Transmutace Hookových elips v Keplerovy

Hookova elipsa:

$$W(t) = e^{i\alpha}(a\cos t + ib\sin t) = e^{i\alpha}\left(\frac{a+b}{2}e^{it} + \frac{a-b}{2}e^{-it}\right)$$

Transmutace druhou mocninou:

$$z = W^2 = e^{2i\alpha}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 e^{2it} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 e^{-2it} + \frac{(a+b)(a-b)}{2}\right]$$

$$= e^{2i\alpha}\left(\frac{a'+b'}{2}e^{2it} + \frac{a'-b'}{2}e^{-2it} + f'\right)$$

Přitom $a'+b' = \frac{(a+b)^2}{2}$, $a'-b' = \frac{(a-b)^2}{2}$, $f' = \frac{a^2-b^2}{2}$

Vidíme, že $z(t)$ je opět rovnice elipsy, ovšem její střed je posunutý od počátku o vzdálenost f'.

Víme, že platí $a^2+b^2 = 2$, odtud

$$2a' = a'+b'+a'-b' = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} = a^2+b^2 = 2$$

a tedy $a' = 1$

Všechny transmutované elipsy tedy mají hlavní poloosu délky 1.

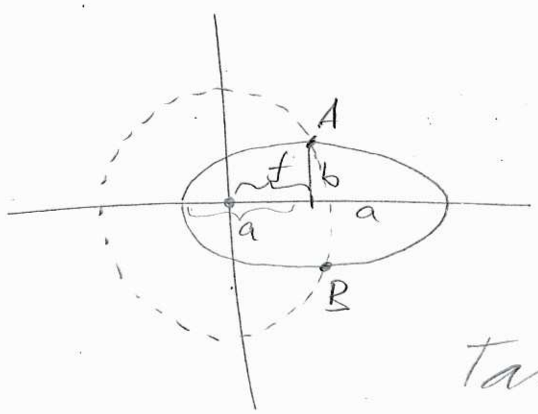
Dále platí

$$2b' = a'+b'-(a'-b') = 2ab$$

a tedy $a'^2 - b'^2 = 1 - a^2b^2 = 1 - a^2(2-a^2) = (a^2-1)^2$

a zároveň $f'^2 = \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 = \frac{[a^2-(2-a^2)]^2}{4} = (a^2-1)^2$

Tedy $f'^2 = a'^2 - b'^2$ a f' je tedy vzdáleností ohniska a středu Keplerovy elipsy – tj. počátek je v ohnisku.



Podívejme se nyní, kde protne Keplerova elipsa jednotkovou kružnici. Tam, kde $|z| = 1$. Nechť $\alpha = 0$.

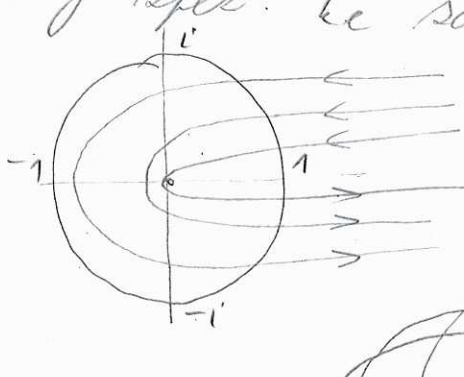
Pak

$$|z|^2 = |a'\cos 2t + ib'\sin 2t + f'|^2 = (a'\cos 2t + f')^2 + b'^2 \sin^2 2t$$

Hypotéza: $|z|^2 = 1$ pro $2t = \pm\frac{\pi}{2}$. Ověřím:

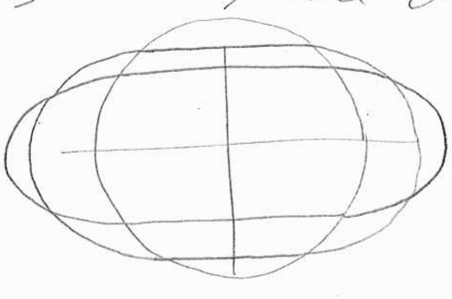
$$|z|^2 = f'^2 + b'^2 = a'^2 = 1 \quad \text{– O.k.}$$

To znamená, že jednotková kružnice protíná transmutovanou elipsu v místě, kde ji protíná malá poloosa. Oba průniky A,B tedy leží naproti sobě přes střed elipsy a tečny k elipse v bodech A,B jsou rovnoběžné. Z toho plyne, že pokud index lomu $n = \sqrt{\frac{2}{r} - 1}$ pro $r \leq 1$ a pro $r > 1$ bude $n = 1$, bude taková čočka (Eatonova čočka) vracet paprsky zpět ke zdroji:



Pokud naopak $n = \sqrt{\frac{2}{r} - 1}$, $r \geq 1$
$n = 1$, $r < 1$

bude chod paprsků tento:



(Miňanova čočka)