprsků 32
4.3 Singularita v Eatonově čočce 37
4.3.1 Anizotropní index lomu 37
4.3.2 Trajektorie paprsků 41

Kapitola 5. Geodetické čočky **43**
5.1 Obecný radiálně symetrický index lomu 43
5.2 Geodetická čočka ekvivalentní Eatonově čočce 45
5.3 Geodetická čočka ekvivalentní Luneburgově čočce 46

5.4 Transmutovaný jendnotkový profil 48

Závěr **51**

Literatura **53**

Úvod

Téma bakalářské práce bylo zvoleno jako průnik studentova zájmu s aktuálními problémy ve fyzice. Teprve v posledním desetiletí totiž začalo docházet k prohlubování teorie týkající se absolutních optických instrumentů a geodetických čoček, po kterých výrazně narostla poptávka, jakmile začaly nacházet své praktické uplatnění. Zejména se pak jedná o uplatnění geodetických čoček na optických čipech, které mají obrovský potenciál co se týče výkonnosti i energetické úspornosti.

Zde se ovšem nebudeme věnovat optickým čipům. V této práci se nejprve zaměříme na fyzikální koncept, jenž umožňuje vytvářet optická prostředí nejrůznějších vlastností. Můžeme pak například u čočky dosáhnout odrazu světla na rozhraní nebo tento odraz odstranit, ovlivnit lom světla nebo se jej zcela zbavit, či popsat reálně sestrojitelné optické prostředí, které se pro vcházející a vycházející světlo chová stejně jako čočka s prakticky zcela nerealizovatelnými hodnotami indexu lomu. Tyto možnosti prozkoumáme s pomocí transmutace indexu lomu. Protože ale tento pojem není exaktně definován, bude prvotním cílem jej před užitím nejdříve korektně vyjádřit v jazyce matematiky společně s veškerou další potřebnou teorií. Poté se již podíváme na několik konkrétních příkladů transmutací optických prostředí.

Ve druhé kapitole odvodíme potřebný aparát pro určení trajektorií paprsků v nejrůznějších čočkách. Uvedeme dva různé přístupy pro izotropní prostředí a poté se pokusíme teorii zobecnit pro vyšetření chování světla i v anizotropním prostředí. Takové prostředí odkrývá nové možnosti vlastností optických instrumentů, které by bylo jinak nemožné sestrojit s použitím izotropních materiálů.

Ve třetí kapitole si veškerou doposud popsanou teorii aplikujeme na konkrétní případy čoček z první části a názorně si vizualizujeme vliv různých optických profilů na trajektorie paprsků. Vyšetříme chování světla uvnitř několika známých absolutních instrumentů, jako například Eatonovy čočky nebo čočky Luneburgovy. Nevynecháme ani čočky vzniklé transmutací, což poslouží mimo jiné jako vizuální důkaz správnosti teorie z první části této práce.

Dále využijeme potenciálu transmutace i mimo izotropní prostředí. Existují totiž čočky s žádanými optickými vlastnostmi využitelnými v praxi, jejichž indexy lomu ovšem obsahují nulové nebo divergující hodnoty a nejsou tak prakticky sestrojitelné. I taková prostředí ale po vhodně zvolené transmutaci přejdou v již prakticky sestrojitelné anizotropní indexy lomu, které si zachovají kýžené optické vlastnosti. Navíc se pokusíme navrhnou čočku, která odstraní nejen singularitu, ale i nechtěný lom na rozhraní.

Na závěr této práce prozkoumáme několik již zmíněných geodetických čoček. Jedná se vlastně o zakřivenou plochu, po níž se pohybuje světlo. V praxi by se toto světlo pohybovalo spíše v nějaké tenké vrstvě na takových površích, to ale nic nemění na samotných trajektoriích paprsků, které si pro několik příkladů vizualizujeme. Samotné geodetické čočky jako plochy parametrizujeme podobně jako samotné paprsky výpočtem ze zadaných indexů lomu.

Kapitola 1

Transmutace indexu lomu

V průběhu této práce budeme zkoumat paprsky světla v různých profilech indexů lomu. Pro takové bádání je zásadní veličinou právě index lomu, který zcela určuje trajektorii světla po zvolení počátečních podmínek. Je tedy přirozené zkoumat trajektorie paprsků v závislosti na volbě indexu lomu. Můžeme tak zvolit takové transformace indexu lomu, abychom dostali profil, ve kterém se světlo šíří a láme podle našich požadavků. Nebo můžeme znalost vztahu mezi paprsky a indexem lomu využít k tomu, abychom odstranili problematické body, například index lomu nabývající nulové hodnoty.

Představme si, že známe vyjádření trajektorií paprsků v nějakém optickém prostředí. Chceme-li pozměnit tyto trajektorie k naší představě, můžeme nalézt funkci f zobrazující staré paprsky na nové. To samotné ovšem nehraje žádnou roli, pokud nezměníme i samotné prostředí, tedy nenalezneme profil indexu lomu takový, že trajektorie paprsků v něm budou námi požadované. Právě pro nalezení takového profilu indexu lomu slouží transmutace. Známe-li index lomu v původním prostředí a požadavky na trajektorie formulujeme funkcí f, index lomu můžeme transmutovat a vznikne tak nové optické prostředí s transmutovaným indexem lomu, paprsky v němž jsou právě ty námi požadované.

1.1 Matematická formulace transmutace

Samotný termín transmutace indexu lomu není exaktně definovaný pojem. Pro naši potřebu pod tím však budeme rozumět zobrazení $T_f\colon T \times \mathbb{R} \to f(T) \times \mathbb{R}$, kdy bodu z v prostoru T a jeho indexu lomu n přiřadíme obraz tohoto bodu $f(z)$ a transmutovaný index lomu n' takový, aby optická délka libovolného infinitezimálního délkového elementu původního prostoru byla totožná s optickou délkou odpovídajícího elementu v prostoru druhém.

Je třeba zdůraznit, že takto definujeme transmutaci lokálně a rozhodně tím nezaručujeme existenci transmutovaného indexu lomu globálně. Mohou tedy nastat situace, kdy zobrazení f není prosté a bodu v prostoru $f(T)$ tak bude příslušet více indexů lomu, jež nemusí nutně nabývat stejné hodnoty. V takových případech by se ale jednalo o nefyzikální prostor, proto se omezíme jen na transformace určující index lomu jednoznačně.

V této definici jsou oba prostory T a jeho obraz $f(T)$ abstraktní, není zde žádné omezení na volbu prostorů, ve kterých můžeme pracovat. Přesto ale speciální místo mezi všemi volbami zaujímá prázdný prostor, ve kterém se světlo pohybuje po přímkách. Takový pro-

stor pak nazýváme virtuální. Pokud nyní aplikujeme na virtuální prostor zobrazení f, obraz přímek reprezentujících paprsky v prázdném prostoru už bude obecná křivka. Takový prostor $f(T)$ společně s indexem lomu indukujícím tyto zakřivené trajektorie paprsků se nazývá fyzikální [7]. Naopak ze znalosti fyzikálního prostoru můžeme zpětně nalézt virtuální prostor inverzním zobrazením, což nám umožní snadno nalézt trajektorie paprsků jakožto přímky a ty pak zpětně zobrazit do fyzikálního prostoru. Je ale třeba počítat s tím, že cenou za markantní zjednodušení hledání trajektorií paprsků ve fyzikálním prostoru, může být komplikovaná topologie příslušného virtuálního prostoru.

Pro naše potřeby budeme po většinu času pracovat s fyzikálním prostorem jako s komplexní rovinou nebo její podmnožinou, zejména pro jednoduchost zápisu transformace roviny funkcí jedné komplexní proměnné. Zvolíme-li při práci v komplexní rovině nebo její otevřené podmnožině C funkci f komplexně analytickou, tedy takovou, pro niž existuje komplexní derivace v nějakém okolí každého bodu množiny C, bude takové zobrazení konformní a transmutovaný index lomu tak bude izotropní. Navíc jestliže tato funkce závisí pouze na absolutní hodnotě komplexní proměnné $|z|$, bude transmutovaný index lomu radiálně symetrický. V průběhu této práce se setkáme i s anizotropními indexy lomu, u kterých pro vyšetření trajektorií paprsků navíc k poloze potřebujeme i závislost na směru paprsku, zobrazení f použité zde nebude analytickou funkcí. Zároveň budeme používat označení komplexní proměnné z pro prostor T a $w = f(z)$ pro prostor $f(T)$ (většinou budeme s prostorem T pracovat jako s virtuálním a jeho obrazem jako s fyzikálním prostorem).

Nyní z naší definice transmutace vyjádříme podmínku pro nalezení transmutovaného indexu lomu. Vyjdeme nejdříve z kvadrátu infinitezimální vzdálenosti, definované metrikou jako

$$\mathrm{d}l^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{1.1}$$

kde využíváme Einsteinovy sumační konvence, který určuje délkový element $\mathrm{d}l$ při zvolení konkrétního souřadnicového systému. Metrický tenzor tak nese informaci spojenou s křivočarostí souřadnic. Neboť hodnota indexu lomu je vlastně poměr mezi velikostmi optického a délkového infinitezimálního elementu v závislosti na poloze a obecně i na směru v případě anizotropního indexu lomu, platí pro kvadrát optické infinitezimální délky $\mathrm{d}s^2$ v izotropním prostředí vztah

$$\mathrm{d}s^2 = n^2\mathrm{d}l^2, \tag{1.2}$$

přičemž n je izotropní index lomu. Zkombinováním těchto dvou vztahů můžeme vyjádřit element optické délky jako

$$\mathrm{d}s^2 = n^2 g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{1.3}$$

Vidíme, že se jedná o analogii vztahu (1.1), odtud můžeme zavést optický metrický tenzor s izotropním indexem lomu jako

$$G_{ij} = n^2 g_{ij}. \tag{1.4}$$

Jelikož při transmutaci požadujeme zachování právě optické délky $\mathrm{d}s^2$, můžeme vztah mezi optickými metrickými tenzory spojených transmutací vyjádřit rovností (kvadrátu) elementů optických délek v bodě a jeho obrazu

$$G_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = G'_{ij}\mathrm{d}x'^i\mathrm{d}x'^j, \tag{1.5}$$

přičemž nečárkované jsou veličiny ve výchozím prostoru T a čárkované v obrazu tohoto prostoru $f(T)$. Je důležité rozlišovat mezi metrickým tenzorem g_{ij} měřícím běžnou vzdálenost vztahem (1.1) a optickým metrickým tenzorem G_{ij}, se kterým měříme optické vzdálenosti pomocí vztahu (1.3).

Trochu jiná situace nastane, budeme-li se zabývat anizotropním prostředím, kde přibude závislost indexu lomu na směru paprsku. Víme, že význam indexu lomu je poměr mezi optickou a geometrickou délkou, jak je tomu v rovnici (1.2), kde je index lomu invariantní vůči změně směru paprsku. To vychází z předpokladu, že samotná velikost optického délkového elementu $|\mathrm{d}s|$ je nezávislá na směru. Proto tentokrát vyjdeme z optického metrického tenzoru anizotropního prostředí G_{ij}, který definuje délku optického elementu obecně závislou na směru paprsku $\vec{n}$ vztahem

$$\mathrm{d}s^2_{\vec{n}} = G_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{1.6}$$

Je třeba zdůraznit, že nevycházíme ze vztahu (1.4), platného pouze pro izotropní prostředí, index lomu tedy nemusí být nutně konstantou úměrnosti mezi metrickými tenzory v geometrickém a optickém prostoru. Samotný anizotropní index lomu zavedeme úpravou rovnice (1.2) do tvaru

$$\mathrm{d}s^2_{\vec{n}} = n^2_{\vec{n}}\mathrm{d}l^2, \tag{1.7}$$

kde index $\vec{n}$ značí směr paprsku ve zkoumaném bodě určující hodnotu indexované veličiny v tomto směru. Geometrická délka $\mathrm{d}l$ zůstává pro naše potřeby invariantní vůči změně směru paprsku, směrový index zde proto není nutný. Z rovnice (1.7) vyjádříme index lomu závislý na směru paprsku vztahem

$$n_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}s^2_{\vec{n}}}{\mathrm{d}l^2}} = \sqrt{\frac{G_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}{g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}}, \tag{1.8}$$

Takto definovaný anizotropní index lomu vychází ze znalosti optického metrického tenzoru, ten je ale určen transmutací, pro kterou rovností kvadrátu elementů optických délek závislých na směru paprsku obdržíme totožnou rovnici jako pro izotropní prostředí. Vztah (1.5) je tak platný pro obecný index lomu.

Nyní nalezneme konkrétní podobu optického délkového elementu pro kartézské souřadnice (x, y) ve dvoudimenzionálním prostoru. Metrický tenzor (pro názornost v maticové notaci) je tvaru

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Odtud výraz pro délkový element z (1.1) přechází do tvaru

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2. \tag{1.10}$$

Pro izotropní prostředí využijeme vztahu (1.3) a výraz pro optický délkový element tak můžeme psát jako

$$\mathrm{d}s = n\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}. \tag{1.11}$$

Jak jsme ale rozebírali dříve, je pro práci s transmutací vhodné volit f komplexně analytickou a samotné prostory T a $f(T)$ popisovat postupně komplexními proměnnými z a w. Přechod od reálných kartézských souřadnic (x, y) k jedné komplexní proměnné z je dán vztahem

$$z = x + iy, \tag{1.12}$$

odkud již upravíme délkový element v (1.8) do komplexního tvaru

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}z^*} = |\mathrm{d}z|. \tag{1.13}$$

Konečně rovnost danou transmutací mezi dvěma prostory s izotropními indexy lomu, každý popsán jednou komplexní proměnnou, kterou budeme hojně využívat v dalším textu, tak nabývá tvaru

$$n|\mathrm{d}z| = n'|\mathrm{d}w|, \tag{1.14}$$

kde polohu v prostoru T s indexem lomu n vyjadřuje proměnná z a pro komplexní číslo w, popisující polohu v $f(T)$ s indexem lomu n' , platí rovnost $w = f(z)$.

1.2 Transmutace mocninnou funkcí

Již jsme definovali pojem transmutace a vyjádřili podmínku, jak získat ze znalosti funkce f a indexu lomu v prostoru T jeho transmutaci. Nyní uvedeme tuto formulaci do praxe a prozkoumáme zdánlivě nejjednodušší případ, kdy transmutující funkcí bude mocninná funkce $f(z) = w = z^m$, kde m je nenulový reálný parametr. V případě nulové hodnoty tohoto parametru by obrazem celého prostoru byl jeden bod, proto tuto možnost vynecháme, neboť postrádá jakýkoli význam v kontextu čoček. Rovnici pro transmutovaný index lomu, která je stěžejní pro tuto část práce, můžeme vyjádřit z výsledku předchozí sekce vztahem

$$n'(w) = n(r)\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|. \tag{1.15}$$

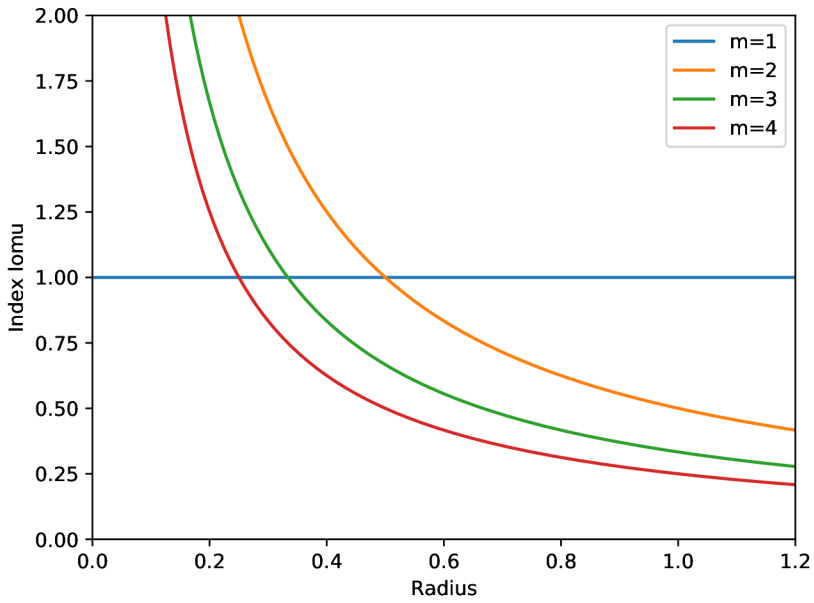
1.2.1 Jednotkový index lomu

S danou volbou transmutující funkce $f(z) = w = z^m$ zbývá zvolit index lomu, jejž budeme transmutovat. Pro názornou ilustraci transmutace tak zvolíme jednotkový index lomu v prostoru T, jedná se tedy o virtuální prostor příslušný prostoru $f(T)$. Světelné paprsky by se zde šířily přímočaře bez jakéhokoli lomu či ohybu, stejně jako ve vakuu.

Nyní využijeme rovnice (1.15) a po provedení derivace obdržíme vztah pro transmutovaný index lomu

$$n'(r') = \frac{r'^{\frac{1-m}{m}}}{|m|}, \tag{1.16}$$

kde $r' = |w|$ ($r = |z|$) je označení pro vzdálenost od počátku ve fyzikálním (virtuálním) prostoru. Transmutovaný index lomu je funkcí pouze vzdálenosti od počátku díky volbě transmutující funkce $f(z) = w = z^m$, jejíž derivace v absolutní hodnotě je závislá pouze na r a jedná se tak o radiálně symetrickou funkci. Na obrázku 1.1 jsou profily $n'(r')$ pro čtyři kladné hodnoty parametru m. Jsou to funkce závislé jen na vzdálenosti od počátku, jedná se tedy o rotačně symetrické indexy lomu. Hodnota $m = 1$ indukuje triviální případ identického zobrazení, tedy transmutovaný index lomu je také jednotkový. Povšimněme si divergujících hodnot v počátku. Světlo procházející středem čočky s takto transmutovaným indexem lomu nebude mít definovanou trajektorii. V praxi je takový profil nesestrojitelný, jedná se však jen o singularitu, která nijak neznemožňuje spočíst hypotetické trajektorie světla v libovolném jejím okolí. Z praktického hlediska ale problém nenastává jen v počátku, ale i v jeho okolí. Jsme totiž omezeni materiály, které máme k dispozici. Typický index pro sklo se pohybuje okolo 1,5 a index lomu diamantu 2,42 už je relativně vysoká hodnota. Proto je prakticky zcela vyloučeno sestrojit takové profily i ve značné vzdálenosti od počátku.

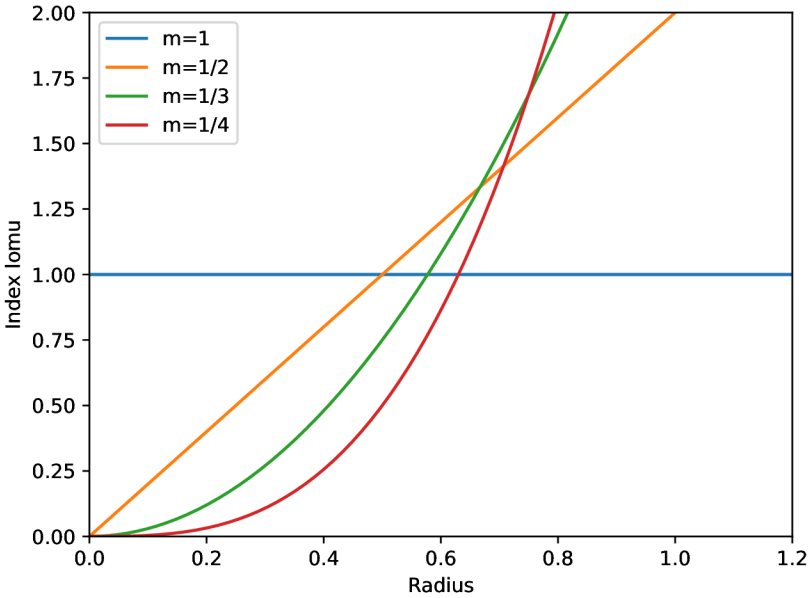


Obrázek 1.1: Indexy lomu v závislosti na vzdálenosti od počátku pro různé hodnoty parametru m ve funkci $f(z) = z^m$. Hodnoty 1, 2, 3 a 4 odpovídají postupně modré, oranžové, zelené a červené barvě. Radius na vodorovné ose je vzdálenost od počátku, takové označení osy jsme zvolili z důvodu různého označení této veličiny před a po transmutaci.

Dalším nefyzikálním elementem takových profilů jsou hodnoty indexu lomu menší než jedna, což je na obrázku 1.1 problém od jistého poloměru dál. To by znamenalo, že se světlo v takových oblastech šíří větší rychlostí, nežli světlo ve vakuu. Hodilo by se nám tedy vynásobit celý profil nějakou kladnou konstantou a rozšířit tak oblast fyzikálnosti optického systému, neboli oblasti s hodnotou indexu lomu $n \geq 1$. Jsme ale oprávněni vynásobit index lomu kladnou konstantou? Stručně řečeno, ano. Trajektorie světelných paprsků se při takové transformaci zachovávají, což lze vidět například z invariantnosti úhlů θ_i ve Snellově zákonu lomu na rozhraní

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2, \tag{1.17}$$

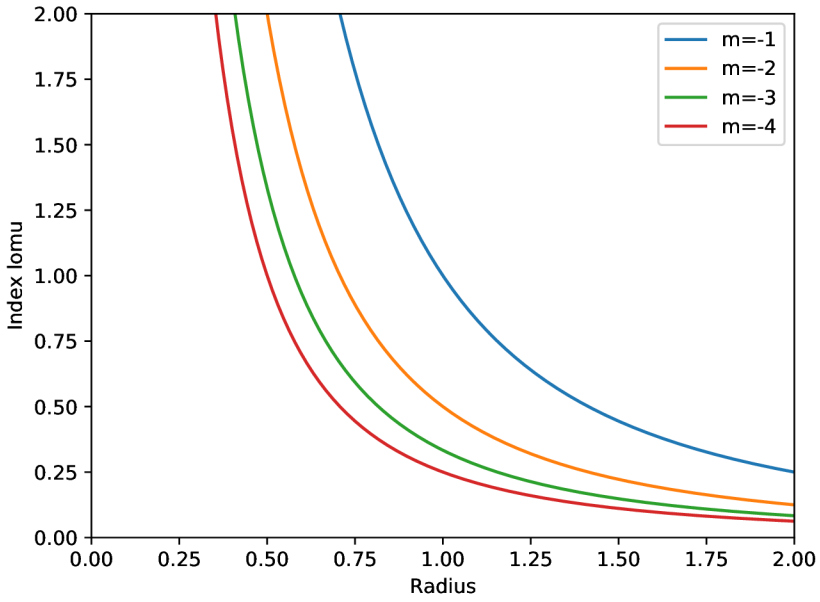
vůči vynásobení n_i nenulovou konstantou. Snellův zákon platí v našem případě radiálně symetrického indexu lomu s rozhraními jakožto soustřednými kružnicemi se středem v počátku. Této vlastnosti můžeme využít i v případě divergujícího indexu lomu, pro který naopak volbou konstanty menší než jedna docílíme zúžení okolí počátku s příliš vysokým indexem lomu. Existuje další velmi užitečné využití této vlastnosti zachovávající trajektorie paprsků. Pokud se omezíme k přenášení paprsků mezi prostory pomocí zobrazení f jen na podmnožině definičního oboru indexu lomu, jak tomu bude dále při zkoumání transmutací čoček na kruhu a zachování vnějšího prostředí, můžeme multiplikativní konstantou v oblasti čočky zaručit spojitost indexu lomu na celém fyzikálním prostoru. Chování světla uvnitř čočky se přitom nezmění, jinak se ovšem bude lámat světlo na rozhraní s vakuem.



Obrázek 1.2: Indexy lomu po transmutaci pro různé hodnoty parametru m. Hodnotám parametru $1, 1/2, 1/3$ a $1/4$ odpovídá postupně modrá, oranžová, zelená a červená barva.

Na obrázku 1.2 jsou vyneseny profily ve fyzikálním prostoru pro několik hodnot parametru m z intervalu $(0, 1)$. Zde nastává problém s $n' < 1$ v okolí počátku a přímo v počátku je index lomu nulový, nastává tam tedy singularita a paprsky směřující do počátku

tak nemají definovanou trajektorii. Konečně na obrázku 1.3 jsou indexy lomu pro hodnoty $m < 0$. Tento případ je velice podobný případu s parametrem $m > 1$, ovšem opodstatňuje užití absolutní hodnoty ve výrazu (1.4), bez níž bychom čelili zápornému indexu lomu na celém definičním oboru. Z matematického hlediska by sice trajektorie světla byly totožné bez ohledu na znaménko, z fyzikálního hlediska ale takové profily postrádají význam.



Obrázek 1.3: Indexy lomu po transmutaci pro různé hodnoty parametru m. Hodnotám parametru -1, -2, -3 a -4 odpovídají postupně modrá, oranžová, zelená a červená barva.

1.2.2 Eatonova a Luneburgova čočka

Eatonova [1, 2] i Luneburgova [3] čočka disponují fyzikálně velmi zajímavými profily indexu lomu, jejichž optické vlastnosti budeme podrobněji zkoumat i v dalších kapitolách. Nyní se zaměříme na vlastnosti profilů vzniklých transmutací indexů lomu obou čoček, indukovaných transformací prostoru mocninnou funkcí $f(z) = z^m$. Profily indexu lomu pro Eatonovu a Luneburgovu čočku jsou dány postupně výrazy

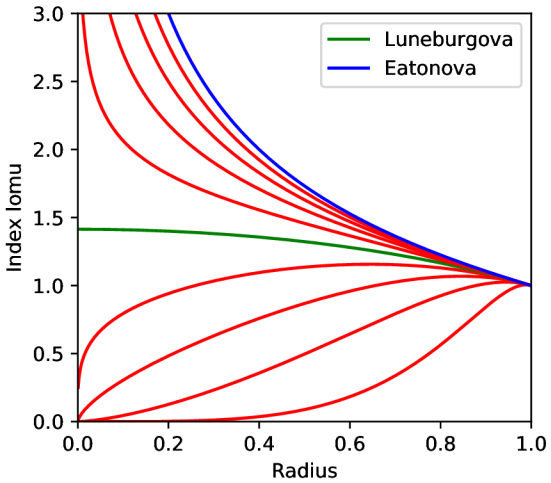
$$n_E(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{r} - 1} & r < 1, \\ 1 & r \geq 1. \end{cases} \tag{1.18}$$

$$n_L(r) = \begin{cases} \sqrt{2 - r^2} & r < 1, \\ 1 & r \geq 1. \end{cases} \tag{1.19}$$

Použitím (1.15) již snadno spočítáme transmutovaný index lomu na oblasti kruhu s poloměrem 1, který má pro Eatonovu čočku tvar

$$n'_E(r') = \frac{r'^{\frac{1-m}{m}}}{|m|} \sqrt{2r'^{-\frac{1}{m}} - 1}, \tag{1.20}$$

přičemž výraz pod odmocninou je výraz pro index lomu Eatonovy čočky přepsaný do proměnné r'. Obě čočky nachází uplatnění v reálných optických přístrojích, zejména Luneburgova čočka je dodnes využívána pro fokusaci v radarech pro vlnové délky řádově v centimetrech. Tyto na první pohled zcela odlišné čočky jsou ale úzce propojeny právě skrze transmutaci danou transformační funkcí $f = r^{\frac{1}{2}}$. Konkrétně pokud transmutujeme index lomu Eatonovy čočky, obdržíme až na faktor 2 přesně profil čočky Luneburgovy v čárkovaných souřadnicích. Na obrázku 1.4 je vykresleno několik profilů z (1.20) až na multiplikativní konstantu volenou tak, aby tvořil index lomu spojitou funkci i na rozhraní čočky s netransformovaným vnějším prostředím o indexu lomu 1.



Obrázek 1.4: Modře index lomu Eatonovy čočky ($m = 1$), dále jsou s desetinnými kroky v parametru vykresleny příslušné profily, přičemž pro hodnotu $m = 1/2$ dostáváme zelený profil Luneburgovy čočky.

Z obrázku 1.4 vidíme, že profil indexu lomu Eatonovy čočky v počátku diverguje. Z toho důvodu není možné prakticky takovou čočku sestrojit. Transmutace ale nabízí možnost vyhnout se takovému chování indexu lomu a zároveň obdržet čočku stejných rozměrů, která se bude chovat stejně jako čočka Eatonova. Tuto problematiku budeme řešit v kapitole o transmutaci singularity.

Kapitola 2

Pohybové rovnice paprsků

Sice je zajímavé zkoumat profily indexů lomu a jejich transmutace jako funkce polohy, postoupíme ale o krok dále. Index lomu totiž definuje trajektorie paprsků v daném prostředí. Proto se v této kapitole zaměříme na odvození postupů pro nalezení parametrizace paprsků, které již lze prezentovat v mnohem názornější podobě, než jen funkce indexu lomu. Teorii odvozenou v této kapitole budeme v dalších kapitolách aplikovat na konkrétní radiálně symetrické profily. Pod tímto pojmem chápeme taková optická prostředí, jejichž index lomu je funkcí pouze radiální souřadnice, platí tak $n = n(r)$.

2.1 Radiálně symetrický izotropní index lomu

Nejprve se omezíme na izotropní index lomu, přičemž pro získání rovnice paprsku v takovém prostředí použijeme nejdříve geometrického přístupu společně se známým Snellovým zákonem lomu na rozhraní. Tento přístup nabízí velice názorný postup až po finální rovnici $\phi(r)$, která vyjadřuje úhel v polárních souřadnicích závislý na vzdálenosti od počátku a parametrizuje tak trajektorii paprsku.

Dále popíšeme alternativní přístup pro hledání trajektorií paprsků pomocí hamiltonovské optiky. Namísto funkce $\phi(r)$ z geometrického přístupu získáme řešením Hamiltonových rovnic trajektorie paprsku parametrizované časem. Kromě toho jako vedlejší produkt získáme i vlnový vektor v každém bodě. Tuto bezpochyby obecnější metodu včetně samotných Hamiltonových rovnic si zde odvodíme pomocí variačního počtu z Feynmannova principu interference světla přes všechny možné trajektorie.

2.1.1 Geometrický přístup

Pro vizualizaci je nejdříve třeba odvodit diferenciální rovnici, jíž se paprsky uvnitř čočky řídí. K dispozici máme profil indexu lomu a chování na každém rozhraní (soustředné kružnice v rotačně symetrických profilech indexů lomu) popisuje Snellův zákon

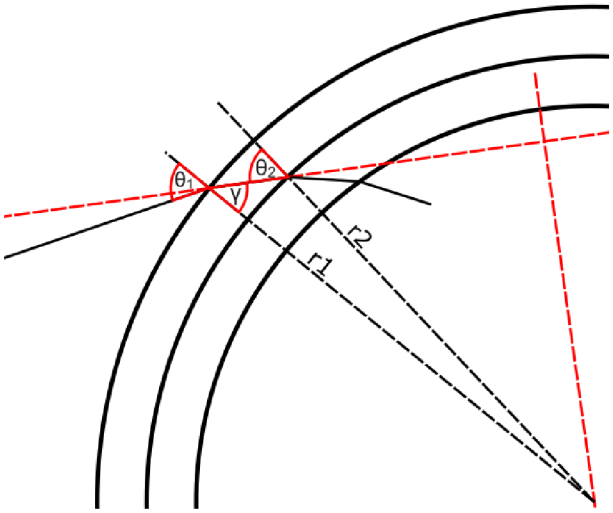
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \tag{2.1}$$

kde n_1 je index lomu v prvním prostředí a θ_1 je úhel od kolmice na rozhraní v prvním prostředí, index 2 pak odpovídá druhému prostředí. Pokud bychom se pohybovali v prostředí, kde jsou jednotlivá rozhraní rovnoběžná, pak by v oblasti mezi jednotlivými rozhraními

paprsek pod stejným úhlem opouštěl první rozhraní a vstupoval do následujícího, Snellův zákon by se tak přenášel přes všechna rozhraní a mohli bychom psát tento zákon již bez indexů a roven konstantě P, tedy

$$n \sin\theta = P. \tag{2.2}$$

V našem případě ale nejsou jednotlivá rozhraní rovnoběžná, ale jsou to soustředné kružnice. Můžeme však využít tuto formulaci zákona a upravit jej pro polární souřadnice.



Obrázek 2.1: Názorná ilustrace chování paprsků na jednotlivých rozhraních v radiálně symetrickém, po částech konstantním indexu lomu.

Následující úvahy budeme odvozovat z názorného obrázku 2.1. Na každém rozhraní platí klasický vztah (2.1), ovšem již neplatí triviální závislost mezi jednotlivými rozhraními. Vyjdeme z lomu na rozhraní s poloměrem r_1, odkud máme

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\gamma\,, \tag{2.3}$$

kde n_i je index lomu v mezikruží příslušnému úhlu θ_i. Dále díky dvěma pravoúhlým trojúhelníkům s přeponami r_1 a r_2 získáme vztah mezi γ a θ_2

$$\sin\gamma = \frac{r_2}{r_1} \sin\theta_2. \tag{2.4}$$

Zkombinováním vztahů získáme relaci mezi úhly $\theta_i(r_i)$.

$$r_1 n_1 \sin\theta_1 = r_2 n_2 \sin\theta_2, \tag{2.5}$$

Tato rovnost platí mezi každými dvěma sousedními kružnicovými rozhraními, můžeme tak analogickou úvahou jako pro rovnoběžná rozhraní využít tranzitivnosti rovnosti a psát jej již bez indexů a rovný konstantě L jako

$$rn \sin(\theta) = L. \tag{2.6}$$

Vztah byl odvozen za předpokladu po částech konstantního radiálně symetrického indexu lomu. Jelikož nemáme žádný limit, jak moc k sobě můžeme přiblížit sousední rozhraní, zachová se platnost (2.6) i pro index lomu daný namísto skokové funkce funkcí spojitou. Za zmínku stojí analogie se vztahem (2.2) pro rovnoběžná rozhraní, kde byla konstanta označena P, a to z důvodu mechanické analogie optického problému. V této analogii totiž index lomu odpovídá hybnosti a (2.2) tak není nic jiného než zákon zachování složky hybnosti ve směru jednotlivých rozhraní. Podobně bychom mohli od (2.6) v mechanické analogii čekat podobný zákon, jen vycházíme z radiálně symetrického indexu lomu. Skutečně, nahradíme-li index lomu hybností, obdržíme vztah pro moment hybnosti L, který se v radiálně symetrické soustavě zachovává. Díky mechanické analogii tedy dostáváme známé zákonitosti a dávají tak možnost intuitivního vhledu do optického světa.

Nyní již máme potřebný vztah k odvození diferenciální rovnice pro pohyb paprsku. Z obrázku 2.1 můžeme dát do vztahu infinitezimální délky ve směru polárních souřadnic dr a $r \cdot d\phi$ a úhel θ.

$$\tan\theta = \frac{r \cdot d\phi}{dr} \tag{2.7}$$

Přepisem $\tan(\theta)$ pomocí funkce $\sin\theta$ máme

$$\tan\theta = \pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}, \tag{2.8}$$

přičemž kladná větev je platná pro argument z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a záporná pro úhly z $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Je užitečné si povšimnout, že pokud konstanta L ze vztahu (2.6), daná počátečními podmínkami paprsku, je kladná, pak i levá strana rovnice musí po celou dobu pohybu paprsku uvnitř čočky zůstat kladná, odtud argument $\theta \in (0, \pi)$. Podobně pro zápornou konstantu L platí pro argument $\theta \in (\pi, 2\pi)$. Proto dosáhne-li paprsek v čočce bodu minimální vzdálenosti od počátku, dopadaje tečně na vrstevnici rotačně symetrického indexu lomu, což odpovídá úhlům $\theta \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, přecházíme z kladné větve na zápornou a vice versa. Bod, ve kterém nastává minimum vzdálenosti od počátku, se nazývá radiální bod vratu. Tato znaménková problematika se přenese do diferenciální rovnice pro pohyb paprsku dosazením (2.8) do (2.7)

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}. \tag{2.9}$$

Nyní využijeme (2.6) a platnosti pro libovolnou dvojici r a θ na jedné trajektorii pro vyjádření $\sin\theta$ pomocí počátečních podmínek daných parametry r_0, n_0 a θ_0. Parametr r_0 udává vzdálenost od počátku a θ_0 úhel vstupu na vrstevnici indexu lomu, pozor, nejedná se o úhel ve smyslu souřadnice polárních souřadnic. Konstanta n_0 je již závislá na parametru r_0 vztahem $n_0 = n(r_0)$.

$$\sin\theta = \frac{r_0 n_0 \sin\theta_0}{rn} = \frac{L}{rn} \tag{2.10}$$

Zkombinováním těchto vztahů získáme následující diferenciální rovnici

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm\frac{1}{r}\frac{L}{\sqrt{(rn)^2 - L^2}}. \tag{2.11}$$

Přepsáním do integrálního tvaru obdržíme

$$\phi = \pm \int \frac{1}{r} \frac{L}{\sqrt{(rn)^2 - L^2}} \mathrm{d}r. \tag{2.12}$$

Získali jsme tak rovnici pro trajektorii paprsků popsanou parametry r a ϕ v polárních souřadnicích. Z počáteční podmínky řešené situace obdržíme hodnotu konstanty L a také integrační konstantu, která geometricky rotuje celou trajektorii paprsku okolo počátku. Zbývá tak jen zvolit profil radiálně symetrického indexu lomu a uvést vzorec do praxe, což je předmětem další části této práce.

2.1.2 Přístup hamiltonovské optiky

Existuje mnoho alternativních přístupů pro hledání trajektorií paprsků v optickém prostředí. Zde použijeme přístup hamiltonovské optiky, jenž je podrobně popsán v knize autorů Ulfa Leonhardta a Thomase Philbina [2]. O světle zde alespoň ze začátku nebudeme uvažovat jen jako o paprscích, tentokrát jim bude příslušet i fáze ϕ. Ta reprezentuje fázi oscilací elektromagnetického pole reálných fotonů a je závislá na čase t a poloze dané polohovým vektorem $\vec{r}$. Nejdříve pro rovinnou vlnu je fáze určena se znalostí vlnové délky λ a úhlové frekvence ω fotonu ve zvoleném prostředí vztahem

$$\phi(\vec{r}, t) = 2\pi \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\lambda} - \omega t, \tag{2.13}$$

přičemž $\vec{n}$ je jednotkový vektor ve směru šíření paprsku. Ten obecně nemusí být rovnoběžný s Poyntingovým vektorem, určujícím směr toku energie vlny a tedy i směr paprsku, pro izotropní prostředí jsou ale tyto vektory rovnoběžné. Využijeme vlnového vektoru $\vec{k}$, jehož směr je v izotropním prostředí shodný se směrem šířících se paprsků a jeho velikost je definována s pomocí vlnové délky jako

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{2.14}$$

Vztah (2.13) tak přechází do tvaru

$$\phi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t. \tag{2.15}$$

Odtud máme vztahy pro vlnový vektor $\vec{k}$ a úhlovou frekvenci ω

$$\vec{k} = \nabla \phi, \tag{2.16}$$

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.17}$$

Tvar (2.15) ale popisuje pouze fázi vlny s konstantním vlnovým vektorem $\vec{k}$, který v nekonstantním indexu lomu určitě bude měnit směr i velikost, což lze vypozorovat například z úvahy o vlnové délce, která se mění se změnou efektivní rychlosti světla v opticky nehomogenním prostředí důsledkem nehomogenního indexu lomu. Proto připustíme-li $\vec{k}$ jako další nezávislou proměnnou, je třeba fázi vyjádřit pomocí fázového integrálu

$$\phi = \int \left(\vec{k} \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \omega \mathrm{d}t \right). \tag{2.18}$$

Zbývá určit závislost úhlové frekvence ω na vlnovém vektoru $\vec{k}$ a polohovém vektoru $\vec{r}$. Neuvažujeme závislost na čase, jelikož všechna optická prostředí v této práci se s časem nijak nevyvíjí. Hledaná závislost je určena disperzní relací

$$\omega = \frac{c|\vec{k}|}{n}. \tag{2.19}$$

Přesnějších výsledků bychom dosáhli, pokud bychom index lomu $n(\vec{r})$ určovali i v závislosti na frekvenci, jak je tomu ve skutečnosti, ale tuto fyzikální skutečnost zanedbáme a spokojíme se s prostředím bez disperze.

Dále podle Feynmanova principu víme, že skutečná trajektorie paprsku je ta, která nezanikne v důsledku destruktivní interference s okolními trajektoriemi. V jazyce variačního počtu tak hledaná trajektorie musí splňovat

$$\delta\phi = 0. \tag{2.20}$$

S použitím (2.18) a disperzní relace tak máme

$$\delta\phi = \int \left(\delta\vec{k} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \vec{k} \cdot \mathrm{d}\delta\vec{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \delta\vec{k} \mathrm{d}t - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}} \delta\vec{r} \mathrm{d}t \right). \tag{2.21}$$

Derivace podle vektoru je zde ve významu vektoru z parciálních derivací podle jednotlivých souřadnic daného vektoru, jelikož vycházíme z prvního člene Taylorova rozvoje funkce ϕ. Pro odchylku $\delta\vec{r}$ od trajektorie paprsku platí, že v počátečním bodu $\vec{r_A}$ a koncovém bodu $\vec{r_B}$, mezi kterými hledáme trajektorii, je odchylka nulová. Typickou úpravou variačního počtu vyjádříme vhodný členů v integrandu pomocí totálního diferenciálu z (2.21) pokračujeme na

$$\delta\phi = \int \left(\delta\vec{k} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}(\vec{k} \cdot \delta\vec{r}) - \delta\vec{r}\mathrm{d}\vec{k} - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \delta\vec{k} \mathrm{d}t - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}} \delta\vec{r} \mathrm{d}t \right), \tag{2.22}$$

$$\delta\phi = \int \left[\left(\mathrm{d}\vec{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \mathrm{d}t \right) \delta\vec{k} - \left(\mathrm{d}\vec{k} + \frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}} \mathrm{d}t \right) \delta\vec{r} \right] + \left(\vec{k} \cdot \delta\vec{r} \right) \Big|_{\vec{r_A}}^{\vec{r_B}}. \tag{2.23}$$

Jelikož variace je v krajních bodech nulová, poslední sčítanec je nulový.

$$\delta\phi = \int \left[\left(\mathrm{d}\vec{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \mathrm{d}t \right) \delta\vec{k} - \left(\mathrm{d}\vec{k} + \frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}} \mathrm{d}t \right) \delta\vec{r} \right] \tag{2.24}$$

Variace fáze je nulová tehdy a jen tehdy, pokud je integrál v (2.24) nulový pro všechny variace $\delta\vec{k}$ a $\delta\vec{r}$. Odtud plynou Hamiltonovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \tag{2.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}} \tag{2.26}$$

Po zvolení báze můžeme rozepsat Hamiltonovy rovnice na soustavu diferenciálních rovnic pro složky vektorů $\vec{r}$ a $\vec{k}$ jako funkce času. Řešením této soustavy tak získáme hledanou trajektorii paprsků parametrizovanou časem.

2.2 Radiálně symetrický anizotropní index lomu

Pro anizotropní index lomu je již obtížné hledat trajektorie geometrickým přístupem. V případě izotropního indexu lomu se nám totiž podařilo najít veličinu L, která byla konstantní po celou dobu pohybu paprsku. Pokud bychom postupovali analogickým postupem pro anizotropní profil indexu lomu, jenž je funkcí i úhlu dopadu na rozhraní, index lomu n_2 v rovnici (2.3) by byl jeho hodnotou ve směru úhlu γ (viz obrázek 2.1). Rovnice (2.5), která byla stěžejní pro nalezení zachovávající se veličiny pro paprsek, je v anizotropním případě tvaru

$$r_1 n_1(\theta_1) \sin\theta_1 = r_2 n_2(\gamma) \sin\theta_2. \tag{2.27}$$

Právě kvůli úhlu γ ale pravá strana této rovnosti není závislá jen na veličinách r_2, n_2 a θ_2. Bohužel se rovnici nepodařilo ani rozseparovat na rovnost dvou funkcí, jedné v proměnných s indexem 1, druhou s proměnnými s indexem 2, proto z ní neplyne žádná zachovávající se veličina a geometrický přístup tak nevede ke zdárnému výsledku.

Pokusíme se tedy problematiku hledání trajektorie vyřešit pomocí hamiltonovské optiky. Vycházíme zde z předpokladu, že Hamiltonovy rovnice jsou zachovány i pro anizotropní profily indexů lomu. Na problém ovšem narazíme při vyjadřování úhlové frekvence ω z disperzní relace jako funkci $\vec{k}$ a $\vec{r}$, jelikož neznáme patřičné vyjádření zde vystupujícího anizotropního indexu lomu, pouze jeho hodnoty v radiálním a úhlovém směru. Pokusíme se tak vyjádřit disperzní relaci pomocí známých veličin a zobecnit ji i pro anizotropní prostředí. Budeme vycházet z izotropní verze disperzní relace. Nejprve vyjádříme velikost vlnového vektoru pomocí metrického tenzoru. Z definice vlnového vektoru $\vec{k}$ vztahem (2.16) jako gradientu fáze vidíme, že se jedná o kovektor (jeho komponenty jsou se transformují stejně jako báze), proto velikost tohoto vektoru je dána pomocí inverzního metrického tenzoru g^{ij} jako

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_i k_j g^{ij}}, \tag{2.28}$$

Inverze metrického tenzoru je dána vztahem

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \tag{2.29}$$

Pro disperzní relaci tedy platí

$$\omega = \frac{c|\vec{k}|}{n} = \frac{c\sqrt{k_i k_j g^{ij}}}{n} = c\sqrt{\frac{k_i k_j g^{ij}}{n^2}}. \tag{2.30}$$

Nyní přichází na řadu zásadní úprava, pro niž je ale třeba znát inverzi optického metrického tenzoru izotropního prostředí, který je pro připomenutí definován vztahem

$$G_{ij} = n^2 g_{ij}. \tag{2.31}$$

Vyjádření pro jeho inverzi získáme postupnými úpravami tohoto výrazu

$$G_{ij}G^{jk} = n^2 g_{ij}G^{jk}, \tag{2.32}$$

$$\delta_i^k g^{li} = n^2 g_{ij} g^{li} G^{jk}, \tag{2.33}$$

$$g^{lk} = n^2 \delta_j^l G^{jk}, \tag{2.34}$$

$$g^{lk} = n^2 G^{lk}, \tag{2.35}$$

odkud konečně s přeznačením indexů dostáváme vyjádření pro inverzní optický metrický tenzor izotropního prostředí

$$G^{ij} = \frac{g^{ij}}{n^2}. \tag{2.36}$$

Vidíme, že můžeme disperzní relaci (2.19) vyjádřit pomocí inverzního optického metrického tenzoru jako

$$\omega = c\sqrt{k_i k_j G^{ij}}. \tag{2.37}$$

Podařilo se nám tak přepsat disperzní relaci do tvaru s G^{ij}, což je ale veličina spočitatelná i pro anizotropní prostředí vzniklé transmutací. Pro její určení můžeme použít vztah (1.5) a nalézt G_{ij} obecně anizotropního prostředí a pak již použitím

$$G_{ij}G^{jk} = \delta_i^k \tag{2.38}$$

získáme jeho kýženou inverzi. Tím jsme obešli úvodní problém neznámého vyjádření pro anizotropní index lomu a zobecnili tak tuto metodu hledání trajektorií paprsků pro obecné prostředí.

2.3 Tvar Hamiltonových rovnic pro polární souřadnice

Jelikož pracujeme s rotačně symetrickými profily indexu lomu, odvodíme pro pozdější výpočty tvar Hamiltonových rovnic v polárních souřadnicích. Budeme se držet naší volby báze v polárních souřadnicích, která odpovídá volbě metrického tenzoru

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Tato báze tedy není ortonormální, pouze ortogonální, přičemž bázový vektor v radiálním směru je jednotkový a velikost úhlového bázového vektoru je r. Složky vektoru $\vec{k}$ plynou z gradientu fáze ϕ (pro odlišení od úhlové souřadnice dále jako Φ), v polárních souřadnicích tak máme

$$(K_r, K_\phi) = \vec{k} = \nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right). \tag{2.40}$$

Toto vyjádření gradientu je ale pro ortonormální bázi, proto v naší bázi s nenormovaným úhlovým bázovým vektorem, který je r-krát větší, se díky kovariantnosti vlnového vektoru i odpovídající úhlová složka zvětší r-krát. Máme tak pro složky vlnového vektoru

$$(k_r, k_\phi) = \nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right). \tag{2.41}$$

Možnou nevýhodou volby této báze oproti normované je odlišnost fyzikálních jednotek pro jednotlivé komponenty vlnového vektoru, neboť k_r má jednotky reciprokých metrů, zatímco k_ϕ je bezrozměrné. Tento fakt ale samozřejmě nemá vliv na výslednou trajektorii, jen je třeba vědět, v jaké bázi se pohybujeme. Dále infinitezimální posun v ortonormální bázi $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\phi)$ vyjádříme v naší bázi. Jelikož se jedná o kontravariantní vektor, transformuje se úhlová složka opačně jak bázový vektor, bude tedy r-krát menší. Dostáváme tak

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}r, \mathrm{d}\phi). \tag{2.42}$$

Zbývá vyjádřit úhlovou frekvenci jako funkci $\omega(r, \phi, k_r, k_\phi)$. K tomu použijeme vztah (2.37) platný pro obecné prostředí, máme tak

$$\omega = c\sqrt{\begin{pmatrix} k_r & k_\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G^{rr} & 0 \\ 0 & G^{\phi\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_r \\ k_\phi \end{pmatrix}} = c\sqrt{G^{rr}k_r^2 + G^{\phi\phi}k_\phi^2}. \tag{2.43}$$

S definovanými vektory $\vec{r} = (r, \phi)$, $\vec{k} = (k_r, k_\phi)$ a úhlovou frekvencí $\omega(r, \phi, k_r, k_\phi)$ tak mají Hamiltonovy rovnice v polárních souřadnicích tvar

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\omega}{\partial k_r}, \tag{2.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\omega}{\partial k_\phi}, \tag{2.45}$$

$$\frac{\mathrm{d}k_r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial\omega}{\partial r}, \tag{2.46}$$

$$\frac{\mathrm{d}k_\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial\omega}{\partial\phi}. \tag{2.47}$$

Kapitola 3

Trajektorie paprsků pro radiálně symetrické profily indexu lomu

Doposud jsem se věnovali nejrůznějším indexům lomu pouze jako funkci jedné proměnné, seznámili jsme se s pojmem transmutace a aplikovali na několik profilů. Nyní s použitím teorie předchozí kapitoly konečně přejdeme k vizualizaci trajektorií paprsků v optických prostředích indukovaných těmito indexy lomu. Uvidíme tak názorně, jak se změní chování světla v čočce po transmutaci a co se děje s paprsky v okolí singularity a jak se situace změní po její transmutaci.

3.1 Index lomu daný mocninnou funkcí

V této sekci se budeme věnovat konkrétní volbě indexu lomu dané vztahem $n(r) = r^m$. Budeme řešit rovnici (2.12), kterou je pro obecné m možné spočítat analyticky, což také učiníme v sekci 3.1.2. Pro zkoumání trajektorií si ale prozatím vystačíme s přístupem numerického řešení pomocí programu Desmos a ukážeme tak postup při řešení problematiky s obecně analyticky neřešitelnou rovnicí (2.12).

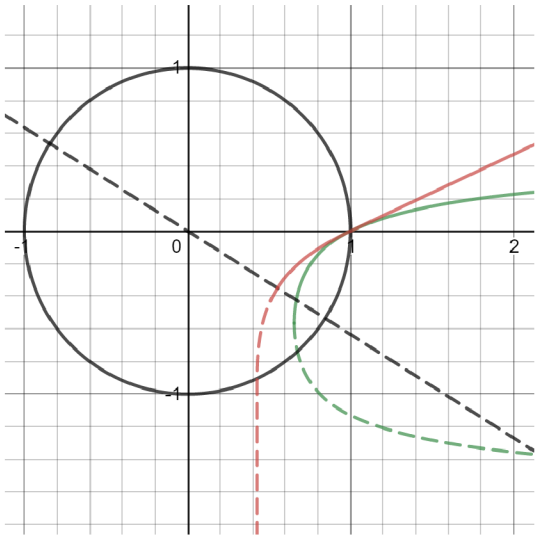
3.1.1 Světlo vně okolí počátku

Jak ilustruje obrázek 3.1, vyplývá z numerického řešení rovnice (2.12) trajektorie končící právě v bodě s minimální vzdáleností od počátku, jak jsme již dříve diskutovali. Počáteční úhlovou souřadnici jsme pro jednoduchost stanovili na hodnotu $\phi_0 = \phi(r_0) = 0$, $r_0 = 1$ a vstupní úhel $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$. Profil indexu lomu odpovídá volbě parametru $m = 1$.

Nyní druhou větev funkce $\phi(r)$ navážeme tak, aby vznikla funkce spojitá a se spojitou první derivací v místě navázání. Tuto svobodu při volbě druhé větve funkce nám dává integrační konstanta. Integrál (2.12) přestává být definován, pokud je výraz pod odmocninou záporný. Mezním bodem definičního oboru je tak v našem případě r_m splňující

$$r_m = L^{\frac{1}{m+1}} \tag{3.1}$$

Odpovídající úhlová hodnota je $\phi(r_m)$, kterou je třeba obecně dopočítat numericky. Pro naši volbu mocninného indexu lomu si ale již v další kapitole vypočteme tuto hodnotu



Obrázek 3.1: Zeleně vykreslená funkce $\phi(r)$ je řešením (2.12). Černá kružnice schematicky znázorňuje čočku s indexem lomu $n(r) = r$, vně je index lomu roven jedné. Červeně je parametricky vykreslená trajektorie světla.

analyticky. Jelikož se ale druhá větev funkce $\phi(r)$ liší pouze ve znaménku, docílíme spojitého navázání obou větví volbou integrační konstanty vztahem

$$2\phi(L\tfrac{1}{m+1}). \tag{3.2}$$

Tím splníme všechny fyzikální požadavky na průběh funkce $\phi(r)$, a to včetně hladkého navázání. Na obrázku 3.1 je druhá větev funkce $\phi(r)$, což je záporně vzatá první větev společně s přičtenou integrační konstantou (3.2), zobrazena čárkovaně zeleně a příslušná trajektorie fotonů zobrazena čárkovaně červeně. Pro lepší ilustraci chování světla uvnitř čočky s parametry $r_0 = 1$, $m = 1$ a θ_0 voleným tak, aby paprsky vstupovaly do čočky rovnoběžně, poslouží obrázek 3.2. K docílení volby počátečních podmínek pro výsledek na tomto obrázku je třeba upravit obě větve funkce $\phi(r)$. Požadujeme ekvidistantní rovnoběžné paprsky, vstup do čočky tak bude charakterizován odlišnými vstupními úhly θ_0 a různými integračními konstantami. Z jednoduché trigonometrie pro první větev danou parametry $\phi_0 = \phi(r_0) = 0$, $r_0 = 1$ a vstupním úhlem $\theta_0 = 0$ plyne, že zvolíme-li integrační konstanty s libovolnou kladnou konstantou C charakterizující odstup mezi paprsky a parametrem $k \in \mathbb{N}_0$ indexujícím jednotlivé paprsky jako

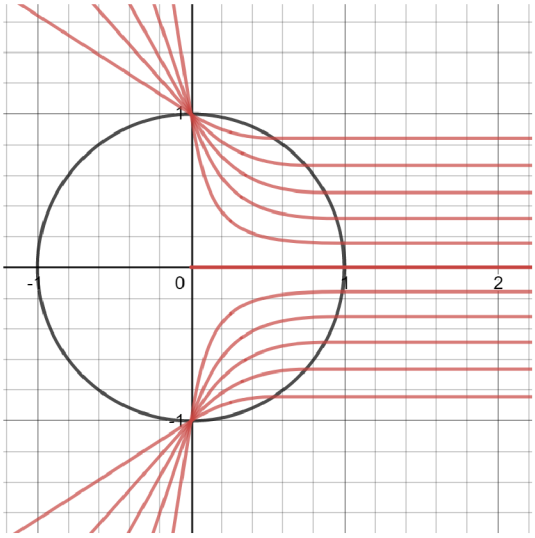
$$-\arcsin(C\pi k), \tag{3.3}$$

docílíme kýženého vstupního souřadnicového úhlu $\phi(r_0)$, paprsky však nejsou rovnoběžné. Znaménko minus je nutné, jelikož pro kladnou větev funkce $\phi(r)$ požadujeme kladný vstupní úhel θ_0 z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Paprsky tak můžeme upravit na rovnoběžné volbou

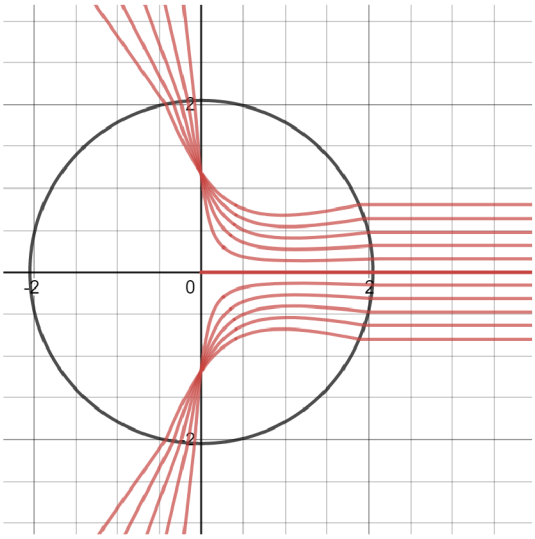
$$\theta_0 = \arcsin(C\pi k). \tag{3.4}$$

Podobně zápornou větev funkce $\phi(r)$ volíme stejně jako v předchozím příkladu záporně vzatou první větví, včetně integrační konstanty (3.3), konečně přičtením další integrační konstanty (3.2), díky které jsou obě větve spojitě navázány, jsme hotovi a grafickým zobrazením v polárních souřadnicích máme obrázek 3.2.

Pokud uvážíme nejednotkový poloměr čočky s indexem lomu daným $n(r) = r$, objeví se na rozhraní s vakuem lom. Ten lokálně splňuje klasický Snellův zákon. Trajektorie v prostředí s čočkou o poloměru $r_0 = 2$ umístěné ve vakuu jsou na obrázku 3.3, přičemž postup odvozování funkce $\phi(r)$ parametrizující trajektorii paprsku zůstává nepozměněn.



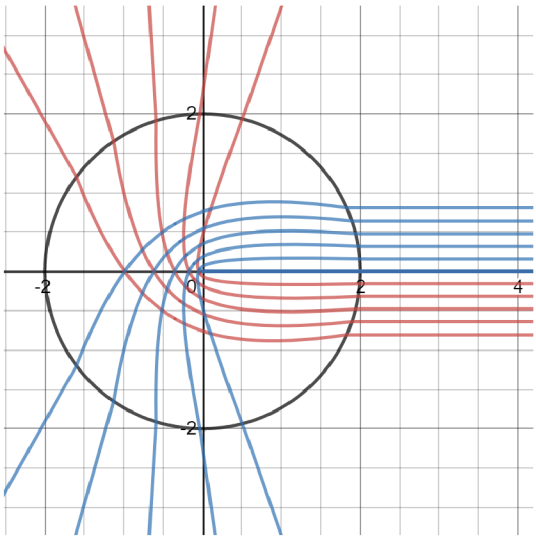
Obrázek 3.2: Trajektorie světla v závislosti na místě dopadu na čočku pro profil indexu lomu daný vztahem $n(r) = r$.



Obrázek 3.3: Trajektorie světla v čočce o poloměru $r_0 = 2$ pro profil indexu lomu daný vztahem $n(r) = r$.

Posledním důležitým případem z této kapitoly je čočka s indexem lomu $n(r) = r^m$, kde m je záporné. Pro takové profily rostou hodnoty indexu lomu nade všechny meze

pro zmenšující se vzdálenost od počátku a namísto odpuzovacího efektu, který jsme viděli doposud, se trajektorie začnou oviját okolo počátku. Pro ilustraci tohoto efektu viz obrázek 3.4 pro index lomu $n(r) = r^{-\frac{1}{2}}$.



Obrázek 3.4: Trajektorie světla v čočce o poloměru $r_0 = 2$ pro profil indexu lomu daným vztahem $n(r) = r^{-\frac{1}{2}}$.

3.1.2 Světlo v okolí počátku

Již jsme se zmínili o efektu oviјení paprsků okolo počátku. V této sekci prozkoumáme chování světla v bezprostředním okolí středu čočky, kde v závislosti na parametru m index lomu pro $m \neq 0$ buď to diverguje nebo klesá k nule. Konkrétně se zaměříme na celkový úhel, o který se paprsek otočí, bude-li se pohybovat v okolí počátku, a vyřešíme limitní případ. Pro výpočet tohoto úhlu je třeba řešit rovnici (2.12), kterou pro $n(r) = r^m$ vyřešíme analyticky. Vycházíme pro připomenutí z integrálu

$$\phi = \pm \int \frac{1}{r} \frac{L}{\sqrt{(rn)^2 - L^2}} \mathrm{d}r. \tag{3.5}$$

Zvolme kladnou větev a aplikujme substituci, kdy výraz pod odmocninou označíme novou proměnnou u. Po úpravě obdržíme

$$\phi(r) = \frac{L}{2m+2} \int \frac{1}{(u+L^2)\sqrt{u}} \mathrm{d}u. \tag{3.6}$$

Další substitucí $v = \sqrt{u}$ získáme integrál

$$\phi(r) = \frac{L}{m+1} \int \frac{1}{(v^2+L^2)} \mathrm{d}v, \tag{3.7}$$

jehož řešením je

$$\phi(r) = \frac{\arctan\left(\frac{v}{L}\right)}{m+1} + K. \tag{3.8}$$

Pro určení integrační konstanty požadujeme vyšetřit průběh funkce pouze pro paprsky vstupující do čočky pod úhlem θ_0, limitně se blížícímu 0^+. Jelikož přípustné hodnoty úhlů pro kladnou větev rovnice (2.12) a kladnou konstantu L leží v průniku intervalů $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cap (0, \pi) = (0, \frac{\pi}{2})$, bylo by chybné uvažovat limitu ze záporných hodnot. Zde bychom kvůli možnému zanedbání směru k limitnímu bodu obdrželi výsledek s opačným znaménkem. S využitím kladnosti L můžeme do (3.8) zpět dosadit ze substitucí a upravit výraz pod odmocninou, máme tak

$$\phi(r) = \frac{\arctan\sqrt{\frac{r^{2m+2}}{L^2} - 1}}{m+1} + K. \tag{3.9}$$

Jako referenční úhel je výhodné zvolit $\phi(r_1) = 0$ pro libovolné nenulové konečné r_1. Na specifické hodnotě v limitě nezáleží, jelikož z $\theta_0 \to 0^+$ ihned plyne $L \to 0^+$, výraz pod odmocninou se tak pro nenulové konečné r_1 chová stejně. Konstantu K tedy stanovíme z limity

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\arctan\sqrt{\frac{r_1^{2m+2}}{L^2} - 1}}{m+1} + K = 0. \tag{3.10}$$

Jelikož víme, že funkce arctan pro argument divergující k nekonečnu v (2.12) nabývá v limitě hodnoty $\frac{\pi}{2}$, dostaneme hodnotu K danou výrazem

$$K = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{m+1}. \tag{3.11}$$

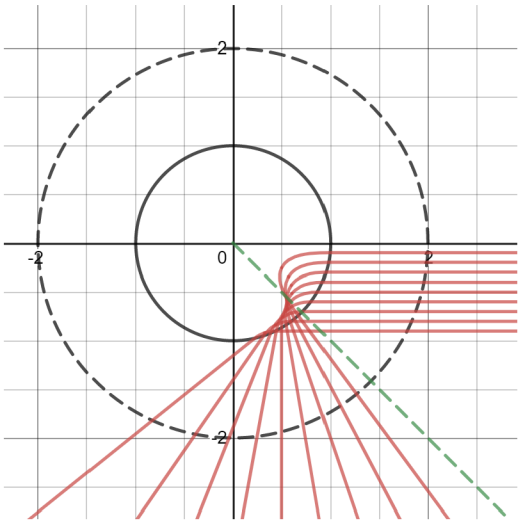
Z (3.5) můžeme jednoduše vyjádřit hodnotu r, pro kterou přestává být integrand definovaný, totiž kdy výraz pod odmocninou bude nabývat záporných hodnot. Již víme, že tento mezní případ určuje hodnotu minimální vzdálenosti od počátku, to jest radiální bod vratu r_m. Tato vzdálenost je tedy dána výrazem

$$L = r_m n = r_m^{m+1}, \tag{3.12}$$

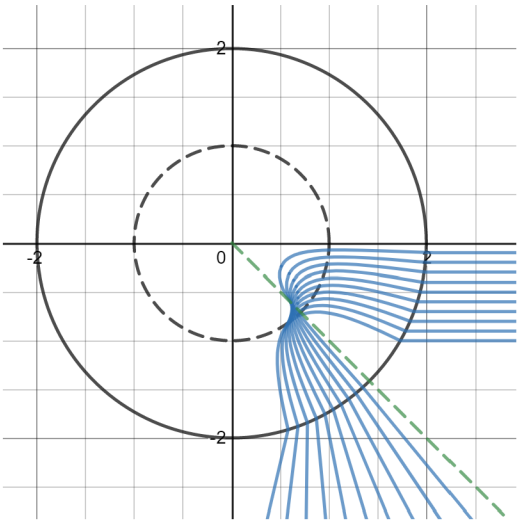
což ale znamená, že pro hodnotu $r = r_m$ je vynuluje argument goniometrické funkce a úhel otočení paprsku až po moment dosažení r_m je K. Proto je také integrační konstanta K totožná s $\phi(r_m)$, což je stěžejní výraz pro integrační konstantu (3.2) zaručující spojitost obou větví funkce $\phi(r)$, kterou se nám pro tuto volbu indexu lomu podařilo vyjádřit analyticky.

V tomto momentě se paprsek nachází přesně v polovině své trajektorie uvnitř čočky, pro celkový úhel otočení stačí tuto hodnotu zdvojnásobit. Výsledný úhel je citlivý na znaménko a naší volbou počátečních parametrů řešíme případ paprsku pronikajícího do čočky pod a rovnoběžně s osou x (po vyjádření v kartézských souřadnicích). Záporné hodnoty finálního výrazu

$$\phi_T = -\frac{\pi}{m+1} \tag{3.13}$$



Obrázek 3.5: Paprsky v čočce s indexem lomu daným $n(r) = r^3$ a poloměrem $r_0 = 1$. Zeleně polopřímka, k níž konvergují paprsky blízké ose x.



Obrázek 3.6: Paprsky v čočce s indexem lomu daným $n(r) = r^3$ a poloměrem $r_0 = 2$. Zeleně nezměněná polopřímka, k níž konvergují paprsky blízké ose x.

reprezentují obtáčení paprsku v matematicky záporném směru a kladné hodnoty ve směru kladném. Zajímavým výsledkem je, že výraz (3.13) je závislý pouze na parametru m, nikoli na velikosti čočky či volbě počáteční vzdálenosti. Obrázky 3.5 a 3.6 ukazují příklad paprsků v čočkách s indexem lomu $n(r) = r^3$ ve vakuu o poloměrech postupně $r = 1$ a $r = 2$. Jak je vidět, nezávisle na poloměru čočky paprsky blízko osy x konvergují k zelené polopřímce, svírající s osou úhel $\phi_T = -\frac{\pi}{4}$.

3.2 Eatonova čočka

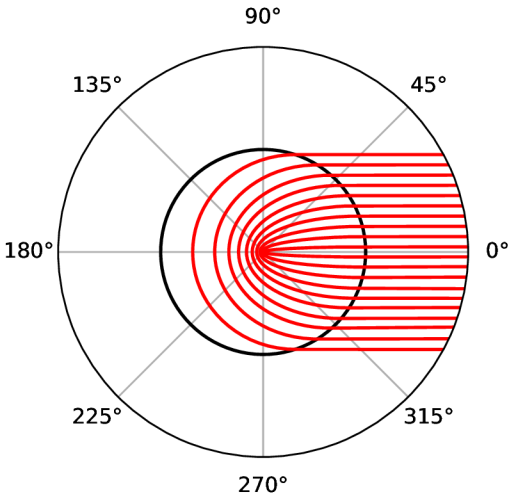
Na Eatonovu čočku s profilem (1.18) jsme již dříve narazili v sekci 1.2.2 a poté jsme nalezli i vhodné transmutující funkce odstraňující singularitu. Pro nalezení trajektorií paprsků použijeme opět Hamiltonovy rovnice. Inverzní optický metrický tenzor je pro Eatonovu čočku dán vztahem

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_E(r)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 n_E(r)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2-r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r-r^2} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

přičemž vně čočky, tj. pro $r \geq 0$, použijeme inverzní optický metrický tenzor jednotkového profilu. Disperzní relace je tedy tvaru

$$\omega = c\sqrt{G^{rr}k_r^2 + G^{\phi\phi}k_\phi^2} = c\sqrt{\frac{r^2k_r^2 + k_\phi^2}{2r - r^2}}. \tag{3.15}$$

Volbou stejných počátečních podmínek jako pro mocninný index lomu z předchozí sekce získáme řešením Hamiltonových rovnic obrázek 3.7. Zde konečně vidíme, čím je tento profil indexu lomu tak zajímavý. Eatonova čočka totiž paprsek dopadající z jakéhokoli směru otočí kolem počátku tak, že vycházející paprsek má přesně opačný směr, než měl paprsek příchozí.



Obrázek 3.7: Šíření světla v Eatonově čočce.

3.3 Luneburgova čočka

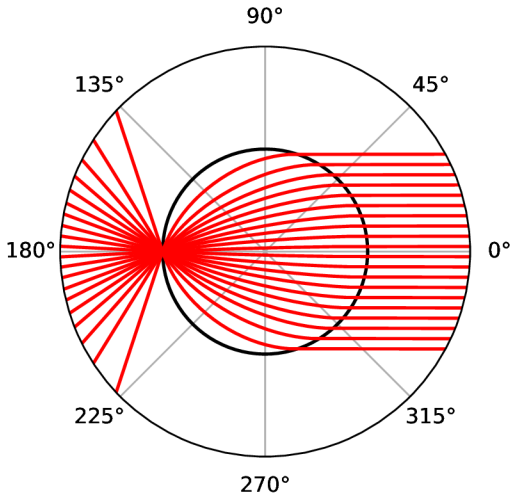
Luneburgova čočka s profilem indexu lomu ze vztahu (1.19) je dalším případem absolutního optického instrumentu, na který jsme již narazili. Tento profil neobsahuje žádnou komplikaci v podobě singularity, proto vyřešme rovnou Hamiltonovy rovnice. Inverzní optický metrický tenzor je pro Luneburgovu čočku

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_L(r)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 n_L(r)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2-r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r^2-r^4} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Disperzní relace jako funkce $\omega(\vec{r}, \vec{k})$ je tedy dána rovnicí

$$\omega = c\sqrt{G^{rr}k_r^2 + G^{\phi\phi}k_\phi^2} = c\sqrt{\frac{r^2k_r^2 + k_\phi^2}{2r^2 - r^4}}. \tag{3.17}$$

Nyní již můžeme řešit Hamiltonovy rovnice. Volbou stejných počátečních podmínek rovnoběžně dopadajících paprsků jako u předchozích čoček získáváme numerickým řešením obrázek 3.8. Obrázek již ilustruje podstatu Luneburgovy čočky a proč je její profil tak užitečný například v radarové technologii, kde slouží jako fokusovací prvek signálu [2].



Obrázek 3.8: Šíření světla v Luneburgově čočce. Její profil fokusuje rovnoběžně dopadající paprsky do jednoho bodu. Je tak alternativou parabolické antény jakožto fokusovací prvek.

Kapitola 4

Transmutace singularity

Chování světla v okolí divergujícího nebo nulového indexu lomu je obecně problematické, jsme ale schopni v libovolně malém okolí takové singularity nalézt korektně definované trajektorie paprsků světla. Z praktického hlediska jsou však takové profily indexu lomu nesestrojitelné a použitím triku s vynásobením profilu kladnou konstantou se tak sice můžeme vně libovolně malého okolí počátku s nulovým indexem lomu přenést do situace s hodnotami $n(r) \geq 1$, cenou za velké hodnoty konstanty ale budou rostoucí hodnoty indexu lomu, které tak mohou dosáhnout v praxi nedosažitelných hodnot. Naopak budeme-li zmenšovat index lomu v profilu s divergující singularitou pro zmenšení okolí s indexem lomu větším než maximální stanovená sestrojitelná hodnota, hodnoty vně budou klesat pod 1.

Připustíme-li však anizotropnost indexu lomu, naskýtá se alternativní řešení situace. Matematicky můžeme tuto skutečnost formulovat neuvažováním transmutovaného indexu lomu jako funkce, ale užitím obecnější formy, kdy připustíme rozdílné hodnoty pro různé směry paprsku. Tato problematika je mimo jiné podrobně rozebírána v článku od Tomáše Tyce and Ulfa Leonhardta [8], odkud plyne samotná myšlenka takového využití transmutace. My budeme k transmutaci singularity přistupovat poněkud odlišným způsobem, než ve zmíněném článku, ovšem dojdeme ke stejným výsledkům. V dalším textu tak prezentujeme řešení problematiky singulárních bodů v rotačně symetrických indexech lomu.

4.1 Obecné řešení singularity

Při transformaci prostoru funkcí f, kde výchozí i zobrazený prostor popíšeme v polárních souřadnicích (postupně nečárkované a čárkované), využijeme pro nalezení transmutovaného anizotropního indexu lomu definičního vztahu (1.8). Jelikož si vystačíme s transformací jedné ze dvou proměnných, ztotožníme parametr úhlu v obou prostorech $\phi = \phi'$ a měnit budeme pouze $r' = r'(r)$. Vyjdeme z obecného vztahu mezi indexem lomu a jeho transmutací vzniklého protějšku, který je pro připomenutí

$$G_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = G'_{ij}\mathrm{d}x'^i\mathrm{d}x'^j. \tag{4.1}$$

Jelikož prostory popisujeme v polárních souřadnicích, je metrický tenzor tvaru

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Podobně pak v prostoru $f(T)$ je čárkovaný metrický tenzor totožný, jen namísto souřadnice r zde vystupuje r'. Nyní uvažováním izotropního indexu n v nečárkovaném prostoru máme složky optického metrického tenzoru z definičního vztahu (1.4) tvaru

$$G_{rr} = n^2 \tag{4.3}$$

$$G_{\phi\phi} = n^2 r^2 \tag{4.4}$$

Při transmutaci měníme pouze souřadnici r, proto zůstanou nediagonální složky transmutovaného optického metrického tenzoru nulové. Odtud je vztah (1.21) mezi optickými metrickými tenzory v maticovém formalismu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}r & \mathrm{d}\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{rr} & 0 \\ 0 & G_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}r' & \mathrm{d}\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G'_{r'r'} & 0 \\ 0 & G'_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}r' \\ \mathrm{d}\phi \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Tato rovnice již nutně vyústí v anizotropní index lomu, proto nyní vypočteme transmutovaný index lomu v radiálním a úhlovém směru, značeno postupně $n'_{r'}$ a n'_{ϕ}. Nejprve srovnáním členů s diferenciály vzdálenosti od počátku máme

$$G_{rr}(r)\mathrm{d}r^2 = G'_{r'r'}(r')\mathrm{d}r'^2. \tag{4.6}$$

S využitím vztahu pro index lomu ve směru (1.8) máme

$$n_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{G'_{r'r'}\mathrm{d}r'^2 + G'_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2}{g'_{r'r'}\mathrm{d}r'^2 + g'_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2}}. \tag{4.7}$$

Pro směr daný souřadnicemi r a r', tedy diferenciál úhlu je nulový, obdržíme pro transmutovaný index lomu v tomto směru vztah

$$n'_{r'}(r') = \sqrt{\frac{G'_{r'r'}\mathrm{d}r'^2}{g'_{r'r'}\mathrm{d}r'^2}}, \tag{4.8}$$

odkud dosazením za optický metrický tenzor z (4.6) a využitím vztahu (4.3) pro složku G_{rr} můžeme psát

$$n'_{r'}(r') = \sqrt{\frac{n(r)^2 \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right)^2 \mathrm{d}r'^2}{r'^2 \mathrm{d}r'^2}} = n(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right|. \tag{4.9}$$

Je důležité neopomenout fakt, že počítáme-li $n'_{r'}$ ve vzdálenosti r', vystupuje ve vztahu původní index lomu ve vzdálenosti r, proto pro vyjádření nového indexu lomu v závislosti na nové proměnné je třeba chápat r jako funkci $r(r')$. Finální výraz tak má podobu

$$n'_{r'}(r') = n(r(r'))\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right|. \tag{4.10}$$

Podobně index lomu ve směru úhlové souřadnice získáme položením diferenciálu $\mathrm{d}r' = 0$ v rovnici (4.4). Odtud

$$n'_\phi = \sqrt{\frac{G'_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2}{g'_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2}} = \sqrt{\frac{G'_{\phi\phi}}{g'_{\phi\phi}}}. \tag{4.11}$$

Úhlovou složku transmutovaného optického metrického tenzoru $G'_{\phi\phi}$ získáme srovnáním členů z (4.5) s diferenciály úhlu. Obdržíme tak jednoduchý vztah

$$G_{\phi\phi}(r) = G'_{\phi\phi}(r'), \tag{4.12}$$

Můžeme tak upravit (4.11) do tvaru

$$n'_\phi(r') = \sqrt{\frac{G_{\phi\phi}}{r'^2}} = \sqrt{\frac{n^2 r^2}{r'^2}} = n(r(r'))\frac{r}{r'}. \tag{4.13}$$

Získali jsme vztahy pro anizotropní transmutovaný index lomu ve dvou významných směrech, zbývá tak vhodně zvolit zobrazení $r'(r)$ tak, abychom se zbavili singularity indexu lomu, pod kterou rozumíme nulovou nebo divergující hodnotu v počátku. Uvažujme polynomiální singularitu indexu lomu $n(r)$ v počátku, neboli index lomu úměrný m-té mocnině r pro nenulovou hodnotu parametru m a $r \to 0$. Tento požadavek je formulován rovnicí

$$\lim_{r\to 0} \frac{n(r)}{r^m} = C, \tag{4.14}$$

kde C je konstanta úměrnosti. S tímto požadavkem již máme spolu s (4.10) a (4.13) potřebné informace pro vyšetření chování transmutovaného indexu lomu v souřadnicových směrech pro $r' \to 0$. Z (4.10) máme

$$n'_{r'}(r') = n(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right|, \tag{4.15}$$

odkud vidíme, že $n'_{r'}(r')$ bude v limitě kladné reálné číslo právě tehdy, když derivace bude úměrná r^{-m} pro $r \to 0$. Neklademe-li další požadavky na chování funkce $r'(r)$ mimo počátek, například zachování spojitosti indexu lomu na rozhraní čočky a vnějšího prostředí, můžeme ji zvolit jako

$$r'(r) = r^{m+1}. \tag{4.16}$$

Obecně by pro odstranění takové singularity v počátku vystačila jakákoli funkce $r'(r)$ s jediným omezením, a to chováním v počátku úměrným r^{m+1}. Pro $n'_{r'}(r')$ tedy máme

$$\lim_{r'\to 0} n'_{r'}(r') = \lim_{r'\to 0} n(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right| = \lim_{r\to 0}\frac{n(r)}{(m+1)r^m}, \tag{4.17}$$

kde v poslední rovnosti došlo k záměně $r' \to 0$ za $r \to 0$. Tato úprava je korektní, neboť z vlastnosti limity víme, že výsledek nezávisí na funkci, podle níž se k danému bodu blížíme, ale jen volbou limitního bodu. Ten se ale nezmění, neboť jestliže $r' \to 0$, pak

z (4.16) plyne $r \to 0$. Konečně využitím (4.14) dostáváme limitní hodnotu transmutovaného indexu lomu v radiálním směru

$$\lim_{r'\to 0} n'_{r'}(r') = \frac{C}{m+1}, \tag{4.18}$$

což je kladné reálné číslo, podařilo se tedy transmutací odstranit singularitu počátku v radiálním směru. Pro chování funkce $n'_{\phi}(r')$ v okolí počátku vyjdeme z (4.13) a přímým výpočtem spočteme

$$\lim_{r'\to 0} n'_{\phi}(r') = \lim_{r'\to 0} n(r)\frac{r}{r'} = \lim_{r'\to 0} n(r)\frac{r}{r^{m+1}} = \lim_{r\to 0} \frac{n(r)}{r^m} = C, \tag{4.19}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme opět využili přechodu od r' k r bez změny hodnoty limity. Vidíme, že transmutovaný index lomu v úhlovém směru je v limitě právě konstanta úměrnosti C z (4.14), což je ovšem opět kladné reálné číslo. Zdá se, že jsme vhodnou transmutací $n(r)$ s polynomiální singularitou v počátku dosáhli anizotropního indexu lomu, ve kterém je tato singularita zcela odstraněna. Při hlubším zamyšlení se ale singularitu v počátku nepodařilo zcela odstranit, pouze transmutovat na singularitu jiného druhu, neboť co je pro jeden paprsek v počátku index lomu v radiálním směru, to je pro paprsky kolmé index lomu v úhlovém směru. Bodu v počátku by tak musel odpovídat transmutovaný index lomu, který má i v jednom směru více hodnot kvůli rozdílným hodnotám $n'_{r'}(0)$ a $n'_{\phi}(0)$, proto by zde byl i po transmutaci nesestrojitelný.

Ovšem hlavním důvodem, proč se zabýváme transmutací singularity, není samotný počátek, ale i chování indexu lomu v jeho okolí. V něm totiž spojitý index lomu v závislosti na typu singularity nabýval hodnot $n < 1$ nebo naopak hodnot nad maximální setrojitelnou hodnotu. V profilu po transmutaci jsme ukázali, že i v počátku existují nenulové limity anizotropního indexu lomu v souřadnicových směrech. Odtud víme, že existuje okolí singularity takové, že tyto hodnoty nejsou ani nulové, ani divergující. Proto máme-li nástroje pro vytvoření anizotropního prostředí, pak s pomocí transmutace můžeme sestrojit čočku, která se pro vnějšího pozorovatele bude jevit stejně, jako jinak prakticky nesestrojitelná čočka s polynomiální singularitou. Tento teoretický výsledek se podařilo převést do praxe, jak popisuje článek [4]. Zde se pojednává o transmutaci singularity v Eatonově čočce, přičemž samotný postup odstraňování singularity je odlišný než v naší práci, ovšem vede ke stejnému závěru.

4.2 Transmutovaný jednotkový profil

Nejdříve odvozený aparát aplikujeme na třídu indexů lomu vzniklých transmutací jednotkového profilu mocninnou funkcí, kterou jsme se již dříve zabývali. Takové indexy lomu jsou tvaru

$$n(r) = \frac{r^{\frac{1-m}{m}}}{|m|}, \tag{4.20}$$

kde m je mocnina ve funkci f transformující prostor T. Pro hodnoty parametru m z množiny $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, je singularita v počátku divergující, pro hodnoty parametru z intervalu $(0, 1)$ nabývá index lomu v počátku nulové hodnoty.

4.2.1 Anizotropní index lomu

Pro odstranění singularity použijeme transmutaci, podle (4.16) danou vztahem

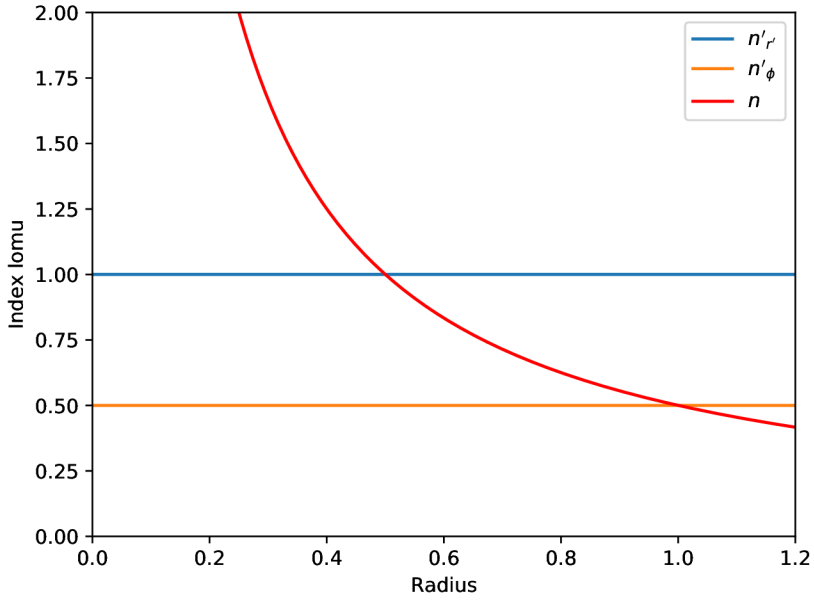
$$r' = r^{\frac{1-m}{m}+1} = r^{\frac{1}{m}}, \tag{4.21}$$

Transmutovaný index lomu v souřadnicových směrech jsou funkce nové proměnné r', pro zjednodušení můžeme pracovat s proměnnou r a do nové proměnné přejít až ve výsledku. Z (4.10) a (4.13) tak máme postupně

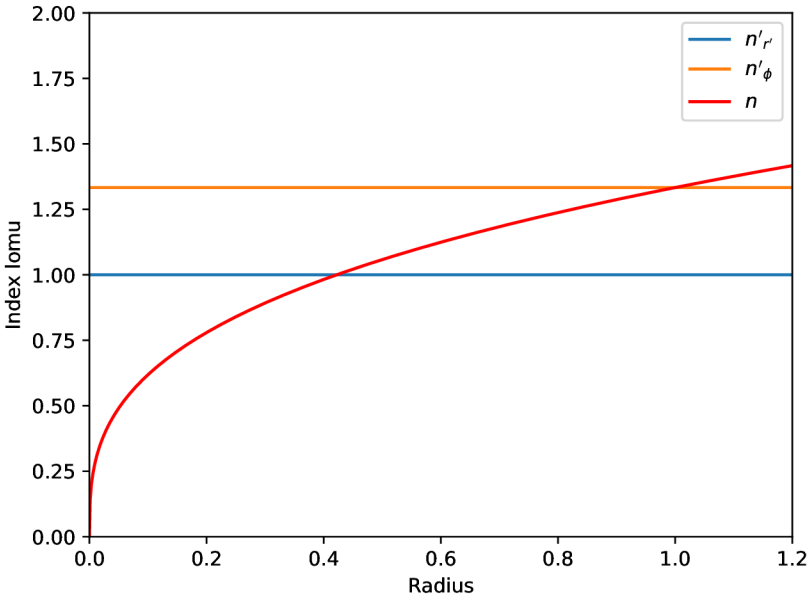
$$n'_{r'}(r') = n(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right| = \frac{r^{\frac{1-m}{m}}}{|m|}|m|r^{\frac{m-1}{m}} = 1 \tag{4.22}$$

$$n'_{\phi}(r') = n(r)\frac{r}{r'} = \frac{r^{\frac{1-m}{m}}}{|m|}\frac{r}{r^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{|m|}, \tag{4.23}$$

Anizotropní index lomu odstraňující singularitu je tak konstantní v úhlovém i radiálním, přepsání do nové proměnné r' tak nemá žádný efekt. Na výsledný index lomu můžeme v případě $n'_{\phi} < 1$ aplikovat trik s násobením celého profilu dostatečně velkou kladnou konstantou bez vlivu na trajektorii paprsků a bez nárůstu hodnot indexu lomu nade všechny meze. Na obrázku 4.1 je grafické znázornění transmutace singularity v profilu (4.20) pro hodnotu parametru $m = 2$. Podobně i nulová singularita v počátku je takovou transmutací odstraněna a situace je pro $m = 3/4$ znázorněna na obrázku 4.2.



Obrázek 4.1: Červeně je vykreslen index lomu před transmutací pro $m = 2$ s divergující singularitou v počátku, který se transmutuje na anizotropní index lomu, který je v souřadnicových směrech dán funkcemi $n'_{\phi} = 1/2$ a $n'_{r'} = 1$.



Obrázek 4.2: Červeně opět index lomu před transmutací pro $m = 3/4$ s nulovou singularitou v počátku, transmutovaný index lomu v souřadnicových směrech je dán funkcemi $n'_{\phi} = 4/3$ a $n'_{r'} = 1$.

4.2.2 Trajektorie paprsků

Stále uvažujeme index lomu z rovnice (4.20), nyní však použijeme vztah (2.12) k výpočtení trajektorií v tomto prostředí. Při řešení rovnice (2.12) postupujeme podobně jako v sekci 3.1.2, jiné budou integrační konstanty zaručující spojitost a spojitost první derivace větví funkce $\phi(r)$ v místě návaznosti, ovšem postup nalezení těchto konstant zůstává zcela analogický. Proto přejdeme rovnou k řešení mezního případu definičního oboru integrandu z (2.12), odkud máme podmínku pro bod vratu r_m danou rovnicí

$$L = r_m n = \frac{r_m^{\frac{1}{m}}}{|m|}, \tag{4.24}$$

proto analogicky ke vztahu (3.2) je integrační konstantou záporné větve funkce $\phi(r)$

$$2\phi(r_m) = 2\phi((L|m|)^m). \tag{4.25}$$

Pro vytvoření rovnoběžných ekvidistantních paprsků použijeme dodatečnou integrační konstantu kladné větve z (3.3) $(-\arcsin(C\pi k))$. Záporná větev $\phi(r)$ je opět záporně vzatá kladná větev spolu s (4.25). Tento zdánlivě univerzální postup ale narazil na svou mez. Nově zde totiž nastává situace úplného odrazu, kdy paprsek nepronikne z vnějšího prostředí do prostoru čočky. Pro takový případ je třeba zvolit jiné integrační konstanty funkce $\phi(r)$, které ovšem nedokážou zaručit spojitost první derivace. Tento zlom ve funkci $\phi(r)$ se na trajektorii světla projeví náhlým zlomem, což je v našem případě právě úplný odraz na rozhraní čočky a vakua, který se skutečně projevuje nespojitou derivací trajektorie

paprsku v místě odrazu. Proto můžeme právě na rozhraní čočky upustit od požadavku spojitosti derivace.

Naštěstí ale hledání integrační konstanty při úplném odrazu není příliš složité. Stačí si uvědomit, že v takovém případě musí nastat u funkce $\phi(r)$ v bodě r_0 singularita, poněvadž samotná nespojitost odpovídá pouze lomu, kdy paprsek do čočky pronikne. Prozkoumejme tedy chování funkce $\phi(r)$ v bodě r_0, ovšem zde záleží na tom, z jakého směru se blížíme k hranici čočky. Nejdříve pro paprsek z vnějšku se parametr r zmenšuje k hodnotě r_0, máme tak

$$L = \lim_{r \to r_0^+} r n(r) = r_0 n_0^+ \sin\theta_0. \tag{4.26}$$

Zde je důležité, zda je čočka definována na otevřeném či uzavřeném kruhu, my se budeme držet otevřené množiny, proto n_0^+ je index lomu vnějšího prostředí, dále jen jako n_0. Rovnice (4.26) tak určuje hodnotu konstanty L pro paprsek daný příslušnými počátečními podmínkami. Nyní s určenou konstantou L vyšetříme, kdy nastane singularita funkce $\phi(r)$ pro r_0. Výraz pod odmocninou rovnice (2.12) tedy položíme roven nule a vyšetříme situaci, kdy $r \to r_0^-$. Dostáváme tak rovnici

$$\lim_{r \to r_0^-} r n(r) = L = r_0 n_0 \sin\theta_0. \tag{4.27}$$

Limita v tomto výrazu je s rovna $r_0 n_0^-$, kde n_0^- je limitní hodnota indexu lomu čočky na rozhraní s vnějším prostředím. Nyní do rovnice dosadíme zvolený index lomu, pro nás daný výrazem (4.20), a vyjádříme úhel θ_0, což je hodnota kritického úhlu, při němž nastane úplný odraz, máme tedy

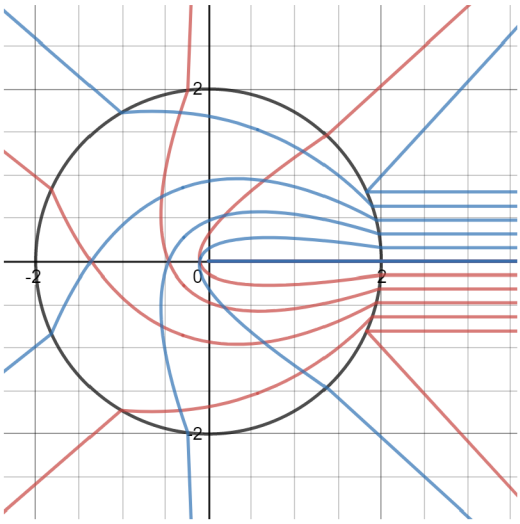
$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{r_0^{\frac{1-m}{m}}}{|m|\, n_0}\right). \tag{4.28}$$

Se znalostí kritického úhlu víme, které paprsky podlehnou úplnému odrazu. Pro tyto paprsky pak volíme integrační konstantu danou vztahem (4.25) s tím rozdílem, že mezním bodem $\phi(r)$ není bod vratu r_m, ale r_0, proto hledaná integrační konstanta je

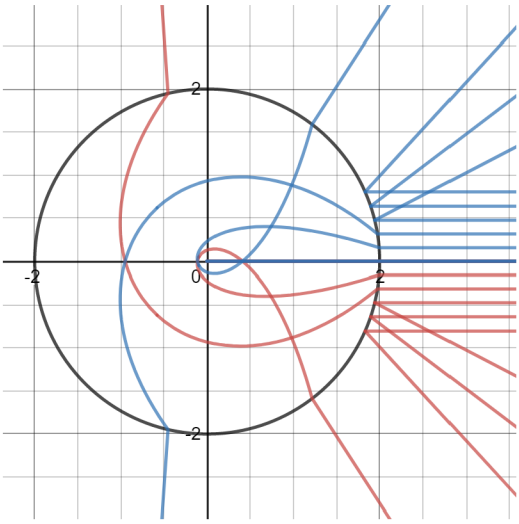
$$2\phi(r_0). \tag{4.29}$$

Pro názornou ilustraci postupem zcela analogickým jako v části 3.1.2 obdržíme funkci $\phi(r)$, odkud s použitím odvozených integračních konstant obdržíme volbou parametrů $m = 2$ a $r_0 = 2$ obrázek 4.3, volbou $m = 3$ obrázek 4.4. Za zmínku stojí krajní trajektorie, jež přesáhly kritický úhel při vstupu do čočky a dochází tak u nich k úplnému odrazu.

Transmutované profily indexu lomu z obrázků 4.3 a 4.4 jsou od určité vzdálenosti od počátku menší jak jedna, pro větší realističnost z hlediska definice indexu lomu a zachování totožných trajektorií bychom museli index lomu v celém prostoru vynásobit dostatečně velkou kladnou konstantou. Cenou za tuto operaci je propagace světla do čočky z prostředí o indexu lomu většího než jedna, už by se tedy nejednalo o vstup paprsku z vakua. Alternativně můžeme touto konstantou vynásobit jen index lomu v oblasti čočky, potom se ale mění chování paprsků na rozhraní čočky s vakuem.



Obrázek 4.3: Šíření světla v čočce s indexem lomu daným vztahem (4.20) a parametry $m = 2$ a $r_0 = 2$.



Obrázek 4.4: Šíření světla v čočce s indexem lomu daným vztahem (4.20) a parametry $m = 3$ a $r_0 = 2$.

Pro záporné hodnoty se dostáváme do situace, kdy veškeré světlo, jež se dostane do čočky, má trajektorii konvergující k počátku, kde zároveň diverguje index lomu. Protože je tato situace zcela nefyzikální (nekonečný index lomu), uvedeme čistě z teoretického hlediska jeden příklad na obrázku 4.3, a to pro hodnotu $m = -1$ (všechny záporné hodnoty parametru m by posloužily dobře pro tento hypotetický koncept).

Již z obrázku lze vidět, že je tento případ zásadně odlišný. Světlo, které se dostane dovnitř čočky, se totiž nedostane z čočky ven. Není však pohlceno, ale jeho rychlost klesá pod všechny meze v okolí počátku, kde index lomu diverguje. Taková čočka by byla velice zajímavý exemplář, ovšem právě kvůli neomezenému indexu lomu je prakticky zcela nesestrojitelná.

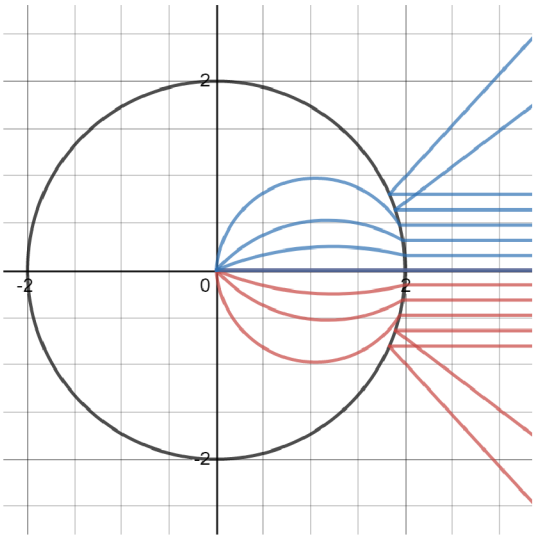
Nyní si vizualizujeme profil (4.20) po odstranění singularity v počátku. Takový profil jsme řešili v předchozí sekci a singularitu odstraňující transmutující funkce byla $r' = r^{\frac{1}{m}}$. Tentokrát pro vyšetření trajektorií paprsků použijeme hamiltonovskou optiku. Vyřešíme Hamiltonovy rovnice v polárních souřadnicích ze sekce 2.1.3 s použitím disperzní relace (2.46). Nejjednodušším postupem je vyřešit rovnice pro izotropní prostředí a výsledné trajektorie v oblasti čočky zobrazit funkcí $r' = r^{\frac{1}{m}}$. Inverzní optický metrický tenzor vystupující v disperzní relaci je dán v oblasti čočky při naší volbě souřadnic jako

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} G^{rr} & 0 \\ 0 & G^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n(r)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 n(r)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m^2}{r^{\frac{2(1-m)}{m}}} & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{r^{\frac{2}{m}}} \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Mimo čočku je G^{ij} dán vztahem

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} G^{rr} & 0 \\ 0 & G^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Odtud již pro disperzní relaci v oblasti čočky (analogicky vně čočky) máme

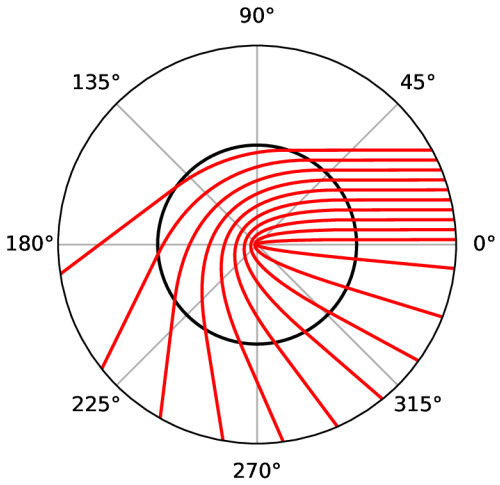


Obrázek 4.5: Trajektorie světla v čočce o poloměru $r_0 = 2$ a parametrem $m = -1$. Světlo konverguje k počátku, ovšem nikdy jej nedosáhne (teoretická čočka).

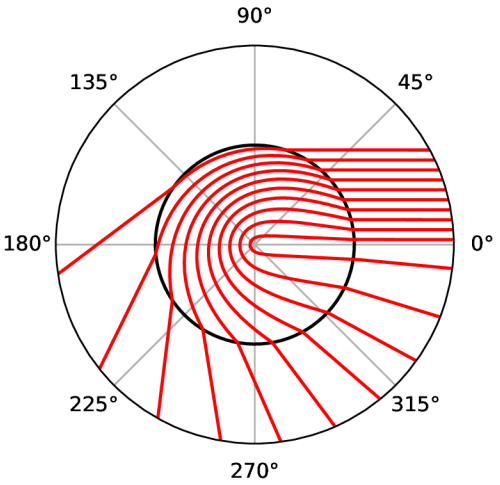
$$\omega = c\sqrt{G^{rr}k_r^2 + G^{\phi\phi}k_\phi^2} = c\sqrt{\frac{m^2}{r^{\frac{2(1-m)}{m}}}k_r^2 + \frac{m^2}{r^{\frac{2}{m}}}k_\phi^2}. \tag{4.32}$$

Hamiltonovy rovnice jsme řešili pomocí programu Python a počáteční podmínky pro jednotlivé trajektorie jsou zvoleny tak, že paprsky vstupují do čočky v ekvidistantních intervalech a rovnoběžně. Jelikož volíme počáteční podmínky v izotropním prostředí, počáteční vlnový vektor $\vec{k}_0$ jakožto gradient fáze je kolineární se směrem šíření paprsku.

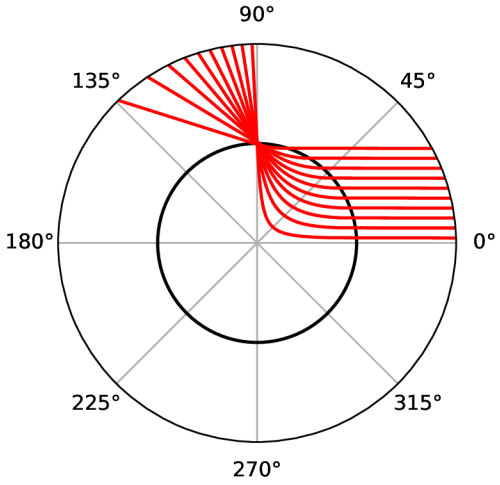
Na obrázcích 4.6 a 4.7 jsou již vykresleny postupně trajektorie paprsků před a po transmutaci odstraňující singularitu v počátku pro hodnotu parametru $m = 2$ ($r' = \sqrt{(}r)$), tedy index lomu pro $r \to 0$ divergující. Porovnáním obrázků je názorně vidět, že po odstranění divergující singularity se paprsky uvnitř čočky oddálí od počátku. Zároveň na rozhraní po transmutaci dochází k lomu při vstupu z vnějšího prostředí. Paprsky se tak uvnitř čočky šíří po jiných trajektoriích, ale v momentě opouštění čočky paprsek po druhém lomu splyne s trajektorií paprsku před transmutací.



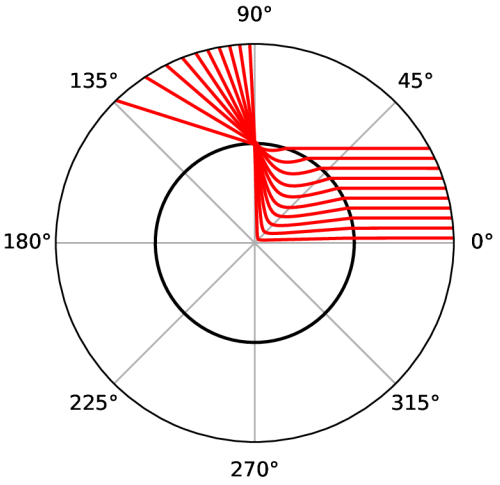
Obrázek 4.6: Šíření světla v čočce s indexem lomu daným vztahem (2.61) a parametry $m = 2$ a $r_0 = 1$.



Obrázek 4.7: Šíření světla v čočce s odstraněnou divergující singularitou v počátku a parametry $m = 2$ a $r_0 = 1$.



Obrázek 4.8: Šíření světla v čočce s indexem lomu daným vztahem (2.61) a parametry $m = 1/2$ a $r_0 = 1$.



Obrázek 4.9: Šíření světla v čočce s odstraněnou nulovou singularitou v počátku a parametry $m = 1/2$ a $r_0 = 1$.

Druhým případem je odstranění nulové singularity. Proto zvolíme hodnotu parametru například jako $m = 1/2$. Takový profil má skutečně index lomu v počátku nulový a navíc můžeme srovnat výsledky z geometrického přístupu na obrázku 2.4 se stejnou hodnotou parametru, zvolíme však jednotkový poloměr. Řešením Hamiltonových rovnic získáme trajektorie paprsků na obrázku 4.8 a užitím transmutace odstraňující singularitu $r' = r^2$ obdržíme obrázek 4.9. Tentokrát se trajektorie v čočce naopak k počátku přiblížily, ovšem transmutovaný profil již nemá v počátku ani jeho okolí nulovou či prakticky příliš nízkou hodnotu indexu lomu. Zároveň se samozřejmě zachovávají trajektorie paprsků vně čočky, jelikož jsme transmutovali pouze oblast čočky.

4.3 Singularita v Eatonově čočce

Pro sestrojení optického instrumentu je v praxi vhodné pracovat pouze v nějaké části prostoru, například v prostoru čočky. Pro tento příklad budeme pracovat s Eatonovou čočkou s profilem $n_E(r)$ z rovnice (1.18), která má v počátku divergující singularitu. Sice jsme již viděli trajektorie paprsků pro Eatonovu čočku, ale ty byly zejména v blízkém okolí počátku důsledkem příliš vysokých hodnot indexu lomu. Použijeme tedy vhodnou transmutaci na odstranění této singularity. Navíc se namísto transmutace na celém prostoru omezíme jen na oblast čočky a vnější prostředí necháme netknuté. Po transmutaci tak získáme objekt stejných rozměrů, jehož paprsky se budou lišit od paprsků Eatonovy čočky pouze na této oblasti.

4.3.1 Anizotropní index lomu

Z požadavku zachování rozměru čočky po transmutaci plyne dodatečná podmínka na funkci $r'(r)$, jelikož je třeba zajistit bijekci na oblasti čočky. Odtud nutně $r'(1) = 1$, neboli obraz hranice čočky se zobrazí sám na sebe. V počátku se zároveň transmutující funkce musí chovat úměrně $r^{-\frac{1}{2}}$, což ověříme spočtením limity

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{\frac{2}{r} - 1}}{r^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{r\to 0} \sqrt{2 - r} = \sqrt{2} = C. \tag{4.33}$$

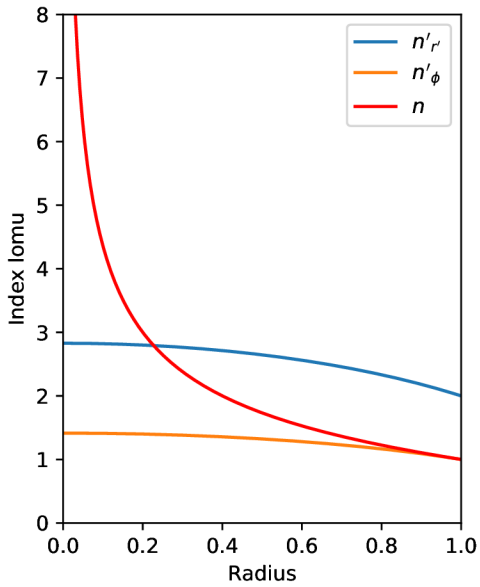
Díky jednotkově zvolenému poloměru Eatonovy čočky tak volba $r'(r) = \sqrt{r}$, plynoucí z (4.16), splňuje tuto dodatečnou podmínku. Funkci indexu lomu $n_E(r)$ je třeba přepsat do nové proměnné r'. Odtud máme výraz pro $n_E(r(r'))$ dán jako

$$n_E(r(r')) = \sqrt{\frac{2}{r'^2} - 1}. \tag{4.34}$$

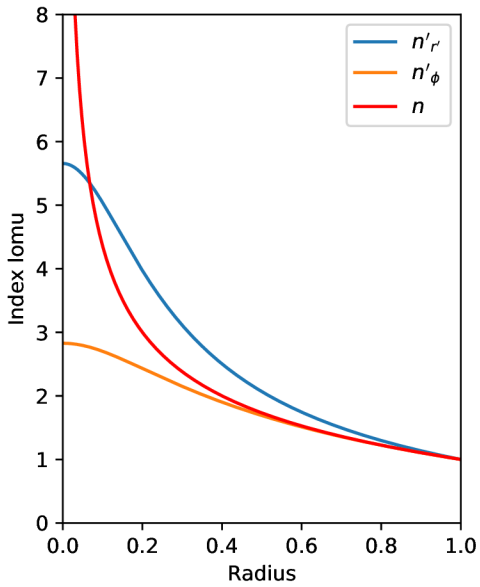
Odtud již můžeme spočítat indexu lomu po transmutaci pro radiální a úhlový směr jako

$$n'_{r'}(r') = n_E(r(r')) \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right| = \sqrt{\frac{2}{r'^2} - 1} \cdot 2r' = 2\sqrt{2 - r'^2}, \tag{4.35}$$

$$n'_{\phi}(r') = n_E(r(r'))\frac{r}{r'} = \sqrt{\frac{2}{r'^2} - 1} \cdot r' = \sqrt{2 - r'^2}. \tag{4.36}$$



Obrázek 4.10: Profil indexu lomu pro Eatonovu čočku je znázorněn červeně, $n'_{\phi}(r')$ a $n'_{r'}(r')$ jsou funkce transmutovaného indexu lomu v radiálním a úhlovém směru s lomem na rozhraní.



Obrázek 4.11: Profil indexu lomu Eatonovy čočky červeně, $n'_{\phi}(r')$ a $n'_{r'}(r')$ jsou funkce transmutovaného indexu lomu v radiálním a úhlovém směru bez lomu na rozhraní.

Grafická reprezentace transmutace odstraňující singularitu v počátku Eatonovy čočky je na obrázku 4.10. Jak je ale z obrázku vidět, tak $n'_{r'}(r')$ už nenavazuje spojitě na vnější jednotkový index lomu. Nespojitost indexu lomu transmutované čočky tak bude mít na rozhraní s vnějším prostředím za důsledek lom světla, jak uvidíme v další kapitole, můžeme se ale spokojit s tímto výsledkem, neboť singularita byla odstraněna. Lze ale předejít vhodnou transmutací nechtěnému lomu na rozhraní? Ještě jsme zcela nevyužili volnosti při volbě $r'(r)$, budeme tak požadovat dodatečnou podmínku, která zajistí spojitost indexu lomu na rozhraní i po transmutaci. Jelikož profil před transmutací byl na rozhraní spojitý s vnějším prostředím, stačí takové chování zachovat při transmutaci funkcí $r'(r)$ podmínkou

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\mathrm{d}r'(r)}{\mathrm{d}r} = 1. \tag{4.37}$$

Vyjdeme z předchozí volby $r'(r) = \sqrt{r}$ a zobecníme do tvaru neporušujícího podmínku pro odstranění singularity přidáním členu s vyšší mocninou než $\frac{1}{2}$ a multiplikativních konstant A, B. Mocninu u druhého člene je z nutnosti nezápornosti $r'(r)$ potřeba zvolit alespoň jedna a jelikož pro člen úměrný r bychom neobdrželi žádné řešení, zvolíme předpokládaný tvar jako

$$r'(r) = A\sqrt{r} + Br^{\frac{3}{2}}, \tag{4.38}$$

kde konstanty A, B jsou jednoznačně určeny okrajovými podmínkami na hranici čočky

$$\frac{\mathrm{d}r'(1)}{\mathrm{d}r} = 1, \tag{4.39}$$

$$r'(1) = 1. \tag{4.40}$$

Podmínka (4.39) tedy zajistí spojitost transmutovaného indexu lomu s vnějším jednotkovým indexem lomu, nebude tak docházet k lomu a (4.40) je geometrická podmínka, kdy hranice čočky po transmutaci zůstane nezměněna. Řešením takové soustavy obdržíme hodnoty konstant $A = B = \frac{1}{2}$ a transmutující funkce splňující naše požadavky tak má tvar

$$r'(r) = \frac{1}{2}(\sqrt{r} + r^{\frac{3}{2}}). \tag{4.41}$$

S učiněnou volbou funkce $r'(r)$ již můžeme vyjádřit transmutovaný indexu lomu v souřadnicových směrech. Jelikož ale přecházíme k nové radiální proměnné r', je potřeba znát i funkci inverzní k (4.41), která ale v našem případě nemá analytické vyjádření. Proto označme inverzní funkci $r(r')$, přičemž funkce $n'_{r'}(r')$ a $n'_{\phi}(r')$ je už nutné vypočítat numericky. Tyto funkce tedy mají tvar

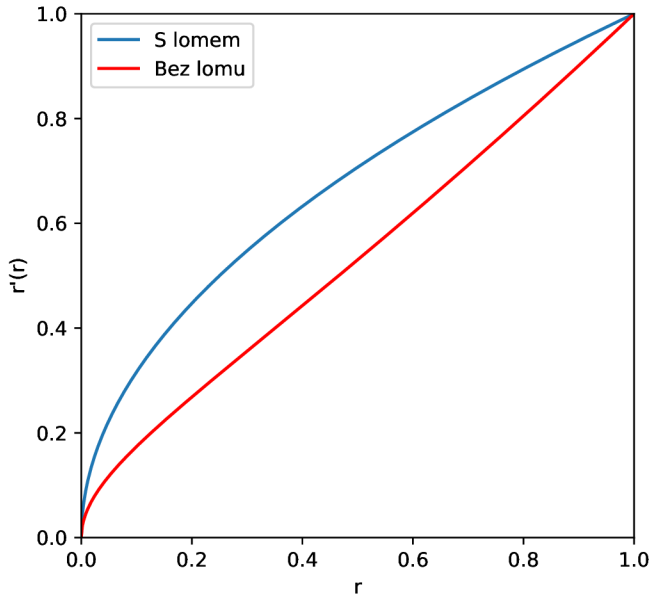
$$n'_{r'}(r') = n_E(r(r'))\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'}\right| = n_E(r(r'))\frac{1}{\frac{1}{4}\left[r(r')\right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\left[r(r')\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.42}$$

$$n'_{\phi}(r') = n_E(r(r'))\frac{r}{r'} = n_E(r(r'))\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\left[r(r')\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[r(r')\right]^{\frac{1}{2}}\right)}, \tag{4.43}$$

jejichž grafy jsou na obrázku 4.11. Transmutace tedy úspěšně odstranila singularitu z počátku a na rozdíl od transmutace na obrázku 4.10 jsou navíc $n'_{r'}(r')$ a $n'_{\phi}(r')$ na hranici čočky $r' = 1$ jednotkové. Díky tomu, že index lomu je na hranici čočky jednotkový v radiálním i úhlovém směru, nedojde zde ze spojitosti indexu lomu na tomto rozhraní k lomu světla, jak jsme požadovali.

Pro srovnání jsou grafy obou funkcí $r'(r)$ transmutujících Eatonovu čočku, jedné způsobující lom na rozhraní a nově nalezené funkce nechtěný lom odstraňující, na obrázku 4.12. Obě funkce jsou zvoleny tak, že v počátku odstraní singularitu, avšak jen chování červené funkce v okolí $r = 1$ zajišťuje spojitost.

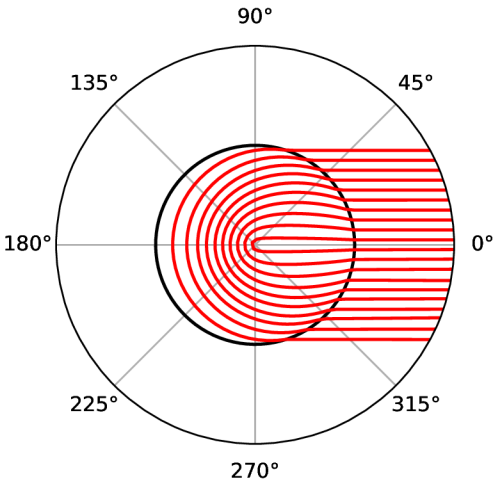
Volba $r'(r)$ s těmito vlastnostmi není jednoznačná. Právě naopak, vlastnosti, které požadujeme, určují chování této funkce pouze v nějakém okolí počátku a hranice čočky. Kdekoli jinde nejsou snad až na spojitost kladeny na $r'(r)$ žádné požadavky, proto naše volby jsou výjimečné snad jen svou zdánlivou jednoduchostí.



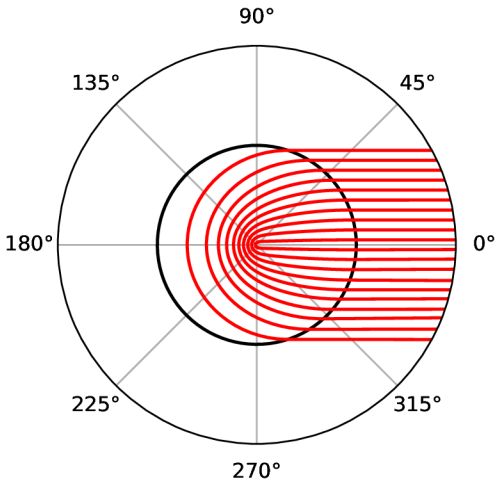
Obrázek 4.12: Modrá funkce při transformaci způsobí lom na rozhraní s vnějším prostředím. Červená funkce se tomuto problému vyhne díky podmínce požadující derivaci na rozhraní rovnu jedné.

4.3.2 Trajektorie paprsků

Zbývá vyšetřit trajektorie paprsků určené těmito singularitu odstraňujícími transmutujícími funkcemi. První transmutující funkcí dávající za vznik anizotropnímu prostředí byla volba $r' = \sqrt{r}$ na oblasti čočky. Toto odstranění singularity s pomocí řešení Hamiltonových rovnic v polárních souřadnicích je zobrazeno na obrázku 4.13, kde je vidět, že paprsky se drží dále od počátku ve srovnání s původní Eatonovou čočkou.



Obrázek 4.13: Šíření světla v Eatonově čočce transmutované funkcí $r' = \sqrt{r}$. Vedlejším efektem této transmutace je ale lom na hranici čočky. Vně se paprsky pohybují ve vakuu a splývají s paprsky na obrázku 2.15.



Obrázek 4.14: Šíření světla v Eatonově čočce transmutované funkcí $r' = \frac{1}{2}(\sqrt{r} + r^{\frac{3}{2}})$, která vedle odstranění singularity v počátku předejde i lomu na hranici čočky. Paprsky vně čočky zůstávají nepozměněny.

Druhou volbou transmutující funkce odstraňující singularitu, která je zároveň bez lomu na rozhraní čočky a vakua, byla volba $r' = \frac{1}{2}(\sqrt{r} + r^{\frac{3}{2}})$. Paprsky po této transmutaci na obrázku 4.14 se příliš neliší od paprsků v Eatonově čočce, důležitým rozdílem je však oblast počátku, ve které paprsky obcházejí počátek po méně sevřeném oblouku, podobně jako v jiných případech odstranění divergující singularity.

Kapitola 5

Geodetické čočky

V celé této práci se zabýváme rotačně symetrickými indexy lomu, přičemž tyto profily mohou v realitě díky závislosti na r popisovat dvourozměrná i trojrozměrná prostředí, jako například Eatonovu čočku jako retroreflektor nebo Luneburgovu čočku jako fokusační prvek. Problémem s těmito čočkami v prostoru je obtížnost jejich sestrojení kvůli nehomogennímu profilu indexu lomu. Navíc vrstevnice indexu lomu jsou sféry, což situaci ještě více komplikuje. Řešení tohoto problému v rovině poprvé objevil Rinehart [5]. Podařilo se mu nahradit nehomogenní profil indexu lomu v oblasti čočky ekvivalentním povrchem s konstantním indexem lomu. Takové prostředí je samozřejmě mnohem snazší sestrojit. Trajektorie paprsků na takto nově vzniklém povrchu jsou geodetiky, odtud také plyne název geodetická čočka. Geodetické čočky jsou v dnešní fyzice živým tématem zejména kvůli jejich využití v optických čipech.

5.1 Obecný radiálně symetrický index lomu

Nejdříve odvodíme postup, který radiálně symetrickému indexu lomu v rovině přiřadí ekvivalentní povrch v prostoru ve smyslu transmutace v oblasti čočky. Přímo této problematice a jejím aplikacím na řadu známých profilů indexů lomu se podrobně věnuje článek Martina Šarborta a Tomáše Tyce [6], postup v němž je analogický našemu přístupu. Světlu více jako vlně se s podobnými myšlenkami věnuje článek [9] autorů Lin Xu, Xiangyang Wang, Tomáše Tyce a dalších. Oproti dosavadním transmutacím, kdy jsme zobrazovali rovinu nebo její otevřenou podmnožinu samu na sebe, povolíme další proměnnou z, která bude popisovat souřadnici mimo prostor roviny. Vyjdeme tedy opět ze zachování optických délek v bodě a jeho obrazu, což popisuje rovnice pro transmutaci (1.5). Prostor T budeme popisovat polárními souřadnicemi r a ϕ, pro prostor $f(T)$ použijeme válcové souřadnice r', ϕ a z. Z ortogonality válcových souřadnic plyne diagonalita optického metrického tenzoru. Dosazením do (1.5) tak máme

$$G_{rr}\mathrm{d}r^2 + G_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2 = G_{r'r'}\mathrm{d}r'^2 + G_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2 + G_{zz}\mathrm{d}z^2. \tag{5.1}$$

Pro izotropní prostředí tento výraz přechází do tvaru

$$n^2(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2) = n'^2(\mathrm{d}r'^2 + r'^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2), \tag{5.2}$$

kde $n = n(r)$ a $n' = n'(r')$ jsou postupně indexy lomu v prostoru T a $f(T)$. Nastává zde ale odlišná situace řešení této rovnice, neboť doposud jsme měli dánu transmutující funkci f a hledali neznámý transmutovaný index lomu. V naší situaci je ale zobrazení f neznámé, avšak z našeho požadavku na geodetickou čočku máme konstantnost transmutovaného indexu lomu. Zvolme jeho hodnotu $n'(r') = 1$, nebude tak docházet k lomu světla z důvodu přechodu paprsku mezi prostředími s odlišnými indexy lomu. Navíc bude-li index lomu na hranici transmutované oblasti jednotkový, tato hranice se zobrazí sama na sebe a takový prostor pak zůstane spojitý i po transmutaci. Nemůžeme ale tvrdit, že na rozhraní transmutované čočky nenastane lom. Sice naší volbou nenastane lom z důsledku skoku indexu lomu, i tak se ale paprsky mohou geometricky zlomit v místě navázání geodetické čočky na vakuum. V jazyce indexů lomu je kritériem ekvivalentním této geometrické deformaci diferencovatelnost indexu lomu $n(r)$ na tomto rozhraní.

Řešme tedy rovnici (5.2). Cílem je parametrizovat geodetickou čočku pomocí proměnných r a ϕ. Nejdříve z identifikace úhlového parametru ϕ v polárních souřadnicích s úhlovým parametrem v souřadnicích válcových máme přímo vztah mezi r a r' daný rovností

$$n(r)r = r'. \tag{5.3}$$

Souřadnice r' a z chápeme jako funkce proměnné r. Odtud plyne druhá rovnost

$$n^2 \mathrm{d}r^2 = \mathrm{d}r'^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{5.4}$$

Vyjádřeme z této rovnice parametr z postupně jako

$$n^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2, \tag{5.5}$$

$$\sqrt{n^2 - \left(\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\right)^2} = \pm\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}, \tag{5.6}$$

přičemž derivaci pod odmocninou můžeme jednoduše vyjádřit z rovnice (5.3) vztahem

$$\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r} = n(r) + r\frac{\mathrm{d}n(r)}{\mathrm{d}r}. \tag{5.7}$$

Odtud parametr z jako funkce $z(r)$ je dán po úpravě integrálem

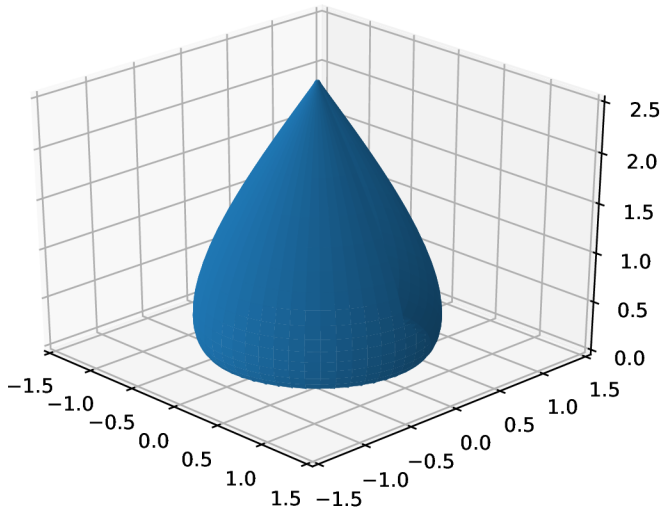
$$z(r) = \pm\int \sqrt{-2rn(r)\frac{\mathrm{d}n(r)}{\mathrm{d}r} - \left(r\frac{\mathrm{d}n(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2}\,\mathrm{d}r. \tag{5.8}$$

Obdrželi jsme tak kýžené rovnice (5.3) a (5.8) pro parametrizaci geodetické čočky. V dalším průběhu práce se budeme věnovat několika konkrétním volbám izotropního radiálně symetrického profilu indexu lomu.

5.2 Geodetická čočka ekvivalentní Eatonově čočce

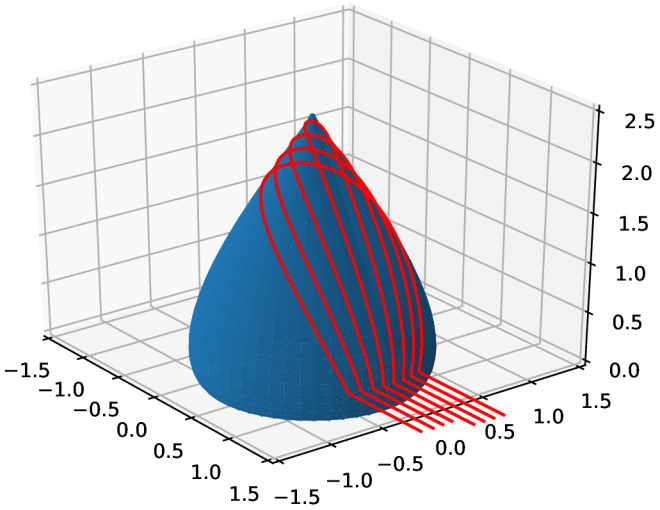
Na Eatonovu čočku narážíme již poněkolikáté a pokaždé jinak. Nyní využijeme profilu indexu lomu Eatonovy čočky ze vztahu (1.18) pro nalezení ekvivalentní geodetické čočky. Její index lomu navazuje spojitě na vakuum, ovšem už bez spojité první derivace. Očekávaná geodetická čočka tak na rozhraní nebude diferencovatelná, zobrazení samotné hranice ale bude endomorfismus.

Řešení rovnic (5.3) a zejména (5.8) může být komplikované, proto jsme pro Eatonovu čočku zvolili numerické řešení. V rovnici (5.8) máme sice kladnou a zápornou větev, to ale odpovídá jen zrcadlové symetrii výsledné geodetické čočky podle roviny kolmé na osu z, proto pro další výpočty budeme pracovat jen s kladnou větví. Výsledkem výpočtu jsou funkce $r'(r)$ a $z(r)$, které následně vykreslíme ve válcových souřadnicích. Tvar vzniklého povrchu je na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Geodetická čočka ekvivalentní Eatonově čočce.

Nyní určíme trajektorie na povrchu této geodetické čočky. Jedním možným postupem je přímo řešit rovnici geodetiky, ovšem již samotná parametrizace povrchu je spočtena numericky, počítání Christoffelových symbolů je tak nesmírně obtížné. My použijeme alternativní metodu, kdy využijeme již nalezené trajektorie paprsků v Eatonově čočce popsané v sekci 3.2 a tyto časem parametrizované paprsky zobrazíme na odpovídající trajektorii v prostoru. Na obrázku 5.2 je již výsledek této metody. Samotné trajektorie se samozřejmě zobrazily na povrch z obrázku 5.1, zde je ale geodetická čočka posunuta dolů ve směru osy z tak, že spojitě navazuje na vnější vakuum v rovině $z = 0$. Oblast povrchu se zápornými hodnotami souřadnice z totiž odpovídá transmutovanému profilu indexu lomu Eatonovy čočky bez omezení na jednotkový poloměr. Geodetická čočka Eatonova profilu z definice (1.18) je tak striktně vzato pouze ta část povrchu ležící v poloprostoru s kladnými hodnotami z.

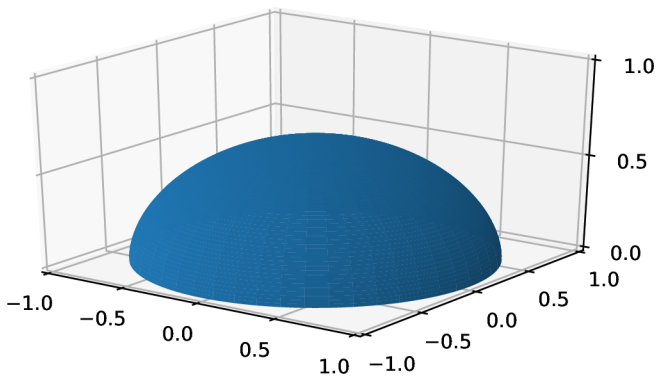


Obrázek 5.2: Geodetická čočka posunutá pro spojité navázání na vakuum v rovině $z = 0$. Červené křivky jsou geodetiky a odpovídají trajektoriím rovnoběžně vcházejících paprsků. Paprsky opouštějící geodetickou čočku jsou kolineární s paprsky vstupujícími, je tedy skutečně ekvivalentní Eatonově čočce v rovině.

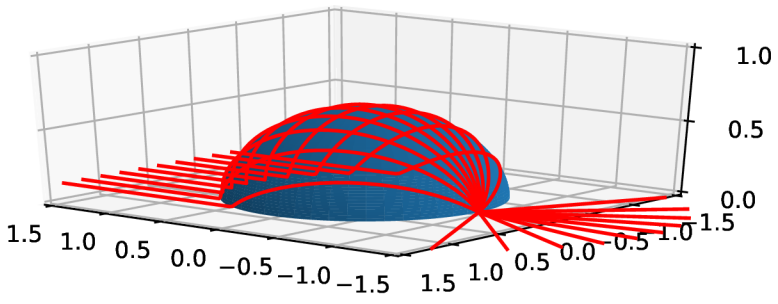
5.3 Geodetická čočka ekvivalentní Luneburgově čočce

Pro nalezení geodetické čočky Luneburgova profilu definovaného rovnicí (1.19) budeme postupovat analogicky jako v případě Eatonovy čočky. Nejprve řešením rovnic (5.3) a (5.8) získáme funkce $r'(r)$ a $z(r)$, poté z radiální symetrie Luneburgova profilu stačí tuto křivku rotovat okolo osy z a výsledkem je povrch odpovídající geodetické čočce Luneburgovy čočky na obrázku 5.3.

Pro vyšetření paprsků vyjdeme z řešení Hamiltonových rovnic pro Luneburgovu čočku ze sekce 3.3 a zobrazíme paprsky parametrizované časem na odpovídající prostorové souřadnice po transmutaci. Na obrázku 5.4 je již geodetická čočka společně s červeně vyznačenými trajektoriemi paprsků. Tyto geodetické křivky odpovídající rovnoběžně dopadajícím paprskům se stejně jako v Luneburgově čočce skutečně protnou v jednom bodě na její hranici.



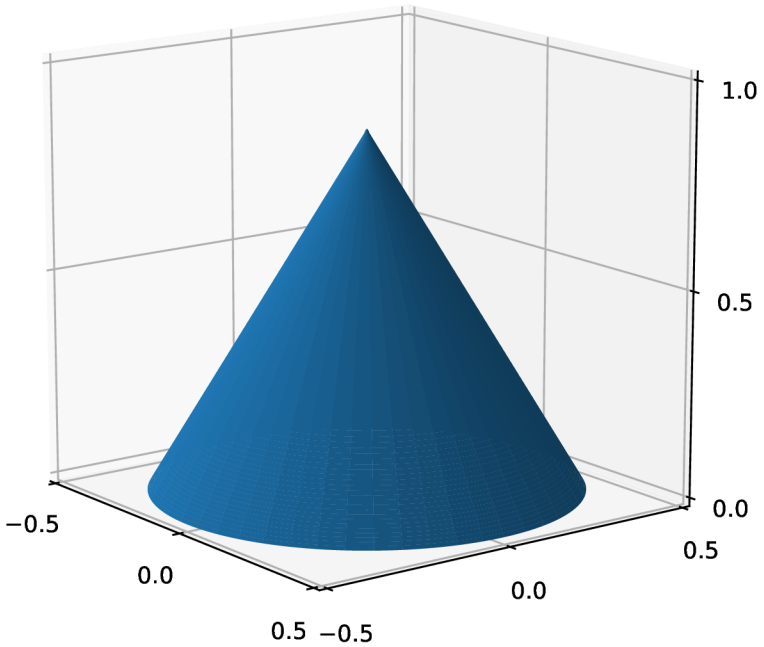
Obrázek 5.3: Geodetická čočka ekvivalentní Luneburgově čočce.



Obrázek 5.4: Geodetická čočka Luneburgova profilu indexu lomu s červenými trajektoriemi paprsků. Stejně jako v Luneburgově čočce se rovnoběžné paprsky po průchodu čočkou protnou v jednom bodě.

5.4 Transmutovaný jendnotkový profil

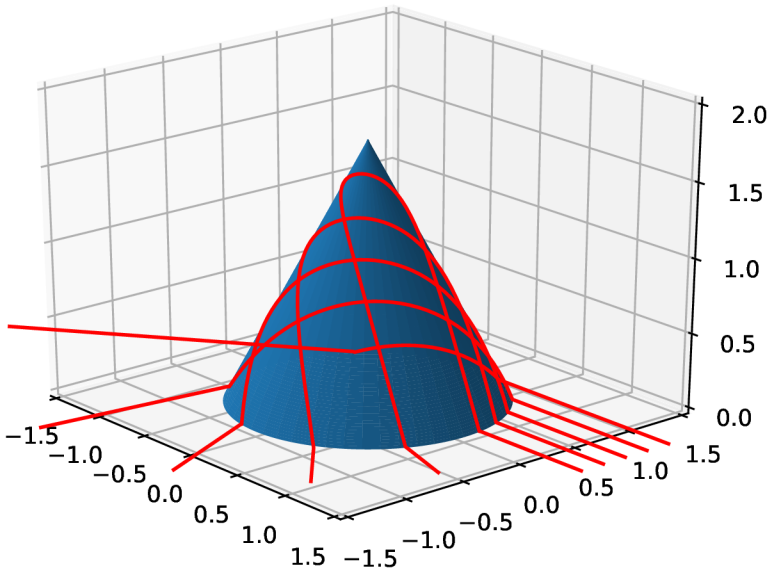
Je příhodné na závěr této práce pracovat s tou čočkou, kterou to vše začalo. Proto se naposledy vraťme k indexu lomu (1.16) vzniklému transmutací jednotkového profilu mocninnou funkcí. Řešením rovnic (5.3) a (5.8) pro konkrétní hodnotu parametru $m = 2$ získáme parametrizaci příslušné geodetické čočky, jejíž povrch je vykreslen na obrázku 5.4. Vidíme, že se jedná o kužel, což lze předpovědět i následující úvahou. Začněme s rovinou reprezentující prostor s jednotkovým indexem lomu popsanou komplexní proměnnou z. Mocninná transmutace, pro nás druhá mocnina, zobrazí každý bod tohoto prostoru na jeho obraz z^2, ale jelikož toto zobrazení není prosté, postačí nadále uvažovat jen s obrazem poloroviny nad osou x. V takovém případě se zobrazí kladná část osy x sama na sebe, ale je zároveň obrazem nekladné části osy. Samotný důvod, proč nás zajímá obraz hraniční přímky, je přímá spojitost s geodetickou čočkou takto transmutovaného profilu. Víme, že geodetická čočka má jednotkový index lomu, proto při transmutaci nedochází k žádné změně velikosti plošných elementů. Můžeme si tak polorovinu názorně reprezentovat například listem papíru, kde počátek je v půli jeho okraje a transmutace je nějaká prostorová operace s tímto listem. Jelikož ale kladná a nekladná část osy x splynou, tak i dvě poloviny okraje papíru splynou a neobdržíme nic jiného než kužel z obrázku 5.4.



Obrázek 5.5: Geodetická čočka jednotkového profilu transmutovaného funkcí $f(z) = z^2$.

Při vyšetřování chování paprsků je tu ale drobná obtíž s grafickou reprezentací, neboť transmutujeme-li oblast s jednotkovým poloměrem, obraz její hranice s vnějším prostředím je na geodetické čočce kružnice s poloviční poloměrem, viz obrázek 5.4. Nemůžeme tak tuto geodetickou čočku vložit do původního prostoru a navázat na jednotkovou

hranici, jak jsme to udělali v případě Eatonovy i Luneburgovy čočky. Nabízí se ale jednoduchá operace, a to vynásobení profilu po transmutaci v oblasti čočky faktorem $|m| = 2$. Provedením této operace jednak obdržíme na hranici jednotkový index lomu a zadruhé poloměr základny kuželu geodetické čočky bude jednotkový. To nám už umožní navázat tuto základnu na jednotkovou hranici v původním prostoru a můžeme si vizualizovat paprsky obrázkem 5.5.



Obrázek 5.6: Červené křivky reprezentují geodetické křivky na kuželu, což odpovídá trajektoriím paprsků na geodetické čočce.

Závěr

Práce byla koncipována jako teoretická, proto jsme se věnovali nejdříve zejména vybudování dostatečného teoretického aparátu v první části, který jsme následně uvedli do praxe v druhé polovině této práce. Transmutace je ústředním pojmem, prolínajícím se skrze všechny kapitoly, přesto tento pojem není ve zdrojích exaktně definován. Věnovali jsme tak pozornost pochopení tohoto pojmu a jeho korektní matematické formulaci. Zavedli jsme pojem optického metrického tenzoru, s pomocí nějž se výrazně usnadňuje samotná práce s transmutací a navíc poskytuje možnost zobecnění disperzní relace i pro anizotropní prostředí.

Odvodili jsme obecný aparát pro nalezení trajektorií paprsků pomocí hamiltonovské optiky. Konkrétně pro polární souřadnice se nám podařilo odvodit dva odlišné přístupy, jejichž výsledky jsou ve vzájemné shodě.

Značnou pozornost jsme věnovali Eatonově a Luneburgově čočce jakožto exemplářům z oblasti absolutních optických instrumentů. V průběhu práce jsme tyto čočky zkoumali z nejrůznějších pohledů, ať už jejich profily indexu lomu, trajektorie paprsků, či jako geodetické čočky.

Kapitolu jsme věnovali i teorii ohledně transmutace singularity. Úspěšně jsme pak z vybraných čoček singularitu odstranili, sice jsme zaplatili anizotropností nově vzniklých profilů, ale dosáhli jsme na úroveň sestrojitelnosti takových optických prostředí. Zároveň jsme ukázali, že s pomocí transmutace můžeme třeba i zcela odstranit lom na rozhraní a nezměnit přitom trajektorie paprsků mimo čočku.

Konečně v poslední kapitole jsme odvodili parametrizaci pro geodetické čočky odpovídající rotačně symetrickým indexům lomu a tyto plochy se nám podařilo vizualizovat i s geodetickými trajektoriemi paprsků.

Pro názorné ilustrace jsme volili v průběhu této práce rotačně symetrické profily indexů lomu, jelikož do této třídy patří nejznámější exempláře a mohli jsme konkrétněji prozkoumat důsledky obecné teorie. Samotné teoretické výsledky týkající se transmutace a hledání parametrizace šíření světla v různých optických prostředích jsou ovšem platné obecně.

Touto prací jsme se pokusili obsáhnout známé, pochopit stálé a přinést nové. Jak ovšem obsáhnout znalosti několika generací vědců, dosáhnout úrovně pochopení, se kterou kantoři přednášejí, či objevit něco zcela revolučního? Zcela jistě ne na několika stránkách bakalářské práce. Proto pro mě tato práce nepředstavuje splněný cíl, ale spíše jeden malý krok vpřed, díky němuž se podařilo nahlédnout do bezedné studny znalostí, zorientovat se v aktuálním fyzikálním odvětví a kvůli nedostatku exaktní formulace snad i přinést něco málo nového.

Literatura

[1] J Eaton. On spherically symmetric lenses. *Transactions of the IRE Professional Group on Antennas and Propagation*, 1952.

[2] Ulf Leonhardt and Thomas Philbin. *Geometry and light: the science of invisibility*. Courier Corporation, 2010.

[3] R. K. Luneburg. *Mathematical Theory of Optics (University of California)*. California press. Berkeley and Los Angeles, 1964.

[4] Yun Gui Ma, CK Ong, Tomáš Tyc, and Ulf Leonhardt. An omnidirectional retroreflector based on the transmutation of dielectric singularities. *Nature Materials*, 8(8):639–642, 2009.

[5] R. F. Rinehart. A solution of the problem of rapid scanning for radar antennae. *Journal of Applied Physics*, 19(9):860–862, 1948.

[6] Martin Šarbort and Tomáš Tyc. Spherical media and geodesic lenses in geometrical optics. *Journal of Optics*, 14(7):075705, 2012.

[7] Tomas Tyc, Huanyang Chen, Che Ting Chan, and Ulf Leonhardt. Non-Euclidean cloaking for light waves. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 16(2):418–426, 2009.

[8] Tomáš Tyc and Ulf Leonhardt. Transmutation of singularities in optical instruments. *New Journal of Physics*, 10(11):115038, 2008.

[9] Lin Xu, Xiangyang Wang, Tomáš Tyc, Chong Sheng, Shining Zhu, Hui Liu, and Huanyang Chen. Light rays and waves on geodesic lenses. *Photonics Research*, 7(11):1266–1272, 2019.