MAUPERTUISŮV PRINCIP

ZTF 2015

Změna akce při pevných počátečních a koncových polohách, při změně doby mezi počátkem a koncem:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad \Rightarrow \quad \delta S = -H\,\delta t \qquad (*)$$

Pokud $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, zachovává se energie, pak $\delta S + E\delta t = 0$

Napíšeme akci takto,

$$S = \int L\,dt = \int \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H\right) dt = \int \sum_i p_i\,dq_i - E(t - t_0)$$

První člen – tzv. zkrácená akce:

$$S_0 = \int \sum_i p_i\,dq_i$$

Pak $\quad S = S_0 - E(t - t_0)$

Při změně času t je změna akce

$$\delta S = \delta S_0 - E\,\delta t$$

Srovnáním s rovnicí $(*)$ dostáváme

$$\delta S_0 = 0$$

Tedy zkrácená akce má minimum vzhledem ke všem trajektoriím, které splňují zákon zachování energie a procházejí skrze koncový bod v libovolném časovém okamžiku.

Aplikujme tento princip na běžný lagrangián $L = T - V$, kde T je kvadratická fce rychlostí:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik}(q)\dot{q}_i \dot{q}_k - U(q_1, \ldots q_n)$$

Pak $$E = \frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k + U(q_i)$$

Odtud $$\frac{1}{dt^2} = \frac{2(E-U)}{\sum a_{ik}(q)\,\dot{q}_i \dot{q}_k}$$

$$\sum p_i\, dq_i = \sum a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i$$

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U)\sum_{i,k} a_{ik}\, dq_i\, dq_k}$$

Pro hmotný bod, kdy $T = \frac{m}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$, l – element délky trajektorie, máme

$$S_0 = \int \sqrt{2m(E-U)}\, dl \Rightarrow \delta \int \sqrt{2m(E-U)}\, dl = 0$$