Geometrická fáze v QM

Uvažujme stav systému parametrizovaný veličinou t (např. časem, ale ne nutně).
Jde vlastně o křivku v Hilbertově prostoru:

$$|\psi(t)\rangle \ , \quad t \in [t_1, t_2].$$

Stav je normovaný, $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$.
Derivováním dostaneme

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\psi\rangle = \langle\dot\psi|\psi\rangle + \langle\psi|\dot\psi\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle\psi|\dot\psi\rangle = 0,$$

tedy $\langle\psi|\dot\psi\rangle$ je ryze imaginární.

Vezměme nyní jinou křivku v $\mathcal{H}$, která se liší od $|\psi(t)\rangle$ jen fází, ale odpovídá stejným fyzikálním stavům:

$$|\psi'(t)\rangle = |\psi(t)\rangle e^{i\alpha(t)} \ , \quad \alpha(t) \in \mathbb{R}$$

(kalibrační transformace)

Počítejme součin

$$\langle\psi'|\dot\psi'\rangle = e^{-i\alpha}\langle\psi|\left(|\dot\psi\rangle e^{i\alpha} + i\dot\alpha|\psi\rangle e^{i\alpha}\right)$$
$$= \langle\psi|\dot\psi\rangle + i\dot\alpha$$

Zvolme nyní $\dot{\alpha} = i\langle\psi|\dot{\psi}\rangle$, tedy

$$\alpha = i\int_{t_1}^{t}\langle\psi(t')|\dot{\psi}(t')\rangle dt'.$$

Pak $\langle\psi'|\dot{\psi}'\rangle = 0$

Vhodnou volbou okamžité fáze pro každé t tedy můžeme zajistit, aby $|\dot{\psi}'\rangle$ bylo ortogonální k $|\psi\rangle$. Provedeme tuto volbu.

Platí tedy $\langle\psi'|\dot{\psi}'\rangle = 0$.

Co se stane, jestliže provedeme v Hilbertově prostoru návrat k původnímu stavu? Tj. pokud $|\psi(t_2)\rangle = |\psi(t_1)\rangle$?

Ukazuje se, že pak obecně

$$|\psi'(t_2)\rangle \neq |\psi'(t_1)\rangle$$

Fáze, o kterou se liší stav v čase t_2 od stavu v čase t_1, je tzv. geometrická fáze: $\gamma = \alpha(t_2) - \alpha(t_1) = \arg\langle\psi'(t_1)|\psi'(t_2)\rangle$

To lze také napsat jako

$$\gamma = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}(t)\, dt = i \int_{t_1}^{t_2} \langle \psi | \dot{\psi} \rangle \, dt$$

Pro zcela obecnou kalibraci $|\psi''(t)\rangle = |\psi(t)\rangle e^{i\beta(t)}$ najdeme vztah pro g.f. takto:

$$\gamma = \arg \langle \psi''(t_1) | \psi''(t_2) \rangle + i \int_{t_1}^{t_2} \langle \psi'' | \dot{\psi}'' \rangle \, dt$$