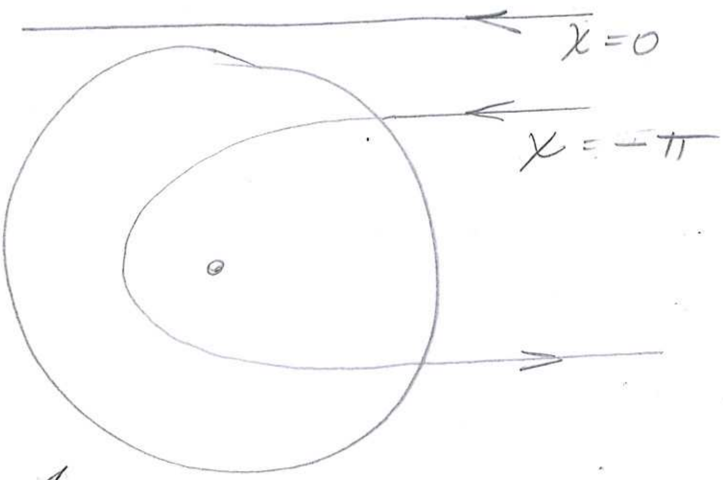
Nalezení indexu lomu Eatonovy a Luneburgovy čočky pomocí inverzního problému pro infinitní pohyb



1) Eatonova čočka

$$\chi(L) = \begin{cases} -\pi & \text{pro } L < 1 \\ 0 & \text{pro } L > 1 \end{cases}$$

a) Nechť $L < 1$. Pak

Pak $$x_{min}(L) = \ln L - \int_L^1 \frac{dL'}{\sqrt{L'^2 - L^2}} = \ln L - \left[\operatorname{arccosh} \frac{L'}{L}\right]_L^1$$

$$= \ln L + \operatorname{arccosh} \frac{1}{L} = \ln L + \ln\left(\frac{1}{L} + \sqrt{\frac{1}{L^2} - 1}\right)$$

$$= \ln \frac{L}{\frac{1}{L} + \sqrt{\frac{1}{L^2} - 1}}$$

Nahradíme x_{min} samotným $x = \ln r$ a L indexem lomu N, protože v bodě obratu je $N = L$. Pak

$$\ln r = \ln \frac{N}{\frac{1}{N} + \sqrt{\frac{1}{N^2} - 1}}$$

$$r = \frac{N}{\frac{1}{N} + \sqrt{\frac{1}{N^2} - 1}}$$

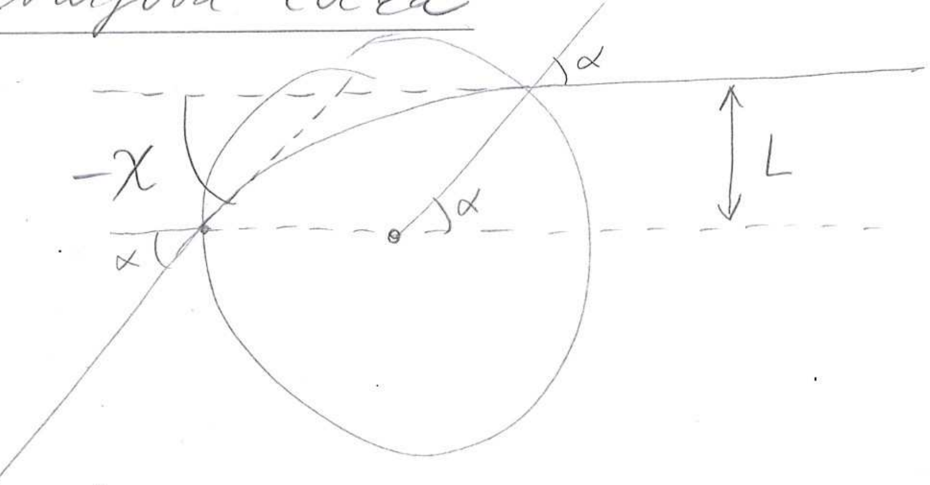
$$N = \sqrt{2r - r^2}$$

$$n(r) = \frac{N(r)}{r} = \sqrt{\frac{2}{r} - 1}$$ – skutečný index Eat. čočky.

b) Pro $L > 1$ je ale integrál nulový, proto $x = \ln r = \ln N$, $N = r \Rightarrow n = 1$. Tedy

$$n(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{r} - 1} & \text{pro } r < 1 \\ 1 & \text{pro } r > 1 \end{cases}$$

2) Luneburgova čočka



$$\chi = -\alpha = -\arcsin L$$

Tedy $$\chi = \begin{cases} -\arcsin L, & L < 1 \\ 0, & L > 1 \end{cases}$$

Pak pro $L < 1$:

$$x_{min}(L) = \ln L - \frac{1}{\pi} \int_L^1 \frac{\arcsin L' \, dL'}{\sqrt{L'^2 - L^2}}$$

Pak $$= \ln L - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \sqrt{1 - L^2}\right)$$

$$r_{min} = \frac{L}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - L^2}}}, \quad L \to N$$

$$r = \frac{N}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - N^2}}}$$

$$1 + \sqrt{1 - N^2} = \frac{N^2}{r^2}$$

$$1 - N^2 = \frac{N^4}{r^4} - 2\frac{N^2}{r^2} + 1$$

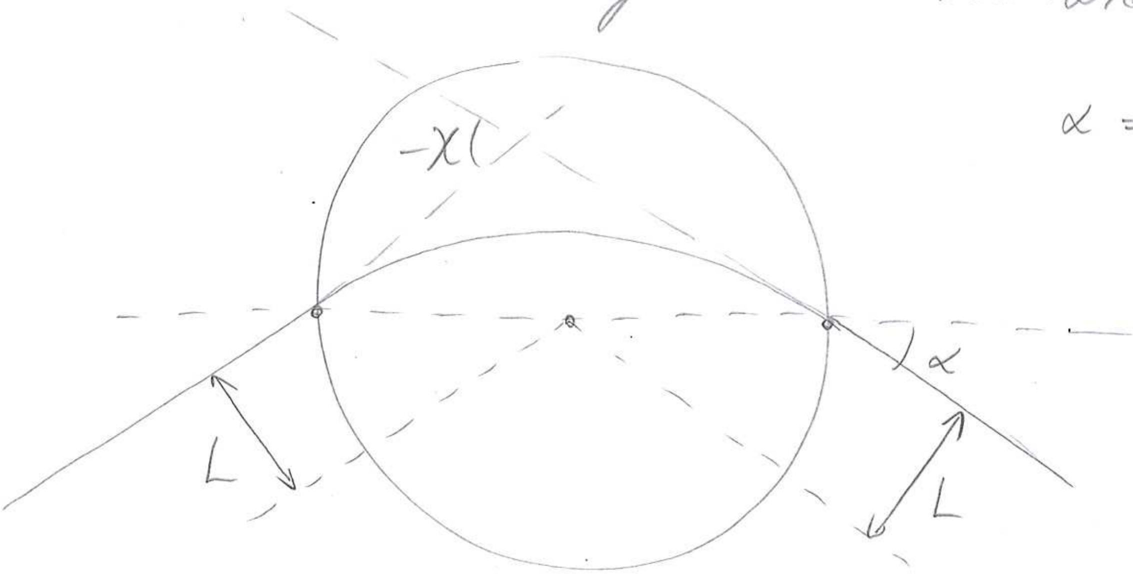
$$N = \sqrt{2r^2 - r^4}$$

$$n(r) = \frac{N}{r} = \sqrt{2 - r^2}$$

Pro $L > 1$ je $\chi = 0$, proto $n = 1$

Opět vyšel správně index lomu Luneburgovy čočky.

3) Maxwellovo rybí oko se zrcadlem



$\alpha = \arcsin L$

$$x = \begin{cases} -2\arcsin L, & L<1 \\ 0, & L>1 \end{cases}$$

Pak

$$x_{min} = \ln L - \ln\left(1+\sqrt{1-L^2}\right)$$

$$r = \frac{N}{1+\sqrt{1-N^2}}$$

$$\sqrt{1-N^2} = \frac{N}{r} - 1$$

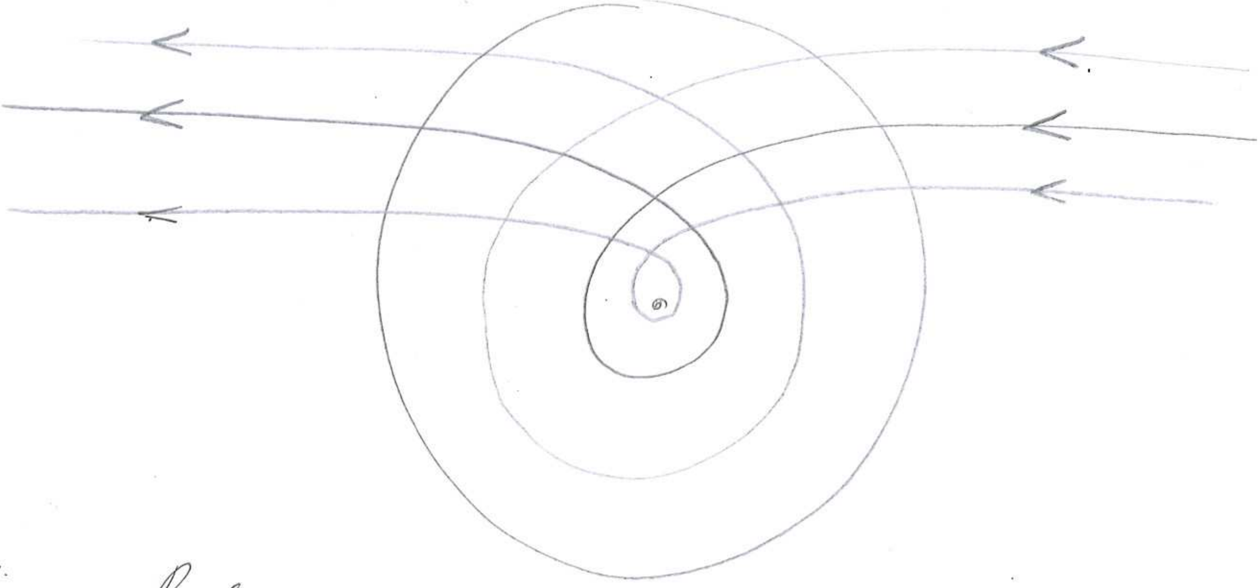
$$\cancel{1} - N^2 = \frac{N^2}{r^2} - \frac{2N}{r} + \cancel{1}$$

$$N = \frac{2r}{1+r^2}$$

$$n = \frac{2}{1+r^2} \quad \ldots \text{OK}$$

4) Neviditelná koule

Nechť $x(L) = \begin{cases} -2\pi & (L < 1) \\ 0 & (L > 1) \end{cases}$



Pak $X_{min} = \ln L - 2 \ln\left(\frac{1}{L} + \sqrt{\frac{1}{L^2} - 1}\right)$

$$r = \frac{L}{\left(\frac{1}{L} + \sqrt{\frac{1}{L^2} - 1}\right)^2}$$

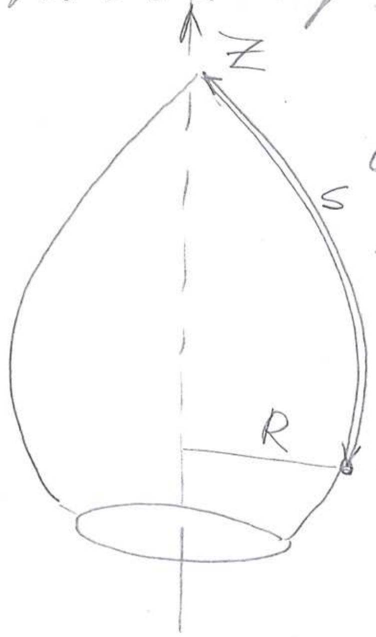
Vede to na kubickou rovnici, která má řešení

$$n = \left(Q - \frac{1}{3Q}\right)^2, \quad \text{kde } Q = \sqrt[3]{-\frac{1}{r} + \sqrt[2]{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{3^3}}}$$

Neeukleidovské povrchy reprezentující centrální indexy lomu

$n(r)$ – centrální index lomu

Rotačně symetrický neeukleidovský povrch



Chceme, aby optický element na povrchu a v rovině byl stejný, přičemž na povrchu je index lomu konstantní a roven 1.
Tedy $n^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = R^2 d\varphi^2 + dS^2$

Proto $R = nr$ .. vlastně totéž, co logaritmicky transformovaný index

Dále $dS = n\,dr$.

Příklady: 1) Keplerovy paraboly, tj. $V(r) = -\frac{1}{r}$, $E = 0$.

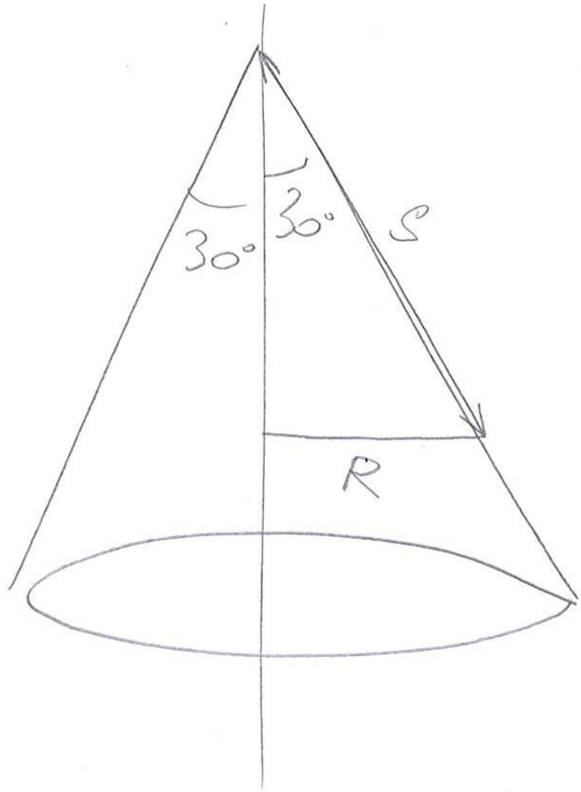
Pak $n(r) = \sqrt{2(E-V)} = \sqrt{2\frac{\alpha}{r}}$

$R = nr = \sqrt{2\alpha r}$

$dS = n\,dr = \sqrt{2\frac{\alpha}{r}}\,dr$

$S = \int \sqrt{\frac{2\alpha}{r}}\,dr = 2\sqrt{2\alpha r} + c = 2R + c$

Tedy $S(R)$ je lineární funkce, dostáváme přímku se sklonem $30°$ k ose z, protože $\sin 30° = \frac{1}{2}$



Takovýto kužel

2) Maxwellovo rybí oko

$$n = \frac{2}{1+r^2}$$

$$R = nr = \frac{2r}{1+r^2}$$

$$S = \int n\,dr = 2\int \frac{dr}{1+r^2} = 2\arctan r$$

$$r = \tan\frac{S}{2}$$

$$R = \frac{2\tan\frac{S}{2}}{1+\tan^2\frac{S}{2}} = \frac{2\,\frac{\sin\frac{S}{2}}{\cos\frac{S}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{S}{2}}{\cos^2\frac{S}{2}}} = \sin S$$

Povrchem je tedy jednotková koule