Rotace tuhého tělesa

Eulerovy úhly

K popisu rotace tuhého tělesa se hodí zavést systém souřadnic x_1, x_2, x_3 spojený s tělesem, který můžeme umístit do počátku pevného souřadného systému X, Y, Z. K popisu polohy tělesa v určitém čase nám poslouží tři tzv. *Eulerovy úhly.*

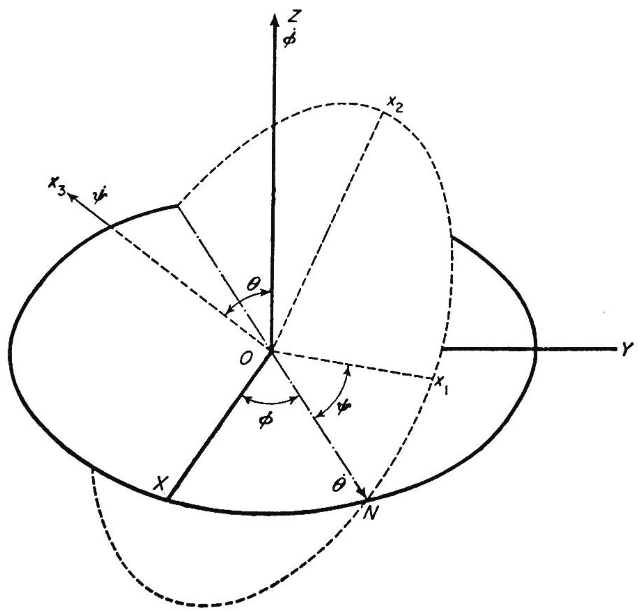

Fig. 47

Obrázek 1: Definice použitých souřadnic

Pohybující se rovina x_1x_2 protíná pevnou rovinu XY v *uzlové přímce.* Její kladný směr je dán vektorovým součinem $\mathbf{z} \times \mathbf{x_3}$, což jsou jednotkové vektory ve směru stejnojmenných os. Definujeme úhel θ mezi osami Z a x_3, ϕ mezi osou X a přímkou ON a ψ mezi x_1 a ON. Nyní si vyjádříme vektor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}$ v souřadnicích x_1, x_2, x_3 pomocí Eulerových úhlů a jejich derivací.

Nejdříve si vyjádříme úhlové rychlosti $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ a $\dot{\psi}$. $\dot{\theta}$ míří ve směru ON a má složky $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$, $\dot{\theta}_3 = 0$. Rychlost $\dot{\phi}$ ve směru osy Z má složku $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$ a průmět do roviny x_1x_2 $\dot{\phi}\sin\theta$. Složka $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$ a $\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$. Úhlová rychlost $\dot{\psi}$ leží v ose x_3. Pro výslednou úhlovou rychlost $\mathbf{\Omega}$ tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \Omega_2 &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \Omega_3 &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{1}$$

Kinetická energie rotace je dána vztahem (pokud jsou osy x_1, x_2 a x_3 zvoleny tak, že moment setrvačnosti má diagonální tvar)

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) \tag{2}$$

Pro symetrické těleso ($I_1 = I_2 \neq I_3$) ji můžeme přepsat do podoby

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 \tag{3}$$

Vzhledem k symetrii můžeme osy x_1, x_2 zvolit libovolně, výhodné je směrovat x_1 podél ON ($\psi = 0$). Rovnice (1) se zjednoduší

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot\theta \\ \Omega_2 &= \dot\phi \sin\theta \\ \Omega_3 &= \dot\phi\cos\theta + \dot\psi \end{aligned} \tag{4}$$

Jednoduchá aplikace předchozích počtů je určení volného rotace symetrického tělesa. Osu Z zvolíme ve směru konstantního momentu hybnosti $\mathbf{M}$ tělesa. Osu x_1 veďme ve směru uzlové přímky a x_3 ať obsahuje osu symetrie tělesa. Složky momentu hybnosti jsou pak $M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot\theta$, $M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot\phi\sin\theta$ a $M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$. Vzhledem k tomu, že $x_1 \perp Z$, tak $M_1 = 0$, $M_2 = M\sin\theta$, $M_3 = M\cos\theta$. Porovnáním těchto výrazů dostaneme

$$\dot\theta = 0, \qquad I_1\dot\phi \ = M, \qquad I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = M\cos\theta \tag{5}$$

Z první rovnice plyne, že θ (čili úhel mezi osou symetrie tělesa a směrem $\mathbf{M}$) je konstantní. Další dává velikost úhlové rychlosti precese $\dot\phi = M/I_1$ a poslední určuje rychlost rotace tělesa kolem vlastní osy $\Omega_3 = (M/I_3)\cos\theta$.

Eulerovy rovnice

Pro pohyb v pevné soustavě souřadnic máme rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{P}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{F} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{M}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{K} \tag{7}$$

Abychom našli vztah mezi celkovým momentem hybnosti tělesa $\mathbf{M}$ a rychlostí $\mathbf{\Omega}$, musíme nejdřív rovnice (6), (7) transformovat do rotující soustavy x_1, x_2, x_3. Obecně, pokud máme vektor $\mathbf{A}$, který se v rotující soustavě nemění, tak můžeme jeho časovou změnu v pevné soustavě napsat jako $\mathrm{d}\,\mathbf{A}/\mathrm{d}\,t = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}$. Pokud přidáme i časový vývoj vektoru $\mathbf{A}$ v rotující soustavě, který označíme $\mathrm{d}'\,\mathbf{A}/\mathrm{d}\,t$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{A}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}'\,\mathbf{A}}{\mathrm{d}\,t} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{A} \tag{8}$$

Rovnice (6), (7) můžeme pomocí (8) přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}'\,\mathbf{P}}{\mathrm{d}\,t} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{P} = \mathbf{F} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}'\,\mathbf{M}}{\mathrm{d}\,t} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{M} = \mathbf{K} \tag{10}$$

Nyní derivujeme podle času v rotující soustavě, takže můžeme předchozí dvě rovnice rozepsat do složek ve směrech x_1, x_2, x_3. Celkovou hybnost $\mathbf{P}$ nahradíme součinem $\mu\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\mathrm{d}\,V_1}{\mathrm{d}\,t} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) &= F_1 \\ \mu\left(\frac{\mathrm{d}\,V_2}{\mathrm{d}\,t} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) &= F_2 \\ \mu\left(\frac{\mathrm{d}\,V_3}{\mathrm{d}\,t} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) &= F_3 \end{aligned} \tag{11}$$

Druhou rovnici přepíšeme do následujícího tvaru za použití relace $M_1 = I_1\Omega_1$ atd.

$$\begin{aligned} I_1\frac{\mathrm{d}\,\Omega_1}{\mathrm{d}\,t} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 &= K_1 \\ I_2\frac{\mathrm{d}\,\Omega_2}{\mathrm{d}\,t} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 &= K_2 \\ I_3\frac{\mathrm{d}\,\Omega_3}{\mathrm{d}\,t} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= K_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Rovnice (12) se nazývají *Eulerovy rovnice*. V případě, že rotující těleso není umístěné v žádném vnějším poli, pak $\mathbf{K} = 0$ a rovnice přejdou na

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,\Omega_1}{\mathrm{d}\,t} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3/I_1 = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\,\Omega_2}{\mathrm{d}\,t} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1/I_2 = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\,\Omega_3}{\mathrm{d}\,t} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2/I_3 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Vraťme se opět k symetrickému rotujícímu tělesu ($I_1 = I_2$). Platí $\dot{\Omega}_3 = 0$, tedy $\Omega_3 = \text{konst.}$ První dvě rovnice přepíšeme jako $\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2$, $\dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1$, kde

$$\omega = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1 \tag{14}$$

Po vynásobení druhé rovnice i a přičtení k první dostaneme $\mathrm{d}\,(\Omega_1 + i\Omega_2)/\mathrm{d}\,t = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2)$, takže $\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t}$, konstanta A je při vhodné volbě počátečního času reálná.

$$\Omega_1 = A\cos\omega t \qquad \Omega_2 = A\sin\omega t \tag{15}$$

Výsledkem je, že složka úhlové rychlosti kolmá na osu symetrie tělesa rotuje rychlostí ω a její velikost je konstantní $A = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$. A vzhledem k tomu, že složka Ω_3 je rovněž konstantní, lze usoudit, že $\boldsymbol{\Omega}$ rotuje okolo osy tělesa a má konstantní velikost. Pokud vezmeme v potaz relace $M_1 = I_1\Omega_2$ atd. mezi složkami $\boldsymbol{\Omega}$ a $\mathbf{M}$, vykonává vektor momentu hybnosti $\mathbf{M}$ vzhledem k ose tělesa stejný pohyb.

Nyní můžeme vzít rovnice (5) a dostaneme z nich

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\phi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right), \tag{16}$$

což je ve shodě s (14)

$$-\dot{\psi} = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_3 \tag{17}$$