Volná rotace setrvačníku – ZTF 2018

Tomáš Tyc

Eulerovy rovnice volného setrvačníku:

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\,\omega_2 \omega_3$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\,\omega_1 \omega_3$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\,\omega_1 \omega_2$$

Přepíšeme je pro složky momentu hybnosti $\vec{L}$:

$$\dot{L}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} L_2 L_3$$

$$\dot{L}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_3 J_1} L_1 L_3$$

$$\dot{L}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_1 J_2} L_1 L_2$$

Budeme předpokládat, že $J_1 < J_2 < J_3$, a že moment hybnosti leží na začátku v blízkosti osy x_3, tedy $L_3 \gg L_1$, $L_3 \gg L_2$. Pak 3. rovnice dá přibližně $\dot{L}_3 = 0$ a L_3 lze tedy považovat za konstantu. Z prvních dvou rovnic pak

$$\ddot{L}_1 = -L_3^2 \frac{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}{J_1 J_2 J_3^2} L_1 = -\Omega^2 L_1 ,$$

kde $\Omega := \frac{L_3}{J_3}\sqrt{\frac{(J_3-J_1)(J_3-J_2)}{J_1 J_2}}$.

Řešením rovnice je $L_1 = A\cos(\Omega t+\varphi)$
$L_2 = B\sin(\Omega t+\varphi)$

Tedy koncový bod vektoru $\vec{L}$ obíhá přibližně po elipse s úhlovou frekvencí Ω.

Příklad: kruhový disk o poloměru R,
$J_1 = \frac{1}{4}mR^2 = J_2$, $J_3 = \frac{1}{2}mR^2$

Pak $\Omega = \frac{L_3}{J_3} = \omega_3$

Tedy $\vec{L}$ rotuje kolem osy x_3 úhlovou rychlostí ω_3 v soustavě spojené s tělesem. Protože samo těleso rotuje téměř kolem osy x_3 úhlovou rychlostí ω_3, rotuje v laboratorní soustavě vektor $\vec{L}$ relativně k ose x_3 úhlovou rychlostí $2\omega_3$. Ale protože $\vec{L}$ se nemění, rotuje osa x_3 úhlovou rychlostí $2\omega_3$ kolem pevného vektoru $\vec{L}$.

Dále budeme předpokládat, že na začátku roztočíme těleso téměř kolem osy x_2, tedy $L_2 \gg L_1, L_3$. Pak rovnice budou

$$\dot{L}_2 = 0 \Rightarrow L_2 = \text{const.}$$

$$\ddot{L}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} L_2 \dot{L}_3 = \frac{(J_3 - J_2)(J_2 - J_1)}{J_1 J_2^2 J_3} L_2^2 L_1 = k^2 L_1,$$

kde $k = \frac{L_2}{J_2} \sqrt{\frac{(J_3 - J_2)(J_2 - J_1)}{J_1 J_3}}$

Řešením je

$$L_1 = A \cosh kt + B \sinh kt$$

$$L_3 = C \sinh kt + D \cosh kt$$

$$C = -A \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_2} \frac{J_3}{J_1}} \qquad D = -B \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_2} \frac{J_3}{J_1}}$$

Uvažujme pro konkrétnost, že $L_3(t=0) = 0$. Pak $B = D = 0$ a $L_1 = A \cosh kt$, $L_3 = C \sinh kt$

Za jak dlouho se L_1 změní tak, že se výrazně přiblíží hodnotě L_2? Za dobu $\tau = \frac{\ln(L_2/A)}{k}$

Díky logaritmu není tato doba příliš dlouhá ani pro velmi malá A (tj. počáteční odchylky $\vec{L}$ od L_2).

Jak dopadne rotace velmi protáhlého válce kolem osy x_1? Zde vyjde $J_1 \ll J_2, J_3$

Označme-li $\frac{J_1}{J_2} = \frac{J_1}{J_3} = \varepsilon$, dostaneme

$$\Omega = \frac{L_1}{J_1} \sqrt{\frac{(J_2 - J_1)(J_3 - J_1)}{J_2 J_3}} = \omega_1 (1 - \varepsilon)$$

Vektor $\vec{L}$ se teď točí kolem osy x_1 vzhledem k tělesu rychlostí $-\Omega = \omega_1(\varepsilon - 1)$.

V laboratorní rovině proto se rovina $(\vec{L}, x_1)$ otáčí rychlostí $-\Omega + \omega_1 = \omega_1 \varepsilon$.

Precese tedy nastává s úhlovou rychlostí $\frac{\omega_1 J_1}{J_2}$.