

Topologie rotací v 3D

ZTF 2010

Grupa rotací \leftrightarrow množina všech natočení tělesa v dané piv. poloze

Parametrizace:

- 1) Eulerovy úhly θ, φ, ψ
(natočení kol z o ψ)
— " — y o θ
— " — z o ψ)

Tedy nová osa z' má polohu (θ, φ) , natočení o x, y je dáno úhlem ψ .

- 2) vektorem \vec{x} - směrem a úhlem natočení

Popis pomocí matic - tzv. $SO(3)$ matice 3×3 , ortog., s $\det S = 1$.

Prostor parametrů: směr úhlu (vektor) \vec{x} popisu pomocí (φ, θ) vektorů kude x .

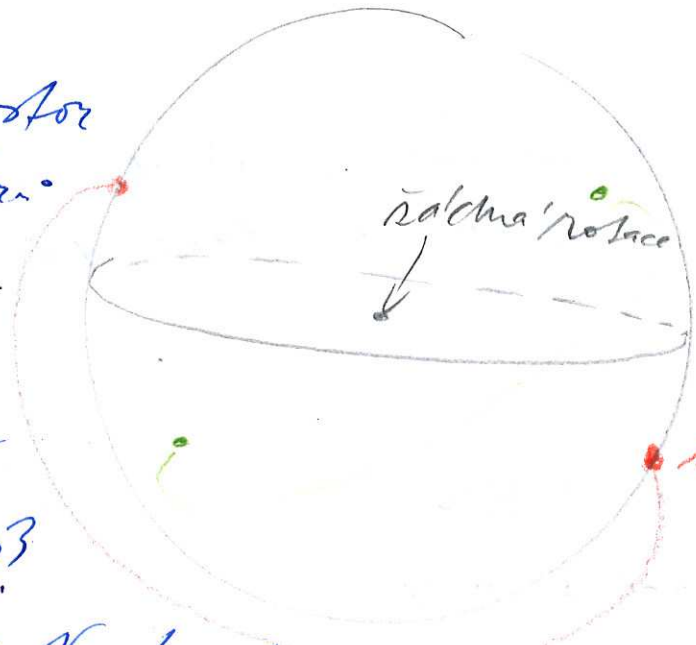
Tedy stereické souřadnice (x, φ, θ) .

Rotace o π a 0 a $-\pi$ jsou identické

Tedy koule má poloměr π a protějná body

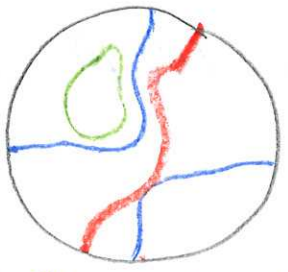
splyvají.

Tento prostor
parametri
mal' jistou
topologii



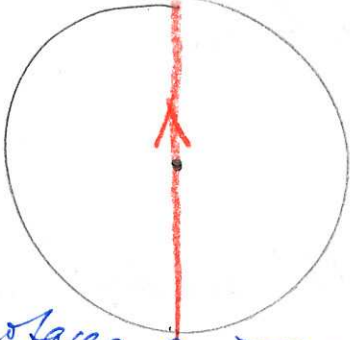
nej' takový
prostor, \mathbb{R}^3 ?

Uvažujme v tomto prostoru uzavřené křivky
kdy ji lze spojitě stáhnout do bodu?

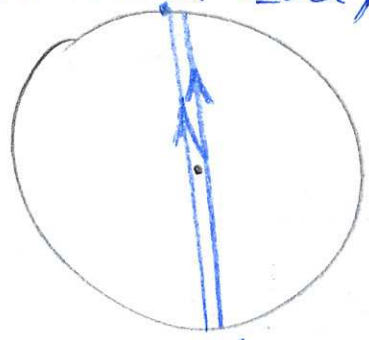


Želtonou lze
červenou ve
modrou ano.

Červenou a modrou trochu zdeformujeme:



rotace 0 až 2π .



rotace 0 až 4π

Souvislost s koncepcí ruky.

To, co není chiralitní a řádnou rotací při
rotaci 0 až 2π není výsledná poloha (ta je stejná, a
stejný je i bod, kterým je reprezentace - počátek),
ale polohy polohy, tj. křivky v tom prostoru
rotací.

Souvislost topologie rotací se spinem

Prosoše rotaci o 4π lze spojitě transformovat na nulovou rotaci; musí libovolná částice mít tu vlastnost, že při otočení o 4π její kvantový stav bude stejný jako před otočením. Generátor rotace je moment hybnosti, proto musí platit

$$e^{\frac{i}{\hbar} 4\pi \hat{L}_{\vec{n}}} |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

kde $\hat{L}_{\vec{n}}$ je operátor momentu hybnosti vzhledem k ose \vec{n} , kolem které jsme stav otočili.

Pro vlastní hodnoty^m operátoru $\hat{L}_{\vec{n}}$ tedy musí platit $\frac{4\pi m}{\hbar} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, a tedy m je buď polocíselné nebo celocíselné.

Proto máme 2 druhy částic - ψ_f , které při posunutí stavu o 2π změním stav (m celocíselné) a ψ_b , m někte se stav vynásobí (-1) .

Naproti tomu pokud by existoval 2D svět, existovalo by 2 druhy spinu, protože rotace o lib. násobek 2π by byly neekvivalentní.