

# Fraktály a chaos

## 1 Fraktály - základní pojmy

### 1.1 Úvod

Za otce fraktální geometrie je dnes považován Benoit Mandelbrot. Při zkoumání chyb při přenosu signálu zjistil, že při zvětšení příslušných grafů se objevuje jistá pravidelnost a podobnost s nezvětšeným grafem, objevovaly se velmi podobné vzory. Dále analyzoval např. vývoj cen akcií na burzách a dospěl k velmi podobným výsledkům. Tato podobnost ho podnítila k dalším úvahám a výzkumu.

### 1.2 Geometricky hladké útvary

Pro geometricky hladké útvary existuje konečný počet parametrů, kterými můžeme popsat jejich tvar. Pro základní geometrické útvary existují vzorce pro výpočet různých charakteristik (délka, plocha, objem...). Bez ohledu na to, v jakých počítáme jednotkách, vyjde nakonec vždy stejná hodnota. Danému útvaru můžeme přiřadit jisté celé číslo, které nazýváme počet rozměrů nebo také dimenze daného útvaru.

### 1.3 Nekonečně členité útvary

Při měření délky ostrova Korsiky se zjistilo, že délka obvodu ostrova závisí na délce použitého měřidla (tyče). Ostrov o konečné ploše tak může mít nekonečně velký obvod. Zcela empiricky tak byl odvozen vztah

$$K = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^D, \quad (1)$$

kde  $K$  je celkový obvod ostrova,  $N(\varepsilon)$  počet úseček nutných k aproximaci,  $\varepsilon$  délka úsečky a  $D$  číslo, jehož význam nedokázal nikdo nijak zdůvodnit. Bylo nalezeno mnoho podobných analogií (délka řeky, povrch planety, povrch houby, povrch lidských plic či mozku...)

### 1.4 Topologická dimenze

Udává počet parametrů nezbytně nutných k charakterizování daného hladkého geometrického objektu v Eukleidovské geometrii. Tato dimenze je vždy celočíselná. Topologická imenze bodu je 0, přímky 1, plochy 2, koule 3.

### 1.5 Hausdorffova (fraktální) dimenze

Tato dimenze nemusí být celočíselná, udává míru členitosti objektu. Měřením délky geometricky hladké křivky, která má topologickou dimenzi rovnu jedné, dostaneme při pohledu v různých měřítkách vždy stejné konečné číslo. Měřením délky břehu ostrova (což je opět křivka s topologickou dimenzí rovnou jedné) se při zmenšování měřidla dostáváme k nekonečně velkému obvodu. Pobřeží tedy v rovině zabírá více místa než hladká křivka. Nezabírá však všechno místo (přesněji řečeno, nevyplňuje celou rovinu). Jeho skutečná dimenze je tedy větší než topologická dimenze křivky (ta je rovna jedné) a současně je menší než topologická dimenze roviny (ta je rovna dvěma). Z toho vyplývá, že dimenze takového útvaru není celočíselná. Hodnota

Hausdorffovy dimenze udává, s jakou rychlostí délka těchto útvarů (či odpovídající veličina při větším počtu rozměrů, tj. povrch v Euklidovském prostoru  $E_2$  či objem v prostoru  $E_3$ ) roste do nekonečna. Jestliže se bude Hausdorffova dimenze a topologická dimenze lišit velmi málo, bude takový objekt málo členitý. Bude-li Hausdorffova dimenze o hodně větší než dimenze topologická, bude objekt velmi členitý. Mezní hodnotou je případ, kdy je Hausdorffova dimenze o jedničku větší než dimenze topologická - tuto vlastnost má například hranice Mandelbrotyovy množiny. Číselně odpovídá Hausdorffova dimenze veličině  $D$  v rovnici (??).

## 1.6 Fraktál

Jednoznačná a přesná definice tohoto pojmu stále neexistuje. Rozdílu v topologické a Hausdorffově dimenzi lze k definici fraktálů využít následovně. Fraktál je množina či geometrický útvar, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než dimenze topologická.

## 1.7 Soběpodobnost

Dalším důležitým pojmem, který se velmi často při popisování abstraktních matematických fraktálů i přírodních útvarů s fraktální strukturou používá, je soběpodobnost. V matematice se setkáme spíše s přesnějším a korektnějším pojmem invariance vůči změně měřítka. Soběpodobnost je taková vlastnost objektu, jež způsobuje, že objekt či jeho část vypadá podobně (ne však nutně stejně!) při pohledu v různém zvětšení. Soběpodobnost je jedním z hlavních znaků fraktálních útvarů, v některých publikacích jsou dokonce fraktály definované jako soběpodobné množiny. To však není zcela korektní, protože tato definice vylučuje některé náhodné (stochastické) fraktály.

Soběpodobnou množinu lze matematicky definovat následujícím způsobem. Soběpodobná množina  $A$  z  $n$ -dimenzionálního Euklidovského prostoru dále označovaného  $E_n$  je taková množina, pro kterou existuje konečně mnoho kontrahujících zobrazení  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  (jedná se o takové zobrazení z  $E_n$  do  $E_n$ , které zmenšuje vzdálenost mezi dvěma body ležícími v prostoru  $E_n$ ) takových, že  $A$  vznikne jako

$$A = \bigcup_{i=1}^n \phi_i(A). \quad (2)$$

Pro  $E_2$  a  $E_3$  mohou být zobrazení  $\phi_i$  v předchozím vztahu transformacemi posunutí, zkosení nebo otáčení a každá transformace je navíc i změnou měřítka s koeficientem  $S_n$  v intervalu  $(0, 1)$ . V tomto případě mluvíme o takzvaných lineárních transformacích. Je možné použít i transformace nelineární, vždy však musí být kontrahující.

Princip opakování podobných tvarů ve zmenšené podobě je vidět prakticky u jakékoliv komplexní, složité struktury, která je vytvářena i pomocí velmi jednoduchých pravidel. Způsob, jakým probíhá větvení stromů či cév a žil v tělech živočichů nebo hromadění bakterií a řas v koloniích, se dá matematicky uspokojivě popsat pouze fraktální geometrií, pokusy o popis pomocí klasické Euklidovské geometrie ztroskotaly (tj. byly buď neúměrně komplikované, a/nebo neodpovídaly realitě). Fraktály však slouží i k modelování a pochopení složitých dějů, které se odehrávají v čase, jedná se tedy o jevy dynamické.

## 2 Měření Hausdorffovy dimenze

### 2.1 Úsečka

Vytvoříme úsečku, která má jednotkovou délku. Nyní tuto úsečku rozdělíme na  $N$  dílů. To odpovídá tomu, jako bychom se na úsečku podívali s  $N$ -násobným zvětšením. Měřítka  $s$  nové úsečky se tedy vypočítá jako

$$s = 1/N. \quad (3)$$

Pro Hausdorffovu dimenzi musí platit následující podmínka

$$Ns^D = 1. \quad (4)$$

Z toho vyplývá, že Hausdorffova dimenze se pro dané dělení  $N$  a dané měřítko  $s$  vypočítá pomocí postupu

$$\begin{aligned} Ns^D &= 1 \\ \log Ns^D &= \log 1 \\ \log N + \log s^D &= 0 \\ \log N + D \log s &= 0 \\ D \log s &= -\log N \\ D &= -\frac{\log N}{\log s} \\ D &= \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} \end{aligned} \quad (5)$$

Po dosazení výše uvedeného vztahu  $s = 1/N$  do posledního vzorce získáme pro úsečku výsledek

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log N}{\log N} = 1. \quad (6)$$

Hausdorffova dimenze se rovná dimenzi topologické. Z výše uvedené definice fraktálu tedy vyplývá, že úsečka není fraktál.

### 2.2 Čtverec

Zkonstruujeme čtverec, jehož hrany budou mít jednotkovou délku. Tento čtverec má plochu taktéž jednotkovou. Po dvojnásobném zjemnění čtverec vypadá tak, jako by měl čtyřnásobnou plochu. Měřítka se tedy musí změnit podle tohoto vztahu

$$s = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}. \quad (7)$$

Hausdorffova dimenze čtverce se vypočítá dle vzorce

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log N}{\log N^{\frac{1}{2}}} = 2. \quad (8)$$

Topologická dimenze čtverce je rovna dvěma. Hausdorffova dimenze čtverce je taktéž rovna dvěma, proto čtverec opět není fraktálem.

## 2.3 Krychle

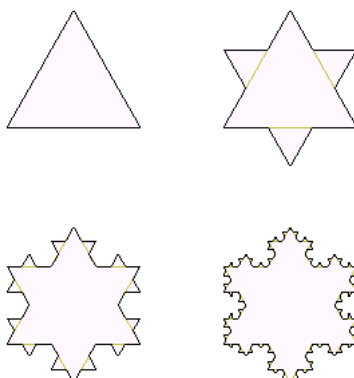
Analogickými úvahami bychom dospěli k tomu, že topologická a Hausdorffova dimenze jednotkové krychle jsou si rovny, jejich hodnota je 3. Krychle tedy není ve smyslu výše uvedené definice fraktálem.

## 2.4 Křivka Kochové

Nyní zkusme vypočítat Hausdorffovu dimenzi útvaru, jehož zjemnění o jeden krok spočívá v tom, že se každá úsečka předchozího útvaru nahradí dvěma úsečkami se třetinovou délkou a rovnostranným trojúhelníkem sestrojeným uprostřed mezi dvěma novými úsečkami. Tento objekt se nazývá podle své objevitelky vločka či křivka Kochové. Při trojnásobném zjemnění se délka křivky zvětší čtyřikrát, proto Hausdorffova dimenze není celé číslo. Pro  $N = 4$  se tedy měřítko musí zmenšit na třetinu, tedy  $s = \frac{1}{3}$ . Hausdorffova dimenze této křivky se vypočítá jako

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618595. \quad (9)$$

Topologická dimenze této křivky je rovna jedné, Hausdorffova dimenze je však větší než jedna. Z toho vyplývá, že tato křivka je fraktálem. Křivka Kochové má i další zajímavé matematické a geometrické vlastnosti. V celém svém rozsahu je spojitá, ale v žádném bodě nemá derivaci. Každý bod na křivce je totiž po nekonečně mnoha transformacích průnikem dvou nekonečně malých úseček, které tvoří strany trojúhelníka, který je taktéž nekonečně malý. Tato křivka je také nekonečně dlouhá, i když zabírá konečný (z obou stran omezený) prostor.



Obrázek 1: Křivka Kochové

### 3 Cantorovo diskontinuum

#### 3.1 Úvod

Tato množina byla jedna z prvních takzvaných matematických monster, jejichž vlastnosti matematici dlouho nechtěli akceptovat. Tato množina je totiž nulová a zároveň má mohutnost kontinua. Důkaz tohoto tvrzení poprvé podal německý matematik Georg Cantor, po němž je tato množina také pojmenována.

#### 3.2 Konstrukce množiny

Označme  $K_0 = \langle 0, 1 \rangle$ . Z tohoto intervalu vyjmeme prostřední třetinu, tedy interval  $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ . Dostáváme tak dva intervaly o délce  $\frac{1}{3}$

$$K_1 = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle. \tag{10}$$

Z těchto intervalů opět vyjmeme prostřední třetiny. Vzniknou tak čtyři intervaly o délce  $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

$$K_2 = \langle 0, \frac{1}{9} \rangle \cup \langle \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \rangle \cup \langle \frac{8}{9}, 1 \rangle. \tag{11}$$

V  $n$ -tém kroku pak dostáváme sjednocení  $2^n$  uzavřených intervalů, každý o délce  $\frac{1}{3^n}$

$$K_n = \langle 0, \frac{1}{3^n} \rangle \cup \langle \frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}} \rangle \cup \dots \tag{12}$$

Cantorova množina  $K$  je pak definována

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{13}$$



Obrázek 2: Cantorova množina

#### 3.3 Nulovost množiny

Doplňek množiny  $K$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , tedy množina  $M = \langle 0, 1 \rangle - K$ , je sjednocením spočetného disjunktčního systému "vynechávaných" intervalů. Je to tedy otevřená množina. Součet délek všech těchto intervalů je

$$d = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1, \tag{14}$$

což je rovno délce původního intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Cantorova množina je tedy nulová. Víme, že  $K_n$  je sjednocením  $2^n$  uzavřených intervalů o délce  $\frac{1}{3^n}$  a přitom  $K_n$  pokrývá Cantorovu množinu. Tvrzení o nulovosti pak plyne také ze vztahu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ .

### 3.4 Mohutnost množiny

Další otázkou k řešení je mohutnost Cantorovy množiny. V  $K$  jsou samozřejmě všechny dělicí body, jichž je jen spočetná množina. V množině  $K$  však jsou i jiné body. Na jejich vyjádření použijeme trojkové soustavy. Např. zápis

$$x = 0,102110\dots_3 = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{0}{3^6} + \dots \quad (15)$$

Použitím tohoto zápisu můžeme množinu  $K_1$  vyjádřit jako množinu všech čísel z  $\langle 0, 1 \rangle$ , která lze zapsat bez použití cifry 1 na prvním místě trojkového rozvoje.  $K_2$  je pak množina všech čísel z  $\langle 0, 1 \rangle$ , která lze vyjádřit bez použití cifry 1 na prvních dvou místech trojkového rozvoje. Obecně  $K_n$  je množina všech čísel z  $\langle 0, 1 \rangle$ , která lze vyjádřit bez použití cifry 1 na  $n$  prvních místech trojkového rozvoje. Samotná množina  $K$  je pak množina všech čísel z  $\langle 0, 1 \rangle$ , která se dají vyjádřit bez použití cifry 1 v trojkovém rozvoji. V zápisu těchto čísel v trojkové soustavě tedy použijeme pouze cifer 0 nebo 2. Např. do množiny  $K$  patří číslo  $y = 0,20220222022\dots_3$ . Nyní definujeme bijektivní zobrazení, které každému trojkovému rozvoji bez jedniček přiřadí posloupnost nul a jedniček, přičemž 2 se zobrazí na 1 a 0 se zobrazí na 0. Např. výše uvedenému  $y$  odpovídá posloupnost 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1,  $\dots$ . Vznikne tak množina všech posloupností 0 a 1. Pomocí těchto posloupností můžeme vyjádřit reálná čísla z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  v binární soustavě, neboť např.  $z = 0,10110111011\dots_2$ . Množina těchto posloupností však má mohutnost kontinua, proto i Cantorova množina má mohutnost kontinua.

### 3.5 Výpočet Hausdorffovy dimenze

Vytvoření Cantorova diskontinua je popsáno výše. Při trojnásobném zvětšení dostáváme délku jen dvakrát větší, tedy  $N = 2$ ,  $s = \frac{1}{3}$ . Proto Hausdorffova dimenze vychází

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309298\dots \quad (16)$$

Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická (ta je rovna nule), Cantorovo diskontinuum tedy je fraktálem.

## 4 Chaos - základní pojmy

### 4.1 Chaos

Termínem chaos je označena taková vlastnost dynamického a současně deterministického systému, při jejíž platnosti je nemožné vypočítat budoucí stav systému. Chaos nastává zejména u těch dynamických systémů, které vykazují velkou citlivost na počáteční podmínky. V takových systémech se při volbě minimálně dvou nekonečně blízkých počátečních bodů (reprezentujících počáteční podmínky systému) tyto dva body posléze exponenciálně vzdalují, takže budoucí stav systému není možné žádným způsobem předpovědět. Typickým představitelem chaotického systému je např. systém složený z kužele a kuličky postavené na vrcholu tohoto kužele. V závislosti na nekonečně malých změnách počátečních podmínek kulička spadne do libovolného směru, a může tak dramaticky ovlivnit další chování systému.

### 4.2 Atraktor

Atraktor dynamického systému je množina stavů, do kterých systém směřuje. Jinými slovy se jedná o množinu hodnot, kterých může nabývat stavový vektor dynamického systému po dostatečně dlouhém časovém úseku od počátku. Existuje několik základních typů atraktorů.

**Množina pevných bodů** Systém se v nekonečném čase ustálil v nějakém stabilním stavu, který je možné dopředu vypočítat. Jde o nejjednodušší případ.

**Množina periodických nebo kvaziperiodických bodů** Systém se po určité době ustálí tak, že osciluje mezi několika stavy, ty mohou být buď spočítatelné nebo nespočítatelné.

**Chaotický** Výsledný stav systému nelze v podstatě nijak dopředu předpovědět. Může to být způsobeno mimo jiné tím, že je systém velmi citlivý na změny počátečních podmínek. Chaotičnost v tomto případě neznamená náhodnost (stochastický systém), protože se stále bavíme o systémech deterministických.

**Podivný** Systém je popsán minimálně třemi navzájem souvisejícími diferenciálními rovnicemi. Tento atraktor bude vykazovat vlastnosti pravidelného, ale současně i chaotického atraktoru. Samotný termín podivný atraktor není ještě přesně matematicky definován, ale považujeme za něj takový atraktor, který vykazuje vlastnosti do jisté míry shodné s těmi, jaké mají fraktály. Dále platí, že všechny chaotické atraktory jsou současně podivnými atraktory, opačná implikace neplatí.

## 5 Logistická rovnice

### 5.1 Úvod

Standardní tvar logistické rovnice je

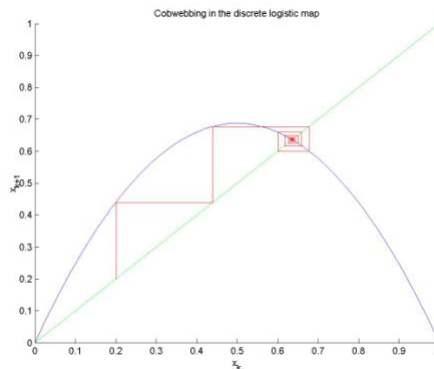
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (17)$$

kde  $r$  je volitelný parametr a  $x$  je z intervalu  $(0, 1)$ . Z toho můžeme určit interval hodnot parametru  $r$ . Maximální hodnotu  $x_{n+1}$  zjistíme z rovnice

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = r(1 - 2x_n) = 0. \quad (18)$$

Z toho dostáváme, že  $x_{n+1}$  nabývá největší hodnoty pro  $x_n = \frac{1}{2}$ . Tedy  $\max(x_{n+1}) = \frac{r}{4}$ . Z toho plyne, že se  $r$  musí nacházet v intervalu  $(0, 4)$ . Velmi názorné je grafické řešení (tzv. pavučinový diagram, viz obrázek), pokud logistickou rovnici řešíme jako dvojici rovnic

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad x_{n+1} = x_n. \quad (19)$$



Obrázek 3: Logistická rovnice

### 5.2 Stabilní řešení

Zvolme libovolný bod  $x_n$ . K němu pak vezměme bod, jenž se od něj liší o  $dx_n$ . Hodnotu po jedné iteraci můžeme vyjádřit jako

$$x_{n+1} + dx_{n+1} = f[x_n + dx_n] \sim f[x_n] + dx_n * f'[x_n]. \quad (20)$$

Tedy pro rozdíl v polohách nových bodů je určen vztahem

$$dx_{n+1} = dx_n * f'[x_n] = dx_n * r(1 - 2x_n). \quad (21)$$

Bod, do kterého postupnou iterací dokonvergujeme, sa nazývá stabilní řešení. Zároveň pro tento bod musí platit

$$\left| \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right| = |r(1 - 2x_n)| < 1, \quad (22)$$

protože kdyby tato podmínka neplatila, po sobě následující body by se od sebe zase vzdalovaly. Průsečíky obou křivek jsou řešení rovnice  $x = f(x)$ . Hledejme tedy tato řešení. Pro jednoduchost vynecháme koeficienty.

$$\begin{aligned} rx(1 - x) &= x \\ x[1 - r(1 - x)] &= 0 \\ rx[x - (1 - r^{-1})] &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$



Body řešení tedy jsou  $x^{(1)} = 0$ ,  $x^{(2)} = 1 - r^{-1}$ . Nyní je třeba určit intervaly hodnot  $r$ , na kterém jsou tato řešení stabilní, neboli splňují podmínku (??). Pro  $x_1 = 0$  vychází podmínka stability  $0 < r < 1$ . Pro  $x_2 = 1 - r^{-1}$  náleží  $r$  do intervalu  $(1, 3)$ . Pro bod  $x = 1$  se nedá řešení označit ani za stabilní ani za nestabilní, je zde neutrální. Abychom zjistili, jaká budou řešení pro  $r$  z intervalu  $\langle 3, 4 \rangle$ , je třeba prozkoumat případ, kdy  $x_{n+2} = x_n$ . Dostáváme rovnici

$$x_{n+2} = rx_{n+1}(1-x_{n+1}) = r[rx_n(1-x_n)][1-rx_n(1-x_n)] = r^2x_n(1-x_n)(1-rx_n+rx_n^2) = x_n \quad (24)$$

Pokud vynecháme indexy, můžeme dále upravovat.

$$\begin{aligned} r^2x(1-x)(1-rx+rx^2) &= x \\ xr^2[1-x(1+r)+2rx^2-rx^3]-1 &= 0 \\ x[-r^3x^3+2r^3x^2-r^2(1+r)x+(r^2-1)] &= 0 \\ -r^3x[x-(1-r^{-1})][x^2-(1+r^{-1})x+r^{-1}(1+r^{-1})] &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

V poslední rovnici jsou obsaženy i kořeny, které jsme našli pro  $x_{n+1} = x_n$ . Je to proto, že dva cykly s periodou 1 dávají jeden cyklus o periodě 2. Pro případ  $x_{n+2} = x_n$  osciluje systém mezi dvěma hodnotami řešení. Ty jsou dané kořeny rovnice (??).

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{2} \left\{ (1+r^{-1}) + r^{-1}[(r-3)(r+1)]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ x^{(2)} &= \frac{1}{2} \left\{ (1+r^{-1}) - r^{-1}[(r-3)(r+1)]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Z předchozích vzorců je hned vidět, že kořeny budou reálné jediné pro  $r \geq 3$ . Druhou možností, jak nalézt kořeny cyklu s periodou 2, je použití vztahu

$$\frac{f^2(x) - x}{f(x) - x} = 0. \quad (27)$$

Vyloučíme tak rovnou kořeny pro rovnici  $f(x) = x$  a přímo dostáváme zbývající kořeny pro rovnici  $f^2(x) = x$ .

Cyklus s periodou 3, eliminováním cyklu s periodou 1 nejjednodušeji najdeme pomocí vztahu

$$\frac{f^3(x) - x}{f(x) - x} = 0. \quad (28)$$

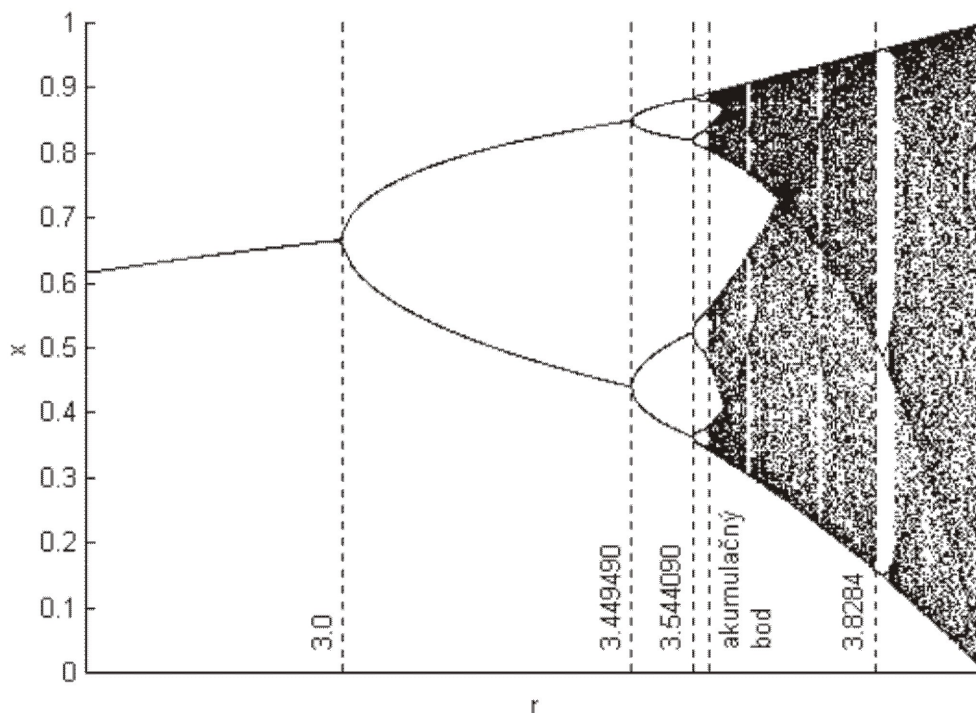
Výsledkem podílu je polynom šestého řádu, jehož kořeny jsou reálné jen pro  $r \geq 1 + \sqrt{8}$ . Cyklus s periodou 3 tedy vzniká pro  $r = 1 + \sqrt{8} = 3,8284\dots$ . Zcela analogicky bychom mohli postupovat dále a dostávat cykly s periodou 5, 6, 7...

### 5.3 Bifurkační diagram

Výsledný stav logistické funkce (bez ohledu na počáteční podmínky) se po nekonečně mnoha iteracích ustálí pro  $r \in (0, 1)$  na hodnotě 0, pro  $r \in (1, 3)$  na hodnotě  $1 - \frac{1}{r}$ . Pro  $r = 3$  dochází k rozdělení a stav systému dále osciluje mezi dvěma hodnotami. Rozdělení periody se nazývá bifurkace. Závislost hodnot(y) konečného stavu na hodnotě parametru  $r$  se nazývá bifurkační diagram.

Při  $r = 1 + \sqrt{6} = 3.449489\dots$  dochází k dalšímu zdvojení periody. Vznikají cykly s periodou 4. Zvyšováním  $r$  zdvojování period pokračuje dále, vznikají bifurkace s periodou  $2^k$ ,  $k = 3, 4, 5\dots$  na stále kratších intervalech, až do hodnoty  $r = 3,5699457\dots$  což je tzv. "akumulační bod", kde začíná chaotický režim - cyklus s nekonečnou periodou. Chaotický režim je však v některých místech přerušen úzkými okny cyklů s konečnou periodou. Např. pro  $r = 1 +$

$\sqrt{8} = 3,8284\dots$  se objevuje cyklus s periodou 3. Další růst parametru  $r$  po tomto cyklu je následovaný bifurkacemi s periodou 6, 12... Logistická rovnice tak má tři režimy chování: ustálený, periodický a chaotický.



Obrázek 4: Bifurkační diagram

Bifurkační diagram vykazuje fraktálový charakter - kvazisisoběpodobnost na různých úrovních. Zvětšený výsek diagramu je velmi podobný originálu, ze kterého samotný výsek pochází. Jeho přibližnou fraktální dimenzi bychom mohli určit experimentálním způsobem. Velmi zvláštním jevem je, že poměr mezi sousedícími intervaly zdvojení period je stálý, jeho velikost udává Feigenbaumova konstanta, která má hodnotu  $4,66920160\dots$ . Velikost této konstanty zatím není teoreticky vysvětlena.

$n$	cyklus $2^n$	$r$
1	2	3,00
2	4	3,449490
3	8	3,544090
4	16	3,564407
5	32	3,568750
6	64	3,56969
7	128	3,56989
8	256	3,569934
9	512	3,569943
10	1024	3,5699451
11	2048	3,569945557
$\infty$	akumulační bod	3,569945672

## 5.4 Ljapunovův exponent

Chaotický režim logistické rovnice vykazuje vysokou citlivost na počáteční podmínky, což je charakteristická vlastnost nelineárních systémů. Podle rovnice (??) je rozdíl v určení dvou blízkých bodů po proběhnutí jedné iterace roven

$$dx_{n+1} = dx_n * f'[x_n] = dx_n * r(1 - 2x_n). \quad (29)$$

Obecně po  $n$  iteracích bude platit

$$|dx_n| = |dx_0| * \prod_{i=0}^{n-1} |f'[x_i]| = dx_0 * \prod_{i=0}^{n-1} r(1 - 2x_i), \quad (30)$$

kde  $|dx_0|$  je rozdíl mezi body na počátku. Pokud má tento rozdíl pro chaotické systémy exponenciálně rychle růst, musí být rovnice (??) ekvivalentní vyjádření

$$|dx_n| = |dx_0| * 2^{\lambda n}, \quad (31)$$

kde  $\lambda$  je definován jako Ljapunovův koeficient. Platí pro něj tedy rovnice

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 |f'[x_i]| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 |r(1 - 2x_i)|, \quad (32)$$

Rozlišujeme tři možnosti výsledku:

$\lambda < 0$  Atraktor systému je buď jeden stabilní bod nebo periodická posloupnost bodů. Záporný Ljapunovův exponent je charakteristický pro disipativní nebo nekonzervativní systémy (tlumený harmonický oscilátor). Čím je absolutní hodnota záporného exponentu větší, tím víc je systém stabilní. Pro  $\lambda = -\infty$  se dostáváme do tzv. superstabilního bodu.

$\lambda = 0$  Systém se nachází v jistém stabilním stavu, který je zároveň jeho atraktorem. Nulový koeficient odpovídá konzervativním systémům (např. netlumený harmonický oscilátor).

$\lambda > 0$  Systém je nestabilní a chová se chaoticky. Dva na počátku velmi blízké body se exponenciálně rychle vzdalují. Příkladem je Brownův pohyb. Ačkoli je tento systém deterministický, nemůžeme nijak určit výsledný stav.

Diagram hodnoty Ljapunovova exponentu v závislosti na parametru  $r$  pro logistickou rovnici velmi úzce souvisí s jejím bifurkačním diagramem. A protože bifurkační diagram jeví určitou fraktální strukturu, musí mít tuto strukturu i diagram pro Ljapunovův exponent. Grafy pro Ljapunovův exponent v závislosti na hodnotě  $r$  jsou uvedeny níže.

## 6 Zdroje

- <http://hypertextbook.com/chaos/>
- <http://alife.tuke.sk/index.php?clanok=1012>
- <http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice-i/>
- <http://www.vood.mysteria.cz/fraktaly/clanky/1.htm>

