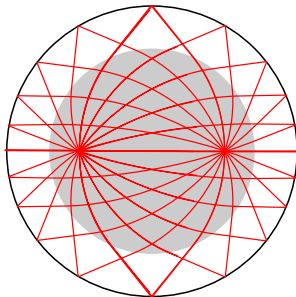
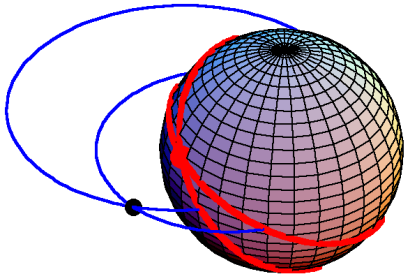


# Maxwellovo rybí oko a další dokonalé čočky

Tomáš Tyc



- Co je dokonalá čočka?
- Obecné teorémy
- Maxwelllovo rybí oko
- Další dokonalé čočky
- Jeden článek
- Aaron Danner a Ulf Leonhardt
- Závěr

# Co je dokonalá čočka?

[Born, Wolf, Principles of Optics]:

„An optical system which images stigmatically a three-dimensional domain is often called an *absolute instrument*“

Běžné čočky dokážou dokonale zobrazit maximálně jednu rovinu nebo jinou dvourozměrnou oblast prostoru

I objektiv fotoaparátu s korigovanými vadami zobrazuje trojrozměrnou oblast jen nedokonale

Dokonalé zobrazování může být velmi zajímavé a užitečné

Několik pojmů:

- Optická dráha  $s = \int n dl$
- Předmětový a obrazový prostor
- Sdružené body

# Obecné teorémy

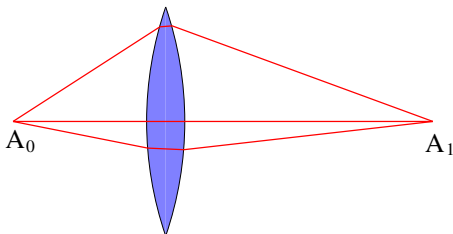
Pro dokonalé zobrazování platí několik teorémů, které omezují volnost, kterou bychom rádi měli

# Obecné teorémy

Pro dokonalé zobrazování platí několik teorémů, které omezují volnost, kterou bychom rádi měli

## Princip stejné optické dráhy

Optická dráha mezi bodem  $A_0$  v předmětovém prostoru a jeho obrazem  $A_1$  je stejná pro všechny paprsky z  $A_0$  do  $A_1$

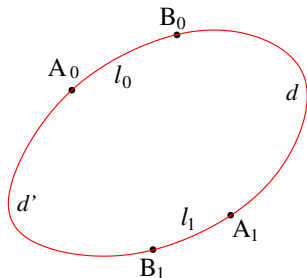


Důvod – Fermatův princip, optická dráha musí být pro všechny dráhy současně stacionární

## Teorém (Maxwell 1858, Beuns 1895, Klein 1901)

Optická délka libovolné křivky v předmětovém prostoru je rovna optické délce jejího obrazu.

Jednoduchý důkaz ve speciální situaci:



$$[A_0A_1]_- = [A_0A_1]_+, \quad [B_0B_1]_- = [B_0B_1]_+$$

neboli

$$l_0 + d = d' + l_1 \quad d + l_1 = l_0 + d'$$

Odečtením rovnic dostaneme  $l_0 = l_1$ , QED.

Zobrazme absolutním přístrojem velmi malý trojúhelník. Strany obrazu budou mít stejné vzájemné poměry jako strany vzoru, proto budou stejné i úhly.

Zobrazení absolutním přístrojem je konformní!

Jaká jsou konformní zobrazení v trojrozměrném prostoru?

### Liouvilův teorém

Konformní zobrazení v prostoru dimenze 3 a více se skládá z homotetické transformace, izometrické transformace a kulové inverze

Řečeno jednoduše: stavební kameny 3D konformního zobrazení jsou inverze, posunutí, rotace a škálování

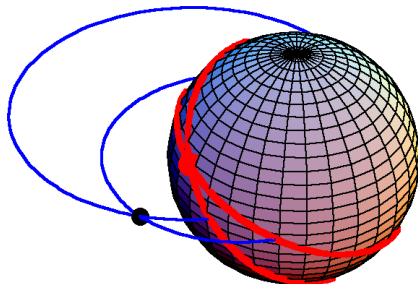
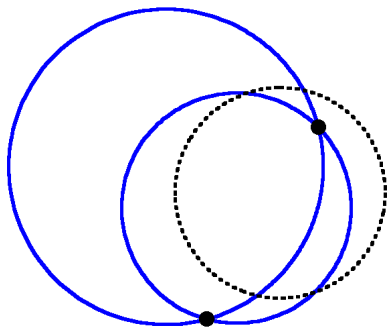
# Maxwellovo rybí oko (1854)

Index lomu

$$n = \frac{2}{1 + r^2/a^2}$$

Paprsky tvoří kružnice

Poloha obrazu – inverze ve sféře





# Konstantní index lomu

Může být index lomu v obou oblastech konstantní?

Ano! Zobrazení je pak geometrická podobnost!

Pro  $n_0 = n_1$  jsou předmět a jeho obraz shodné

[Born, Wolf, Principles of Optics]:

„Perfect imaging between two homogeneous spaces with equal refractive indices is always trivial in the sense it produces an image which is congruent with the object. **A plane mirror (or a combination of plane mirrors) is the only known instrument which produces such imaging.**“

Otázka

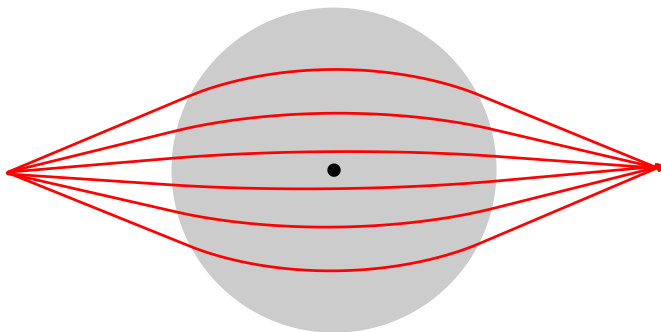
Existují snad i jiné absolutní instrumenty kromě rovinných zrcadel?

## Další dokonalé čočky

Na přelomu červen/červenec během konference v Singapuru – bohatá inspirace

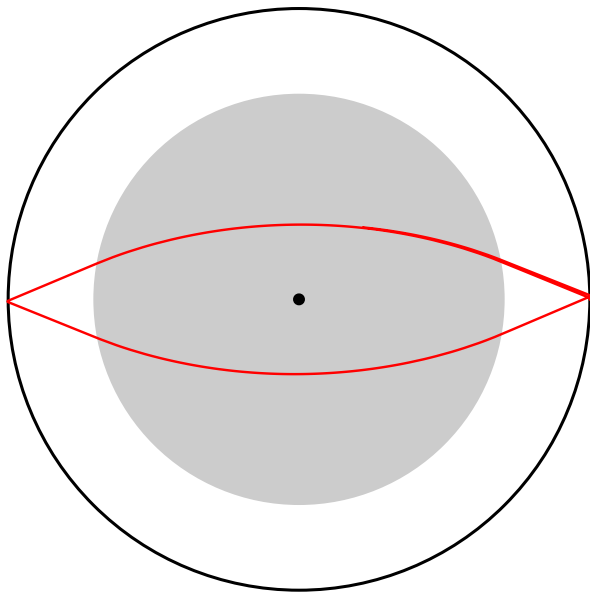
Souvislost s úvahami o tzv. fokusujících potenciálech, kterými jsme se zabývali během výzkumu neviditelnosti

Existuje sféricky symetrické rozložení indexu lomu, pro které se dokonale zobrazují body v dané vzdálenosti od centra  
[Demkov, Ostrovskij, Berezina, ŽETF 60, 1604 (1971)]

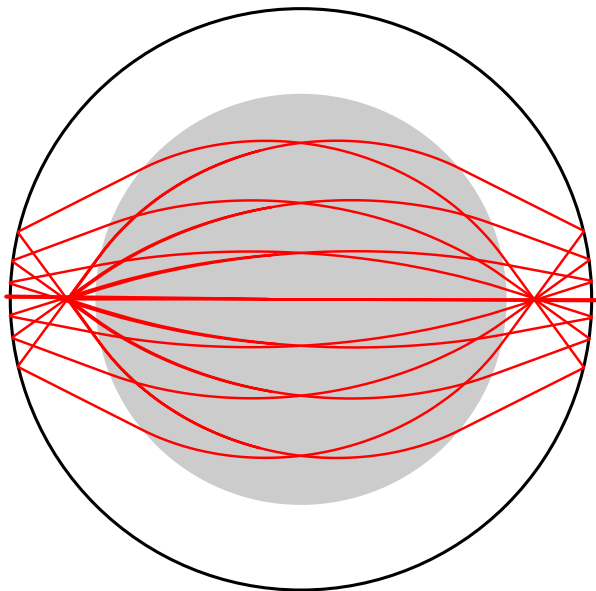


Index lomu lze najít řešením tzv. inverzního problému z teorie rozptylu v mechanice (velmi blízké tomografii)

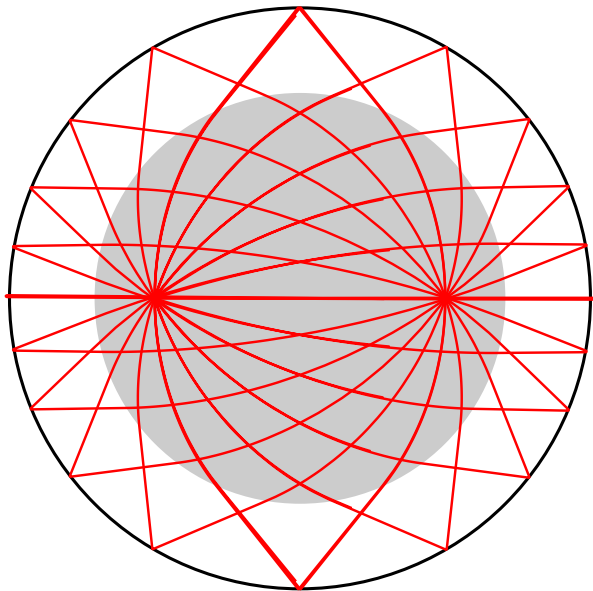
Zkusme přidat zrcadlo:



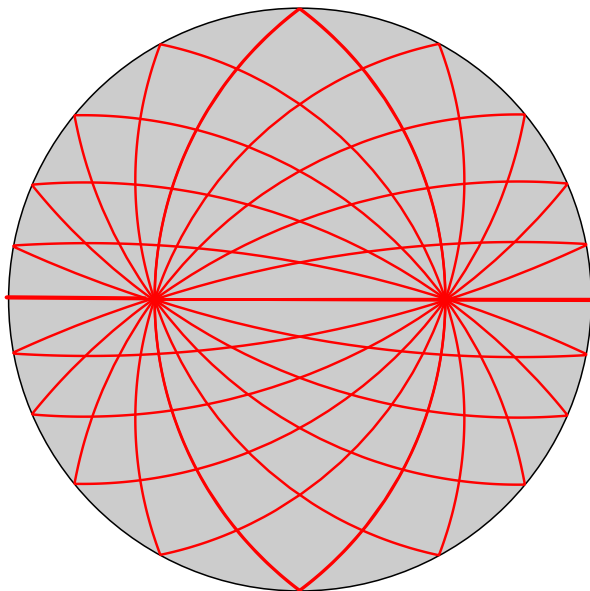
Zkusme přidat zrcadlo:



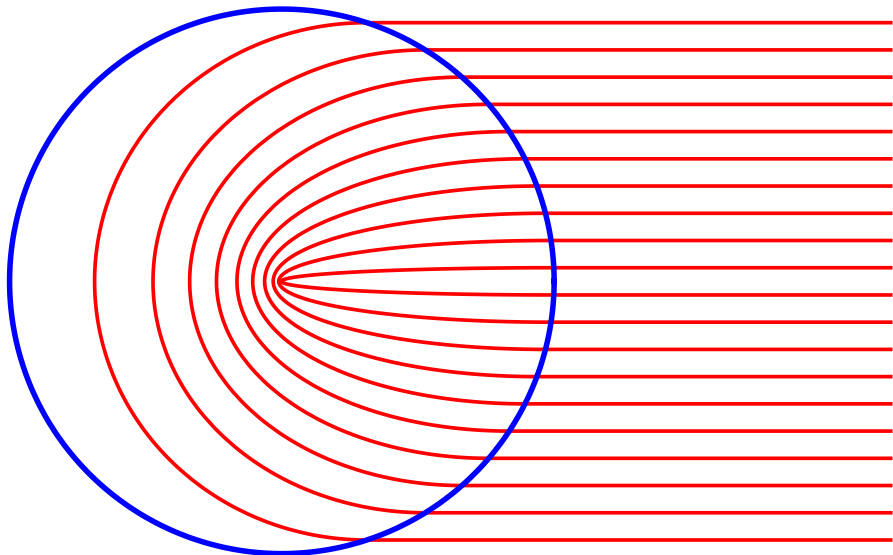
Zkusme přidat zrcadlo:



Zmenšením vzduchové mezery na nulu dostaneme Maxwellovo rybí oko zkombinované se zrcadlem!

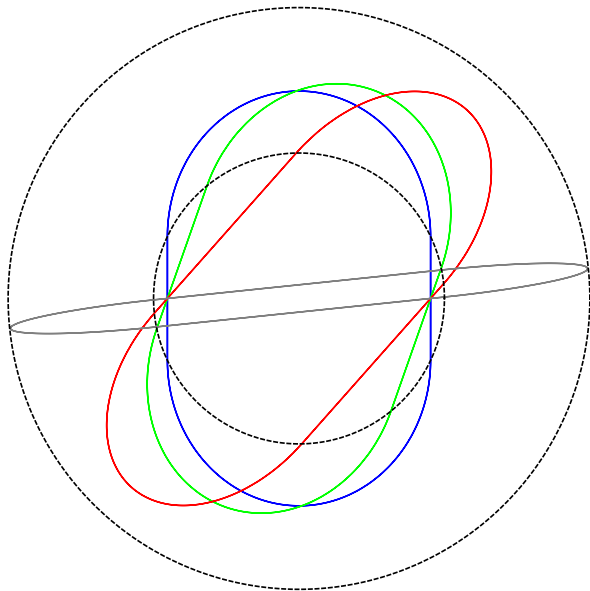


Eatonova čočka:  $n(r) = \sqrt{2 - a/r}$  pro  $r \leq a$ , jinak 1





Inverzní Eatonova čočka:  $n(r) = \sqrt{2 - a/r}$  pro  $r \geq a$ , jinak 1



# Aktualizace (nikoli oprava) Principles of Optics

Vidíme, že absolutních instrumentů je celá řada; nejen rovinné zrcadlo!

Bude nutné přepsat odstavec v *Principles of Optics*!

Chystali jsme pěkný článek, leč. . .

# Aktualizace (nikoli oprava) Principles of Optics

Vidíme, že absolutních instrumentů je celá řada; nejen rovinné zrcadlo!

Bude nutné přepsat odstavec v *Principles of Optics*!

Chystali jsme pěkný článek, leč...

... našli jsme jiný pěkný článek:

[J. C. Miňano, "Perfect imaging in a homogeneous three-dimensional region", *Optics Express* 14, 9627 (1996)]

*Principles of Optics* bude třeba přepsat kvůli objevu prof. Miňana, nikoli našeho

J. C. Miňano má jiný, pozoruhodný postřeh: jsou-li trajektorie paprsku uzavřené, pak budou uzavřené i v impulzovém prostoru

Prof. Miňano je bezpochyby zajímavý pán, bude dobré se s ním setkat

Nicméně: je velmi zajímavé a prakticky užitečné se dokonalými čočkami zabývat

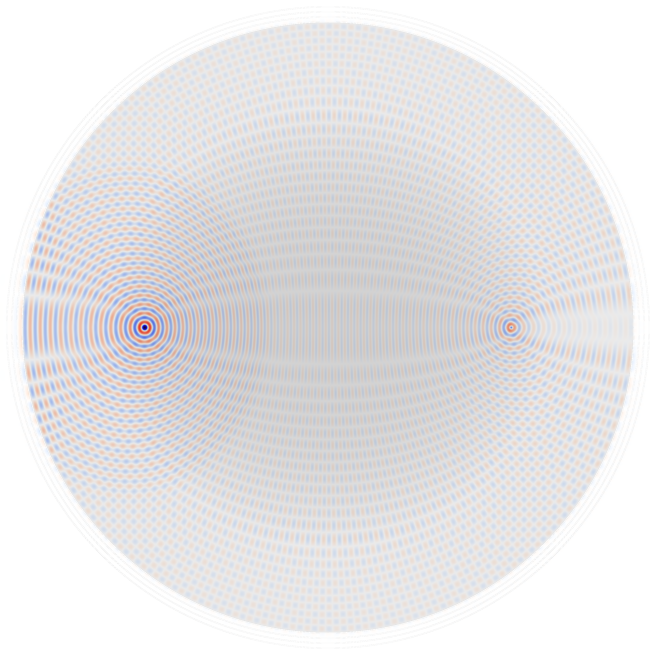
Spolupráce: Aaron Danner (National University of Singapore) a Ulf Leonhardt (St Andrews)

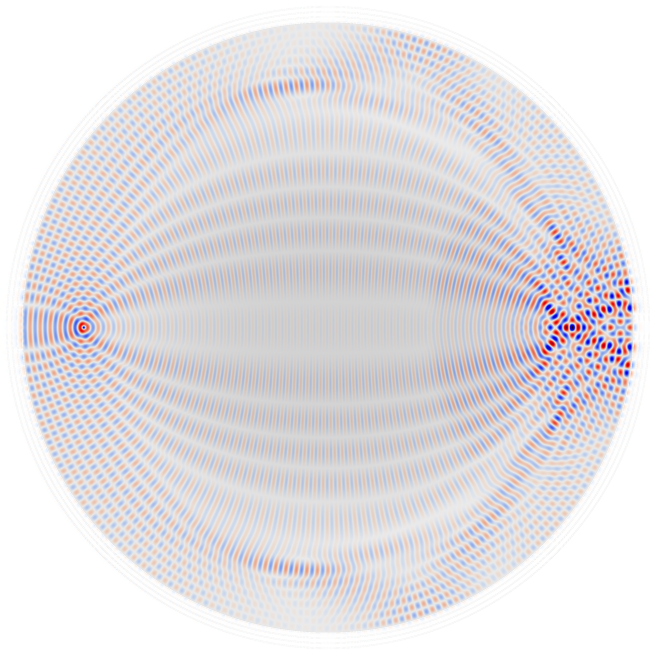
Aaron Danner – Američan, již řadu let pracuje v Singapuru, dělá fotorealistické obrazy (ray tracing)

Ulf Leonhardt – kromě úžasné fyzikální intuice dokáže řešit velmi obtížné matematické problémy (např. výpočet Casimirovy síly mezi vzájemně se pohybujícími dielektriky)

Další Ulfův pozoruhodný výsledek –  
[Ulf Leonhardt, “Perfect imaging without negative refraction”, New Journal of Physics 11, 093040 (2009)]

Na základě těchto výsledků jsme podali patentovou přihlášku, PATENT APPLICATION NUMBER 0916727.1, na dokonalé zobrazování s  $n > 0$  (St Andrews 40%, MU 30%, Cornell U. 30%)





- Absolutní optické instrumenty – nejen ona rovinná zrcadla
- I v tak dlouho rozvinuté oblasti fyziky, jako je geometrická optika, se dodnes objevují nové věci
- Souvisí se zajímavými oblastmi matematiky – řešení inverzních problémů a integrálních rovnic
- Rozlišení Maxwellova rybího oka a snad i dalších instrumentů – řádově menší než vlnová délka  $\Rightarrow$  možná nedozírné praktické aplikace
- Dokonalé zobrazení je možné i bez záporného indexu lomu
- Domnívám se, že zde je ještě mnoho k objevování
- Studenti – Lenka Herzánová (Mgr) a Martin Šarbort (PhD)