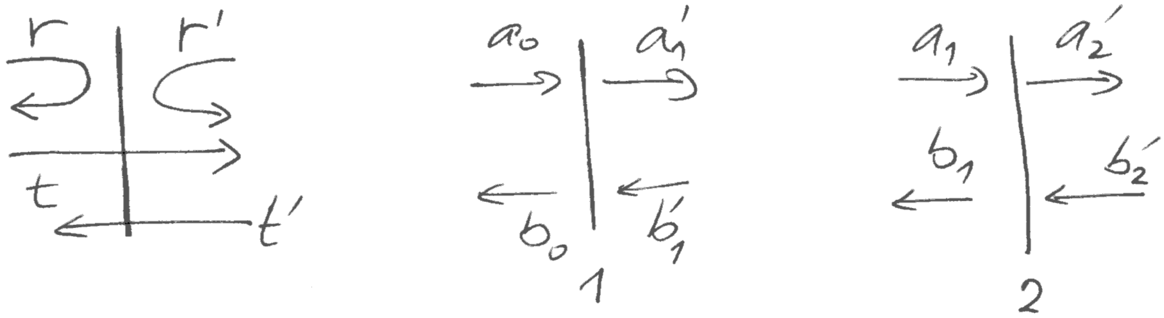
Polopropustná zrcadla s interferencí

• Jedno zrcadlo:



a_1', b_1' jsou amplitudy bezprostředně za 1. zrcadlem. Amplitudy bezprostředně před 2. zrcadlem budou a_1, b_1.

Platí:

$$a_1' = t a_0 + r' b_1' \Rightarrow a_0 = \frac{a_1' - r' b_1'}{t}$$

$$b_0 = r a_0 + t' b_1'$$

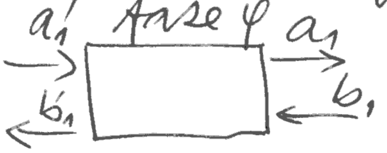
$$\Downarrow$$

$$b_0 = \frac{r a_1' - r r' b_1'}{t} + t' b_1' = \frac{r a_1' + (t t' - r r') b_1'}{t}$$

$$a_0 = \frac{a_1' - r' b_1'}{t}$$

Tedy
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & -r' \\ r & t t' - r r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ b_1' \end{pmatrix}$$

Dále potřebujeme matici popisující mezeru mezi zrcadly, kde vlna získá fázi φ



$$a_1 = e^{i\varphi} a_1'$$
$$b_1' = e^{i\varphi} b_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1' \\ b_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Kombinací obou vztahů:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{t}\begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & -r'e^{i\varphi} \\ re^{-i\varphi} & (tt'-rr')e^{i\varphi} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Pokud jsou všechna zrcadla stejná a mezery také, pak

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Za posledním zrcadlem takto uvažujeme ještě n-tou vrstvu posunující fázi o φ, to ale nemá vliv na propustnost či odrazivost celku.

Komplexní propustnost a odrazivost systému n zrcadel zjistíme pro případ, že $b_n = 0$, pak

$$a_0 = (A^n)_{11}\, a_n$$

$$b_0 = (A^n)_{21}\, a_n$$

$$t_n = \frac{a_n}{a_0} = \frac{1}{(A^n)_{11}}$$

$$r_n = \frac{b_0}{a_0} = \frac{(A^n)_{21}}{(A^n)_{11}}$$

mohou nastat 2 hlavní případy:

1) Pro $n \to \infty$ půjde $(A^n)_{11} \to \infty$, pak $t_n \to 0$

2) Pro $n \to \infty$ zůstane (A^n) konečné, pak $t_n \not\to 0$.

Rozhodnou o tom vlastní hodnoty matice $A = SDS^{-1}$, kde D je diagonální (s výjimkou vzácného případu, kdy obě vlastní hodnoty splývají, pak by D nemuselo být diagonální ale také $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ - Jordanův normální tvar.

Předpokládejme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tyto hodnoty najdeme řešením charakter. polynomu:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{e^{-i\varphi}}{t} - \lambda & -\frac{r'}{t} e^{i\varphi} \\ \frac{r}{t} e^{-i\varphi} & \frac{tt' - rr'}{t} e^{i\varphi} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \frac{e^{-i\varphi} + (tt' - rr') e^{i\varphi}}{t} \lambda + \frac{t'}{t} = 0$$

Koeficienty t, t', r, r' mohou být poměrně obecné, ale matice $\begin{pmatrix} t & r' \\ r & t' \end{pmatrix}$ musí být unitární (to je nejlépe vidět při kvantově-

- optickém pohledu, kdy se musejí zachovávat komutační relace mezi anihilačními a kreačními operátory při přechodu od vstupních módů $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_1' \end{pmatrix}$ k výstupním $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$

Bez větší újmy na obecnosti můžeme napsat

$$\left.\begin{aligned} t &= t' = \cos\theta \\ r &= r' = i \sin\theta \end{aligned}\right\} \text{1. volba}$$

Jiná volba je

$$\left.\begin{aligned} t &= t' = \cos\theta \\ r &= -r' = \sin\theta \end{aligned}\right\} \text{2. volba}$$

Pro 1. volbu je charakter. polynom

$$P = \lambda^2 - 2\lambda \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} + 1 = 0$$

Absolutní člen je součin vl. hodnot, neboť

$$P = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$

Tedy $\lambda_1 \lambda_2 = 1$

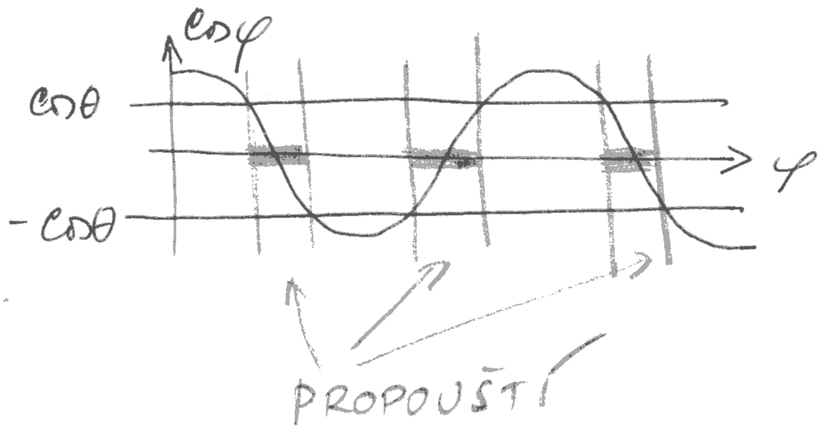
Diskriminant (dělený čtyřmi) je $D = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta} - 1$

1) Pro $D > 0$ budeme mít 2 reálné vl. hodnoty, jedna bude > 1 a druhá < 1, tj. $1 > \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$, propustnost systému zrcadel půjde k nule pro $n \to \infty$

2) Pro $D<0$ budeme mít dva vzájemně komplexně sdružené kořeny, jejichž součin je 1, budou to tedy komplexní jednotky,
$\lambda_1 = e^{i\alpha_1}$, $\lambda_2 = e^{i\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,
pak $A^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{in\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{in\alpha_2}\end{pmatrix}S^{-1}$

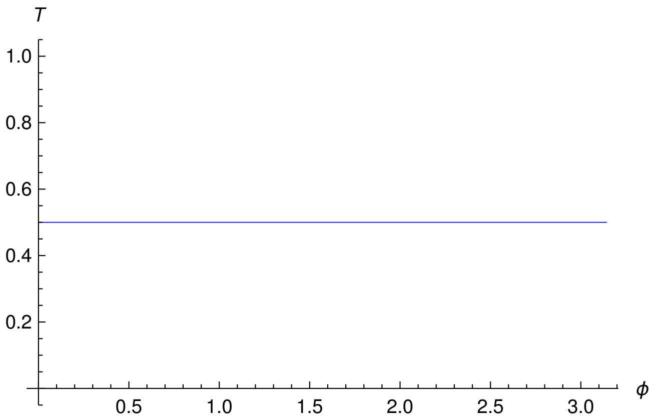
a elementy matice A^n tedy neporostou k nekonečnu ani pro $n \to \infty$. Tedy tento systém zrcadel a mezer mezi nimi může mít nenulovou propustnost i pro $n \to \infty$.

Podmínka, aby toto nastalo, je $D<0$, tedy $|\cos\varphi| < |\cos\theta|$. To lze graficky zobrazit takto:

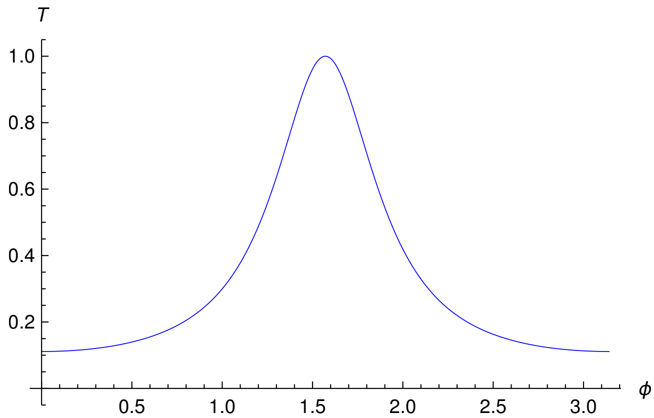


Propustnost systému n zrcadel

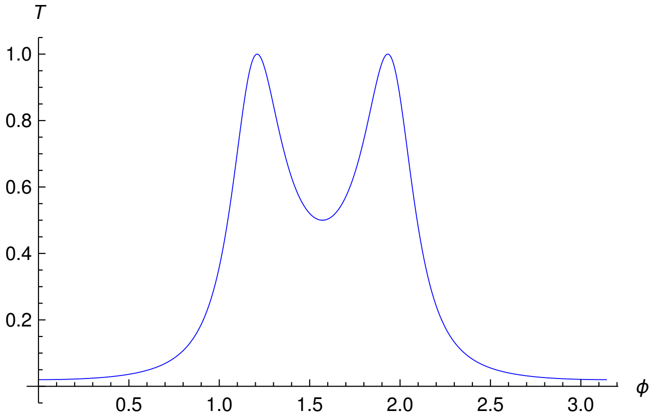
Pro $T_1 = 0.5$ (tj. $t = \sqrt{0.5}$) na jedno zrcadlo; fázi ϕ bereme jen od 0 do π, interval $[\pi, 2\pi]$ je stejný jako $[0, \pi]$:



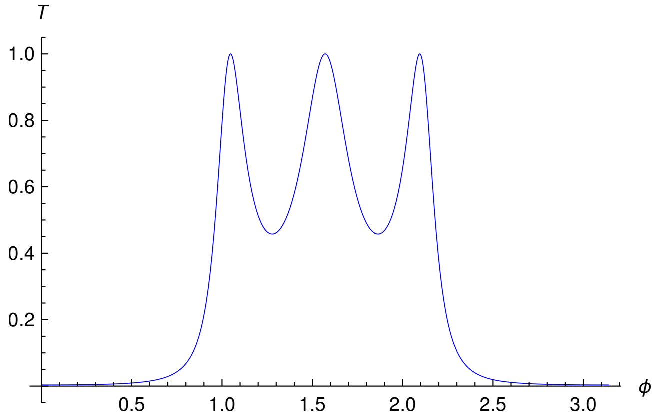
$n = 1$



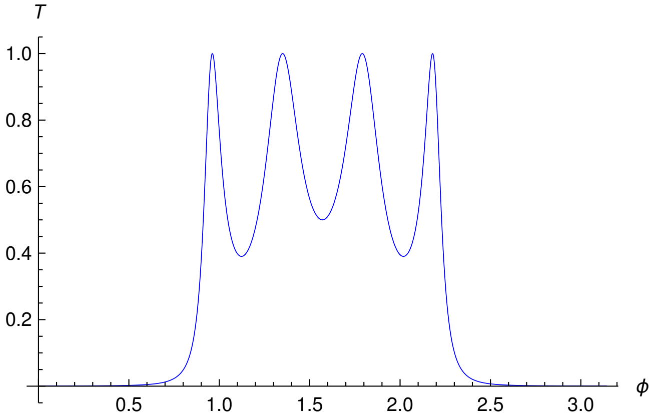
$n = 2$



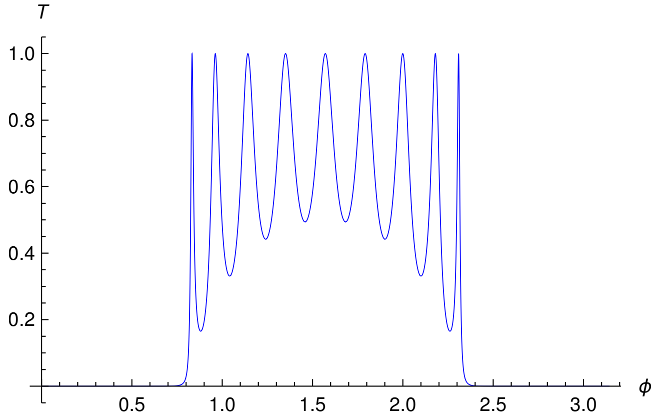
$n = 3$



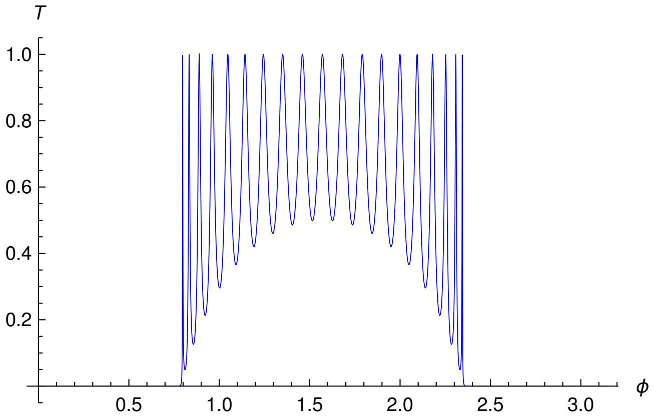
$n = 4$



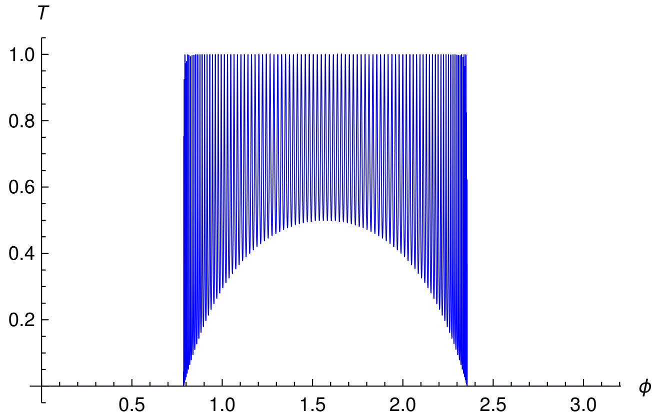
$n = 5$



$n = 10$

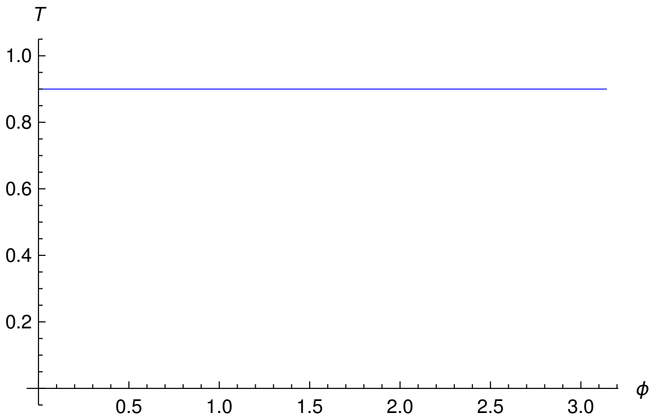


$n = 20$

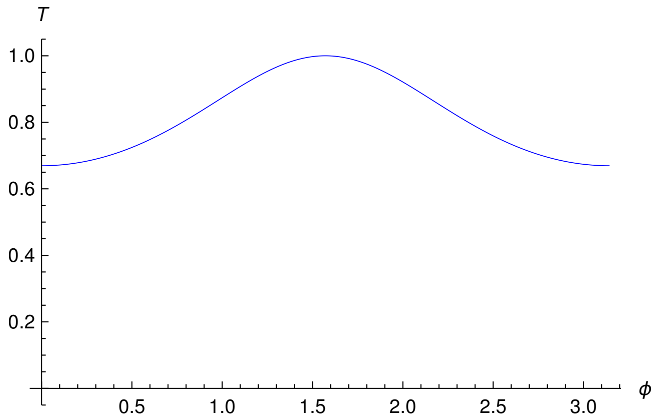


$n = 100$

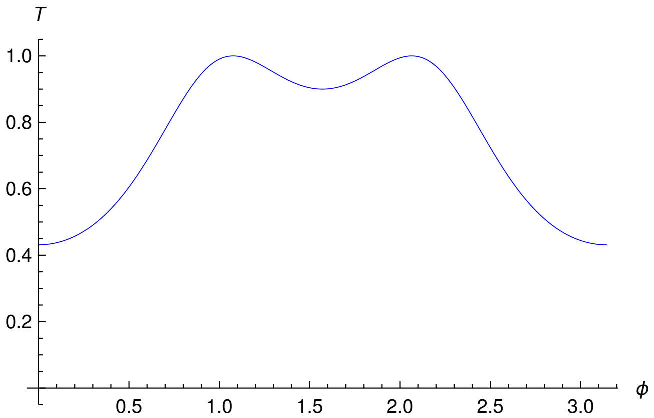
Pro $T_1 = 0.9$ na jedno zrcadlo:



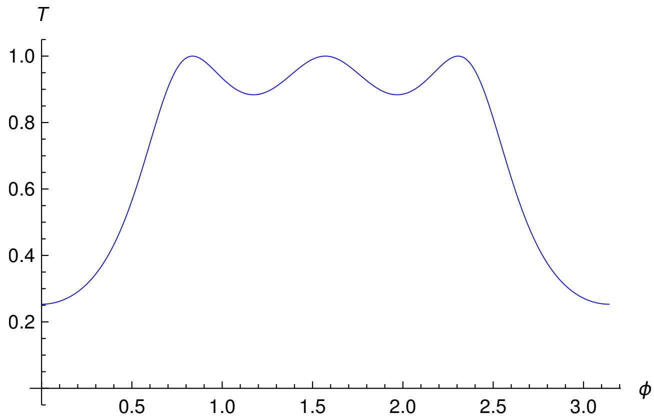
$n = 1$



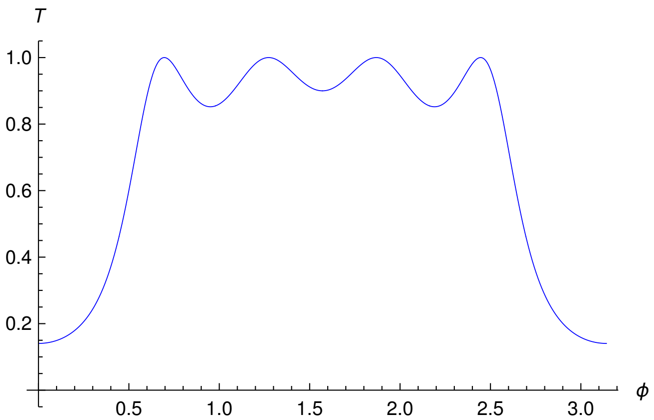
$n = 2$



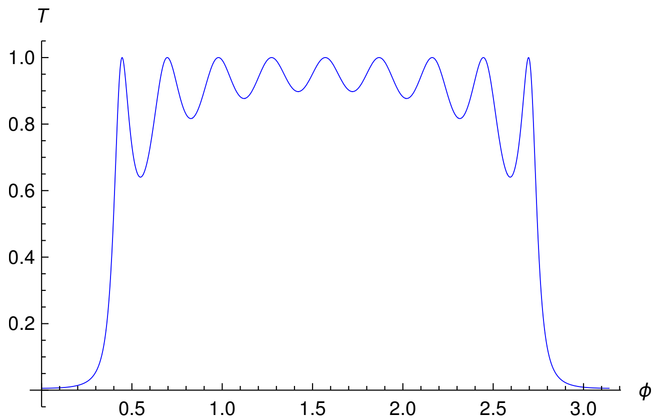
$n = 3$



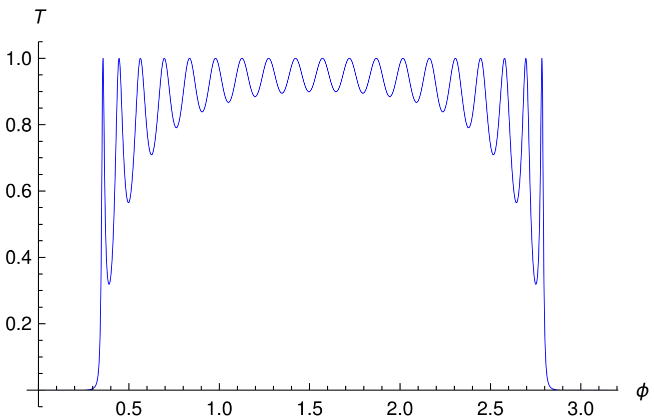
$n = 4$



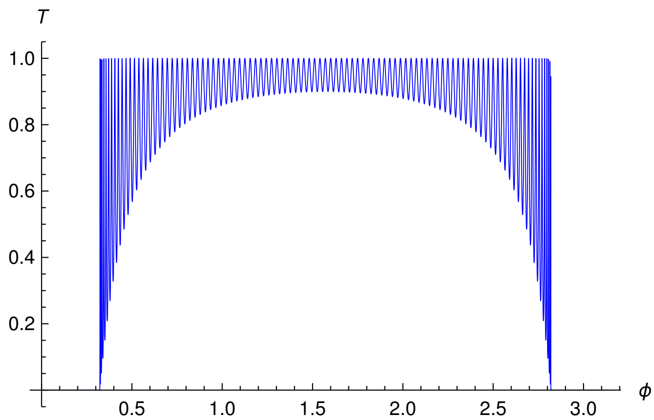
$n = 5$



$n = 10$

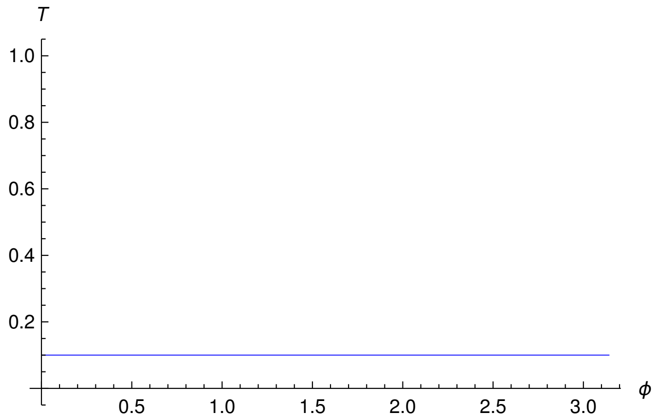


$n = 20$

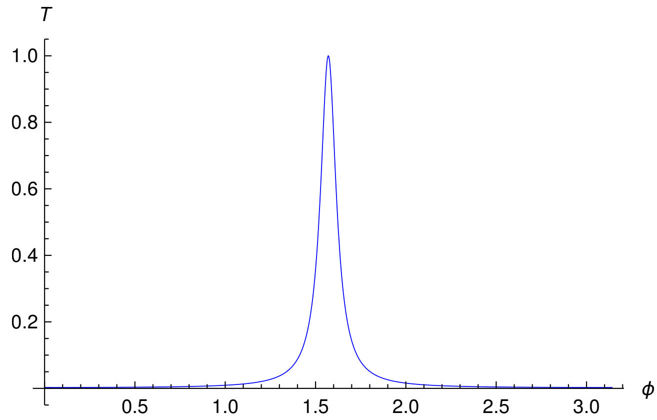


$n = 100$

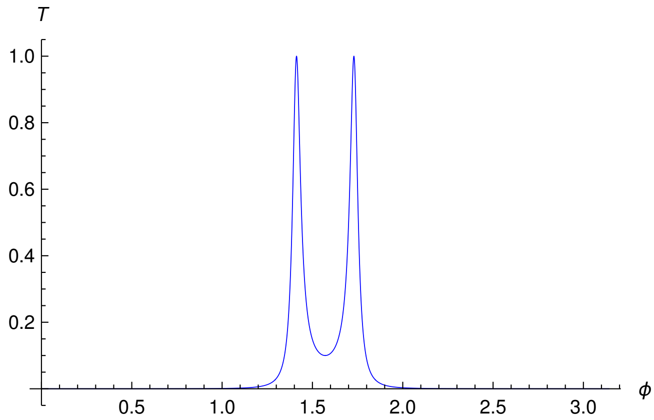
Pro $T_1 = 0.1$ na jedno zrcadlo:



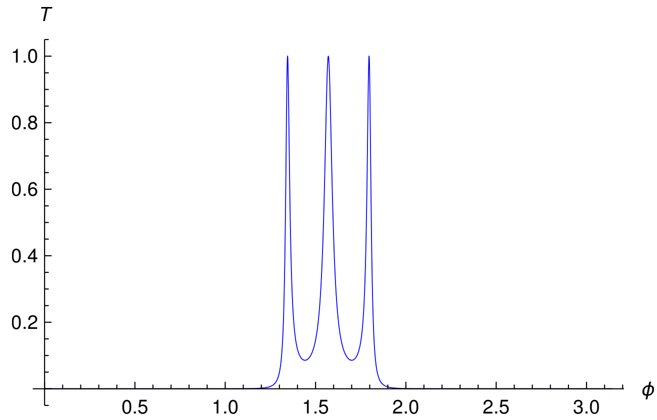
$n = 1$



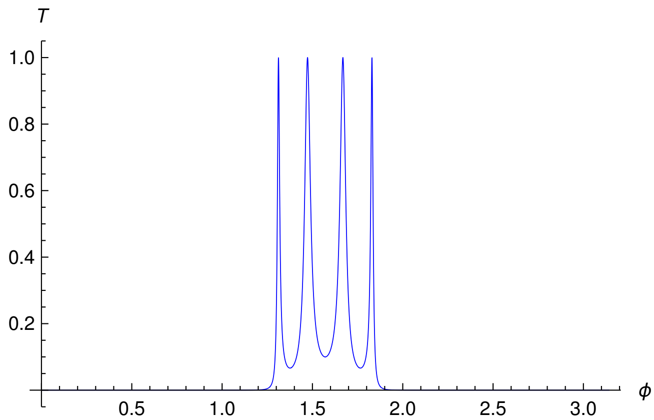
$n = 2$



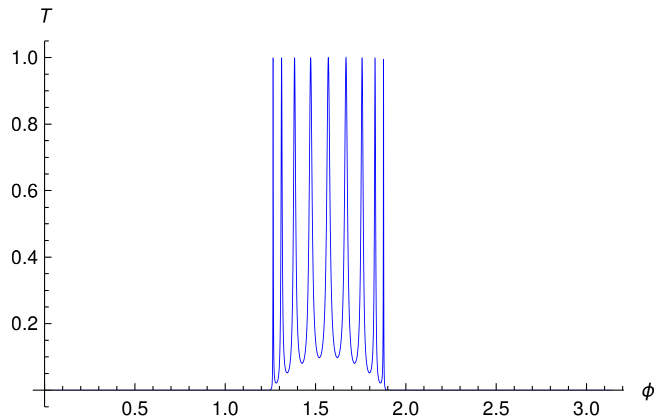
$n = 3$



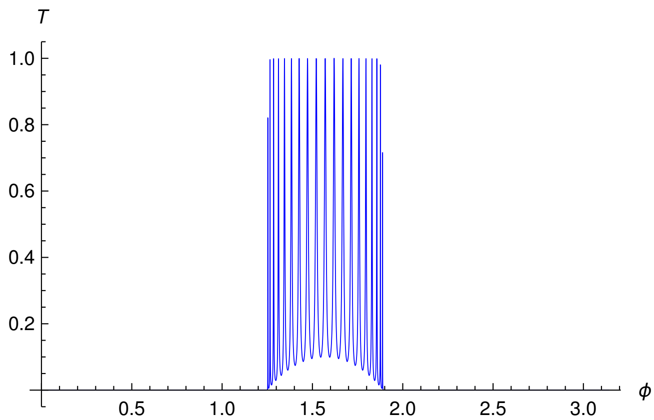
$n = 4$



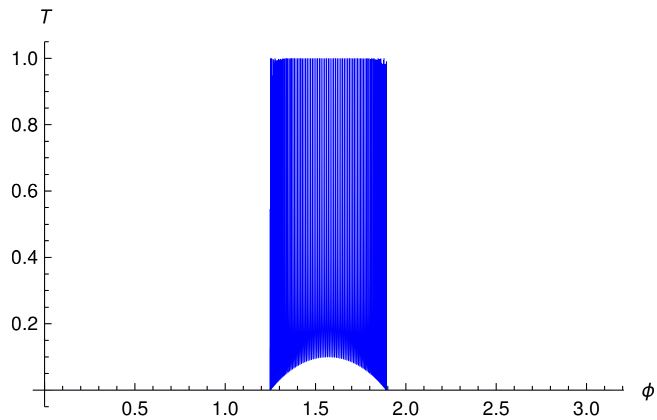
$n = 5$



$n = 10$

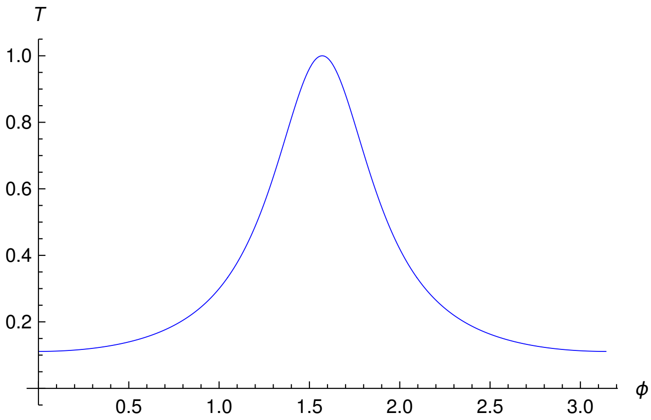


$n = 20$

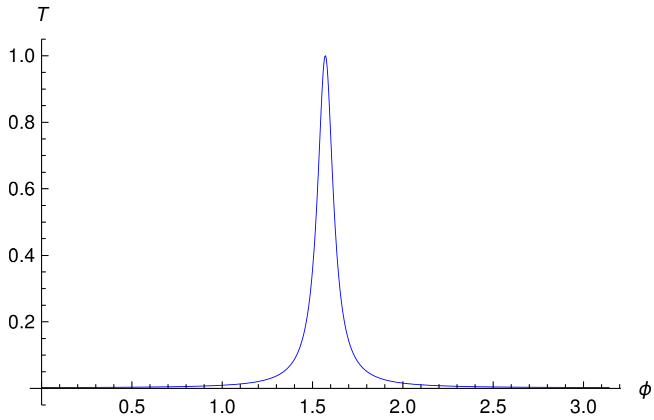


$n = 100$

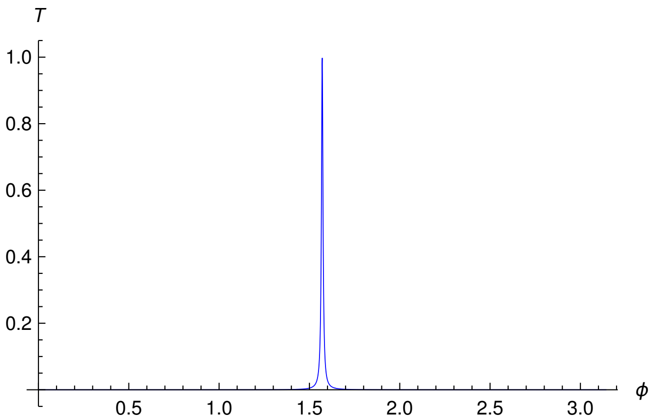
Propustnost systému 2 zrcadel s velmi malými propustnostmi (aplikace na Fabry-Perotův interferometr)



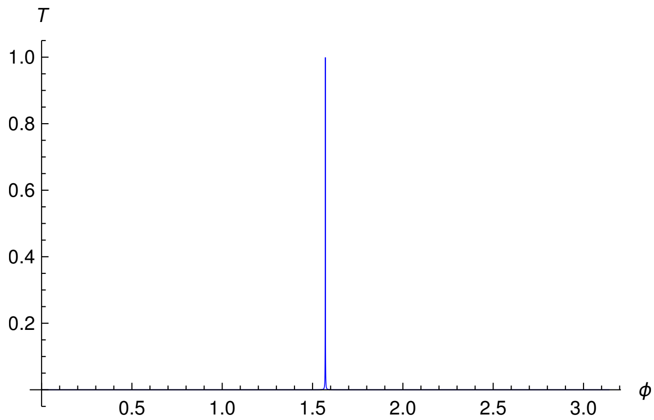
$T_1 = 0.5$



$T_1 = 0.1$



$T_1 = 0.01$



$T_1 = 0.001$