

Teorie podobnosti

Tomáš Tyc

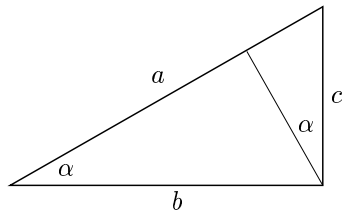
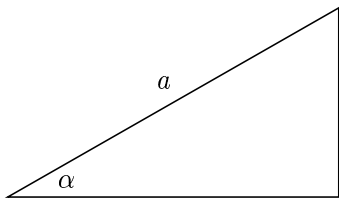
Zajímavá fyzika

Co je teorie podobnosti?

- Velice zajímavá oblast fyziky
- Mnoho výsledků dostaneme jen na základě rozměrové analýzy; rozměr je ve fyzice důležitý!

Co je teorie podobnosti?

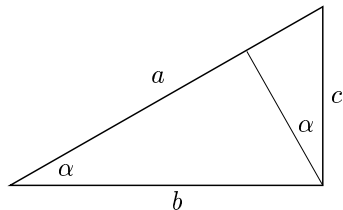
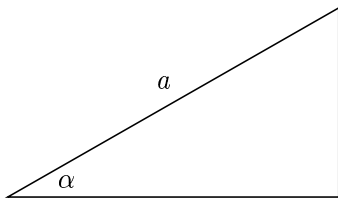
- Velice zajímavá oblast fyziky
- Mnoho výsledků dostaneme jen na základě rozměrové analýzy; rozměr je ve fyzice důležitý!
- Pěkný příklad:



$$S = a^2 f(\alpha)$$

Co je teorie podobnosti?

- Velice zajímavá oblast fyziky
- Mnoho výsledků dostaneme jen na základě rozměrové analýzy; rozměr je ve fyzice důležitý!
- Pěkný příklad:



$$S = a^2 f(\alpha)$$

$$a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

– Pythagorova věta!

Jak vnímají svět mravenci?

- Představme si, že bychom se zmenšili n krát. Jak by z našeho pohledu vypadal svět kolem nás?
- Nebo jiná otázka: Zmenšili bychom se n krát ; co by se ještě muselo změnit, aby svět kolem nás vypadal stejně, jak jej vnímáme nyní?
- Abychom mohli na tyto otázky odpovědět, je třeba definovat nějaké veličiny, které by se nezměnily, a z nich odvodit ostatní.
- Chceme například, aby např. atomy a struktura hmoty byla stále stejná.

Zrychlení

- Představme si toto: zmenším se $10\times$, jsem stále ze stejného materiálu. Chci pohnout rukou. Jaké vyvinu **zrychlení**? Síla svalu \propto průřez $\propto l^2$, hmotnost ruky $\propto l^3$:

$$a = \frac{F}{m}, \quad F \propto l^2, \quad m \propto l^3 \quad \Rightarrow \quad a \propto l^{-1}$$

– tedy ruka bude mít $10\times$ větší zrychlení!

- Jak budeme vnímat **tíhové zrychlení** Země? – projeví se například jako mechanické napětí v našich kostech při stání na zemi:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}, \quad m \propto l^3, \quad S \propto l^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma \propto l^1,$$

– budu tedy vnímat $10\times$ slabší napětí v nohou – podobně jako kdybych zůstal v původní velikosti a tíhové zrychlení se $10\times$ zmenšilo!

- To je v souladu s předchozí úvahou

Zrychlení

- Mravenec je asi $100\times$ menší než člověk – zemské zrychlení mu tedy připadá $100\times$ slabší než nám; unese tedy mnohonásobně více než my
- Když upadne dítě na zem, zraní se méně než dospělý
- Pro velká zvířata je naopak zemské tíhové zrychlení efektivně větší
- Velcí savci mají mohutnější kostru než malí
- Stébla trávy jsou relativně mnohem tenčí než kmeny stromů

- Jakou dosáhu **rychlost**? Bude snad také $10\times$ větší? Ne!
Zkusme energiovou úvahu:

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad E \propto l^3, \quad m \propto l^3 \quad \Rightarrow \quad v \propto l^0$$

Rychlost bude stejná. I z druhé strany, při rovnoměrně zrychleném pohybu platí

$$v = \sqrt{2al}, \quad a \propto l^{-1}, \quad \Rightarrow \quad v \propto l^0$$

- Délka skoku:**

$$d = \frac{v^2 \sin \alpha}{g}$$

– bude nezávislá na velikosti zvířete, ale pro malá zvířata bude relativně větší (ovšem jen bez odporu vzduchu) – blecha!

- Malá zvířata vyvinou podobnou rychlost jako velká
- Mají ale menší krok – musejí kmitat nožičkami s větší frekvencí
- Odpovídá zkušenosti – frekvence kroků mravence je výrazně vyšší než naše
- Kmitání křídly – nejrychleji kmitá moucha, pak kolibřík, vrabec, holub a nejpomaleji albatros.
- I srdeční frekvence je tím větší, čím je tvor menší (např. u myši, ale i u novorozence je větší než u dospělého člověka).
- Čas odvozený z rychlosti

$$t = \frac{l}{v}, \quad v \propto l^0 \quad \Rightarrow \quad t \propto l$$

- Čas odvozený ze zrychlení

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}, \quad a \propto l^{-1} \quad \Rightarrow \quad t \propto l$$

- Jak rychle by šly zmenšené **mechanické hodinky**?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{moment setrvačnosti}}{\text{tuhost torzní pružiny}}}, \quad k \propto l^3, \quad J \propto l^5 \quad \Rightarrow \quad T \propto l$$

– hodinky by šly rychleji!

- Jak rychle by šly zmenšené **mechanické hodinky**?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{moment setrvačnosti}}{\text{tuhost torzní pružiny}}}, \quad k \propto l^3, \quad J \propto l^5 \quad \Rightarrow \quad T \propto l$$

– hodinky by šly rychleji!

- A jak rychle by šly zmenšené **křemenné hodinky** (quartz)?

Odvozují čas od periody kmitů křemenného piezokrystalu:

$$T = 2 \frac{\text{délka krystalu}}{\text{rychlost zvuku}} \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{l}{l^0} = l$$

– i zde platí, že hodinky půjdou tím rychleji, čím jsou menší!

- Jak rychle by šly zmenšené **mechanické hodinky**?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{moment setrvačnosti}}{\text{tuhost torzní pružiny}}}, \quad k \propto l^3, \quad J \propto l^5 \quad \Rightarrow \quad T \propto l$$

– hodinky by šly rychleji!

- A jak rychle by šly zmenšené **křemenné hodinky** (quartz)?

Odvozují čas od periody kmitů křemenného piezokrystalu:

$$T = 2 \frac{\text{délka krystalu}}{\text{rychlost zvuku}} \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{l}{l^0} = l$$

– i zde platí, že hodinky půjdou tím rychleji, čím jsou menší!

- Aby $T \propto l$ platilo i pro **kyvadlové hodiny**, musíme při jejich zmenšení zvětšit tíhové zrychlení:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g \propto l^{-1}, \quad \Rightarrow \quad T \propto l$$

Nové jednotky

- Představme si, že se $n \times$ zmenšíme
- Zavedeme nové jednotky, které jsou pro nás přirozené:
 - délka: coul [c], $1 \text{ m} = n \text{ c}$
 - hmotnost: unce [u], $1 \text{ kg} = n^3 \text{ u}$
 - čas: mžik [z], $1 \text{ s} = n \text{ z}$

veličina	označení	SI	mravenec	přev. koef.	pro $n = 10$
délka	l	m	coul (c)	n^1	10
hmotnost	m	kg	unce (u)	n^3	1000
čas	t	s	mžik (z)	n^1	10

Jednotky ostatních mechanických veličin už z těchto odvodíme!

Tabulka jednotek

veličina	označ.	SI	mravenec	přev. koef.	n=10
délka	l	m	coul (c)	n^1	10
hmotnost	m	kg	unce (u)	n^3	1000
čas	t	s	mžik (z)	n^1	10
rychlost	v	$m s^{-1}$	cz^{-1}	n^0	1
síla	F	$N, kg m s^{-2}$	$u c z^{-2}$	n^2	100
zrychlení	a	$m s^{-2}$	$c z^{-2}$	n^{-1}	1/10
hustota	ρ	$kg m^{-3}$	$u c^{-3}$	n^0	1
energie	E	$J, kg m^2 s^{-2}$	$u c^2 z^{-2}$	n^3	1000
tlak	p	$Pa, kg m^{-1} s^{-2}$	$u c^{-1} z^{-2}$	n^0	1
povrch. nap.	σ	$kg s^{-2}$	$u z^{-2}$	n^1	10
viskozita	ν	$m^2 s^{-1}$	$c^2 z^{-1}$	n^1	10
akce	S	$kg m^2 s^{-1}$	$u c^2 z^{-1}$	n^4	10000

Povrchové napětí a viskozita

- V malých měřítkách je povrchové napětí efektivně větší, tíhové zrychlení je naopak efektivně menší; proto tam, kde se „utkávají“ tyto dva efekty, bude na malých škálách vítězit povrchové napětí a na velkých gravitace. Důsledky: kapky rosy visí na trávě a nepadnou, vodoměrky běhají po vodě, brouk potápník si nese zásobu vzduchu na zadečku díky nesmáčivé plošce
- Rovněž viskozita je na malých škálách významnější než na velkých: mravenec si neublíží při pádu z velké výšky díky odporu vzduchu, z velkého sudu vyteče med podobně jako voda, z malého hrnku poteče naopak velmi viskózně

Fundamentální konstanty

- Planckova

$$\hbar \approx 10^{-34} \text{ Js} = n^4 \cdot 10^{-34} \text{ uc}^2 \text{ z}^{-1}$$

Jak velké musí být n , aby Planckova konstanta byla v řádu jednotek?

$$\hbar \approx 1 \text{ uc}^2 \text{ z}^{-1} \text{ pro } n \approx 3 \cdot 10^8 \Rightarrow c = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m.}$$

Pro takto velká tělesa se začne projevovat kvantová mechanika.

- Boltzmannova

$$k \approx 10^{-23} \text{ JK}^{-1} = n^3 \cdot 10^{-23} \text{ uc}^2 \text{ z}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

Tedy $kT \approx 1 \text{ uc}^2 \text{ z}^{-2}$ při $T = 300 \text{ K}$ pro $n = 7 \cdot 10^6 \Rightarrow c = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Pro takto velká tělesa se začnou projevovat tepelné fluktuace, Brownův pohyb atd.

Potíže v mikroskopickém světě

Kdybychom se hodně zmenšili, měli bychom docela problémy:

- Byli bychom kvantově rozmazaní
- Vypadali bychom jako postižení Parkinsonovou chorobou
- Museli bychom se prodírat velmi viskózním vzduchem
- Sotva bychom se mohli nadechnout (ale to by nám nevadilo, protože bychom dýchali celým povrchem těla)
- Každá kapka by nás mohla lapit – museli bychom se potírat vodoodpudivým krémem
- Ale pak bychom se zase nenapili
- Každý krok obtížný – nutnost překonávat van der Waalsovy síly
- Při podání ruky příteli – možná by zůstala v jeho ruce

- Schrödingerova rovnice pro atom vodíku

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi$$

- Zvolme prostorovou a časovou jednotku l a l/c , kde l je zatím libovolné a c je rychlost světla, a zavedme bezrozměrnou souřadnici $r' = r/l$ a bezrozměrný čas $t' = t/(l/c)$. V těchto jednotkách rovnici přepíšeme takto:

$$\frac{ilm_e c}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t'} = -\Delta' \psi - 2 \frac{e^2 m_e l}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{r'} \psi$$

Zde čárkované veličiny se vztahují k novým jednotkám

- Volba l není ničím omezena. Zvolíme je tedy tak, aby faktor v potenciální energii byl roven jedné:

$$\frac{e^2 m_e l}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = r_B$$

– tedy l nám vyšlo jako přirozená jednotka délky pro atom, tzv. Bohrov poloměr atomu.

- Člen u časové derivace:

$$\frac{l m_e c}{\hbar} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{e^2} = \frac{1}{\alpha},$$

kde α je tzv. konstanta jemné struktury. To je jediný parametr, na němž rovnice závisí.

Konstanta jemné struktury

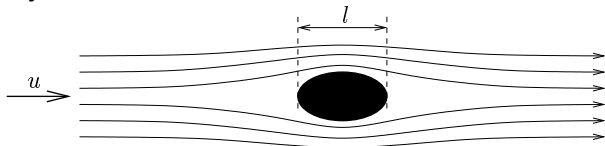
- Proč se zde objevuje rychlost světla? Ne kvůli samotnému atomu, ale při vyzáření fotonu bude na c záviset poměr vlnové délky fotonu a l . Tedy na c závisí λ měřené v jednotkách l .
- Dva světy jsou si podobné, jestliže jsou si rovny konstanty jemné struktury.
- α – naprosto fundamentální konstanta. Právě tím, že nemá fyzikální rozměr a proto ji už nelze nijak škálovat.
- Změna některé základní fyzikální konstanty (\hbar, c, e, \dots) – ekvivalentní změně α plus přeškálování
- Změnu některé ze základních fyzikálních konstant ($\hbar, c, e, \varepsilon_0$) lze poznat jedině skrze změnu konstanty jemné struktury

Reynoldsovo číslo

- Navier–Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou viskózní kapalinu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Situace – např. obtékání tělesa o charakteristickém rozměru l kapalinou rychlostí u .



- Převědeme rovnici do bezrozměrných veličin: rychlosti měříme v jednotkách u souřadnice v jednotkách l , čas v jednotkách l/u a poměr p/ρ v jednotkách u^2 . Zavádíme tedy bezrozměrné veličiny

$$\mathbf{r} = l \mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = u \mathbf{v}', \quad t = \frac{l}{u} t', \quad \frac{p}{\rho} = u^2 \left(\frac{p}{\rho} \right)'$$

- Dosazením

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla' \left(\frac{p}{\rho} \right)' + \frac{\nu}{ul} \Delta' \mathbf{v}'$$

Kdy budou dvě proudění podobná? Když tato bezrozměrná rovnice bude pro obě stejná, tedy jestliže poměr ν/ul bude stejný. Bezrozměrné Reynoldsovo číslo

$$R = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\eta}$$

určuje charakter proudění

- pokud je R stejné pro dvě situace obtékání geometricky podobných těles, bude i charakter obtékání stejný (turbulentní, laminární apod.).

Aplikace – odporová síla na těleso obtékané kapalinou

- Vektor rychlosti v daném bodě

$$\mathbf{v} = uf \left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R \right)$$

- Tlak v daném bodě kapaliny

$$p = \rho u^2 f \left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R \right)$$

- odporová síla působící na těleso

$$F = \rho u^2 l^2 f(R) = \rho u^2 l^2 f \left(\frac{\rho u l}{\eta} \right)$$

- Stokesův vzorec $F = 6\pi\eta ru$ splňuje rovnici pro $f(R) = 6\pi/R$; charakteristický rozměr $l = r$ – poloměr obtékané koule.
- Newtonův vzorec $F = C\rho u^2 S$ splňuje rovnici pro $f(R) = C$