g_0 „coupling" constant
.. třeba e v elmag
G v Newtonově gravitaci

$F(x)$ .. fyzikální veličina, která lze měřit

mám teorii s jedním volným parametrem g_0 (třeba QED, pro vysoké energie je hmotnost elektronu (další volný parametr) zanedbatelná)

$F(x)$ budeme počítat „poruchově" v počtu interakcí

$$F(x) = g_0 + g_0^2 F_1(x) + g_0^3 F_2(x) + \dots$$ ... předefinováním F se dostanou skutečné rozvoje v QFT

$F_1(x)$ jsou často divergující funkce

např $F_1(x) = \alpha \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda + x}$ ← diverguje logaritmicky

amplituda při
integraci přes virtuální ~~stavy~~ stavy

- pozorování: jelikož mám jen jeden volný parametr, stačí pouze jedno měření, řekněme v bodě $x=\mu$, k zafixování (určení) teorie
  - zafixuje to g_0

- je jedno, jestli bude teorie parametrizována pomocí g_0, které je výhodné pro výpočty, nebo pomocí $F(\mu)$, které je fyzikální (musí být konečný, jelikož)

- renormalizační hypotéza
  - „nekonečno" nepochází z funkcí $F_1(x)$, ale z volby nefyzikálního parametru g_0, který je vhodný pro počítání, ale není vhodný pro

- proto přepíšeme $F(x)$ do fyzikálního couplingu naměřeného v bodě μ.

nadefinujeme renormalizovanou (fyzikální) coupling constant jako

$$\boxed{g_R = F(\mu)}$$

- ale jen tohle nefunguje, jelikož rozvoj $F(x)$ pořád není dobře definovaný, musíme provést ještě jedno kouzlo, regularizaci (= zavedení parametru Λ)
- regularizace se skládá ze dvou základních myšlenek
  - definujeme poruchový rozvoj $F(x)$ pomocí limity Λ, Ξ
    1, $F_\Lambda(x)$ je dobře definovaná (neobsahuje nekonečna) předtím než provedeme limitu
    2, po provedení renormalizace, po provedení limity dostaneme původní formální výraz
- zavedeme novou množinu dobře definovaných funkcí F_Λ a $F_{\Lambda,i}$

Λ - regulátor, cut-off, fyzikální význam: největší energie, do které naše QFT ještě funguje (nelze očekávat, že jedna teorie popisuje všechnu fyziku NG, GR i CM, QM)

$$F_\Lambda(x) = F_\Lambda(x, g_0, \Lambda) = g_0 + g_0^2 F_{\Lambda,1}(x) + g_0^3 F_{\Lambda,2}(x) + \dots \quad \left(\lim_{\Lambda\to\infty} F(x)\right)$$

- je tady ∞ mnoho způsobů, jak provést regularizaci

např. v našem případě zavedeme cut-off
$$F_{\Lambda,1}(x) = \alpha \int_0^\Lambda \frac{d\Delta}{\Delta + x}$$

různé regularizace můžou vést k různým mezivýpočtům, ale všechny

• teď již můžeme ~~...~~ použít $F(\mu) = g_R$, čímž dostaneme dobře definovaný výraz $F_\Lambda(x, g_R, \Lambda)$ v řeči fyzikálního couplingu g_R

• podle renormalizační hypotézy tento výraz dává smysl i po provedení limity

obrázek

$$F(x, g_0) \xrightarrow{\text{regularizace}} F_\Lambda(x, g_0, \Lambda) \xrightarrow[\text{renormalizace}]{\substack{\text{měření} \\ F(\mu) = g_R}} F_\Lambda(x, g_R, \Lambda, \mu) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Lambda \to \infty} F(x, g_R, \mu) = F(x, g_R)$$

renormalizační hypotéza a musí platit $F(\mu, g_R) = g_R$

první řád v g_0: $\boxed{g_0 = g_R \delta_1 + g_R^2 \delta_2 + g_R^3 \delta_3 + \dots}$ $\delta_i(\Lambda, \mu)$

$$F_\Lambda(x) = g_0 + O(g_0^2)$$

$$F(\mu) = F(x)|_{x=\mu} = g_0 + O(g_0^2)$$

$$\shortparallel$$

$$g_R$$

$$\Rightarrow \quad g_R = g_0 + O(g_0^2)$$

$$g_0 = \overset{\delta_1}{g_R} + \delta_2 g_R^2 + \delta_3 g_R^3 + \dots \Rightarrow g_0 = g_R + O(g_R^2)$$

$$O(g_R^2) + O(g_R^3)$$

druhý řád v g_0:

$$F_\Lambda(x) = g_0 + g_0^2 F_{\Lambda,1}(x) + O(g_0^3) = g_R + \delta_2 g_R^2 + g_R^2 F_{\Lambda,1} + O(g_R^3)$$

$$F(x) = \lim_{\Lambda \to \infty} \left(g_R + \delta_2 g_R^2 + g_R^2 F_{\Lambda,1}(x) \right) \Big| = g_R \Rightarrow \delta_2 g_R^2 = - g_R^2 F_{1,1}(\mu)$$

nezávisí na Λ

po naší přízemi $\quad \delta_2 g_R^2 = -g_R^2 \alpha \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{\Lambda+\mu}$

$$= -g_R^2 \alpha \ln\left|\frac{\Lambda+\mu}{\mu}\right| \xrightarrow{\Lambda\to\infty} \infty$$

dosadíme do rozvoje $F_1(x)$

$$F_\Lambda(x) = g_R \underset{\Lambda\to\infty}{} \left(-\underbrace{g_R^2 F_{1,1}(\mu)}_{-\infty} + \underbrace{g_R^2 F_{1,1}(x)}_{+\infty} \right) + O(g_R^3)$$

což pokud mají obě funkce stejný typ divergence může být libovolné reálné číslo

$$\infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x-m)(x-n)} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-(m+n)x+mn-x^2}{\sqrt{(x-m)(x-n)}+x} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \frac{-(m+n)+\frac{mn}{x}}{\sqrt{1-\frac{(m+n)}{x}+\frac{mn}{x^2}}+1}$$

$$= -\frac{m+n}{2} \underset{\neq 0}{\in} \mathbb{R}$$

V našem případě po provedení limity máme

$$F(x, g_R) = \lim_{\Lambda\to\infty} F_\Lambda(x, g_R, \Lambda, \mu) = \lim_{\Lambda\to\infty} \left(g_R + g_R^2 \alpha \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{x+\Lambda} - g_R^2 \alpha \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{\Lambda+\mu} \right) + O(g_R^3)$$

$$\int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{x+\Lambda} - \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{\Lambda+\mu}$$

u limity

$$\int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{(x+\Lambda)(\Lambda+\mu)} (\Lambda+\mu-x-\Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{(x+\Lambda)(\Lambda+\mu)} (\mu-x)$$

$$F(x, g_R) = g_R + g_R^2 \alpha (\mu-x) \int_0^\infty \frac{d\Lambda}{(x+\Lambda)(\Lambda+\mu)} + O(g_R^3)$$

což nediverguje! navíc $F(\mu, g_R) = g_R$!

$$\int_0^\infty \frac{d\Delta}{(x+\Delta)(\Delta+\mu)} = \int_0^\infty \frac{d\Delta}{\Delta^2+\Delta(x+\mu)+\cancel{x}\mu}$$

~~$\Delta = \beta - \mu$, $d\Delta = d\beta$, $\infty \to \infty$, $0 \to \mu$~~

$\Delta = \beta - \frac{\mu+x}{2}$

$d\Delta = d\beta$

$\beta^2 - (x+\mu)\beta + \left(\frac{\mu+x}{2}\right)^2$

$\infty \to \infty$

$0 \to \frac{\mu+x}{2}$

$$= \int_{\frac{\mu+x}{2}}^\infty \frac{d\beta}{\beta^2 - (x+\mu)\beta + \left(\frac{\mu+x}{2}\right)^2 + \beta(x+\mu) + x\mu - \frac{(x+\mu)^2}{2}}$$

$$= \int_{\frac{\mu+x}{2}}^\infty \frac{d\beta}{\beta^2 - \frac{(x+\mu)^2}{4} + x\mu} = \frac{1}{\frac{x+\mu}{4} - x\mu} \int_{\frac{\mu+x}{2}}^\infty \frac{d\beta}{\frac{\beta^2}{\sqrt{\frac{(x+\mu)^2}{4} - x\mu}} - 1}$$

$\to$ arctgh, což konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$

„Zázračně" jsme se zbavili ∞?

Ne, nekonečna se stejně někde schovávají, v rozvoji g_0

$$g_0 = g_R + c_2 g_R^2 + \mathcal{O}(g_R^3)$$

tato pro $\Lambda \to \infty$ diverguje

takže nekonečno z $F_1(x)$ v rozvoji $F(x)$ se dostalo do coupling constanty g_0, ale to nevadí g_0 není fyzikální, použili jsme ji pouze pro mezivýpočty

Interpretace g_0 je tzv. „bare" coupling, který nelze měřit