Zajímavá teoretická fyzika
Tomáš Tyc, Brno 2011

Transmutace potenciálů, Luneburgova a Eatonova čočka

Ekvivalence geometrické optiky a klasické mechaniky

Maupertuisův princip v klasické mechanice

$$\delta \int_C \sqrt{2m[E - V(\vec{r})]}\mathrm{d}l = 0. \tag{1}$$

Fermatův princip v optice

$$\delta \int_C n\mathrm{d}l = 0. \tag{2}$$

U obou značí C trajektorii a $\mathrm{d}l$ element trajektorie.

Z analogie Maupertuisova principu a Fermatova principu plyne, že šíření paprsku a optickém prostředí s indexem lomu $n(\vec{r})$ bude probíhat po stejných trajektoriích jako pohyb částice s energií E v potenciálu $V(\vec{r})$, jestliže

$$n(\vec{r}) = \sqrt{2[E - V(\vec{r})]} \qquad \text{neboli} \qquad V(\vec{r}) = E - \frac{n(\vec{r})^2}{2} \tag{3}$$

přičemž hmotnost částice jsme položili rovnu jedné.

Luneburgova čočka

Uvažujme pohyb 2D harmonického oscilátoru s potenciální energií

$$V(r) = \frac{r^2}{2}\,, \tag{4}$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jde o tzv. Hookův potenciál. Ztotožněme rovinu xy s Gaussovou rovinou komplexních čísel $z = x + \mathrm{i}y$. Newtonovy pohybové rovnice $\ddot{x} = -x$, $\ddot{y} = -y$ pak lze zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -z \tag{5}$$

a obecné řešení této rovnice je lineární kombinací funkcí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$. Napišme řešení jako

$$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(a\cos t + \mathrm{i}b\sin t) \tag{6}$$

Čtvrtá integrační konstanta spočívá ve volbě počátečního okamžiku odečtu času, což by v předchozí rovnici odpovídalo nahrazení veličiny t veličinou $t - t_0$. Soubor konstant α, a, b, t_0 pak zcela určuje řešení pohybových rovnic. Konstantu t_0 ale dále položíme rovnu nule. Je-li $\alpha = 0$, pak $z(t) = a\cos t + \mathrm{i}b\sin t$, což je rovnice elipsy s poloosami a, b a středem v počátku. Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ lze pak chápat jako otočení elipsy kolem počátku o úhel α. Takové jsou tedy trajektorie v Hookově potenciálu.

Jak souvisí integrační konstanty α, a, b s energií částice? Platí

$$E = \frac{|\dot{z}^2| + |z^2|}{2} = \frac{1}{2}(|-a\sin t + \mathrm{i}b\cos t|^2 + |a\cos t + \mathrm{i}b\sin t|^2) = \frac{a^2 + b^2}{2} \tag{7}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme energii položit rovnu jedné, $E = 1$, protože potenciál je homogenní funkcí souřadnic[1] a změna energie je proto ekvivalentní naškálování souřadnic. Pro poloosy elips pak bude platit $a^2 + b^2 = 2$ a index lomu v ekvivalentním optickém problému dostaneme z rovnic (3) a (4) jako

$$n(r) = \sqrt{2 - r^2}\,. \tag{8}$$

Spočítejme nyní, pro jaká t dojde k protnutí trajektorie s jednotkovou kružnicí. Z rovnice (6) dostáváme

$$|z|^2 = |a\cos t + i\sqrt{2-a^2}\sin t|^2 = a^2(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2\sin^2 t = 1 + (a^2 - 1)\cos 2t \tag{9}$$

a tedy $z = 1$ pro taková t, pro něž $\cos 2t = 0$, tedy

$$t_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \tag{10}$$

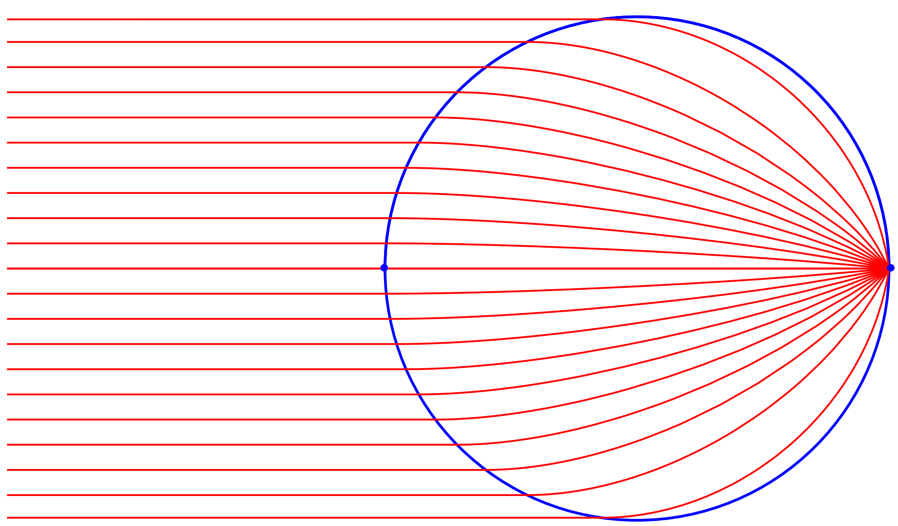
pro celočíselné m.

Označíme-li fázi komplexního čísla $a + b\mathrm{i}$ jako γ, tj. $a + b\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$, pak je velmi snadné z (6) ukázat, že platí

$$z(t_1) = \dot{z}(t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)} \tag{11}$$

Uvažujme soubor paprsků protínajících jednotkovou kružnici ve stejném směru, tj. $\dot{z}(t_0) = c$, kde $|c| = 1$. Vskutku, rychlost částice na jednotkové kružnici musí být jednotková díky tomu, že energie je rovna jedné. Pak vidíme, že $z(t_1) = c$, tedy všechny paprsky se protnou v bodě $z = c$ opět na jednotkové kružnici.

Pokud bychom index lomu položili roven jedné vně jednotkové kružnice, pak uvedený index lomu soustřeďuje rovnoběžné paprsky do jediného bodu. Odpovídající zařízení se nazývá Luneburgova čočka:



Transmutace potenciálů

Mějme v rovině centrální potenciál $U(\vec{\rho})$ a jemu odpovídající rotačně symetrické rozložení indexu lomu $N(\vec{\rho})$. Rovinu $\vec{\rho}$ nazveme *virtuální prostor*.

Nyní provedeme transmutaci indexu lomu. Ztotožníme virtuální prostor, tj. rovinu $\vec{\rho}$, s komplexní rovinou w a konformně ji zobrazíme na jinou komplexní rovinu z pomocí analytické funkce

$$z = f(w) \tag{12}$$

[1] Je-li funkce f homogenní funkcí souřadnic k-tého řádu, platí $f(c\vec{r}) = c^k f(\vec{r})$ pro každé $c > 0$.

Pak nazveme rovinu z *fyzikálním prostorem* $\vec{r}$. Paprsky virtuálního prostoru se zobrazí na paprsky fyzikálního prostoru funkcí f a index lomu $N(\vec{\rho})$ a potenciál $U(\vec{\rho})$ se transformují do nového indexu $n(\vec{r})$ a potenciálu $V(\vec{r})$.

Index lomu transformujeme snadno. Chceme-li, aby optická délka libovolné křivky ve virtuálním prostoru byla stejná jako optická délka jejího obrazu ve fyzikálním prostoru, musí platit

$$n(z)|\mathrm{d}z| = N(w)|\mathrm{d}w|\,, \tag{13}$$

odkud

$$n(z) = N(w)\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|\,. \tag{14}$$

Máme štěstí: protože je derivace $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ nezávislá na směru (fázi) $\mathrm{d}z$, je index lomu také na ní nezávislý a tedy izotropní. Je to přímý důsledek toho, že zobrazení $w \to z = f(w)$ je konformní.

Pro přepočet potenciálů použijeme (3) a dostaneme

$$V(z) = E - \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|^2 [\varepsilon - U(w)]. \tag{15}$$

Zde ε a E značí po řadě energie částice ve virtuálním a fyzikálním prostoru.

Důležitý je případ, kdy jsou oba potenciály U, V centrální, což odpovídá rotačně symetrickému rozložení indexů lomu. Přirozená funkce, která centrální potenciál převede opět na centrální, je mocnina, protože pak $|\mathrm{d}w/\mathrm{d}z|$ nezávisí na fázi w ani na fázi z:

$$z = w^k\,, \tag{16}$$

kde $k \in \mathbb{R}$. Tehdy $w = z^{1/k}$, $|\mathrm{d}w/\mathrm{d}z| = z^{1/k-1}/|k|$ a

$$n(r) = \frac{N(\rho(r))r^{1/k-1}}{|k|} \tag{17}$$

a

$$V(r) = E - \frac{r^{2(1-k)/k}}{k^2}\left(\varepsilon - U(r^{1/k})\right) \tag{18}$$

Hodnota E může být zvolena libovolně, při její změně se změní celý potenciál $V(r)$, takže kinetická energie – jediná relevantní veličina – zůstane v každém bodě $z$stejná.

- *Transmutace Hookova potenciálu v Newtonův*

  Transmutujme Hookův potenciál $U(\rho) = \alpha\rho^2$ pomocí (17) s $k = 2$. Z rovnice (18) pak dostaneme

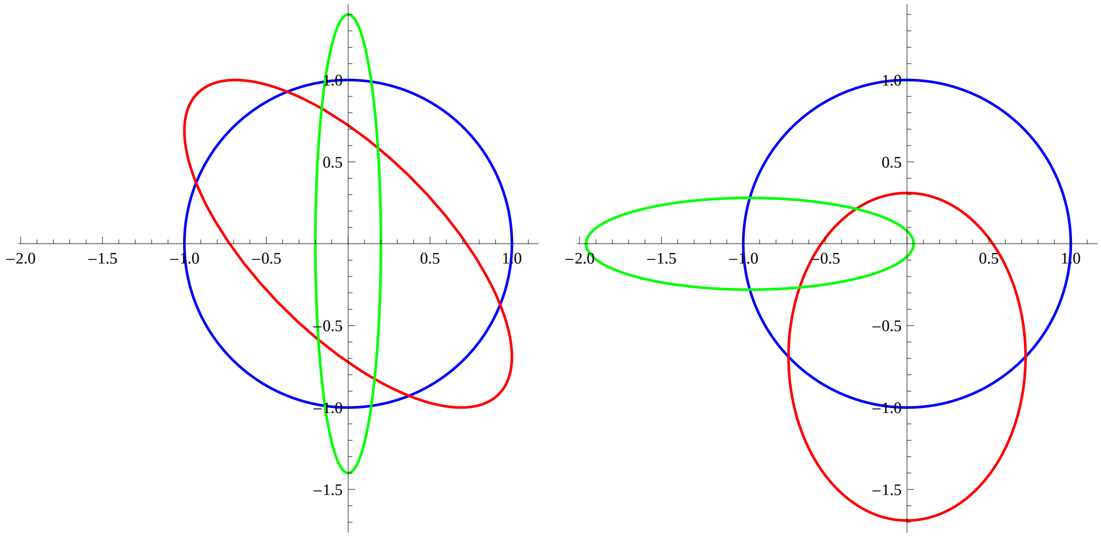
  $$V(r) = E + \frac{\alpha}{4} - \frac{\varepsilon}{4r} \tag{19}$$

  Může nastat několik případů:

  (i) Pro $\alpha > 0, \varepsilon > 0$ položíme $E = -\alpha/4$ a dostaneme $V(r) = -\varepsilon/(4r)$, tedy přitažlivý Newtonův potenciál se zápornou energií. Tomu odpovídá pohyb po elipse, viz obr. 1.

  (ii) Nechť $\alpha = 0, \varepsilon > 0$. To odpovídá konstantnímu potenciálu $U(\rho) = 0$, tedy volnému pohybu ve virtuálním prostoru. Položíme $E = 0$ a dostaneme $V(r) = -\varepsilon/(4r)$, tedy opět přitažlivý Newtonův potenciál. Energie ve fyzikálním prostoru je ale nyní nulová a pohyb parabolický – viz obr. 2.

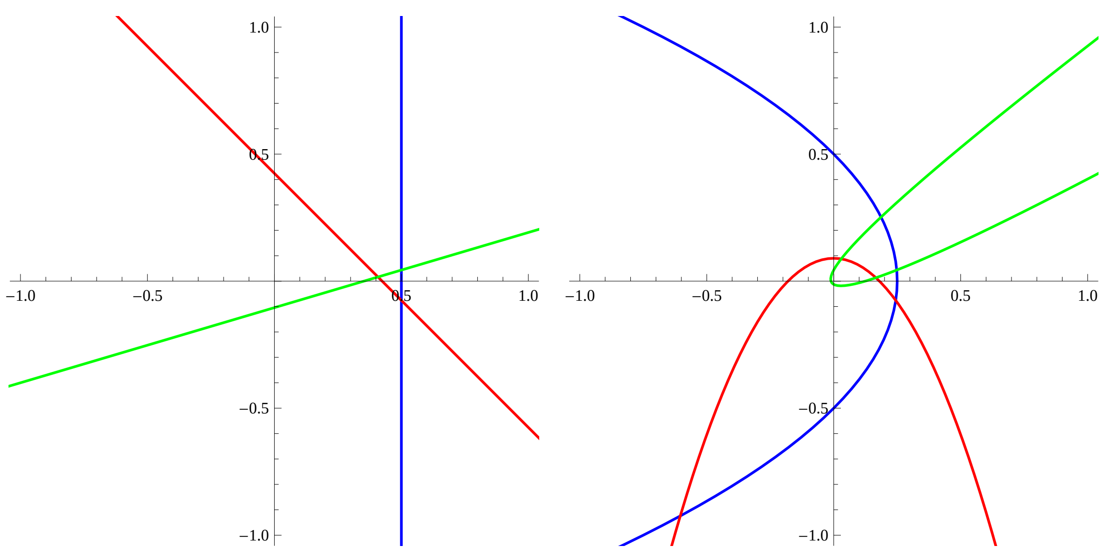
  (iii) Nechť $\alpha < 0, \varepsilon > 0$. Ve virtuálním prostoru máme nyní odpudivý harmonický potenciál. Položíme $E = |\alpha|/4$ a znovu dostaneme stejný přitažlivý Newtonův potenciál $V(r) = -\varepsilon/(4r)$, tentokrát ale s kladnou energií, čemuž odpovídá pohyb po hyperbole.



Obrázek 1: Transmutace Hookových elips v Keplerovy elipsy

(iv) Nechť $\alpha < 0, \varepsilon < 0$. Potenciál ve virtuálním prostoru je stejný jak předtím. Položíme $E = |\alpha|/4$ a dostáváme odpudivý Coulombův potenciál $V(r) = |\varepsilon|/(4r)$. Ve fyzikálním prostoru máme hyperbolický pohyb, centrum potenciálu je ale u opačné větve hyperboly, než po které nastává pohyb.

(v) Nechť $\alpha < 0, \varepsilon = 0$. Potenciál ve virtuálním prostoru je stejný jako předtím. Položíme $E = |\alpha|/4$ a dostaneme překvapivě $V(r) = 0$ a trajektorie jsou přímky.



Obrázek 2: Transmutace konstantního potenciálu v Keplerův potenciál s nulovou energií, kde trajektorie jsou paraboly.