Světlo v prostředí se spojitě proměnným indexem lomu

Martin Plöschner

15. března 2006

V přírodě se velice často setkáváme s prostředími, kdy index lomu nemá skokovitý charakter, ale je spojitou funkcí souřadnic. Studium chování světla v takovémto prostředí vede k mnoha, pro studenta seznámeného se základy optiky šokujícím, zjištěním a překvapením.

Nejznámějším a nejzákeřnějším jevem (pro žíznivce na poušti) týkajícím se našeho tématu je fata morgána, se kterou se v našich zeměpisných šířkách můžeme setkat hlavně v létě nad rozpálenými silnicemi. Název pochází z italské verze Legend o králi Artušovi, kde je jménem kouzelníka Morgana Le Faye. Důvod tohoto označení je prostý. Lidé dříve považovali tento jev čistě za dílo mocných kouzelníků a není se jim co divit. Správné vysvětlení není zrovna snadné. Ovšem kromě fata morgány existují i jevy, které jsou spojeny s inverzním gradientem teploty vzduchu, tzv. arktické fata morgány, kdy naopak vidíme věci ve větší výšce než ve skutečnosti jsou. V roce 1744 se například objevila "armáda duchů" nad jednou horou ve Skotsku. 27 lidí odpřísáhlo to co viděli. Na Aljašce v létě roku 1897 výprava horolezců uviděla dokonce celé město a byla schopna rozeznat jednotlivé domy i ulice. Nedivil bych se, kdyby i některá pozorování UFO měla původ v tomto jevu. Jak je vidět, pokud nechceme uvěřit v existenci duchů, musíme si vše vysvětlit fyzikou.

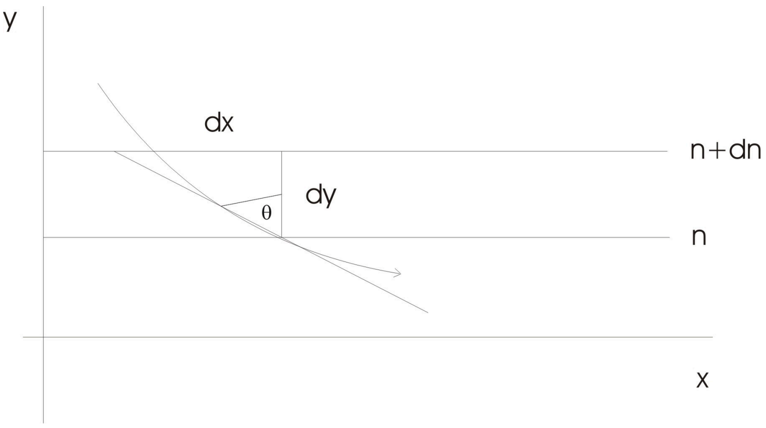
Pokusme se nejdříve nalézt rovnici podle které by se mohla dráha paprsku v prostředí se spojitým indexem lomu řídit. Vyjděme z obr. 1, z kterého můžeme vyčíst, že při měnícím se indexu lomu bude docházet ke změnám úhlu dopadu θ. Kvantitativní vztah vyjadřující tuto změnu úhlu při malé změně indexu lomu bude nejjednodušší získat diferenciací Snellova zákona:

$$n \sin\theta = C \Rightarrow dn \sin\theta + n \cos\theta d\theta = 0 \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\cot\theta d\theta \tag{1}$$

Záporné znaménko se objevuje, jelikož při klesajícím indexu lomu roste úhel dopadu. Opět s využitím obr. 1 můžeme získat vztah mezi dx, dy, θ. Platí:

$$\cot\theta = \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

A diferenciací tohoto vztahu, bychom měli získat výraz pro $d\theta$. V našem případě bereme x jako proměnnou a θ je také funkcí x tedy platí $\theta(x)$.



Obrázek 1: Dráha paprsku v prostředí s gradientem indexu lomu

Po diferenciaci (2) dostáváme:

$$-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{3}$$

Nyní musíme ještě vyjádřit $\sin\theta$. Z obr. 1 dostáváme:

$$\sin\theta = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} \tag{4}$$

tedy pro $d\theta$ musí platit:

$$d\theta = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx \tag{5}$$

rovnici (1) na základě získaných výrazů můžeme přepsat na tvar(podívejte se prosím do DODATKU, jelikož v tomto kroku je několik záludností, které musí být uvedeny na pravou míru):

$$y'' = \frac{1}{n(y)} \frac{dn(y)}{dy} \left(1 + (y')^2\right) \tag{6}$$

kde jsem raději zdůraznil, že index lomu je spojitou funkcí souřadnice y.Pro nějakou konkrétní a jednoduchou funkci indexu lomu(např. lineární v y) se tato docela atypická diferenciální rovnice dá řešit substitucí $y' = s$; $y'' = s \cdot s'$ a následně vyjádřit integrálem $x = \int \frac{dy}{s(y)} + K$. Ovšem řešení je docela zdlouhavé a navíc v něm není vidět neskutečně krásná fyzika, která vyplyne z mnohem jednoduššího náhledu na věc. Předtím než se pustíme do úprav se ještě podívejme jestli námi získaná dif. rovnice dává smysluplné řešení pro konstatní index lomu. Dif. rovnice v tomto případě přejde do tvaru:

$$y'' = 0 \Rightarrow y = Ax + B \tag{7}$$

Vezmeme-li světlo, které vstupuje do bodu $[0, 1]$ rovnoběžně s osou x(tedy $y' = 0$) dostáváme po aplikaci počátečních podmínek $y = 1$, což je v souladu s naší představou.

Abychom do naší dif. rovnice lépe viděli vraťme se zpátky ke Snellovu zákonu. Zjistili jsme, že platí:

$$\sin\theta = \left(1 + (y')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Rovnici (6) tedy s využitím tohoto vztahu a Snellova zákona můžeme přepsat do tvaru:

$$y'' = \frac{1}{n(y)} \frac{dn(y)}{dy} \frac{n(y)^2}{C^2} \Rightarrow y'' = \frac{1}{2C^2} \frac{d(n^2(y))}{dy} \tag{9}$$

Takto upravená dif. rovnice je naprosto úžasná, jak si za chvíli ukážeme. Předtím nás však čeká ještě jedno velké překvapení(aspoň pro mne bylo a více jak hodinu jsem hledal chybu v odvození této dif. rovnice, jelikož výsledek, který dávala, byl pro mé úvahy obtěžkané předsudky a špatným pochopením lomu světla na rozhraní naprosto nepřekonatelným problémem). Vyřešme naší dif. rovnici v aproximaci indexu lomu $n(y) = y + 1$. Není to sice nic přesného, ale alespoň v hrubých rysech to můžeme považovat za situaci nad silnicí. Dále opět vezmeme paprsek, který začíná v bodě $[0, 1]$ rovnoběžně s osou x(tedy $y' = 0$). Pro $n(y) = y + 1$ přejde rovnice (9) do tvaru:

$$y'' = \frac{y + 1}{C^2} \tag{10}$$

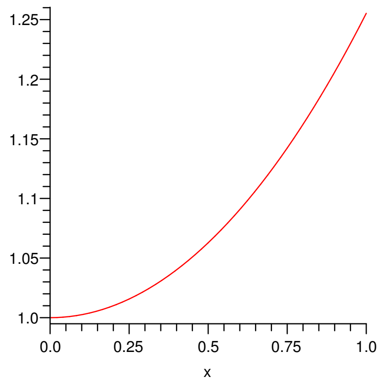
Řešení této rovnice je:

$$y(x) = Ae^{x/C} + Be^{-x/C} - 1 \tag{11}$$

Uvážením počátečních podmínek(a uvědoměním si, že konstanta C je dána Snellovým zákonem) dostáváme:

$$y(x) = 2\cosh\frac{x}{2} - 1 \tag{12}$$

Graf vidíme na obr. 2. a je poměrně šokující. Paprsek, který je původně rovnoběžný s osou x se zakřivuje v kladném směru osy y!! Nepřipadá Vám to zvláštní? Kde byste hledali důvod k tomuto podivnému chování? Vždyť na úrovni, ve které se paprsek pohybuje je index lomu konstantní a měli bychom dostávat opět paprsek rovnoběžný s osou x! Chyba je v tom, jak jsem zvyklý uvažovat. Není-li někde změna indexu lomu, jsme naučení, že paprsek nemění směr. Ale pozor! Situace je tady trochu jiná. Předtím, než si řekneme odpověď, si položme jednu otázku. Když se paprsek pohybuje nad rozpálenou silnicí a dostane se do bodu, kde přestává klesat a začíná stoupat, aby se mohl dostat do úrovně našich očí, co způsobí, že začne znovu stoupat? Musí přeci existovat místo, kde se pohybuje rovnoběžně s osou x a v tomto místě najednou paprsek nemá žádný důvod začít stoupat vzhůru? Nějaký důvod ovšem mít musí. Tahle úvaha nám přinejmenším potvrdila, že šokující výsledek odvozený z naší dif. rovnice by mohl být správný a smysluplný. Vždy, když pomocí abstraktních úvah dojdeme k výsledku, který se neshoduje z našimi zažitými představami a odolová pevně nalezení chyb, svítá naděje, že objevíme něco nového, co jsme do této chvíle netušili.

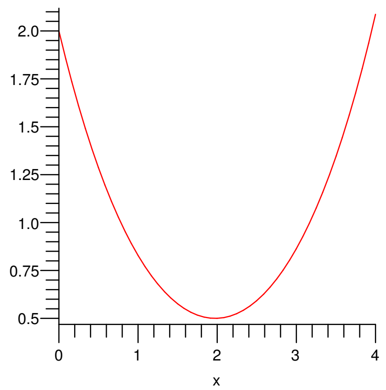


Obrázek 2: Dráha paprsku nad silnicí je-li zpočátku rovnoběžný s osou x

Nad silnicí vzniká teplotní gradient s nímž je spojen gradient indexu lomu(čím vyšší teplota vzduchu, tím menší index lomu). Od světla, které dopadá pod určitým úhlem na rozhraní, kde oblast do které vstupuje má menší index lomu, čekáme, že se bude lámat směrem od kolmice k rovině dopadu. To je sice pěkné, ale právě ve chvíli, kdy je paprsek rovnoběžný se silnicí přestává naše uvažování fungovat. Jak se s tím tedy vypořádat? Představme si místo paprsku rovinnou vlnu postupující rovnoběžně se silnicí. Index lomu je definován takto $n = \frac{c}{v}$. Z toho plyne, že v místě, kde je index lomu menší, tedy blíže k silnici, se světlo pohybuje rychleji, kdežto dále od silnice pomaleji. Představme si tyč vertikálně umístěnou v proudu řeky, kde proud má směr osy x. Situace je zde opačná, než u silnice, jelikož na dně řeky je proudění nejpomalejší. Ovšem dejme tomu, že se voda u dna pohybuje nejrychleji a s klesající hloubkou velikost rychlosti lineárně klesá. Jak se bude tyč natáčet? Určitě proti směru otáčení hodinových ručiček, čili vlnoplocha původně postupující rovnoběžně se směrem osy x se začne natáčet směrem k hladině. Tato analogie nám tedy dává názornou představu proč by se měl rovnoběžný paprsek začít ohýbat ve směru gradientu.

Zdá se tedy, že diferenciální rovnice je skutečně správně. Ukažme si, jak dopadne dráha paprsku pro který známe směr letu v bodě $[0, 2]$. Dejme tomu, že paprsek dopadá do tohoto bodu pod úhlem 30 stupňů. Pak $C = 3/2$ a z rovnice (8) můžeme snadno určit y'. Jen si musíme vybrat ze dvou řešení. Jedno je pro světlo dopadající do bodu od silnice a druhé pro světlo z nebe. Nás spíše zajímá druhá možnost. Po snadných výpočtech dostáváme(obr.3):

$$y(x) = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{4} \exp\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{6 + 3\sqrt{3}}{4} \exp\left(-\frac{2x}{3}\right) - 1 \tag{13}$$



Obrázek 3: Dráha paprsku nad silnicí dopadá-li do bodu $[0, 2]$ pod úhlem 30 stupňů

Z tohoto obrázku je zřejmé proč vidíme na silnici nebe a proč chudáci žíznivci v poušti běží za modrým nebem a ne za jezírky s vodou.

Vraťme se nyní k rovnici (9). Slíboval jsem Vám, že je v ní ukryto cosi krásného. Pokud přeskupíme některé členy dostaneme:

$$C^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(n^2/2)}{dy} \tag{14}$$

Tuto rovnici každý zná od základní školy. Má stejný tvar jako druhý Newtonův zákon až na písmenka, ale ty nejsou ve fyzice důležitá. A protože stejné rovnice musí mít stejná řešení, můžeme k řešení dráhy paprsku použít propracovanou Lagrangeovskou formulaci mechaniky! Konstanta C^2 je analog hmotnosti m v mechanice. Místo derivace souřadnice podle času, derivujeme podle x a na pravé straně rovnice (14) máme sílu, která je záporně vzatým gradientem potenciálu. Celý problém je analogem částice hmotnosti C^2 pohybující se v potenciálu $V=-\frac{n^2}{2}$!! Napišme jak vypadá Lagrangeova funkce:

$$L=T-V \Rightarrow L=\frac{1}{2}C^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{n^2}{2} \tag{15}$$

Pohybové rovnice jsou pak dány výrazem:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \tag{16}$$

Pro $n(y)=y+1$ dostáváme opět rovnici:

$$y''=\frac{y+1}{C^2} \tag{17}$$

Podívejme se teď na odvození dif. rovnice světla v prostředí s proměnným indexem lomu trochu z jiného konce a zkusme tuto rovnici odvodit z Fermatova principu.

Fermatův princip, někdy také nazývaný princip nejkratšího času můžeme snadno odvodit, pokud vyjdeme ze vztahu $dx=vdt$. Čas, který světlo potřebuje k přesunu z místa A do místa B, můžeme vyjádřit jako integrál:

$$t=\int_A^B\frac{dx}{v} \tag{18}$$

A dostali jsme se k úloze z variačního počtu. Vztah ještě můžeme přepsat do obvyklejší formy, pokud obě strany vynásobíme rychlostí světla. ct je vlastně akcí. Proto ct označme S a dostáváme:

$$S=\int_A^B ndx \tag{19}$$

což je obvyklá forma zápisu Fermatova principu. Dráhu po které se paprsek bude pohybovat získáme variací akce a proveďme to rovnou ve třech dimenzích, abychom získlali obecnější rovnici než (9).

$$\delta S=\int_A^B(\delta n dl+n\delta dl)=0 \tag{20}$$

kde dl je element dráhy paprsku. Variace indexu lomu je v následujícím vztahu k variaci dráhy paprsku $\delta n=\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad}\,n$, což je vlastně průmět gradientu do směru variace. Variace elementu dráhy paprsku je trochu obtížnější na představivost, ale formálně je to jednoduché:

$$\delta dl=d(l+\mathbf{l}\cdot\delta\mathbf{r})-dl=\mathbf{l}\cdot d\delta\mathbf{r} \tag{21}$$

kde $\mathbf{l}$ je jednotkový vektor ve směru paprsku. Po dosazení dostáváme:

$$\delta S=\int_A^B\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad}\,n\,dl+\int_A^B n\mathbf{l}\cdot d\delta\mathbf{r} \tag{22}$$

Druhý integrál lze zapsat také takto(variace dráhy paprsku v krajních bodech je nulová!):

$$\int_A^B n\mathbf{l}\cdot d\delta\mathbf{r}=[n\mathbf{l}\delta\mathbf{r}]_A^B-\int_A^B d(n\mathbf{l})\delta\mathbf{r} \tag{23}$$

Integrál (22) tedy konečně můžeme přepsat do tvaru:

$$\delta S=\int_A^B\left(\mathbf{grad}\,n-\frac{d(n\mathbf{l})}{dl}\right)\cdot\delta\mathbf{r}dl \tag{24}$$

Rovnice v závorce je rovnice popisující pohyb světla. Ověřme, že naše dif. rovnice (9) je speciálním případem této třídimenzionální rovnice popisující pohyb světla. Úkol to není zrovna snadný, ale je proveditelný.

Nejdříve rozepišme druhý člen rovnice(derivování indexu lomu je složená derivace! a platí $\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{l}$):

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{dl} = \mathbf{l}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{grad}\, n) + n\frac{d\mathbf{l}}{dl} \tag{25}$$

Po dosazení nabude rovnice pro pohyb světla tvaru:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \frac{1}{n}\left(\mathbf{grad}\, n - \mathbf{l}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{grad}\, n)\right) \tag{26}$$

A teď si už budeme jenom hrát:) V našem dvoudimenzionálním případě platí:

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}; \qquad d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} \tag{27}$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{28}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{l} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{x} + \frac{dy}{dx}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{y} \tag{29}$$

Tento výsledek nyní dosadíme do pravé strany rovnice (26) a uvědomíme si, že index lomu v našem případě je pouze souřadnicí y. Odmocninu pro zjednodušení označme A. Pro druhý člen na pravé straně dostáváme:

$$\left(A\hat{x} + \frac{dy}{dx}A\hat{y}\right)\left[\left(A\hat{x} + \frac{dy}{dx}A\hat{y}\right) \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial n}{\partial y}\hat{y}\right)\right] \tag{30}$$

Po jednoduché úpravě druhého členu předchozí rovnice dostáváme:

$$\left(A\hat{x} + \frac{dy}{dx}A\hat{y}\right)\left[2A\frac{\partial n}{\partial x}\right] = 0 \tag{31}$$

Nyní zbývá spočítat následující:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \tag{32}$$

Platí:

$$d^2\mathbf{r} = d^2x\hat{x} + d^2y\hat{y} \tag{33}$$

$$dl^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \tag{34}$$

V rovnici (33) nás zajímá pouze pouze člen $\hat{y}$, protože kolega $\hat{x}$ na pravé straně rovnice je identicky nulový a tudíž musí být nulový člen i na levé straně rovnice. Dáme-li všechno dohromady dostáváme konečně:

$$y'' = \frac{1}{n(y)}\frac{dn(y)}{dy}\left(1 + (y')^2\right) \tag{35}$$

což je rovnice (6) později upravená na (9). Závěr celého našeho snažení je "sladký". Tím, že jsme pomocí Fermatova principu dospěli po složitých úpravách zpátky k naší původní dif. rovnici jsme si nejenom potvrdili správnost našeho řešení, ale navíc máme rovnici pro pohyb světla v prostředí se spojitě proměnným indexem lomu ve třech dimenzích. Napišme jí ještě jednou:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right) = \mathbf{grad}\, n \tag{36}$$

Tato rovnice se dá odvodit také z eikonály, což je Hamiltonova-Jacobiho rovnice pro pohyb světla. Použití Hamiltonovy-Jacobiho rovnice pro výpočet dráhy paprsku je ve složitějších případech asi nevyhnutelné, protože Lagrangeovská formulace celého problému vede ke složitým diferenciálním rovnicím. Celá teorie kolem pohybu světla je neuvěřitelně krásná a určitě stojí za další studium. Při psaní tohoto článku a odvozování rovnic jsem se pobavil a poučil jako snad nikdy předtím. Doufám, že Vy při čtení také.

Analogie optika-mechanika

Podívejme se pro zajímavost na možnosti využití analogie mezi mechanikou a optikou. Rovnice (36), která je rovnicí pohybu paprsku ve třech dimenzích, má také tvar druhého Newtonova zákona. Můžeme se o tom přesvědčit vhodnou modifikací Fermatova pricipu. Beze změny ve významu můžeme (19) psát:

$$S = \int n(\mathbf{r}) \frac{dl}{dt} dt \tag{37}$$

parametr dt je jakousi obdobou časového elementu v mechanice. Dále víme, že dl je element dráhy paprsku. Zjevně tedy $dl/ds = v$. Lagragián pro optiku naprosto analogický lagrangiánu mechanickému má tvar:

$$L = n(\mathbf{r})v \tag{38}$$

Dokážeme nyní určit "optickou hybnost" světla? Víme-li jak to udělat v mechanice, můžeme to udělat bez větších problémů i nyní. Platí:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \tag{39}$$

a pro $\mathbf{p}$ po několika standartních úpravách dostáváme(je to jenom derivování - stačí si rozepsat dráhový element paprsku spolu s jeho derivací podle časového parametru):

$$\mathbf{p} = n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dl} \tag{40}$$

Když nyní optickou hybnost poderivujeme časovým elementem dostaneme(plyne z Euler-Lagrangeových rovnic):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \nabla L \tag{41}$$

což je druhý Newtonův zákon, pokud vezmeme $L = -V$. Když se podíváte na rovnice (40),(41) a (36) určitě si všimnete jakési malé nesrovnalosti, což může vyvolat domněnku, že (36) není úplně ekvivalentní (41). Když si to ovšem rozepíšeme následovně:

$$\frac{dl}{dt} \frac{d}{dl} \left(n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = (\nabla n(\mathbf{r})) \frac{dl}{dt} \tag{42}$$

vidíme, že rovnice (36) je opravdu analogií Newtonova zákona.

Rád bych se zmínil o jední zvláští závislosti indexu lomu, která je popsaná takovouto funkcí:

$$n^2(r) = C - \frac{2K}{r} \tag{43}$$

kde K je kladná konstanta (konstanty můžeme volit libovolně. Tato konkrétní volba je vybrána kvůli názornosti příkladu). Máme tedy vlastně Keplerův potenciál a dá se předpokládat, že dráhy paprsků budou podobné jako dráhy planet. Potenciál $1/r$ je vyjímečný. Má vyšší než pouze rotační symetrii - tzv. dynamickou symetrii SO(4). (označuje Lieovu algebru na nějaké grupě - např. rotační grupa, mezi jejíž prvky patří ortogonální matice, jejichž aplikací zrotujeme nějaký systém je grupou SO(3). S znamená speciální, O ortogonální a potřebujeme tři čísla specifikující rotaci - dvě pro osu rotace a jedno pro úhel otočení). To že má potenciál vyšší symetrii se projevuje přítomností dodatečné konstanty pohybu. Kromě zachovávajícího se momentu hybnosti se zachovává další vektor - Runge-Lenzův. V klasické mechanice se znalost tohoto vektoru v podstatě rovná okamžité znalosti trajektorie. Nebudu tady dokazovat jeho existenci i pro optický systém (důkaz mám, ale je příliš dlouhý), ale myslím, že intuitivně je jasné, že musí existovat.(mimochodem v důkazu jsou skryty další krásné analogie optiky s mechanikou - světlo má například svůj moment hybnosti, který je v keplerovském potenciálu také zachovávající se veličinou). V optice mi Runge-Lenzův vektor vyšel následovně:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{R}}{r} \tag{44}$$

m z klasického RL vektoru nezmizel, ovšem v celé optické analogii mechaniky je $m = 1$. Trajektorie se pak získá naprosto stejně jako v mechanice - skalárním vynásobením RL vektoru polohovým vektorem paprsku. Konstantu C jsem do indexu lomu nedal jen tak nazdařbůh. Pro $C < 0$ dostáváme uzavřené trajektorie. Jedná se tedy o ekvivalent celkové energie paprsku(pro pochopení je nutné si vše propočítat). Za domácí úkol si zkuste spočítat, jak se ohne světlo při průchodu kolem Slunce, jež kolem sebe indukuje index lomu(měla by Vám vyjít hyperbola a světlo se moc neohne):

$$n^2(r) = 1 + \frac{4GM}{c^2 r} \tag{45}$$

DODATEK

Pří odvozování rovnice (6) se můžeme dospustit (a také jsem se dopustil) jedné závažné chyby. Těsně před poslední úpravou vypadá rovnice takto:

$$\frac{dn}{n}\left(1+(y')^2\right) = dy\frac{d^2y}{dx^2} \tag{46}$$

a svádí to k podělení dy. To je ovšem neekvivalentní úprava a ztratíme jedno řešení. Vraťme se znovu na úplný začátek - ke Snellovu zákonu. Pokud si vyjádříme $\sin\theta$ z obr.1 potom okamžitě dostáváme následující diferenciální rovnici(index lomu v místě dopadu je konstantní):

$$\frac{n^2(y)}{C^2} - 1 = (y')^2 \tag{47}$$

Ostatně tohle je daleko snadněji odvozená rovnice pohybu paprsku, než ta pomocí diferenciace, ale při prvním řešení jsem měl pocit, že je nutno zohlednit změnu úhlu při změně indexu lomu a to se odrazilo ve zvoleném postupu. Je zajímavé, že tato dif. rovnice nemá jedno, ale dvě řešení! Když se na dif. rovnici podíváme hned si všimneme, že jedním řešením je $y = const.$ protože $\sin\theta = 1$ a kvadráty indexů lomu se podělí na jedničku. Druhé řešení je identické s tím, které bychom získali z rovnice (6). Co s tím prvním řešením? Jak jsme si ukázali na příkladu paprsku nad silnicí, konstatní řešení v prostředí s gradientem indexu lomu není fyzikální a variační princip nás utvrzuje v tom, že toto řešení není správné, ačkoli vyhovuje Snellovu zákonu. Snellův zákon dává jedno řešení navíc a toto řešení nevyhovuje principu nejkratšího času. Je to zajímavé, protože Snellův zákon se odvozuje z variačního principu, takže bych čekal stejné výsledky. Jenže variační princip je obecnější a Snellův zákon většinou používáme pro paprsky, což je spíše taková matematická abstrakce k lepšímu počítání, než skutečný popis fyzikální reality a když to vezmeme do důsledků, paprsek je infinitezimálně tenký a tudíž je i v prostředí s gradientem indexu lomu v podstatě pořád v oblasti konstantního indexu lomu, pokud se pohybuje kolmo na gradient, a tudíž nemá důvod se lámat. Vlnoplocha světla k tomu důvod má. Podívejme se jak přejít od rovnice (38) k rovnici (6).

Derivováním rovnice (46) dostáváme(s konstantou $C^2 = n^2(y)\left(1+(y')^2\right)^{-1}$):

$$\frac{1}{n(y)}\frac{dn(y)}{dy}\left(1+(y')^2\right)y' = y'y'' \tag{48}$$

$$y' \cdot \left(\frac{1}{n(y)}\frac{dn(y)}{dy}\left(1+(y')^2\right) - y''\right) = 0 \tag{49}$$

Z rovnice (48) je vidět, že pokud vyloučíme konstantní řešení dostaneme právě rovnici (6). Taková podmínka se dá udělat i u řešení diferenciací ze Snellova zákona, což není překvapující. To co jsme právě udělali, byly totiž pouze otočené kroky u původního postupu.