ZTF 2020

PARAMETRICKÉ OSCILACE

Podobná myšlenka jako u úvah o adiab. invariantech – budeme měnit vnější podmínky a sledovat, jak se bude chovat mech. systém

Na rozdíl od adiabatického procesu budou ale změny časově korelovat s oscilacemi, které systém může vykonávat.

Uvažujme oscilátor, jehož frekvence se periodicky mění; pohybová rovnice je

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0, \qquad (1)$$

$$\omega(t+T) = \omega(t)$$

T .. perioda změn frekvence

Pohybová rovnice je invariantní vzhledem k transformaci $t \to t+T$. Proto pokud je nějaká funkce $x(t)$ řešením, pak je řešením rovnice i funkce $x(t+T)$.

Zároveň (1) je dif. rce 2. řádu, proto má

2 lineárně nezávislá řešení

Označíme je $x_1(t)$, $x_2(t)$

Pak $x_1(t+T)$ a $x_2(t+T)$ lze vyjádřit jako lin. kombinaci $x_1(t)$ a $x_2(t)$, což napíšeme např. takto:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Místo řešení x_1, x_2 bychom mohli použít jejich lin. kombinace y_1, y_2 tak, že

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; T \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Pak bychom mohli napsat pro y rovnici podobnou jako (2):

$$\begin{pmatrix} y_1(t+T) \\ y_2(t+T) \end{pmatrix} = TAT^{-1} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Matice T je libovolná regulární. Zvolíme ji tak, aby matice TAT^{-1} byla diagonální,

$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$. Pak

$$y_1(t+T) = \mu_1 y_1(t)$$
$$y_2(t+T) = \mu_2 y_2(t)$$

Vidíme, že existují řešení pohybové rovnice taková, že posun v čase o T odpovídá vynásobení řešení konstantou. Pro zjednodušení místo y_1, y_2 budeme psát x_1, x_2.

Jaký je vztah vlastních hodnot μ_1, μ_2?
Rovnice (1) se nezmění při záměně $t \to -t$, přičemž se ale μ_1 změní na $\frac{1}{\mu_1}$ a μ_2 na $\frac{1}{\mu_2}$.
Proto je jasné, že $\mu_1 \mu_2 = 1$.
Jiný způsob, jak to ukázat –

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2(t)\, x_1 &= 0 \qquad / \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2(t)\, x_2 &= 0 \qquad / \cdot x_1 \end{aligned}\right\} \text{a odečteme obě rovnice}$$

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = \text{const.}$$

Při posunutí času $t \to t + T$ se levá strana této rovnice zvětší $\mu_1 \mu_2$-krát, přičemž se ale nemění $\Rightarrow \mu_1 \mu_2 = 1$.

Dále víme, že rovnice (1) ~~je~~ má reálné koeficienty, proto pokud je $x(t)$ jejím řešením, je řešením také $x^*(t)$. Proto dvojice čísel μ_1, μ_2 musí být totožná s dvojicí μ_1^*, μ_2^*. Mohou tedy nastat 2 případy:

1) $\mu_1 = \mu_2^*$, $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$

2) $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $|\mu_1| > 1 > |\mu_2|$ (bez újmy na obecnosti)

Zabývejme se 2. případem. Vidíme, že řešení $x_1(t)$ s časem exponenciálně roste, neboť $x_1(t + nT) = \mu x_1(t+(n-1)T) = .. = \mu^n x_1(T)$

Z toho plyne, že klidový stav oscilátoru $(x = 0)$ je nestabilní – jakkoli slabá odchylka od něj se bude exponenciálně zvětšovat. Můžeme také napsat

$x_1(t) = \mu_1^{\frac{t}{T}} z_1(t)$, $x_2(t) = \mu_2^{\frac{t}{T}} z_2(t)$, kde z_1, z_2 jsou periodické funkce s periodou T.

Pro 1. případ, kdy $|\mu_1,\mu_2| = 1$, je to přímá analogie Blochova teorému. A v obou případech 1) i 2) je to stejný tvar řešení, se kterým jsme se setkali u systému polopropustných zrcadel.

Jak zjistit, kdy nastane možnost 1) a 2)? Lze to udělat semianalyticky, či numericky.

Numericky – např. začnu s poč. podmínkami

a) $x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$

nebo

b) $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$

To dá 2 lin. nezávislá řešení. Po 1 periodě změn frekvence zjistíme numerickým řešením pohybové rovnice tyto hodnoty:

a) $x(T) = \alpha, \quad \dot{x}(T) = \beta$

b) $x(T) = \gamma, \quad \dot{x}(T) = \delta$

Pro matici A pak máme:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x_1(T) = a_{11}\, x_1(0) + a_{12}\, x_2(0) = a_{11} \\
\beta &= \dot{x}_1(T) = a_{11}\, \dot{x}_1(0) + a_{12}\, \dot{x}_2(0) = a_{12} \\
\gamma &= x_2(T) = a_{21}\, x_1(0) + a_{22}\, x_2(0) = a_{21} \\
\delta &= \dot{x}_2(T) = a_{21}\, \dot{x}_1(0) + a_{22}\, \dot{x}_2(0) = a_{22}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}
$$

Z numerického řešení zjistíme matici A a podle jejích vlast. hodnot nozlišíme, ve kterém jsme režimu. Ukazuje se, že podle očekávání je $\mu_1 \mu_2 = \det A = 1$

Charak. rovnice: $\begin{vmatrix} \alpha-\mu & \beta \\ \gamma & \delta-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (\alpha+\delta)\mu + \underbrace{\det A}_{1}$

$= (\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)$

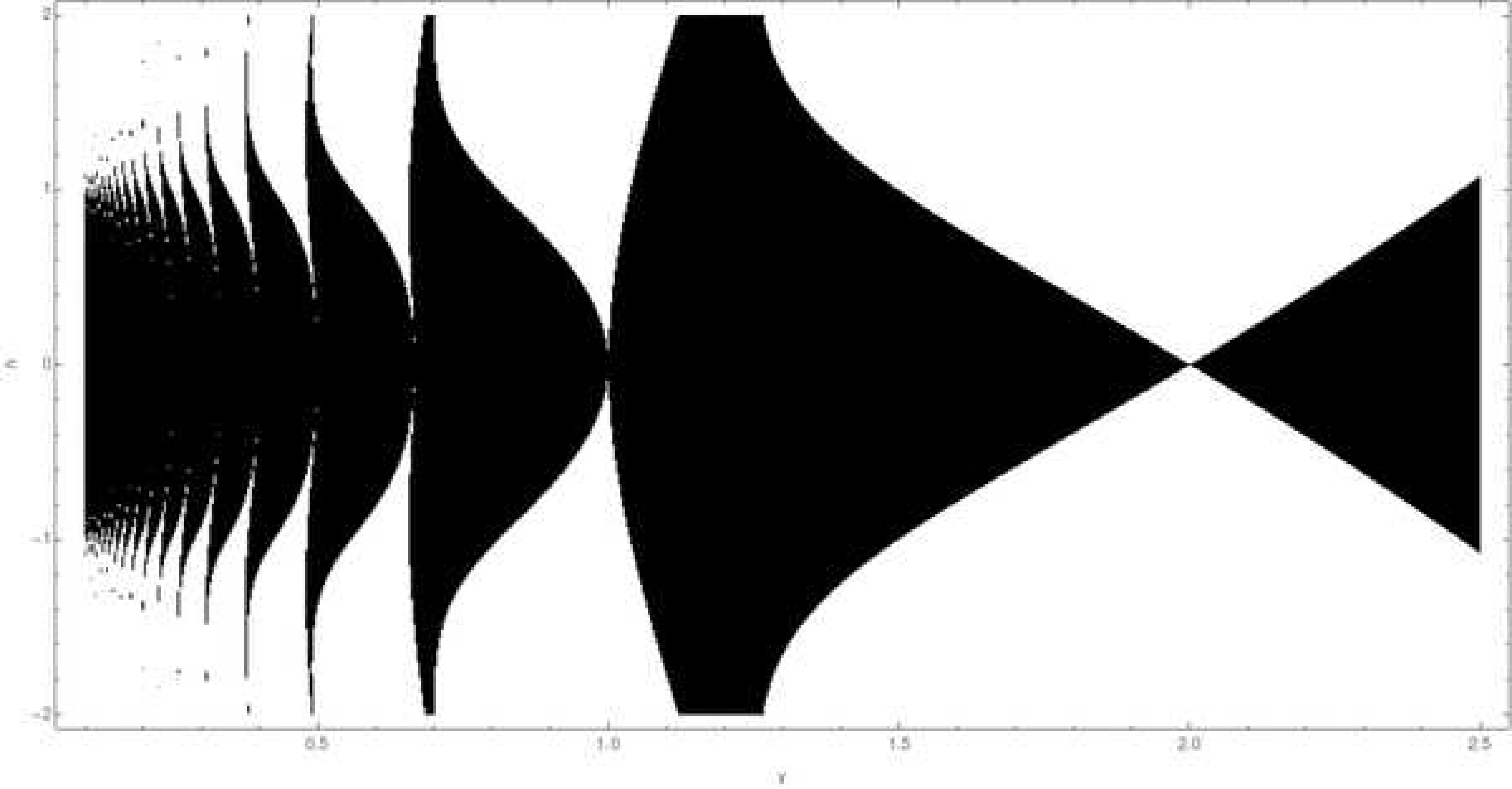
Diskriminant $D = (\alpha+\delta)^2 - 4$

Parametrické oscilace nastanou pro $D > 0$, tedy pro $|\alpha+\delta| > 2$.

Uvažujme například následující závislost $\omega(t)$:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 \left(1 + h \cos(\gamma t)\right)$$

V rovině (h, γ) si pak můžeme vyznačit body, ve kterých nastávají a nenastávají param. oscilace



2
1
0
-1
-2
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5