FOUCAULTOVO KYVADLO A HANNAYŮV ÚHEL

Jak se bude měnit pohybový stav 3D kyvadla (sférického), když budu měnit nikoli velikost, ale směr gravitačního pole (adiabaticky)?

Předpokládejme, že amplituda je velmi malá, proto se kyvadlo chová jako harmonický oscilátor. Jeho kývání v obou směrech kolmých na závěs (když je v rovnovážné poloze) je tedy nezávislé.

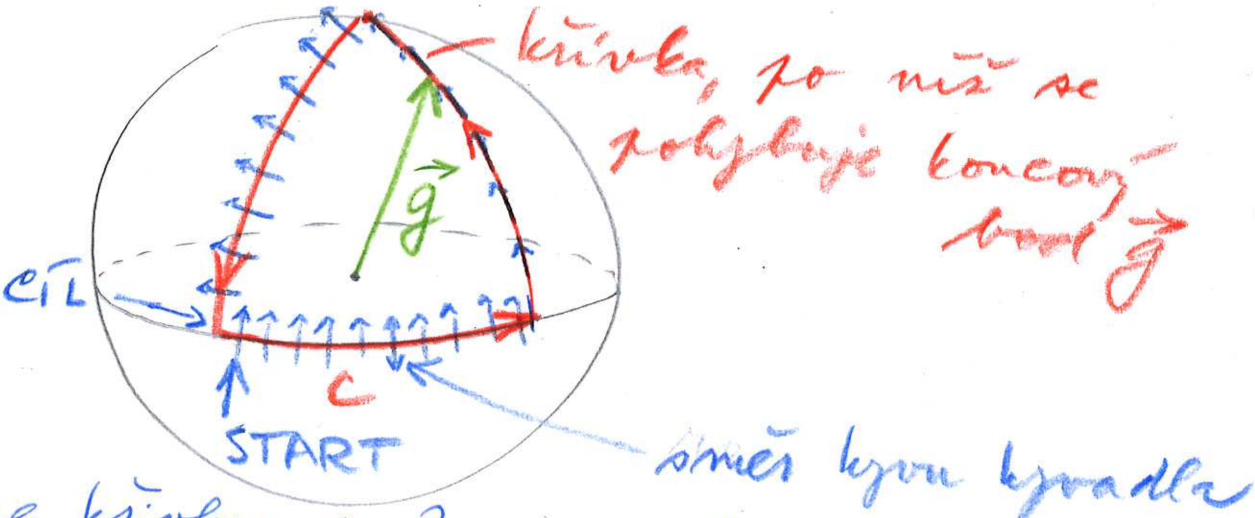
Nechť kmitá ve směru x, začneme měnit směr $\vec{g}$ z původního $(0,0,-g)$ ~~do~~ v rovině zy. Tehdy se pro kmitání ve směru x nic nemění, ve směru y je v rovnovážné poloze, bude ji tedy adiabaticky zachovávat a rovina kyvu se bude natáčet spolu s $\vec{g}$.

Nechť kmitá ve směru y. Při změně $\vec{g}$ v rovině zy bude docházet k posunu rovnovážné polohy, ale kmity budou mít stále stejnou amplitudu kvůli adiabatickému invariantu $\frac{E}{\omega}$.

Při obecném natočení roviny kyvu vzhledem ke změnám $\vec{g}$ (směru $\vec{g}$) bude díky nezávislosti kyvů v obou směrech x a y platit totéž.

Bude se zachovávat úhel mezi rovinou kyvu a rovinou, v níž se mění směr $\vec{g}$.

Co se stane, když směr $\vec{g}$ změníme podél nějaké křivky v 3D $\vec{g}$-prostoru a vrátíme se k výchozí hodnotě $\vec{g}$? Pokud neměníme $|\vec{g}|$, odpovídá to uzavřené křivce na povrchu sféry.



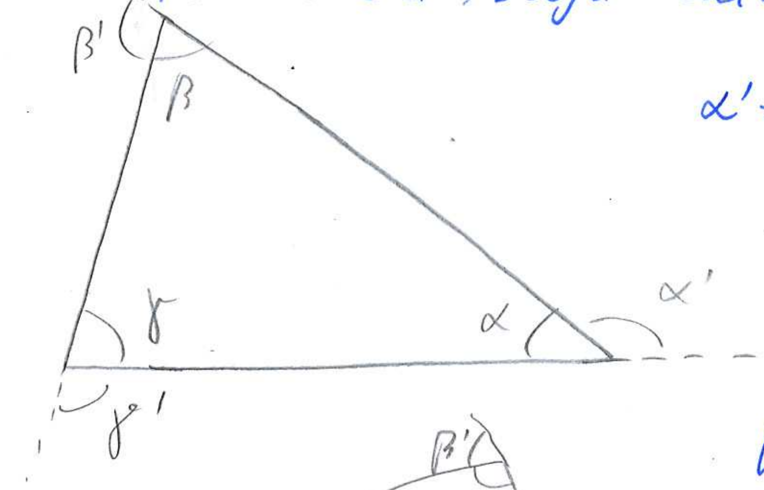
Uvažujme křivku se 3 segmentů, na každém z nich zůstává rovina změny $\vec{g}$ stejná. Segmenty tvoří tzv. geodetiky (hlavní kružnice) na sféře.

Co se stane během adiabatického přenosu $\vec{g}$ po křivce c s rovinou kyvu kyvadla?

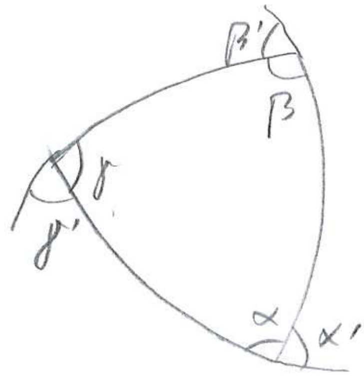
Na geodetických segmentech bude zachovávat úhel mezi c a rovinou kyvu. Paralelní přenos vektoru!

Pokud by křivka c ležela v rovině, koncový směr kyvu by byl stejný jako počáteční.

Pokud ale c rovinná nebude, dojde ke stočení. O kolik?
O rozdíl součtu úhlů ve sférickém trojúhelníku a v rovinném trojúhelníku.



$$\alpha'+\beta'+\gamma' = \pi-\alpha+\pi-\beta+\pi-\gamma$$
$$= 3\pi - (\alpha+\beta+\gamma)$$
$$= 2\pi + \pi - (\alpha+\beta+\gamma)$$



Ve sférickém Δ je $\alpha+\beta+\gamma > \pi$

$\alpha+\beta+\gamma = \pi + S$, kde S je prostorový úhel vymezený sférickým trojúhelníkem.

Stočení tedy bude

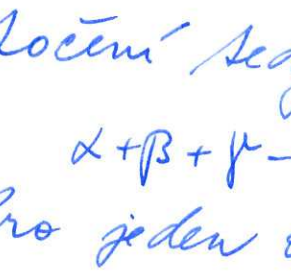
$$\alpha+\beta+\gamma-\pi = S$$

Pro jeden oktant je $S = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ .. OK

Náš výsledek lze zobecnit na libovolné křivky c, nejen sférické trojúhelníky.

Aplikace: <u>stáčení Foucaultova kyvadla</u>

Nechť je v zeměp. šířce $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$



~~Plocha~~ Prostorový úhel $\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\psi} d\theta \sin\theta = 2\pi(1-\sin\psi)$

Tedy na pólu dojde ke stočení o 0, na rovníku o 2π. Pokud to ale sledujeme vzhledem ke křivce c, musíme 2π odečíst, pak

stočení $= 2\pi - \Omega = 2\pi \sin\psi$.