MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Viktor Votruba

Hydrodynamika obálek horkých hvězd

Disertační práce

Školitel: RNDr. Jiří Kubát, CSc.

Brno, 2006

Věda se nesnaží o vysvětlení, stěží se pokouší interpretovat, převážně sestavuje modely. Modelem se myslí matematický konstrukt, který spolu s jistou verbální interpretací popisuje pozorované jevy. Ospravedlněním takového matematického konstruktu je jedině a pouze to, že se od něj očekává, že bude fungovat.

John von Neumann

Chtěl bych poděkovat za pomoc a cenné rady svému školiteli Dr. Jiřímu Kubátovi, a také konzultantovi Dr. Achimu Feldmeierovi. Dále za obrovskou trpělivost a podporu při tvorbě této práce vedoucímu Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky prof. Michalu Lencovi a vedoucímu stelárního oddělení AsÚ AV ČR Dr. Pavlu Koubskému.

Prohlašuji, že jsem práci a uvedené výsledky vypracoval samostatně, pouze s použitím uvedené literatury a podkladů

Viktor Votruba

Abstrakt

V disertační práci jsem se zaměřil na studium časového průběhu hydrodynamických procesů ve hvězdném větru horkých hvězd. Hvězdný vítr horkých hvězd je urychlován převážně díky interakci záření vycházejícího z hvězdy s resonančními čárami iontů C, N, O, Fe obsažených ve hvězdném větru. Tuto interakci lze popsat pomocí zářivého zrychlení. Za předpokladu bodové hvězdy a platnosti Sobolevovy aproximace byl výpočet zářivého zrychlení v CAK teorii výrazně zjednodušen. S použitím zjednodušeného výrazu pro zářivé zrychlení převzatého z CAK teorie jsem aplikoval jednosložkový hydrodynamický kód při numerické simulaci hvězdného větru horkých hvězd. Nejprve jsem analyzoval vznik rázové vlny, která se ve větru vytvořila během přechodu z počátečních podmínek k CAK řešení a její vliv na konvergenci CAK řešení. Dále jsem zkoumal případ pulsujících obálek, které se okolo hvězdy tvoří, pokud zářivou sílu ve vzdálenosti, kde je hmota stále gravitačně vázaná ke hvězdě, položíme rovnu nule. Hmota je v daném místě vázaná ke hvězdě, pokud je lokální rychlost menší než rychlost úniková. Při tomto procesu se generují pravidelně pulsující obálky.

Přepoklad jednosložkového hvězdného větru, který byl také použit v CAK teorii, je použitelný pro většinu horkých hvězd spektrálního typu O a B. Ale pro hvězdy s málo hustým hvězdným větrem je potřeba detailní popis interakce, ve kterém záření působí pouze na absorbující ionty a elektrony, které potom předávají část své hybnosti díky Coulombickým srážkám pasivní plazmě. Dynamický efekt těchto Coulombických srážek na plasmu je popsán dynamickým třením. Vyvinul jsem metodu pro řešení časově závislých hydrodynamických procesů ve vícesložkovém hvězdném větru. Započtením dynamického tření do hydrodynamických rovnic se v nich objevuje silné tlumení, což způsobuje značné numerické potíže. Nalezl jsem postup, jak obejít numerické potíže spojené se silným tlumením. Aplikoval jsem svou metodu na horké hvězdy s dobře vázaným hvězdným větrem. Řešení velmi rychle dokonvergovalo z počátečního odhadu k řešení, které korespondovalo s předpokládaným CAK řešením. Tento výsledek jsem prověřil na čtyřech různých hvězdách.

Za určitých podmínek, převážně nízké hustoty hvězdného větru, přestávají být Coulombické srážky dostatečně efektivní, přenos hybnosti mezi absorbujícími ionty a pasivní plazmou se přeruší a dojde k oddělení obou složek. Absorbující ionty jsou v takovém případě silně urychlovány zářivou silou, zatímco pasivní plazma je zpomalována gravitační silou. V tomto případě provedené numerické simulace potvrdily přítomonost silné nestability, generované při oddělovaní obou složek.

Dissertation Abstract

I focused on the hydrodynamical simulation of radiatively driven stellar wind from hot stars. Stellar wind from hot stars is mainly accelerated by the interaction of ultraviolet photospheric radiation with the resonance lines of ions, such as C, N, O, Fe. This interaction is described by radiative acceleration. Assuming a point source and a one-component flow, the calculation of radiative acceleration was greatly simplified in the Castor, Abbott, and Klein (CAK) theory. By including radiative acceleration, I used a hydrodynamical code to simulate the CAK solution for a one component stellar wind. I analyzed the generation of a shockwave during the calculation and its influence on the CAK solution. I also analyzed a pulsating shell, which may occur, when we artificially switch off the radiative acceleration at a distance, where the local velocity is lower than the escape velocity. This process generates a periodically pulsating shell.

The assumption of a one-component flow used by the CAK theory is acceptable for most cases of stellar winds from O stars and hot B stars. But for stars with a low density wind it is necessary to use a detailed description of momentum transfer. Radiation is acting on absorbing ions and electrons only, and these particles share momentum through Coulomb collisions with the remaining passive part of the plasma (namely protons). The dynamical effect of Coulomb collisions on plasma is well described by dynamical friction. I developed a method for time-dependent hydrodynamical simulations of a multicomponent stellar wind. With the presence of dynamical friction, hydrodynamical equations are very stiff. I developed a method how to solve numerical difficulties due to the stiffness of the equations. I applied my code to hot stars with well-coupled stellar wind. The solution quickly evolves from an initial estimate to a solution, which corresponds to the CAK solution. I checked this result using our code for four different stars. Under certain conditions, namely a low wind density, Coulomb interactions are so small that they stop the momentum transfer between the passive bulk of plasma and absorbing ions and as a result, the wind components decouple at a certain point. From this point, called the decoupling radius, absorbing ions are highly accelerated by the radiative force, while passive plasma is decelerated by gravity. For this case I verified a theoretical prediction about strong decoupling instability, which occurs when one simulates this low density wind.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Proč horké hvězdy

V této krátké pasáži nastíním zaměření disertační práce a důvody, které mě vedly ke zvolení tohoto tématu. V následujících pasážích je potom tato motivace podrobně rozpracována i s uvedením patřičných odkazů a rozšířena o stručné shrnutí výsledků dosažených do této doby.

Jak název práce napovídá, disertační práce se zabývá hydrodynamickým modelováním obálek hvězd horkých hvězd. Horké hvězdy, zejména hvězdy spektrální třídy O a B, byly dlouho dobu na okraji zájmu teoretických studií v porovnání s ostatními spektrálními třídami. A to i přes to (nebo spíše právě proto), že svými fyzikálními parametry představovaly mezi hvězdami extrémní objekty. Teprve s objevem existence silného hvězdného větru nastal rozmach vědeckého zájmu o tyto hvězdy. Ukázalo se, že horké hvězdy uvolňují díky intenzivnímu hvězdnému větru do mezihvězdného prostoru velké množství hmoty. Tento příspěvek do mezihvězdné hmoty je natolik podstatný, že významným způsobem ovlivňuje mezihvězdný prostor a tvorbu dalších hvězd či hvězdných celků.

Teoretické práce se nejprve zabývaly samotnou podstatou hnacího mechanismu hvězdného větru, který by vysvětlil pozorovanou rychlost ztráty hmoty. Mechanismus koronálního větru, dobře fungující například u našeho Slunce, u horkých hvězd není možný díky neexistenci koróny. Zjistilo se, že hnacím mechanismem v případě hvězdného větru horkých hvězd je samotné záření. Fotony interagující s hmotou mohou na částice přenášet svoji hybnost. Fyzikálně je celý proces popsán rovnicí přenosu záření a jejímy momenty. Výzkum horkých hvězd tak významně přispěl k rozvoji teorie přenosu záření včetně numerických metod řešení rovnice přenosu záření.

Přes extrémní složitost problému, spočívající v současném řešení rovnic popisujících interakci hmoty se zářením a hydrodynamických rovnic, se podařilo s použitím aproximativních přístupů sestavit zjednodušený hydrodynamický popis s přibližným výpočtem zářivé síly určující množství přenesené hybnosti. Tento model umožnil analytické řešení hydrodynamických rovnic, přičemž předpovězené charakteristiky hvězdného větru, jako množství uvolněné hmoty za jednotku času či rychlost urychlovaného materiálu, obstály v konfrontaci s pozorovanými daty. Jednoduchý popis je stále hojně používán v různých modifikacích v mnoha současných modelech, a to právě pro svou jednoduchost, která umožňuje obejít výpočetní náročnost problému.

I když během posledních třiceti let bylo dosaženo obrovského pokroku v teorii horkých hvězd, ukazuje se, že naše chápání a popis hvězdného hvětru horkých hvězd je značně neúplný. S množstvím teoretických prací i pozorování zaměřených na horké hvězdy se objevilo mnoho doposud nevysvětlených fakt. Například jeden z nejdůležitějších parametrů – rychlost ztráty hmoty – stále není v dobrém souladu s teoretickými předpověďmi. Navíc se ukazuje, že významnou roli v tom hraje strukturovanost hvězdného větru, o které se myslelo, že je vysvětlitelná generováním nestabilit ve hvězdném větru. Nicméně tento scénář nesouhlasí zcela s pozorováním. Zatímco model předpovídá vznik struktur ve větších vzdálenostech od hvězdy, pozorování implikují vznik těchto struktur velmi blízko hvězdy, ne-li přímo ve fotosféře.

V práci jsem se zaměřil na studium časově závislých hydrodynamických procesů ve hvězdném větru a to především s použitím vícesložkového popisu plazmatu. Právě časově závislé modely mohou odhalit či případně osvětlit jevy, které ovlivňují strukturovanost hvězdného větru, způsob, jakým k těmto jevům dochází, a určit časovou škálu těchto jevů. A nejenom to, mnoho z těchto hvězd vykazuje určitý způsob proměnnosti a časově závislé modely mohou v omezené míře určit, jsou-li nějakým způsobem spjaty s hvězdným větrem. Navíc, vícesložkový popis hvězdného větru horkých hvězd byl studován doposud pouze ve stacionárním případě a pouze v malém počtu prací. Mimo jiné také proto, že doposud neexistoval časově závislý vícesložkový kód, který by umožňoval vícesložkové časově závislé simulace hvězdného větru horkých hvězd. Je třeba poznamenat, že pro modelování slunečního větru a procesů v něm se běžně používá vícesložkový popis (viz např. Birk & Otto (1996)), ale fyzikální mechanismus, který iniciuje tento typ hvězdného větru je odlišný od hvězdného větru horkých hvězd.

Tématicky jsem doktorskou práci rozdělil na tři části

- **Studium 1D modelu** – V této fázi jsem se zaměřil na studium popisu 1D hvězdného větru a numerické řešení hydrodynamických rovnic. K tomu také patřilo seznámení se s numerickými metodami, jejich použitím a volba vhodného hydrodynamického kódu k simulaci hvězdného větru

- **Tvorba vlastního vícesložkového kódu** – Na základě zkušeností s jednosložkovými 1D modely jsem sestavil vlastní hydrodynamický program k řešení vícesložkového modelu

- **Studium vícesložkových 1D modelů** – V závěrečné fázi jsem sestavený program otestoval a použil na různé typy horkých hvězd

1.2 Motivace studia horkých hvězd

Jak už bylo psáno výše, horké hvězdy, zejména hvězdy spektrální třídy O a B, jsou vzhledem ke svým fyzikálním vlastnostem velmi zajímavými objekty ke studiu. Jejich vysoké teploty ($T \approx 10000 - 50000\,\mathrm{K}$) spolu s velkou svítivostí ($\mathrm{L}_* \approx 10^5 - 10^6 L_\odot$) a velkou ztrátou hmoty ($\dot{M} \approx 10^{-10} - 10^{-5}\mathrm{M}_\odot$ za rok) činí z těchto hvězd unikátní laboratoře pro studium zářivé hydrodynamiky, vědního oboru zabývajícího se studiem hydrodynamických procesů v médiu, ve kterém dominantní vliv na dynamiku systému má interakce záření s médiem. Právě interakce záření s hmotou hvězdy je zodpovědná za vznik hvězdného větru, který je urychlován zářivou silou natolik, že konečná rychlost větru v_∞ (obdoba asymptotické rychlosti) může dosáhnout hodnot až ≈ 3000 km/s, což je zhruba 1% rychlosti světla. Numerické modelování hvězdného větru, ať už stacionární či časově závislé, je nezbytné k pochopení procesů, které hrají v dynamice hvězdného větru klíčovou roli. Tím nám umožňuje porozumět hvězdnému vývoji horkých hvězd a jejich unikátním vlastnostem.

Nicméně je nutno podotknout, že zahrnutí zářivých procesů do hydrodynamických výpočtů je velmi obtížné. Přímočará konzistentní metoda spočívající v současném řešení rovnice přenosu záření (popisující interakci záření s hmotou) a hydrodynamických rovnic (popisujích makroskopickou dynamiku systému) je v důsledku výpočetní složitosti obou procesů prozatím nemožná. Z těchto důvodů je třeba pro hydrodynamické účely zářivou interakci různým způsobem aproximovat. V průběhu intenzivního studia hvězdného větru horkých hvězd bylo uveřejněno hned několik sofistikovaných aproximativních přístupů, které umožňovaly zahrnout zářivou sílu do hydrodynamických modelů. Jednu z prvních úvah, že hvězdný materiál okolo horkých hvězd je z hvězdy urychlován absorpcí a rozptylem záření zveřejnil Milne (1926). Nicméně detailní rozpracování této myšlenky a základní pilíře teorie hvězdného větru byly položeny až v 70. letech minulého století (Lucy & Solomon, 1970; Castor, 1974; Castor et al., 1975). Na základech těchto poznatků dodnes staví modernější a přesnější metody. Je vhodné poznamenat, že mnohé závěry z oblasti zářivé hydrodynamiky horkých hvězd byly použity i u jiných astrofyzikálních objektů, kde se předpokládá významný vliv zářivé síly na dynamiku toku, zejména akrečních disků kataklyzmických proměnných hvězd (Feldmeier & Shlosman, 1999, 2000, 2002; Feldmeier et al., 1999) a u aktivních jader galaxií a kvazarů (Arav & Li, 1994; Arav et al., 1994). V širším smyslu hvězdný vítr horkých hvězd tvoří další fundamentální typ hvězdného větru. Podle povahy síly, která primárně určuje dynamiku větru doposud rozlišujeme čtyři typy hvězdných větrů. Koronální hvězdný vítr, jehož příkladem může být sluneční vítr urychlovaný gradientem tlaku. Velký gradient tlaku vzniká v důsledku obrovské teploty koróny dosahující až $\approx 10^7$ K. Dalším typem hvězdného větru je hvězdný vítr chladných hvězd, ve kterém prachové částice interagují se zářením kontinua. Fotony kontinua předávají svoji hybnost prachových částicím, které dále třením přenášejí hybnost na ostatní složky hvězdného větru – prachem urychlený hvězdný vítr. V případě existence silného magnetického pole se uplatňuje magnetocentrifugální hvězdný vítr, jehož částice jsou urychlovány interakcí s magnetickým polem. Konečně posledním známým typem je právě hvězdný vítr horkých hvězd, při kterém je vítr urychlován převážně absorpcí a rozptylem v čarách jednotlivých absorbujících iontů - čarami řízený hvězdný vítr.

1.3 Stručný souhrn dosavadních nejvýznamějších výsledků

Jeden ze základních pilířů teorie hvězdného větru horkých hvězd tvoří práce publikovaná v článku (Castor, Abbott, & Klein, 1975). Autoři v ní detailně propracovali základní myšlenky problematiky hvězdného větru horkých hvězd. V rámci striktně radiálního modelu (radiální tok, radiální paprsky – takzvaná bodová aproximace hvězdy) vyjádřili zářivou sílu pomocí gradientu rychlosti, což umožnilo analytické řešení jednoduchého stacionárního modelu. Velmi důležité je, že tento model vykazoval velmi dobrou shodu s pozorovanými charakteristikami. Tato práce se tak stala základem nové teorie hvězdného větru a je podle autorů citovaná jako CAK teorie.

Přes veškeré dobré vlastnosti použitého modelu některé aproximace jsou příliš zjednodušující a mohou vést v určitých případech k závažným nesrovnalostem mezi výsledky modelu a pozorováním, zejména v předpovídané rychlosti ztráty hmoty $\dot{M}$ a konečnou rychlostí hvězdného větru v_∞ (je třeba poznamenat, že konečná rychlost větru je určitá matematická abstrakce, v našem případě odpovídá rychlosti hvězdného větru ve velké vzdálenosti od hvězdy, v mezihvězdném prostředí). V reakci na tento fakt byly publikovány různé zpřesňující přístupy, které modifikovaly základní CAK teorii. V práci (Pauldrach et al., 1986) se autoři zaměřili na aproximaci bodové hvězdy. Stále uvažovali pouze radiální tok (aproximace, při které předpokládáme, že materiál se od hvězdy vzdaluje pouze v radiálním směru), ale opustili předpoklad radiálních paprsků (fotony interagující s hmotou tak nepřicházejí pouze ze směru od středu hvězdy ale také z ostatních směrů). Celkový vliv této změny lze zahrnout do korekčního faktoru, který závisí na vzdálenosti od hvězdy. Výsledné modely s tímto korekčním faktorem vedly k reálnějším hodnotám konečné rychlosti větru. Další práce (Friend & Castor, 1983) se zabývala vlivem vícenásobného rozptylu v čarách. Na rozdíl od CAK teorie analyzovala případ, kdy se jednotlivé spektrální čáry mohou překrývat. A také v tomto případě se ukázalo, že celkový vliv lze shrnout do korekčního členu, který modifikuje zářivou sílu z CAK teorie a vede k zhruba dvojnásobné velikosti konečné rychlosti větru v_∞. Vliv magnetického pole na strukturu hvězdného větru v případě rychle rotujících horkých hvězd, byl analyzován v pracech (Friend & MacGregor, 1984; Poe & Friend, 1986). Dospěli k závěru, že magnetické pole v případě těchto hvězd významně ovlivňuje radiální tok ve větších vzdálenostech od hvězdy a zvyšuje tak hodnotu konečné rychlosti větru.

Samostatnou otázkou je stabilita zářením hnaného hvězdného větru. První práce zabývající se lineární analýzou stability vedly k překvapivě rozdilným závěrům. Na jednu stranu analýzy provedené v pracích (Carlberg, 1980; MacGregor et al., 1979; Nelson & Hearn, 1978) předpovídaly nestabilní mód, který naznačoval, že zářením hnaný hvězdný vítr je vysoce nestabilní. Na druhou stranu analýza, kterou provedl Abbott (1980), předpovídala stabilní řešení popisující zářivě-akustické vlny. Tento zdánlivý rozpor je způsobem rozdílným přístupem k vyjádření poruchového členu zářivé síly. Oba postupy sjednotili Owocki & Rybicki (1984), kteří ukázali, že stabilita či případná nestabilita závisí na relativní velikosti poruchy. Pokud je vlnová délka poruchy menší ve srovnání s charakteristickou Sobolevovou délkou, je porucha nestabilní (viz část 4.2.2), zatímco je-li vlnová délka poruchy větší, je porucha stabilní (viz část 4.2.1). To je slovní formulace jejich zobecněného disperzního zákona – označovaného jako “bridging length law”. Jejich první časově závislé numerické simulace, ve kterých použili pro vyjádření zářivé síly aproximaci čisté absorpce[1], předchozí výsledky plně potvrdily. Na druhou stranu, díky příliš zjednodušujícímu předpokladu čisté absorpce, tato práce otevřela kritickou diskuzi o vlivu rozptylu záření na potlačení růstu nestability. Lucy (1984) analyzoval dynamický efekt fotonů rozptýlených v čarách a popsal tlumící efekt “line drag effect”, který významně ovlivňuje nárůst nestability. Nicméně další práce Owocki & Rybicki (1985) poukázala na fakt, že dominatní vliv má tento efekt pouze v subsonické oblasti poblíž fotosféry, kde rychlost nárůstu nestability redukuje až na 50%. Ve větších vzdálenostech se ale vliv tohoto efektu na nárůst nestability drasticky zmenšuje. Pro vlastní numerické výpočty pak Owocki et al. (1988) zakomponovali aproximativně rozptyl do vyjádření zářivé síly prostřednictvím SSF (Smooth Source Function) aproximace a později Owocki & Puls (1996) vypracovali přesnější ale numericky náročnější EISF (Escape Integral Source Function) metodu. Jak už bylo řečeno výše, aproximativní přístup je nutný vzhledem k výpočetní náročnosti studovaného problému. Je nutné poznamenat, že metoda EISF představovala úsporu zhruba 10% výpočetního času oproti konzistentnímu řešení rovnice přenosu záření, aniž by oproti SSF aproximaci představovala radikální zpřesnění, takže není příliš často používaná. Časově závislé modely umožnily poprvé seriozní diskuze o případné strukturovanosti hvězdného větru. Srovnání předpovědí časově závislých modelů s pozorovanými charakteristikami, jimiž jsou zejména rentgenovská emise záření a diskrétní absorpční komponenty (Prinja & Howarth, 1986), poukazují na strukturovaný vítr a přítomnost rázových vln ve větru. Původní model (Owocki & Rybicki, 1984) později dále propracoval Feldmeier (1995), který do hydrodynamických rovnic zahrnul rovnici pro energii se započteným zářivým ochlazováním a na zákadě simulací určil oblast s dostatečně efektivním ochlazováním ve

[1]Procesu při kterém dochází vždy k destrukci fotonu

vzdálenosti 5 až 7 hvězdných poloměrů. Ve vzdálenosti menší než je tato mez však není předpoklad izotermického větru zcela v pořádku.

V souvislosti s teoretickým popisem nestabilit hvězdného větru a simulací struktur vznikajících ve hvězdném větru se naskýtá otázka, jak se situace změní pokud přejdeme k dvojdimenzionálním simulacím. Dessart & Owocki (2003) poprvé provedli 2D simulace nestabilního hvězdného větru hnaného zářením. Na základě těchto simulací dospěli k závěru, že velikost počátečních struktur generovaných čárovou nestabilitou ve hvězdném větru se díky vývoji dalších nestabilit, zejména Rayleighovy-Taylorovy nestability, zmenšuje. V jejich modelu však dvojdimenzionální popis příslušel pouze hydrodynamickým veličinám, zatímco záření působilo pouze v radiálním směru (takzv. 2D-H+1D-R model), což činí tyto závěry diskutabilními. Proto Dessart & Owocki (2005) v další práci použili plně dvojdimenzionální popisa simulace, ve kterých se potvrdila dominantní role Rayleighovy-Taylorovy nestability na velikost struktur. Vzhledem k vysokým výpočetním nárokům autoři použili speciální typ sítě pro zjednodušení výpočtu zářivé síly. Při použití této sítě je však ve větších vzdálenostech od hvězdy hodnota prostorového kroku větší než Sobolevova délka, což neumožňuje korektní výpočet zářivé síly pro simulaci nestability, což opět omezuje platnost jejich závěrů.

Zásadním předpokladem CAK teorie je model jednosložkového hydrodynamického kontinua, které interaguje s hvězdným zářením. Ve skutečnosti se plazma skládá z jednotlivých částic, elektronů, protonů a iontů. Se samotným zářením interagují pouze absorbující ionty, zejména ionty C, N, O, Fe a elektrony, které přenášejí svoji hybnost prostřednictvím coulombických srážek na pasivní část plazmy. Vícesložkový popis hvězdného větru byl námětem několika prací (Castor et al., 1976 ; Springmann & Pauldrach, 1992). Platnost jednosložkové aproximace je dobře splněna u většiny hvězd spektrálního typu O a u Wolfových-Rayetových hvězd. Teorie pak poměrně úspěšně předpovídá a vysvětluje pozorovanou rychlost ztráty hmoty hvězdy. U hvězd s řidším hvězdným větrem, tedy u B a A hvězd hlavní posloupnosti, tento předpoklad nemusí být splněn a v důsledku menší třecí síly může dojít k oddělení složek plazmy, jak ukázala práce Porter & Drew (1995). Dynamickými důsledky oddělování složek se v omezené míře zabývala také práce Porter & Skouza (1999).

Kapitola 2

Hydrodynamika

V této kapitole proberu základní pojmy, veličiny a rovnice z klasické hydrodynamiky potřebné k sestavení rovnic popisujících hvězdný vítr. Zvolená symetrie popisu koresponduje s předpokládanou symetrií hvězdného větru. Pochopení matematického popisu hydrodynamiky je nezbytným krokem při sestavování vlastního kódu. V další části této kapitoly jsou uvedeny dva nejznámější typy nestabilního chování z klasické hydrodynamiky. Vzhledem k častému výskytu obou typů nestabilit v astrofyzikálních aplikacích a předpokládaném výskytu také u hvězdného větru horkých hvězd (Carlberg, 1980), jsem kromě teoretického odvození provedl také numerické simulace těchto nestabilit.

2.1 Základní rovnice hydrodynamiky

K popisu pohybu kontinua můžeme použít dva alternativní přístupy, Eulerův popis a Langrangeův popis. V Eulerově popisu je pohyb popsán vůči pevnému souřadnicovému systému (ne nutně inerciálnímu). Hydrodynamické rovnice jsou potom parciální diferenciální rovnice vzhledem k prostoru a času, popisující vývoj jednotlivých hydrodynamických veličin. Naproti tomu v Lagrangeově popisu je celé kontinuum rozděleno na určité elementární části objemu a je sledován pohyb každé této elementární části. Oba dva tyto přístupy mají své výhody a nevýhody. V našem popisu a kódu se omezíme na první, tedy Eulerův přístup.

Nejprve zavedeme značení jednotlivých hydrodynamických veličin, kterého se budeme držet v celém dalším textu. Základními hydrodynamickými veličinami jsou skalární hustota ρ, tlak p, vektorová rychlost elementu kontinua $\boldsymbol{v}$ a vnitřní energie plynu U. Tyto veličiny jsou vzájemně svázány pomocí hydrodynamických rovnic. Dále se v našem přístupu omezíme na ideální tekutinu, nebudeme tedy započítávat vazkost tekutiny. To je v případě drtivé většiny astrofyzikálních aplikací zcela oprávněná aproximace. V takovém případě lze kontiunum popsat Eulerovými rovnicemi: rovnicí kontinuity, rovnicí pro hybnost a rovnicí pro energii. Obecný tvar rovnice kontinuity je podle (Landau & Lifshitz, 1987)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{2.1}$$

Obecný tvar rovnice pro hybnost za předpokladu gravitačního zrychlení $\boldsymbol{g}_*$ a zářivého zrychlení $\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}$, lze psát

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \boldsymbol{g}_* + \boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}. \tag{2.2}$$

Obecný tvar rovnice pro energii je dán

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2 + \rho U\right) - \mathrm{div}\left(\rho \boldsymbol{v}(\frac{1}{2}v^2 + H)\right) = 0, \tag{2.3}$$

kde U značí vnitřní energii plynu a H entalpii. V rámci naší problematiky rovnici pro energii nebudeme nadále uvažovat. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze izotermické procesy (pokud bychom však chtěli započítat realističtější neizotermické procesy, je níže uvedený postup analogický). V rámci této aproximace ještě doplníme soustavu o stavovou rovnici ideálního plynu

$$p = a^2 \rho, \tag{2.4}$$

kde a značí rychlost zvuku a v případě ideálního plynu závisí na teplotě podle vztahu

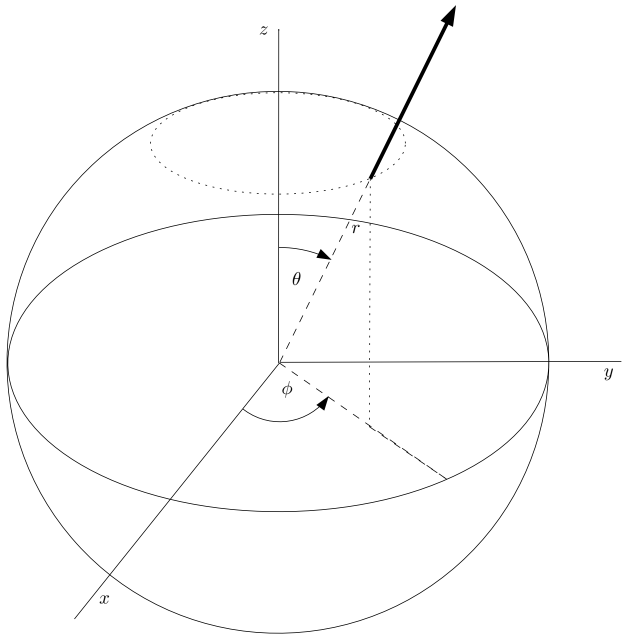
$$a = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}}. \tag{2.5}$$

$k_B = 1.3807\,.10^{-16}[\mathrm{erg\ K}^{-1}]$ je Boltzmannova konstanta, m_H je hmotnost atomu vodíku a μ_m je střední molekulová hmotnost plynu. Přesný výpočet μ je poměrně komplikovaný a závisí na určení stupně ionizace všech chemických elementů v plynu. V rámci našich modelů hvězdného větru však vystačíme s předpokladem úplné ionizace. V úplně ionizovaném plynu potom můžeme výpočet μ aproximovat jednoduchým vzorcem

$$\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z, \tag{2.6}$$

kde X, Y a Z značí hmotnostní zastoupení vodíku, helia a těžších prvků ve hvězdném větru. Pro předpokládanou solární abundanci je jednotlivé hmotnostní zastoupení číselně dáno

$$X = 0.73 \quad Y = 0.24 \quad Z = 0.0254. \tag{2.7}$$



Obrázek 2.1: Znázornění volby sférické souřadné soustavy použité v našich výpočtech. Rovníkovou rovinou rozumíme plochu, kde souřadnice $\theta = \pi/2$.

Uvedené rovnice (2.1), (2.2) ještě dále upravíme s použitím předpokladu nestlačitelné kapaliny. Tyto rovnice využijeme při studiu klasických hydrodynamických nestabilit v dalším části textu. Pro dokonale nestlačitelnou kapalinu platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,.\nabla\rho = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

kde jsme vektor rychlosti elementu kontinua $\boldsymbol{v}$ rozepsali v kartézském souřadném systému do jednotlivých složek $\boldsymbol{v}\,(v_x, v_y, v_z)$. Tuto identitu využijeme pro úpravu rovnice kontinuity (2.1), která se redukuje na jednoduchou podmínku

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0, \tag{2.9}$$

což spolu s rovnicí (2.2) tvoří výslednou soustavu rovnic pro dokonale nestlačitelnou kapalinu.

2.2 Eulerovy rovnice pro sféricky symetrický případ

Nejprve hydrodynamické rovnice (2.1), (2.2) upravíme pomocí vektorových identit a zvoleného souřadnicového systému. Přesněji řečeno, upravíme tvar rovnice (2.2) pomocí tensorové identity

$$(\boldsymbol{v}.\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\mathrm{grad}(\,v^2) + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v},$$

tedy

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{grad}(\,v^2) + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \boldsymbol{g}_* + \boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}. \tag{2.10}$$

Tvar rovnic je uveden ve vektorovém tvaru, je tudíž nezávislý na volbě souřadnic. V astrofyzikálních aplikacích hraje důležitou roli sférická symetrie. Proto vyjádříme tyto rovnice ve sférických souřadnicích, konkrétně (opět z důvodu podstatného zjednodušení) budeme uvažovat dvojdimenzionální problém, se dvěma nezávislými souřadnicemi r, ϕ a volbou rovníkové roviny hvězdy $\theta = \pi/2$ (viz obrázek (2.1)).

Dále předpokládejme, že rychlost $\boldsymbol{v}$ vyjádřená ve sférických souřadnicích má složky (v_r, v_θ, v_ϕ), podobně vektor $\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}$ má složky $(g_{\mathrm{rad}}, 0, 0)$ a vektor $\boldsymbol{g}_*$ složky $(-g_*, 0, 0)$. S využitím tvaru jednotlivých diferenciálních operátorů ve sférických souřadnicích (A.5), (A.6), (A.7) přepíšeme obecný tvar rovnic (2.1) a (2.2). Jak již bylo výše uvedeno, uvažujeme zjednodušený 2-D model sférické symetrie, což znamená, že rovnice nezávisí na úhlu θ a jeho derivacích a dále θ složku rychlosti (a její derivace) položíme rovnu nule. S využitím tohoto předpokladu a dosazením hodnoty θ pro rovník dostáváme pro jednotlivé výrazy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{grad}\,v^2 &= \left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\phi\frac{\partial v_\phi}{\partial r}, 0, \frac{v_r}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right), \\
\mathrm{rot}_{r,\theta,\phi}\boldsymbol{v} &= \left(0, \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r}, 0\right), \\
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} &= \left(\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} - v_\phi\frac{\partial v_\phi}{\partial r}, 0, -\frac{v_r}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right), \\
(\boldsymbol{v}.\nabla)\boldsymbol{v} &= \left(\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r}, 0, \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r}\right).
\end{aligned}$$

Můžeme tak psát pro rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2\rho v_r}{r} + v_r\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \phi} + \frac{\rho}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 \tag{2.11}$$

a pro rovnici pro hybnost

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\rho v_\phi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= -\rho g_* + \rho g_{\mathrm{rad}}, \\
\rho\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \rho v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\rho v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\rho v_r v_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Rovnice (2.11), (2.12) a (2.4) popisují válcově symetrický dvojdimenzionální systém. Tento popis systému využijeme pro lineární analýzu stability hvězdného větru, nicméně pro praktické numerické výpočty se omezíme z důvodu výpočetních nároků pouze na sféricky symetrický jednodimenzionální model s jednou nezávislou proměnou r. Rovnice kontinuity má v takovém případě tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 \rho v_r)}{\partial r} = 0, \tag{2.13}$$

obdobně rovnice pro hybnost

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} + \rho (g_* - g_{\mathrm{rad}}) = 0. \tag{2.14}$$

2.3 Časově nezávislé řešení

Pro případ stacionárního řešení problému můžeme rovnice (2.13), (2.14) dále upravit vynecháním členů obsahující časové derivace

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (\rho v_r\ r^2)}{\partial r} = 0, \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (\rho v_r^2 r^2)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g_* + \rho g_{\mathrm{rad}}. \tag{2.16}$$

Provedením příslušných derivací a jejich přeznačením dostáváme z první rovnice (2.15)

$$\frac{1}{r^2}\left[\rho' v_r\ r^2 + \rho v_r' r^2 + 2\rho v_r\ r\right] = 0, \tag{2.17}$$

kde $'$ značí parciální derivaci podle radiální souřadnice. Z druhé rovnice (2.16) pak obdobně dostáváme

$$\frac{1}{r^2}\left[2\rho v_r v_r' r^2 + \rho' v_r^2 r^2 + 2\rho v_r^2 r\right] = -p' - \rho g_* + \rho g_{\mathrm{rad}}. \tag{2.18}$$

Vynásobením rovnice (2.17) proměnou v_r dostaneme

$$\frac{1}{r^2}\left[\rho' v_r^2 r^2 + \rho v_r' v_r r^2 + 2\rho v_r^2 r\right] = 0. \tag{2.19}$$

Porovnáním obou rovnic a jejich úpravou dostaneme jednoduchý tvar

$$v_r v_r' = -\frac{p'}{\rho} - g_* + g_{\mathrm{rad}}, \tag{2.20}$$

který pro izotermické procesy lze ještě dále upravit s využitím stavové rovnice (2.4)

$$v_r v_r' = -a^2 \rho \rho' - g_* + g_{\mathrm{rad}}. \tag{2.21}$$

Toto je konečný tvar rovnice, popisující stacionární jednosložkový hvězdný vítr. Na první pohled vypadá tato rovnice jednoduše, ale rovnice je relativně komplikovaná díky přítomnosti nelineárního členu $v_r v_r'$. Dále je třeba si uvědomit, že jsme ještě nespecifikovali tvar zářivé síly g_{rad}, který je v obecném případě velmi komplikovaný.

2.4 Hydrodynamické nestability

Nestability jsou velice důležitým aspektem jakéhokoliv hydrodynamického systému. Obecně řečeno, pro daný hydrodynamický stav za stálých podmínek zde v principu existuje exaktní ustálené řešení. Ale ne každé toto řešení se v přírodě uplatňuje. Nestačí totiž jenom existence takového řešení, ale řešení musí být také stabilní. To znamená, že malá odchylka (v přírodě realizovatelná náhodnými fluktuacemi) se musí s rostoucím časem zmenšovat. V opačném případě, tedy pokud s rostoucím časem odchylka narůstá, je systém nestabilní a nemůže prakticky existovat. Z matematického hlediska je analýza stability obecně velmi náročná disciplína, proto se v rámci zjednodušení omezíme na lineární analýzu stability.

Uvažujme drobnou poruchu, která změní v určitém místě (x,y,z) hodnoty hydrodynamických veličin, konkrétně tlaku, hustoty a rychlosti

$$p \to p + \delta p, \quad \rho \to \rho + \delta \rho, \quad \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} + \delta \boldsymbol{v}, \tag{2.22}$$

kde vektor poruch rychlosti $\delta \boldsymbol{v}$ má v kartézských souřadnicích složky $(\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z)$. Nejprve dosadíme do rovnic (2.8), (2.2) perturbované veličiny (2.22).

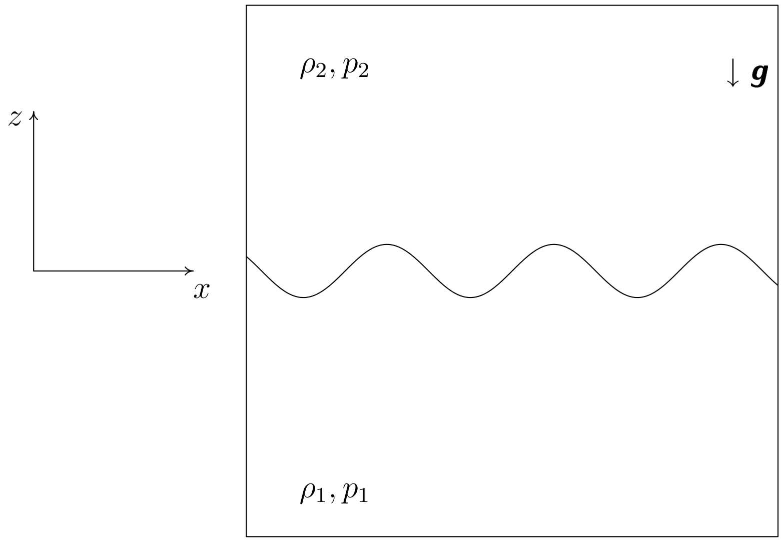
$$\frac{\partial(\rho + \delta\rho)}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla(\rho + \delta\rho) = 0, \tag{2.23a}$$

$$(\rho + \delta\rho)\left(\frac{\partial(\boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v})}{\partial t} + (\boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}).\nabla(\boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v})\right) = -\nabla(p + \delta p) + (\rho + \delta\rho)\boldsymbol{g}. \tag{2.23b}$$

Předpokládáme splnění rovnic pro neperturbované veličiny. V dalším kroku jednotlivé členy přeskupíme a ponecháme poruchové členy do prvního řádu. Obdržíme tak soustavu rovnic popisujích vývoj poruchy

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \delta\boldsymbol{v} = 0, \tag{2.24a}$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}.\nabla\delta\boldsymbol{v} + \rho\delta\boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v} = -\nabla(\delta p) + \delta\rho\boldsymbol{g}. \tag{2.24b}$$



Obrázek 2.2: Rayleighova-Taylorova nestabilita - schématické znázornění geometrie a počátečního stavu uvažovaného systému pro odvození disperzní relace

Pomocí perturbovaných veličin také přepíšeme alternativní vztah (2.8)

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla\delta\rho + \delta\boldsymbol{v}.\nabla\rho = 0, \tag{2.25}$$

platný pouze pro dokonale nestlačitelnou kapalinu, který použijeme místo rovnice kontinuity. Rovnice (2.24) s rovnicí (2.25) použijeme jako výchozí základ pro analýzu některých velmi známých typů nestabilit, často realizovaných v astrofyzikálních aplikacích.

2.4.1 Rayleighova–Taylorova nestabilita

Rayleighova-Taylorova nestabilita byla poprvé objevena a popsána lordem Rayleighem v roce 1880, který pozoroval chování dvou tekutin s různou hustotou v gravitačním poli (Rayleigh, 1883). Později byla v zobecněné formě rozpracována sirem Geoffreyem Taylorem v roce 1950 (Taylor, 1950). Po nich také tato nestabilita nese svůj název (dále značeno jako RT nestabilita). Patří mezi jednu z nejznámějších nestabilit v klasické hydrodynamice. Obecně se uplatňuje tehdy, pokud je hustší kontinuum urychlováno skrze kontinuum s menší hustotou, což je situace, která se velmi často vyskytuje v astrofyzikálních aplikacích. Jako příklad lze uvést vyvržený materiál po výbuchu supernovy, který interaguje s okolním mezihvězdným prostředím (Dwarkadas et al., 2000).

Uvažujme obecnou nevazkou a nestlačitelnou tekutinu ve statické rovnováze v homogenním gravitačním poli s hustotou a tlakem rozloženým podél osy z, tedy $\rho(z), p(z)$

a $\boldsymbol{v}_0 = (0,0,0)_{x,y,z}$. V následujícím odstavci odvodíme pro tento případ podmínku stability. Vyjdeme z Eulerových rovnic v kartézském souřadném systému, popisující nestlačitelnou, nevazkou kapalinu (2.9), (2.2). Dále uvažujme drobnou poruchu, která změní aktuální hodnotu hustoty a tlaku v určitém místě

$$p \to p + \delta p, \quad \rho \to \rho + \delta\rho, \quad \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}(\delta v_x, \delta v_y, \delta v_y). \tag{2.26}$$

Zajímá nás, jakým způsobem se budou poruchy šířit v daném médiu. Dosadíme hodnoty (2.26) do výše zmíněné rovnice pro perturbované veličiny (2.24b) a (2.25) a rovnice upravíme pro námi zvolenou konfiguraci. Po rozepsání do jednotlivých složek a úpravě dostáváme soustav rovnic

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = -\delta v_z \frac{\partial\rho}{\partial z}, \tag{2.27a}$$

$$\rho\frac{\partial\delta v_x}{\partial t} = -\frac{\partial\delta p}{\partial x}, \tag{2.27b}$$

$$\rho\frac{\partial\delta v_y}{\partial t} = -\frac{\partial\delta p}{\partial y}, \tag{2.27c}$$

$$\rho\frac{\partial\delta v_z}{\partial t} = -\frac{\partial\delta p}{\partial z} - g\delta\rho. \tag{2.27d}$$

Řešení soustavy rovnic (2.27) předpokládáme v tradičním exponenciálním tvaru rovinných vln pro x, y, závislost na souřadnici z je obecná

$$\delta v_x \propto \delta v_x \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y) + \omega t\right), \tag{2.28a}$$

$$\delta v_y \propto \delta v_y \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y) + \omega t\right), \tag{2.28b}$$

$$\delta v_z \propto \delta v_z \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y) + \omega t\right), \tag{2.28c}$$

$$\delta p(z) \propto \delta p \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y) + \omega t\right), \tag{2.28d}$$

$$\delta\rho(z) \propto \delta\rho \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y) - \omega t\right). \tag{2.28e}$$

Dosazením předpokládaného řešení (2.28) do (2.27) dostáváme

$$\omega\delta\rho = -\delta v\frac{\partial\rho}{\partial z}, \tag{2.29}$$

$$\omega\rho\delta v_x = -\mathrm{i}k_x\delta p, \tag{2.30}$$

$$\omega\rho\delta v_y = -\mathrm{i}k_y\delta p, \tag{2.31}$$

$$\omega\rho\delta v_z = -\frac{\partial\delta p}{\partial z} - g\delta\rho. \tag{2.32}$$

Vynásobíme rovnici (2.30) členem $\mathrm{i}k_x$ a rovnici (2.31) členem $\mathrm{i}k_y$ a následně obě rovnice sečteme

$$\omega\rho(\mathrm{i}k_x\delta v_x + \mathrm{i}k_y\delta v_y) = k^2\delta p, \tag{2.33}$$

přičemž symbolem k^2 jsme označili součet $({k_x}^2 + {k_y}^2)$. Dále využijeme rovnice tvaru rovnice kontinuity za předpokladu dokonale nestlačitelné kapaliny (2.24a)

$$\frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0. \tag{2.34}$$

Dosadíme do (2.34) předpokládaný tvar řešení (2.28) a obdržíme vztah

$$\mathrm{i}k_x \delta v_x + \mathrm{i}k_y \delta v_y = -\frac{\partial \delta v_z}{\partial z}. \tag{2.35}$$

Porovnáním s rovnicí (2.33) můžeme psát

$$k^2 \delta p = -\omega \rho \frac{\partial \delta v_z}{\partial z}. \tag{2.36}$$

Z rovnic (2.29), (2.32) eliminujeme $\delta \rho$

$$\omega \rho \delta v_z = -\frac{\partial \delta p}{\partial z} + \frac{g}{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta v_z. \tag{2.37}$$

a následně z rovnice (2.36) vyjádříme vztah pro δp

$$\delta p = -\frac{\omega}{k^2} \rho \frac{\partial \delta v_z}{\partial z}. \tag{2.38}$$

Derivací rovnice (2.38) dostáváme vztah pro $\partial \delta p / \partial z$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial z} = -\frac{\omega}{k^2} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \frac{\partial \delta v_z}{\partial z}). \tag{2.39}$$

Dosazením vztahu (2.39) do rovnice (2.37) dostáváme výslednou rovnici

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} \right] = k^2 \rho \delta v_z - \frac{g}{\omega^2} k^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta v_z. \tag{2.40}$$

Obecně řešením rovnice (2.40) určíme disperzní relaci $\omega(k)$ a tím stanovíme časový vývoj poruch jednotlivých veličin.

Dříve než přistoupíme k řešení rovnice (2.40), musíme specifikovat hraniční podmínky, konkrétně skokové podmínky pro hydrodynamické veličiny v oblasti nespojitosti. Z definice námi studovaného problému víme, že na hranici $z = 0$ rychlost v_z a její derivace $\partial v_z / \partial z$ jsou spojité veličiny, zatímco další hydrodynamické veličiny spojité být nemusí. Uvažujme elementární plošný element, procházející přes oblast nespojitosti. Pro odvození podmínek nejprve dosadíme do rovnice (2.36) hodnoty příslušných veličin pro obě strany elementární plošky (více obr.2.2)

$$k^2\delta p_1 = -\,\omega\rho_1 \frac{\partial \delta v_z}{\partial z}\bigg|_1 \tag{2.41a}$$

$$k^2\delta p_2 = -\,\omega\rho_2 \frac{\partial \delta v_z}{\partial z}\bigg|_2 . \tag{2.41b}$$

Rovnice (2.41a) a (2.41b) od sebe odečteme čímž dostáváme vztah

$$k^2\Delta\delta p = -\omega\Delta\left[\rho\frac{\partial \delta v_z}{\partial z}\right], \tag{2.42}$$

kde symbolem Δ značíme diferenci

$$\Delta f(z) = f(z_1) - f(z_2). \tag{2.43}$$

Druhou rovnici získáme integrací rovnice (2.37) podél osy z v délce elementárního úseku Δz procházejícího přes oblast nespojitosti. V rámci tohoto malého úseku budeme považovat hodnoty veličin $\rho, \delta v_z, \delta p$ na obou stránách nespojitosti za konstantní. Číselným indexem odlišujeme hodnotu příslušné veličiny podle strany nespojitosti, na které se nachází (více obr.2.2). Nejprve zintegrujeme rovnici (2.37) v úseku $z_0 \rightarrow z_1$

$$\omega\int_{z_0}^{z_1}\rho_1\delta v_{z,1}\,\mathrm{d}z = -\delta p_1 + +\frac{g}{\omega}\delta v_{z,1}\int_{z_0}^{z_1}\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{d}z, \tag{2.44}$$

následně v úseku $z_2 \rightarrow z_0$

$$\omega\int_{z_2}^{z_0}\rho_2\delta v_{z,2}\,\mathrm{d}z = -\delta p_2 + \frac{g}{\omega}\delta v_{z,2}\int_{z_2}^{z_0}\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{d}z. \tag{2.45}$$

Integrací rovnice (2.44) získáme rovnici

$$\omega\rho_1\delta v_{z,1}\,\frac{\Delta z}{2} = -\delta p_1 + \frac{g}{\omega}\rho_1\delta v_{z,1}\ , \tag{2.46}$$

podobně integrací rovnice (2.45) získáme rovnici

$$\omega\rho_2\delta v_{z,2}\,\frac{\Delta z}{2} = -\delta p_2 + \frac{g}{\omega}\rho_2\delta v_{z,2}\,. \tag{2.47}$$

Rovnice (2.46) a (2.47) od sebe odečteme, přičemž využijeme (2.43), což vede na rovnici

$$\omega\rho_1\delta v_{z,1}\,\Delta z + \omega\rho_2\delta v_{z,2}\,\Delta z = -\Delta\delta p + \frac{g}{\omega}(\Delta\rho\delta v_z). \tag{2.48}$$

Uvážíme-li se, že Δz se blíží limitně nule, obdržíme výsledný výraz pro hodnoty veličin v bodech nespojitosti

$$\Delta(\delta p) = \frac{g}{\omega}\Delta(\rho\delta v_z). \tag{2.49}$$

Výslednou podmínku pro skok hydrodynamických veličin v bodech nespojitosti dostaneme zkombinovaním rovnic (2.42), (2.49)

$$\Delta(\rho\frac{\partial\delta v_z}{\partial z}) = -\frac{gk^2}{\omega^2}\Delta(\rho\delta v_z). \tag{2.50}$$

Kontinuum rozdělené horizontální hranicí na dvě části s konstantní hustotou ρ_1, ρ_2

Nyní námi studovaný případ specfikujeme detailněji. Uvažujme kontinuum rozdělené na dvě části, s příslušnou konstantní hustotou ρ_1,ρ_2. Schématicky je situace znázorněna na obrázku (2.2). Rovnice (2.40) se pro tento případ redukuje na

$$\frac{\partial^2\delta v_z}{\partial z^2} = k^2\delta v_z, \tag{2.51}$$

jejíž řešení má standardní tvar

$$\delta v_z = A\exp(kz) + B\exp(-kz). \tag{2.52}$$

Dále požadujeme, aby rychlost δv_z v nekonečnu $\pm\infty$ byla nulová. Využitím tohoto požadavku dostáváme dvě řešení

$$\delta v_{z,1}(z) = A\exp(+kz) \quad z < 0, \tag{2.53}$$

$$\delta v_{z,2}(z) = B\exp(-kz) \quad z > 0. \tag{2.54}$$

Uvážíme-li, že pro spojité veličiny na hranici nespojitosti platí

$$v_{z,1}(0) = v_{z,2}(0) \Rightarrow \quad A = B, \tag{2.55}$$

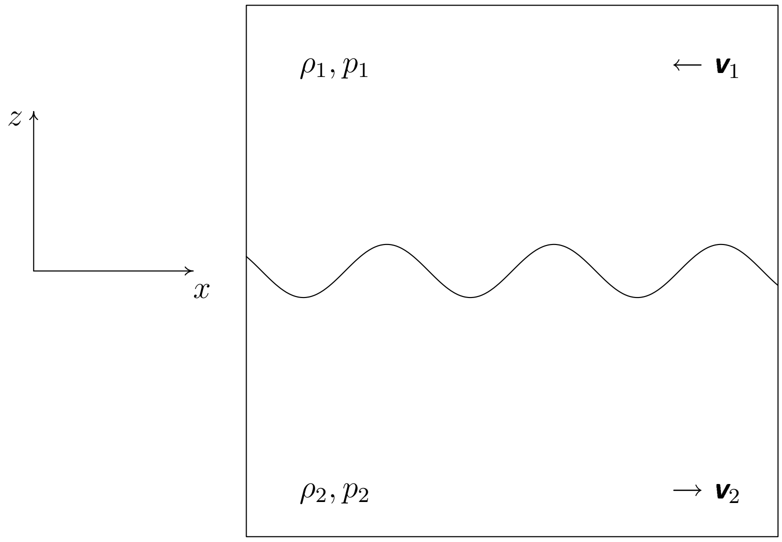
pak dosazením do skokové podmínky (2.50), rozepsáním jednotlivých veličin a dosazením řešení (2.53), (2.54) dostáváme

$$\rho_2 v_{z,2} - \rho_1 v_{z,1} = \frac{gk^2}{\omega^2}(\rho_2 - \rho_1)v_{z,1}(0), \tag{2.56}$$

$$\Rightarrow \quad -k\rho_2 - k\rho_1 = -\frac{gk^2}{\omega^2}(\rho_2 - \rho_1). \tag{2.57}$$

Přeskládáním jednotlivých členů z posledního výrazu (2.57) obdržíme vztah

$$\omega^2 = gk\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right), \tag{2.58}$$



Obrázek 2.3: Kelvinova-Helmholzova nestabilita - schématické znázornění geometrie a počátečního stavu uvažovaného systému pro odvození disperzní relace

což je výsledná disperzní relace. Je vidět, že pokud pro hustoty obou dvou oblastí platí relace

$$\rho_2 > \rho_1 ,$$

pak je ω imaginární a tedy porucha roste exponenciálně s časem, což je podmínka pro nestabilní chování.

2.4.2 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita

Kelvinova-Helmholtzova nestabilita (dále značeno jako KH nestabilita) je dalším klasickým případem nestabilního chování tekutiny. Projevuje se v případě, kdy jsou rozdílné vrstvy tekutiny vůči sobě v relativním pohybu. Často se můžeme setkat s kombinací obou nestabilit, tedy Rayleighovy-Taylorovy nestability generující KH nestabilitu. První matematickou analýzu KH nestability provedl Helmholtz(1868), který zkoumal případ dvou vrstev tekutiny různých hustot, které se vůči sobě pohybovaly. Podobně jako v případě RT nestability se i s KH nestabilitou můžeme často setkat v astrofyzikálních aplikacích. Namátkou lze uvést pozorované struktury extragalaktických jetů (Birkinshaw, 1991).

Opět uvažujme obecnou nevazkou a nestlačitelnou tekutinu s nenulovou horizontální rychlostí $\boldsymbol{v}(v_x, 0, 0)$. Dále předpokládejme, že horizontální složka rychlosti je funkcí prostorové souřadnice $v_x = v_x(z)$, stejně tak tlak $p = p(z)$ a hustota $\rho = \rho(z)$. Gravitační pole pro jednoduchost položíme rovno nule, tedy $\boldsymbol{g}(0, 0, 0)$. Celou situaci si můžeme představit tak, že tekutina je rozdělena na elementární vrstvy, které se vůči sobě posunují.

Vyjdeme z rovnic popisujích vývoj poruch (2.24b), (2.25) v eulerovské nestlačitelné, nevazké kapalině, do které dosadíme jednotlivé vektory a rozepíšeme do složek v kartézském souřadném systému

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} &= -v_x\frac{\partial \delta\rho}{\partial x} - \delta v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}, && (2.59a)\\
\rho\frac{\partial \delta v_x}{\partial t} + \rho\delta v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} + \rho v_x\frac{\partial \delta v_x}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}, && (2.59b)\\
\rho\frac{\partial \delta v_y}{\partial t} + \rho u\,\frac{\partial \delta v_y}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial y}, && (2.59c)\\
\rho\frac{\partial \delta v_z}{\partial t} + \rho v_x\frac{\partial \delta v_z}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z}. && (2.59d)
\end{aligned}$$

Předpokládáme řešení ve tvaru [1]

$$\begin{aligned}
\delta u &\propto \delta u_0(z)\exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right), && (2.60a)\\
\delta w &\propto \delta w_0\exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right), && (2.60b)\\
\delta v &\propto \delta v_0\exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right), && (2.60c)\\
\delta p &\propto \delta p_0(z)\exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right), && (2.60d)\\
\delta \rho &\propto \delta \rho_0(z)\exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right). && (2.60e)
\end{aligned}$$

Dosadíme předpokládané řešení do rovnic (2.59d) a přeskupíme výrazy

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}(\omega + v_x k_x)\delta\rho &= -\frac{\partial \rho}{\partial z}\delta v_z, && (2.61)\\
\rho\mathrm{i}(\omega + k_x v_x)\delta v_x + \rho\frac{\partial v_x}{\partial z}\delta v_z &= -\mathrm{i}k_x\delta p, && (2.62)\\
\rho\mathrm{i}(\omega + k_x v_x)\delta v_y &= -\mathrm{i}k_y\delta p, && (2.63)\\
\rho\mathrm{i}(\omega + k_x v_x)\delta v_z &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z}. && (2.64)
\end{aligned}$$

Místo rovnice kontinuity využijeme relaci pro nestlačitelnou kapalinu (2.34)

$$\mathrm{i}k_x\delta u + \mathrm{i}k_y\delta w = -\frac{\partial \delta v}{\partial z}. \qquad (2.65)$$

Abychom obdrželi disperzní relaci, postupně tuto soustavu upravíme a eliminujeme jednotlivé proměnné. Nejprve vynásobíme rovnici (2.62) výrazem $\mathrm{i}k_x$ a obdobně rovnici (2.63) výrazem $\mathrm{i}k_y$ a obě rovnice sečteme

$$\rho(\omega + v_x k_x)(k_x\delta v_x + k_y\delta v_y) - \mathrm{i}\rho k_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\delta v_z = -k^2\delta p. \qquad (2.66)$$

[1] Na rozdíl od případu pro Rayleighovu–Taylorovu nestabilitu, kde v předpokládaném tvaru nevystupovala imaginární jednotka u členu ω

Z rovnice (2.65) plyne

$$k_x\delta v_x + k_y\delta v_y = \mathrm{i}\frac{\partial\delta v_z}{\partial z}, \tag{2.67}$$

tedy rovnici (2.66) přepíšeme

$$\mathrm{i}\rho(\omega + v_x k_x)\frac{\partial\delta v_z}{\partial z} - \mathrm{i}\rho k_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\delta v_z = -k^2\delta p. \tag{2.68}$$

V rovnici (2.64) vystupuje derivace perturbace tlaku $\partial\delta p/\partial z$. Abychom mohli pokračovat v eliminaci proměnných, zderivujeme podle z rovnici (2.68)

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(\omega + v_x k_x)\frac{\partial\delta v_z}{\partial z} - \rho k_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\delta v_z\right] = -k^2\frac{\partial\delta p}{\partial z}. \tag{2.69}$$

Dosazením do rovnice (2.64) a přeskupením jednotlivých členů dostáváme obecný vztah

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(\omega + v_x k_x)\frac{\partial\delta v_z}{\partial z} - \rho k_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\delta v_z\right] - k^2\rho(\omega + v_x k_x)\delta v_z = 0, \tag{2.70}$$

jehož řešením určíme disperzní relaci a tím časový vývoj poruch jednotlivých veličin.

Opět je třeba nejprve určit skokové podmínky hydrodynamických veličin v oblasti nespojitosti. Uvažujme elementární oblast, která protíná oblast nespojitosti a rovnici (2.70) zintegrujeme podél osy z v délce intervalu Δz (srovnej obr. 2.3). Podobně jako v případ RK nestability i v tomto případě číselný index odlišuje příslušnou stranu nespojitosti, na které se nachází daná veličina. Nejprve zintegrujeme rovnici (2.70) v intervalu $z_0 \to z_1$

$$\int_{z_0}^{z_1}\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(\omega + k_x v_x)\frac{\partial\delta v_z}{\partial z} - \rho k_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\delta v_z\right]\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} k^2\rho(\omega + v_x k_x)\delta v_z \mathrm{d}z, \tag{2.71}$$

stejným způsobem zintegrujeme rovnici (2.70) v intervalu $z_2 \to z_0$

$$\int_{z_2}^{z_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(\omega + k_x v_x)\frac{\partial\delta v_z}{\partial z} - \rho k_x\frac{\partial\delta v_x}{\partial z}\delta v_z\right]\mathrm{d}z = \int_{z_2}^{z_0} k^2\rho(\omega + v_x k_x)\delta v_z \mathrm{d}z. \tag{2.72}$$

Provedením integrace a odečtením rovnice (2.71) a (2.72) dostáváme

$$\begin{aligned}\rho_1(\omega + k_x v_x)\delta v_x{}' - \rho_1 k_x v_x'\delta v_{z,1} - \rho_2(\omega + k_x v_x)\delta v_z{}' + \rho_2 k_x v_x'\delta v_{z,2} = \\ \int_{z_0}^{z_1} k^2\rho(\omega + v_x k_x)\delta v_z \mathrm{d}z - \int_{z_2}^{z_0} k^2\rho(\omega + v_x k_x)\delta v_z \mathrm{d}z,\end{aligned} \tag{2.73}$$

kde pro větší přehlednost jsme $\delta v_z{}'$, v_x' označili derivaci veličin podle z. V limitním případě $\Delta z = 0$, což je identické s limitami $z_2 \to z_0$ a $z_1 \to z_0$ jsou integrály na pravé straně rovnice (2.73) rovny nule. Dostáváme tak s využitím (2.43) výslednou podmínku pro veličiny v oblasti nespojitosti

$$\Delta\left[\rho(\omega + v_x k_x)\delta v_z{}' - \rho k_x v_x'\delta v_z\right] = 0. \tag{2.74}$$

Kontinuum rozdělené horizontální hranicí na dvě části s konstantní hustotou ρ_1, ρ_2 a s relativní rychlostí v_x

Uvažujme případ, kdy je kontinuum horizontálně rozdělené na dvě části a každá z částí má konstantní hustotu ρ_1, ρ_2 (viz 2.3). Dále předpokládejme nulový vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_2(0,0,0)$ a vektor $\boldsymbol{v}_1(v_x,0,0)$ s horizontální složkou u. Pro tento případ lze rovnici (2.70) upravit na tvar

$$\frac{\partial^2 \delta v_z}{\partial z^2} - k^2 \delta v_z = 0. \tag{2.75}$$

Řešení této rovnice má standardní tvar

$$\delta v_{z,1} = A(\omega + v_{x,1} k_x) \exp(+kz) \quad z < 0 \tag{2.76a}$$
$$\delta v_{z,2} = A(\omega + v_{x,2} k_x) \exp(-kz) \quad z > 0. \tag{2.76b}$$

Řešení dosadíme do hraničních podmínek skoku (2.74)

$$\begin{aligned} \rho_1(\omega + k_x v_{x,1})(\omega + k_x v_{x,1}) Ak \ \exp(k\ z) \\ -\rho_2(\omega + k_x v_{x,2})(\omega + k_x v_{x,2}) Ak \ \exp(-kz) = 0, \end{aligned} \tag{2.77}$$

přeskladáním jednotlivých členů a úpravou dostáváme kvadratickou rovnici

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 + 2k_x(\rho_1 v_{x,1} + \rho_2 v_{x,2})\omega + {k_x}^2(\rho_1 {v_{x,1}}^2 + \rho_2 {v_{x,2}}^2) = 0, \tag{2.78}$$

jejímž řešením dostaneme dva kořeny

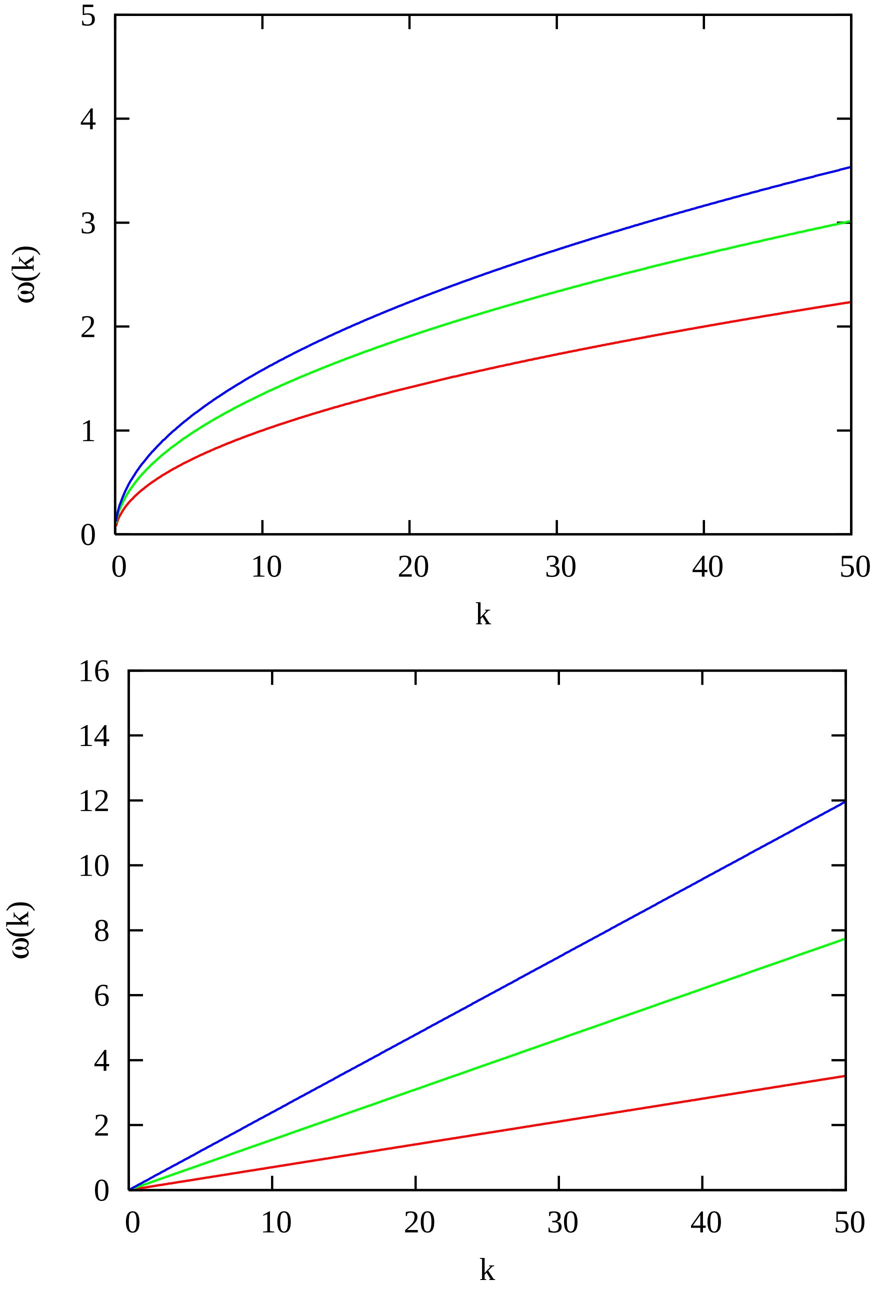
$$\omega_{1,2} = \frac{k_x(\rho_1 v_{x,1} + \rho_2 v_{x,2}) \pm k_x \mathrm{i}\sqrt{\rho_1 \rho_2 (v_{x,1} - v_{x,2})^2}}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{2.79}$$

Oba kořeny můžeme rozdělit na reálnou a imaginární část. Uvažíme-li, že

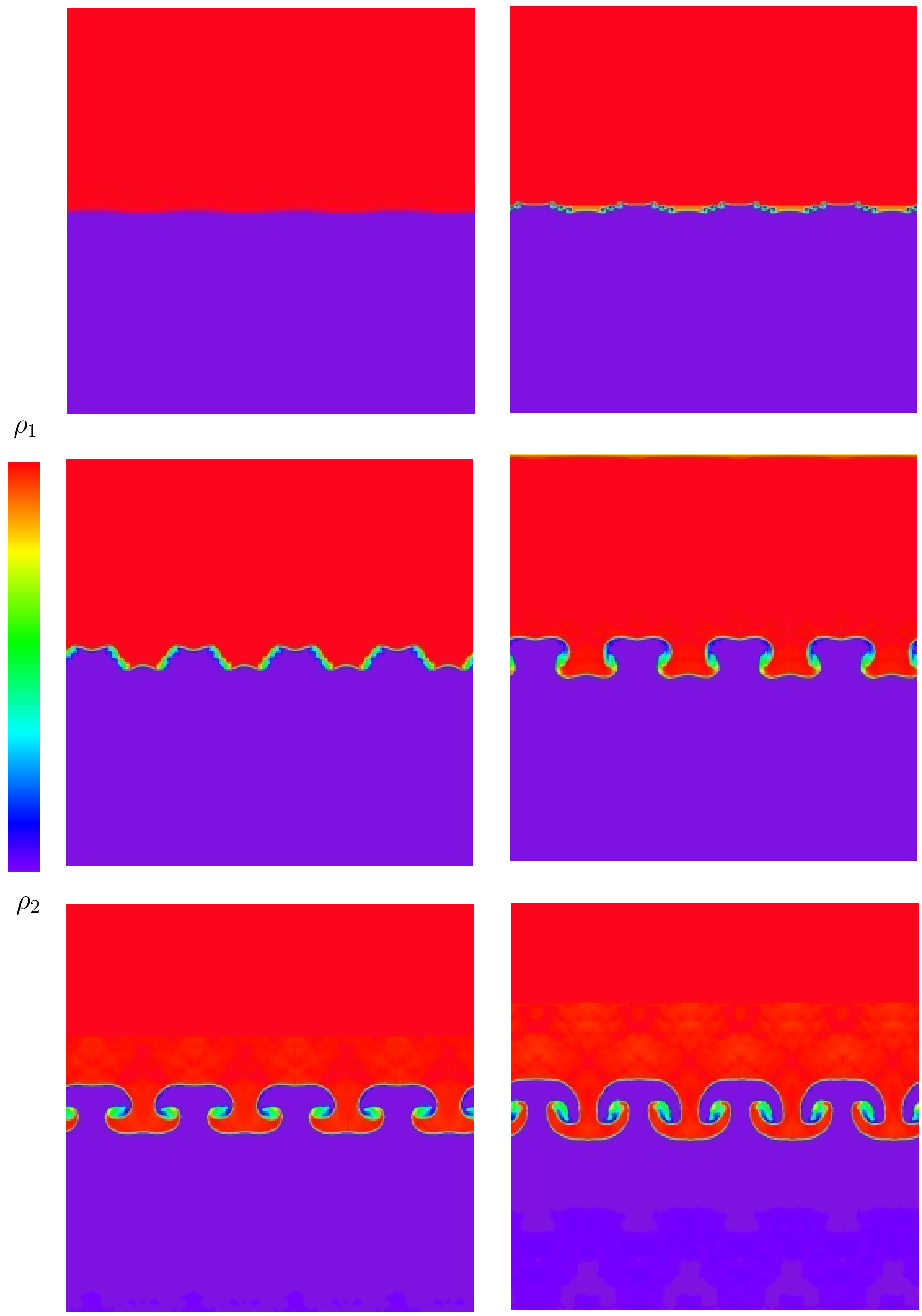
$$\exp(\mathrm{i}(\omega_r \pm \omega_I)t) = \exp(\mathrm{i}\omega_r t) \times \exp(\pm \omega_I t),$$

pak vidíme, že imaginární část odpovídá exponenciálně narůstajícímu a klesajícímu řešení. Pro disperzní relaci nestabilního řešení dostáváme výsledný vztah

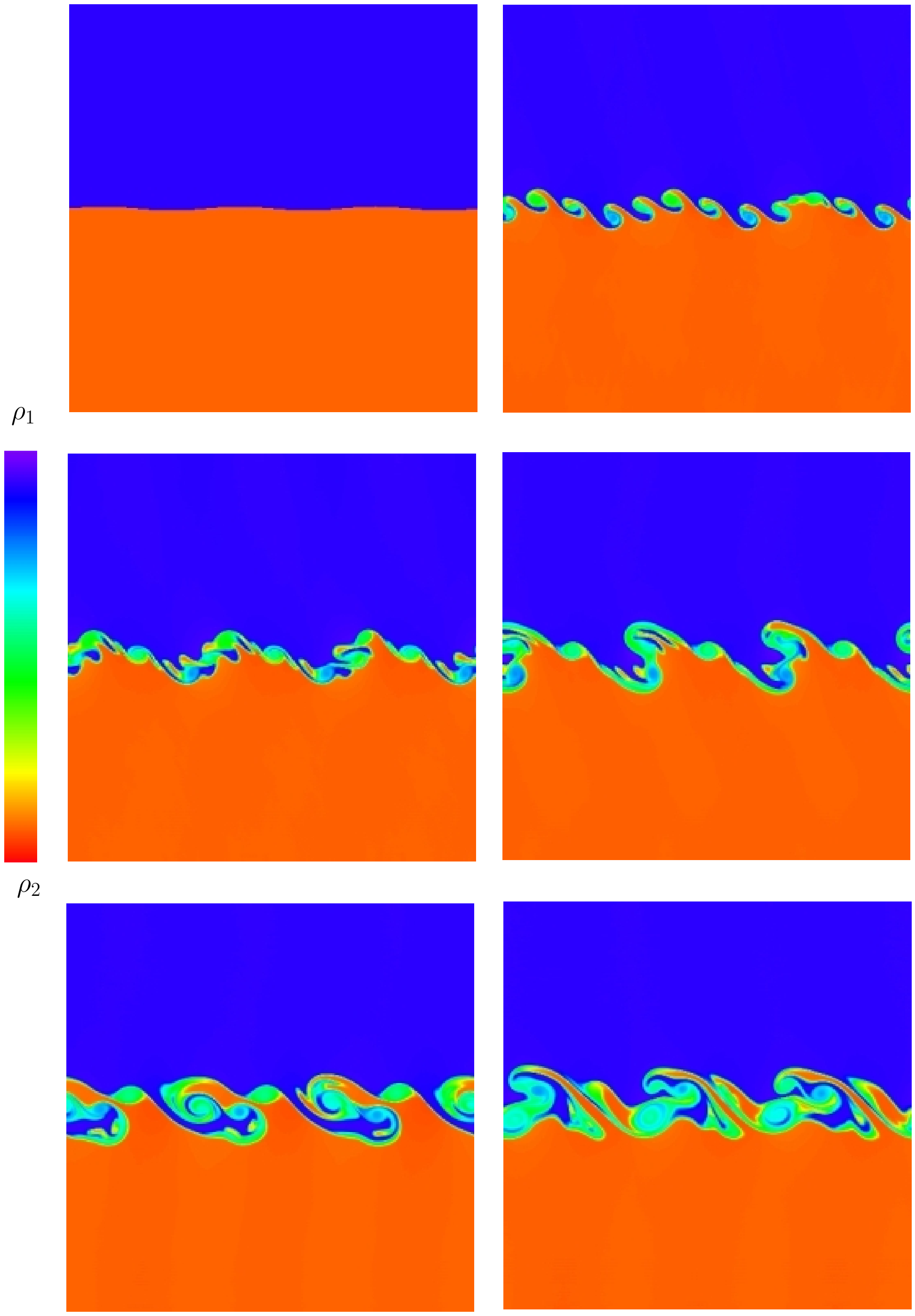
$$\omega = (v_{x,1} - v_{x,2}) \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} k_x. \tag{2.80}$$



Obrázek 2.4: *Horní část panelu:* Graf disperzní relace Rayleighovy-Taylorovy nestability pro různé hodnoty počáteční konfigurace hustot. Červenou čarou jsou znázorněny hodnoty odpovídající konfiguraci $\rho_1 = 0.9\,\rho_2 = 1.1$, zelenou čarou konfiguraci $\rho_1 = 1.0\,\rho_2 = 1.2$ a modrou čarou konfiguraci $\rho_1 = 1.0\,\rho_2 = 1.4$. Všechny veličiny jsou uvedené v bezrozměrném tvaru. *Dolní část panelu:* Graf disperzní relace Kelvinovy-Helmholtzovy nestability pro různé hodnoty počáteční konfigurace hustot. Červenou čarou jsou znázorněny hodnoty odpovídající konfiguraci $\rho_1 = 0.9\,\rho_2 = 1.1$, zelenou čarou konfiguraci $\rho_1 = 1.0\,\rho_2 = 1.2$ a modrou čarou konfiguraci $\rho_1 = 1.0\,\rho_2 = 1.4$. Všechny veličiny jsou uvedené v bezrozměrném tvaru.



Obrázek 2.5: Znázornění časového vývoje hustoty v případě Rayleighovy-Taylorovy nestability, jednotlivé barvy odpovídají různým hodnotám hustoty a jsou uvedeny v bezrozměrných jednotkách ($\rho_2 = 0.8$ $\rho_1 = 1.1$). Barevná hustotní škála je znázorněna vedle obrázku. Obrázky byly vytvořeny z vlastního numerického modelu pomocí hydrodynamického kódu VH–1. Detaily k výpočtu jsou uvedeny v dodatku D.



Obrázek 2.6: Znázornění časového vývoje hustoty v případě Kelvinovy–Helmoltzovy nestability, jednotlivé barvy odpovídají různým hodnotám hustoty a jsou uvedeny v bezrozměrných jednotkách ($\rho_1 = 0.9$ $\rho_2 = 1.1$). Barevná hustotní škála je znázorněna je vedle obrázku. Obrázky byly vytvořeny z vlastního numerického modelu pomocí hydrodynamického kódu VH–1. Detaily k výpočtu jsou uvedeny v dodatku.

Kapitola 3

Zářivá hydrodynamika

Velmi důležitou roli v mnoha astrofyzikálních problémech zastává záření. V případě hvězdného větru horkých hvězd interakce hmoty se zářením tvoří zásadní součást hnacího mechanismu. Zářivá hydrodynamika v sobě zahrnuje fyzikální popis jak hydrodynamických procesů, tak přenosu hybnosti a energie záření na hmotu.

3.1 Zářivé procesy

Pojmem zářivé procesy rozumíme fyzikální děje mikroskopického systému (v dalším textu budeme pod pojmem mikroskopického systému rozumět atom, molekulu nebo elementární částice), které vedou k vyzáření, pohlcení fotonu či popřípadě dojde ke změně energie nebo hybnosti fotonu. Při popisu jednotlivých procesů jsem čerpal převážně z knihy Mihalas (1978). Podle fyzikální povahy základní zářivé procesy dělíme na

- vázaně–vázané
- volně–vázané
- vázaně–volné
- volně–volné
- rozptyl na volných elektronech

Vázaně–vázané zářivé procesy

Vázaně-vázanými procesy rozumíme zářivé přechody mezi dolní l a horní u energiovou hladinou daného mikroskopického systému . K přechodu může dojít bud díky *zářivé excitaci*, *spontánní zářivá deexcitaci* či popřípadě *stimulované zářivé deexcitaci*. V dalším textu budu pro tyto procesy, které popisují spektrální čáry, používat označení čárové procesy.

Vázaně-volné zářivé procesy a volně-vázané

Vázaně-volnými zářivými procesy rozumíme přechod, při kterém elektron daného mikroskopického systému obdrží energii větší než je ionizační energie v daném mikroskopickém systému. Tomuto typu přechodu se říká ionizace. Opačným procesem je zachycení volného elektronu potřebným iontem, hovoříme o volně-vázaných přechodech.

Volně-volné zářivé procesy

Uvažujme volný elektron pohybující se v poli kladného iontu po hyperbolické dráze. Během interakce elektronu s jádrem, při kterém je elektron odchýlen a dojde k jeho zpomalení, je vyzářen foton. Mluvíme o brzdném záření. Toto záření má spojité spektrum a vzhledem k faktu, že na začátku procesu i na jeho konci se vyskytuje elektron ve volném stavu, mluvíme o volně-volném zářivém procesu. Proces opačný, kdy volný elektron získá energii interakcí s fotonem o libovolné vlnové délce a přejde na jinou hyperbolickou dráhu s vyšší energií je nazýván inverzním brzdným zářením. Často se v literatuře můžeme setkat s německým termínem **bremsstrahlung**, respektive **inverse bremsstrahlung**.

Thomsonův rozptyl

Thomsonův rozptyl popisuje rozptyl fotonů na volných elektronech v případě, že energie fotonu a tepelná energie eletronu je mnohem menší než klidová energie elektronu. Množství předané energie mezi fotony a elektrony je v takovém případě velmi malé. Nicméně v případě atmosféry horkých hvězd je tento proces velmi intenzivní a dokáže účinně redukovat gravitační interakci zhruba na polovinu.

3.2 Zářivé zrychlení

Zářivé zrychlení v bodě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$ v důsledku interakce záření s hmotou v obecné podobě můžeme napsat

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c} \int \oint \kappa_\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) I_\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}\nu, \tag{3.1}$$

I_ν značí monochromatickou intenzitu záření, $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor ve směru toku záření a κ_ν udává monochromatický hmotnostní extinkční koeficient. V literatuře zabývající se hvězdnými atmosférami a hvězdným větrem se můžeme setkat také s označením opacita prostředí, ale také s nesprávným označením monochromatický extinkční koeficient. Monochromatický extinkční koeficient χ_ν udává úbytek množství energie v délkovém elementu dl podél paprsku záření a lze jej definovat pomocí účiného průřezu σ_ν jedné částice a číselné hustoty částic n

$$\chi_\nu = \sigma_\nu n. \tag{3.2}$$

Fyzikální jednotkou extinkčního koeficientu je [cm^{-1}], zatímco hmotnostní extinkční koeficient je dle definice učinný průřez na jednotku hmotnosti

$$\kappa_\nu = \frac{\sigma_\nu}{m_{\mathrm{par}}}, \tag{3.3}$$

kde m_{par} značí hmotnost částice. Fyzikální jednotkou monochromatického hmotnostního extinkčního koeficientu je [cm^2/g]. Vztah mezi monochromatickým extinkčním koeficientem a opacitou je dán vztahem

$$\kappa_\nu = \frac{\chi_\nu}{\rho}. \tag{3.4}$$

Je třeba poznamenat, že obecně κ_ν závisí na směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{n}$. Teoreticky pro určení intenzity I_ν v daném bodě musíme řešit rovnici přenosu záření. Chceme-li se však zabývat hydrodynamickými simulacemi, je třeba použít aproximativního přístupu. Výpočetní kapacita současných dostupných počítačů nedovoluje souběžné řešení hydrodynamických rovnic a rovnice přenosu záření. Pro případ isotropní opacity $\kappa_\nu = \kappa_\nu(\boldsymbol{r})$ můžeme předchozí vzorec nadále upravit

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int \kappa_\nu(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\nu \oint I_\nu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{c}\int \kappa_\nu \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\nu, \tag{3.5}$$

kde vektorovou veličinou $\boldsymbol{F}_\nu$ značíme zářivý tok

$$\boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{r}) = \oint I_\nu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\mathrm{d}\omega. \tag{3.6}$$

Integrací zářivého toku $\boldsymbol{F}_\nu$ přes všechny frekvence ν

$$\boldsymbol{F} = \int_{\nu=0}^{\infty} \boldsymbol{F}_\nu \mathrm{d}\nu \tag{3.7}$$

dostaneme celkový zářivý tok $\boldsymbol{F}$. Definice obou veličin využijeme v další části textu.

Z fyzikálního hlediska rozdělíme zářivé procesy na procesy odehrávájící se v určitých spektrálních čarách – čárové procesy značené v dalším textu indexem C a procesy probíhající v kontinuu, v dalším textu značené indexem K. Oba tyto fyzikálně odlišné druhy procesů hrají v dynamice horkých hvězd velmi důležitou roli. Ačkoli "čárové" procesy probíhají v relativně úzkém intervalu vlnových délek, je tato vlastnost ve spojitosti s dopplerovským posuvem klíčovou vlastností, která činí z hvězdného větru hnaného zářením silně nelineární problém.

Dominantním procesem probíhajícím v kontinuu, v případě atmosféry horkých hvězd, je rozptyl na volných elektronech. Pro zářivé zrychlení v kontinuu platí

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^{K} = \frac{\kappa_e}{c} \int_{\nu=0}^{\infty} \oint I_\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}\nu = \frac{\kappa_e \boldsymbol{F}}{c}, \tag{3.8}$$

kde κ_e značí opacitu pro rozptyl na volných elektronech. Za předpokladu sférické symetrie je nenulová pouze radiální složka zářivého toku $\boldsymbol{F}$ a velikost zářivého zrychlení v kontinuu (3.8) můžeme přepsat vzorcem

$$g_{\mathrm{rad}}^{K} = \frac{\kappa_e L_*}{4\pi r^2 c} \tag{3.9}$$

s pomocí hvězdné luminosity L_* a vzdálenosti od středu hvězdy r. Pro hodnotu $\sigma_e = 0.66 \times 10^{-24}$ [cm^2] klasického účinného průřezu pro rozptyl na volných elektronech, číselné hustoty elektronu n_e a hustoty ρ je opacita pro rozptyl na volných elektronech dána výrazem

$$\kappa_e = \sigma_e \frac{n_e}{\rho} = 0.401 \left\{ I_H X + I_{He} \frac{Y}{4} + I_Z \frac{Z}{14} \right\}, \tag{3.10}$$

kde X, Y, Z je hmotnostní zastoupení vodíku, hélia a těžkých prvků a I_H, I_{He}, I_Z je počet elektronů na iont vodíku, helia a těžších prvků (Lamers & Cassineli, 1999). Pro rané hvězdy populace I hodnota κ_e leží v intervalu $(0.28 < \kappa_e < 0.35)\,\mathrm{cm^2/g}$ (Lamers & Cassineli, 1999). Thomsonův proces velmi účinně redukuje přitažlivou gravitační sílu působící na expandující materiál a jeho započtení do modelů je proto nezbytné. Vzhledem k faktu, že gravitační zrychlení i zářivé zrychlení v kontinuu (3.8) mají v případě sférické symetrie podobný průběh, klesají se čtvercem vzdálenosti, můžeme je zahrnout do společného členu. Pomocí Eddingtonova faktoru Γ_e, což je poměr mezi zářivou sílou v kontinuu a gravitační

$$\Gamma_e = \frac{\kappa_e L_*}{4\pi c G M_*}, \tag{3.11}$$

lze zavést efektivní gravitační zrychlení, zahrnující redukci gravitační síly v důsledku rozptylu záření na volný elektronech

$$g_{\mathrm{ef}} = -G M_* \frac{(1 - \Gamma_e)}{r^2}. \tag{3.12}$$

Mnohem důležitější pro dynamiku hvězdného větru horkých hvězd jsou však procesy probíhající ve spektrálních čarách, které jsou díky dopplerovskému posuvu úzce spjaty s rychlostí expandující obálky. Zářivé zrychlení rozdělíme proto na dvě složky, jedna složka $\boldsymbol{g}^K_{\rm rad}$ reprezentuje rozptyl na volných elektronech a druhá složka $\boldsymbol{g}^C_{\rm rad}$ reprezentuje procesy ve spektrálních čarách

$$\boldsymbol{g}_{\rm rad}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{g}^K_{\rm rad}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{g}^C_{\rm rad}(\boldsymbol{r}) = \frac{\kappa_e \boldsymbol{F}}{c}(r) + \sum_m \oint \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{\kappa_\nu}{c} I_\nu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\,{\rm d}\omega\,{\rm d}\nu, \tag{3.13}$$

kde m je index spektrální čary. Extinkční koeficient faktorizujeme uvážením profilu spektrálních čar

$$\kappa_\nu = \kappa_m \phi(\nu - \nu_0). \tag{3.14}$$

Předpokládáme, že extinkční koeficinet κ_m pro danou čáru m je konstatní. Funkci profilu čáry $\phi(x)$, která je normalizovaná

$$\int_{\nu=0}^{\infty} \phi(\nu-\nu_0)\,{\rm d}\nu = 1, \tag{3.15}$$

převedeme do bezrozměrných jednotek, konkrétně rozdíl frekvencí mezi středem čáry ν_0 a příslušné frekvence ν vyjádříme v dopplerovských jednotkách

$$x = \left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right) \tag{3.16}$$

s využitím vztahu pro diferenciály veličin

$${\rm d}\nu = \Delta\nu_D {\rm d}x. \tag{3.17}$$

Dopplerovská šířka $\Delta\nu$ je dána

$$\Delta\nu_{\rm D} = \nu_0 \frac{v_{th}}{c}, \tag{3.18}$$

kde v_{th} značí rychlost tepelného pohybu částic kontinua. Jak už bylo zmíněno výše, důležitou roli v teorii hvězdného větru horkých hvězd hraje dopplerovský posuv. V souřadné soustavě spojené s určitým objemem plynu vidíme fotony z fotosféry posunuté směrem k červené oblasti spektra. Obráceně to znamená, že v souřadné soustavě spojené s fotony je střed spektrální čáry v expandující obálce posunut směrem k modré oblasti. Díky tomu je plyn schopen absorbovat více fotony posunuté do modré oblasti v porovnání se statickou atmosférou – fotony s vyšší frekvencí. Aplikací vztahu pro dopplerovský posuv

$$\nu' = \nu_0 \left[1 + \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{c}\right] \tag{3.19}$$

dostáváme pro funkci profilu vztah

$$\phi\left(\frac{\nu-\nu_0-(\nu_0/c)\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{\Delta\nu_D}\right) = \phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{v_{th}}\right). \tag{3.20}$$

S použitím předchozích závěrů můžeme vyjádřit zářivou sílu

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}} = \boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^{K}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^{C}(\boldsymbol{r}) = \frac{\kappa_e \boldsymbol{F}}{c}\boldsymbol{r} +$$

$$\sum_m \frac{\kappa_m}{c}\Delta\nu_D \oint \int_{x_0=-c/v_{th}}^{\infty} \phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{v_{th}}\right) I_\nu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x \tag{3.21}$$

s příslušnou záměnou spodní integrační meze $x_0 = -c/v_{th}$. Zatím jsme stále v našich úvahách počítali jak s absorpcí, tak rozptylem fotonu. Pro další postup použijeme rovnici přenosu záření

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu, \tag{3.22}$$

kde τ_ν značí optickou hloubku v čáře definovanou vztahem

$$\tau_\nu(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \rho(r')\kappa_m(r')\phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{v_{th}}\right)\mathrm{d}r'. \tag{3.23}$$

Formální řešení rovnice přenosu záření (3.22) můžeme psát ve tvaru

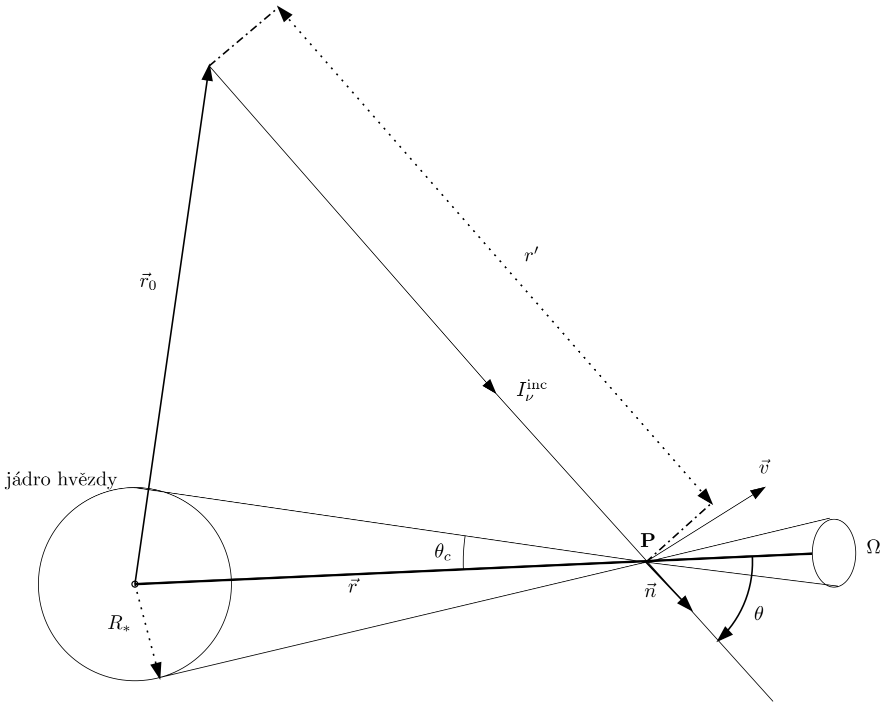
$$I_\nu = I_\nu^0 \exp(-\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} S_\tau(t_\nu)\exp\left[-(\tau - t_\nu)\right]\mathrm{d}t_\nu, \tag{3.24}$$

který se skládá ze dvou členů. První člen – vyjadřující exponenciální útlum záření, odpovídá absorpci, druhý člen – difúzní, v sobě zahrnuje rozptyl záření. Problematika rozptylu v teorii přenosu záření je velmi obtížná a jeho zahrnutí je numericky velice náročné. V našich výpočtech proto pro jednoduchost předpokládejme čistou absorpci. Tedy proces, při kterém je foton určité frekvence absorbován a iont přejde do excitovaného stavu, ze kterého je deexcitován srážkou. Dojde k destrukci fotonu, energie fotonu je předána plynu a dochází k jeho termalizaci. V praxi je ovšem situace odlišná, většina zářivých přechodů má krátkou dobu života a foton je znovu vyzářen, dochází k jeho rozptylu.

O některých aproximativních možnostech, jak zahrnout rozptyl záření do výpočtů, se ještě zmíním v následujících kapitolách. V případě čisté absorpce neuvažujeme druhý člen z formálního řešení. Pro intenzitu záření v dané čáře můžeme psát

$$I_\nu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},x) = I_\nu(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})\exp\left(-\tau_\nu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},x)\right). \tag{3.25}$$

Předpokládáme, že foton vychází z bodu $\boldsymbol{r_0}$. Dále, pokud paprsek $\boldsymbol{n}$ prochází fotosférou platí $I_\nu(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}) > 0$, pokud paprsek neprochází fotosférou je okrajová intenzita nulová. Tímto máme specifikované spodní okrajové podmínky pro intenzitu $I_\nu(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})$. V následujících výrazech použiji pro okrajovou intenzitu zkrácený zápis I_ν^0. Výraz



Obrázek 3.1: Geometrické znázornění jednotlivých veličin vystupujících v integrálu pro výpočet zářivého zrychlení. Jádrem hvězdy rozumíme fotosféru danou poloměrem hvězdy R_*.

pro optickou hloubku (3.23) dosadíme do formálního řešení rovnice přenosu záření v případě čisté absorpce (3.25) a dosadíme do vzorce pro zářivou sílu (3.21)

$$\boldsymbol{g}_{\rm rad} = \frac{\kappa_e \boldsymbol{F}}{c} + \boldsymbol{g}^C_{\rm rad} \tag{3.26a}$$

$$\boldsymbol{g}^C_{\rm rad} = \sum_m \frac{\kappa_m}{c} \Delta\nu_D \oint \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{v_{th}}\right) I^0_\nu \boldsymbol{n} \times \tag{3.26b}$$

$$\times \left[\exp\left(-\int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \rho(r')\kappa_m(r')\phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{v_{th}}\right) \mathrm{d}r'\right)\right] \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}x.$$

Geometrická podoba situace včetně znázornění jednotlivých diferenciálních elementů je znázorněna na obrázku (3.1). Je třeba ještě upozornit na rozšíření spodní integrační meze z původní hodnoty $x_0 = -c/v_{th}$ na mínus nekonečno. Chyba, které se tímto dopouštíme je zanedbatelně malá, uvážíme-li konečný rozsah opacity v čáře v celém spektru vlnových délek. Abychom lépe pochopili fyzikální význam výrazu (3.26b), je druhý člen rozdělen na dvě části. První část

$$\sum_m \frac{\kappa_m}{c} \Delta\nu_D \oint \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{v_{th}}\right) I_\nu^0 \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}x \tag{3.27}$$

říká, kolik záření může být absorbováno v bodě $\boldsymbol{r}$ a druhá část

$$\exp\left(-\int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \rho(\boldsymbol{r}')\kappa_m(r')\phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}}{v_{th}}\right), \mathrm{d}r'\right) \tag{3.28}$$

kolik záření dorazí z bodu $\boldsymbol{r_0}$ do bodu $\boldsymbol{r}$. Na závěr je třeba upozornit, že výsledný výraz byl odvozen za předpokladu zanedbatelného rozptylu.

3.3 Sobolevova aproximace

V předchozím odstavci jsme odvodili tvar zářivého zrychlení pro případ čisté absorpce. Výraz pro zářivé zrychlení (3.26) lze řešit numerickou integrací. Vlastní integrace je však poměrně numericky náročná a zvyšuje nároky na výpočetní čas, protože je třeba zvolit dostatečně hustou frekvenční a prostorovou síť k rozlišení tepelných pohybů. Naproti tomu úhlová integrace přes úhly je díky symetrii problému velmi jednoduchá a stačí nejvýše dvoupaprsková aproximace. Vzorec (3.26) lze však ještě více zjednodušit s využitím Sobolevovy aproximace (Sobolev, 1957) na výraz závisející pouze na lokálních vlastnostech média. Díky tomu lze ušetřit výpočetní nároky problému, stanovit aproximativní analytické vzorce, například rychlost ztráty hmoty $\dot{M}$, a tak přispět k lepšímu porozumění dynamických aspektů hvězdného větru.

V Sobolevově aproximaci lze funkci profilu $\phi(x)$ nahradit Diracovou $\delta(x)$ funkcí. Pokud je makroskopická rychlost větru mnohem větší než rychlost tepelného pohybu $v \gg v_{th}$ a zároveň je materiál hvězdného větru silně urychlován, můžeme předpokládat, že foton frekvence odpovídající příslušné spektrální čáře je absorbován v prostorově velmi úzké oblasti, nazývané Sobolevovou nebo také resonanční zónou. Mimo tuto úzkou oblast je dopplerovský posun daného fotonu příliš velký či naopak malý a jeho absorpce v dané absorpční čáře je tak znemožněna. V této úzké oblasti můžeme pokládat hydrodynamické veličiny $\rho, \mathrm{d}v/\mathrm{d}r$ i extinkční koeficient κ_m za konstantní a můžeme tyto veličiny umístit před integrál. Dále předpokládejme, že skalární funkce, daná skalárním součinem $\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ je monotónní, což nám umožní provést přechod od prostorové proměnné r' k frekvenční proměnné x'

$$x' = x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})}{v_{th}} \tag{3.29}$$

$$\mathrm{d}x' = -\mathrm{d}\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right] = -\frac{\nabla\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{v_{th}} = -\frac{\boldsymbol{n}.\nabla\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}r'}{v_{th}}, \tag{3.30}$$

kde jsme využili faktu, že $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}r'$. Ve výsledném výrazu pro diferenciál se objevil gradient rychlosti, který je klíčovou složkou tvaru zářivého zrychlení v Sobolevově aproximaci a tvoří fundamentální veličinu v teorii zářením hnaného hvězdného větru. S použitím výše zmíněné transformace upravíme výraz pro optickou hloubku (3.23)

$$\tau_\nu = \kappa_m \rho(\boldsymbol{r}) \int_0^{r'} \phi\left(x - \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})}{v_{th}}\right) \mathrm{d}r' = \frac{\kappa_m \rho(\boldsymbol{r}) v_{th}}{\boldsymbol{n}.\nabla\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right]} \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}_0} \delta(x')\mathrm{d}x' \tag{3.31}$$

s příslušnou transformovanou dolní mezí $\tilde{x}$ a horní mezí $\tilde{x_0}$ integrálu. Uvážíme-li, že mezi oblastí emise fotonu a rezonanční oblastí je vzdálenost ekvivalentní mnoha tepelným šířkám $\tilde{x}_0 \gg 1$, můžeme horní frekvenční mez $\tilde{x_0}$ extrapolovat na nekonečno

$$\tilde{x_0} \approx \infty. \tag{3.32}$$

Po dosazení příslušných transformovaných veličin do výrazu pro zářivou sílu (3.26) dostáváme integrál

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^C = \sum_m \frac{\kappa_m}{c} \Delta\nu_D \oint I_\nu^0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tilde{x}) \exp\left(-\tau_0 \int_{\tilde{x}}^{\infty} \delta(x')\mathrm{d}x'\right) \mathrm{d}\tilde{x}}_{K(x)} \, \boldsymbol{n}\mathrm{d}\omega, \tag{3.33}$$

který lze řešit analyticky. Je třeba poznamenat, že lze tento postup provést pro libovolný tvar funkce profilu, pokud je zaručena platnost Sobolevovy aproximace. Symbolem $K(x)$ jsme pro větší přehlednost označili integrál

$$K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tilde{x}) \exp\left(-\tau_0 \int_{\tilde{x}}^{\infty} \delta(x')\mathrm{d}x'\right) \mathrm{d}\tilde{x}, \tag{3.34}$$

který budeme posléze upravovat a τ_0 značí optickou hloubku v Sobolevově rezonanční oblasti – Sobolevovu optickou hloubku

$$\frac{\kappa_m(r)\rho(r)v_{th}}{\boldsymbol{n}.\nabla\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right]} = \tau_0. \tag{3.35}$$

Vztah pro Sobolevovu optickou hloubku můžeme také zapsat v trochu jiné formě. Poměr $v_{th}/\left(\boldsymbol{n}.\nabla\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right]\right)$, který má rozměr délky, označíme jako Sobolevovu délku

$$L_{sob} = \frac{v_{th}}{\boldsymbol{n}.\nabla\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right]}. \tag{3.36}$$

Určuje délku, na které je rychlost kontinua $\boldsymbol{v}$ urychlena o lokální tepelnou rychlost iontů v_{th}. S pomocí Sobolevovy délky přepíšeme definici Sobolevovy optické hloubky

$$\tau_0 = \kappa_m \rho L_{sob}. \tag{3.37}$$

Na Sobolevova délku se lze dívat také tak, že odděluje mikroskopické procesy od makroskopických. Přesněji řečeno, v Sobolevově aproximaci se čárové zářivé procesy dějí na typické škále Sobolevovy délky L_{sob}, zatímco hydrodynamické procesy (tedy makroskopické) se odehrávají na typické škále délek $L_{hyd} \approx v/(\mathrm{d}v/\mathrm{d}r)$. Srovnání těchto dvou škál nám dává představu o platnosti Sobolevovy aproximace, v rámci Sobolevovy aproximace musí platit $L_{sob} \ll L_{hyd}$.

V nejjednodušším případě, kterým je sféricky symetrický vítr v aproximaci bodové hvězdy, lze výraz $\boldsymbol{n}.\nabla\left[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}\right]$ ve vzorci pro Sobolevovu optickou hloubku (3.35) zapsat [viz (B.10)]

$$\tau_0(r) = \kappa_m \rho v_{th} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v_r}. \tag{3.38}$$

S pomocí elegantní substituce (detaily viz Castor, 1974; Owocki & Rybicki, 1984)

$$\mathrm{d}\Phi(x) = \phi(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x} \quad \Phi(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x \tag{3.39}$$

s asymptotickými mezemi

$$\Phi(\infty) = 0\,, \Phi(-\infty) = 1, \tag{3.40}$$

převedeme integrál (3.34) na jednoduchý tvar

$$K(x) = \int_0^1 \mathrm{d}\Phi(x)\exp\left(-\tau_0\Phi(x)\right) = \frac{1-\exp\left(-\tau_0\right)}{\tau_0}. \tag{3.41}$$

Analýzou vztahu (3.41) určíme jeho hodnotu pro limitní případy optické hloubky. Pro malé hodnoty optických hloubek, $\tau_0 \ll 1$ dostáváme limitní výraz[1]

$$\lim_{\tau_0\to 0} \frac{1-\exp\left(-\tau_0\right)}{\tau_0} = \lim_{\tau_0\to 0} \exp\left(-\tau_0\right) = 1, \tag{3.42}$$

naproti tomu pro velké hodnoty optických hloubek $\tau_0 \gg 1$, obdržíme limitní výraz

$$\lim_{\tau_0\to \infty} \frac{1-\exp\left(-\tau_0\right)}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_0}. \tag{3.43}$$

Oba výrazy mají názornou interpretaci, pro opticky tenké čáry je interakce natolik slabá, že foton projde prakticky celou absorpční oblastí, zatímco v případě opticky tlustých čar je foton absorbován v úzké vrstvě absorbujícího plynu a dál se již nedostane. V Sobolevově aproximaci dostáváme pro složku zářivé síly (3.26b) odpovídající čárovým procesům pouze pro jednu čáru m obecný vztah

$$\boldsymbol{g}^{m}_{\mathrm{rad}} = \frac{\kappa_m}{c}\Delta\nu_D \oint I^0_\nu \boldsymbol{n}\mathrm{d}\omega \left[\frac{1-\exp\left(-\tau_0\right)}{\tau_0}\right]. \tag{3.44}$$

[1] Pro úpravu vztahu jsme využili L'Hospitalovo pravidlo

Povšimněme si detailněji závislosti na Sobolevově optické hloubce τ_0. Sobolevova optická hloubka je díky výrazu $\boldsymbol{n}.\nabla[\boldsymbol{n}.\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})]$ silně závislá na úhlu mezi vektorem makroskopické rychlosti kontinua $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ a jednotkovým vektorem ve směru záření $\boldsymbol{n}$. V zářením hnaném hvězdném větru je tak přítomna silná nelineární vazba, kdy vektorové pole $\boldsymbol{v}$ je určeno rovnicemi zářivé hydrodynamiky, kde hlavní hybnou silou je zářivá síla (3.44), přičemž zářivá síla (3.44) sama je určena geometrií proudnic. To činí tento problém velmi nelineárním a numericky komplikovaným. V souladu s článkem Castor et al. (1975) budeme opět uvažovat zjednodušený sféricky symetrický vítr, ve kterém se fotony šíří pouze v radiálním směru. Šíření fotonů pouze v radiálním směru je ekvivalentní šíření záření z bodového zdroje. Zářivé zrychlení má pak v této aproximaci pro danou spektrální čáru m tvar

$$g_{\text{rad}}^m(r) = \frac{\nu_m L_\nu v_{th} \kappa_m}{4\pi r^2 c^2} \frac{1 - \exp(-\tau_0)}{\tau_0}, \tag{3.45}$$

kde L_ν je monochromatická luminosita hvězdy. V případě opticky velmi slabých čár, pro které platí $\tau_0 \ll 1$, dosazením limitního vztahu (3.42) obdržíme výraz

$$g_{\text{tk}}^m = \frac{\nu_m L_\nu v_{th} \kappa_m}{4\pi r^2 c^2}, \tag{3.46}$$

zatímco pro limitu opticky tlustých čar $\tau_0 \gg 1$ analogicky dosazením limitního vztahu (3.43) dostáváme výraz

$$g_{\text{tl}}^m = \frac{\nu_m L_\nu}{4\pi \rho r^2 c^2} \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}. \tag{3.47}$$

S pomocí předposledního výrazu (3.46) můžeme upravit vztah (3.45) na konečný tvar

$$g_{\text{rad}}^m(r) = g_{\text{tk}} \frac{1 - \exp\left(-\tau_0\right)}{\tau_0} \tag{3.48}$$

pro zářivé zrychlení v Sobolevově aproximaci a pro případ sféricky symetrického hvězdného větru se zářením z bodového zdroje.

3.4 Aproximace souboru spektrálních čar

V předchozím odstavci jsme odvodili poměrně jednoduchý vztah pro výpočet zářivé síly g_{rad}^m v důsledku interakce se spektrální čárou m v Sobolevově aproximaci. Celková zářivá síla působící na element kontinua hvězdného větru je však dána interakcí s velkým množstvím spektrálních čar

$$g_{\text{rad}}^C = \sum_m g_{\text{rad}}^m. \tag{3.49}$$

Pro praktický výpočet je nutné provést součet přes všechny možné čárové přechody. To vyžaduje spočítat stupeň ionizace a excitace pro velké množství energetických hladin mnoha různých prvků a následně pro každý možný přechod spočítat Sobolevovu optickou hloubku. Nároky na výpočetní kapacitu jsou tak příliš vysoké. Navíc, hydrodynamické výpočty jsou také velmi náročné z hlediska výpočetního času. Celkové požadavky na výpočetní kapacitu tak leží na samé hranici současných technických možností. Je tedy třeba výpočet celkové zářivé síly aproximovat a tak podstatně zjednodušit. V následujících pasážích budeme sledovat stejný postup načrtnutý autory CAK teorie v práci Castor et al. (1976), s přihlédnutím k pracím Abbott (1982a) a Abbott (1982b). Základní předpoklady v CAK teorii jsou

- Jednotlivé spektrální čáry hvězdného větru se vzájemně nepřekrývají
- Každý foton interaguje s hvězdným větrem pouze jednou, zanedbáváme vícenásobný rozptyl
- Hvězdný vítr je sfériky symetrický
- Pro záření z hvězdy lze použít aproximaci bodového zdroje
- Magnetické pole a viskozita jsou zanedbatelné
- Plasmu tvořící hvězdný vítr lze považovat za kvazineutrální s nulovými proudy

Musíme uvážit, že první ani druhý předpoklad, který jsme použili není příliš reálný. Rozdělení jednotlivých spektrálních čar není homogenní, některé frekvenční úseky obsahují pouze malý počet čar, které přispívají do zářivého zrychlení větru (například $\lambda \geq 1200$ Å u hvězd spektrálního typu O) a na druhou stranu, některé úseky obsahují velké množství čar (pro O hvězdy interval 300 Å $\leq \lambda \leq$ 600 Å), pro B hvězdy interval (1000 Å $\leq \lambda \leq$ 3000 Å) a tak se v důsledku Dopplerova posuvu mohou překrývat. Podobně je tomu i s druhým předpokladem, foton může interagovat s více než jedním atomem (teoretický rozbor lze nalézt v článku Friend & Castor, 1983). Nicméně výsledný příspěvek k celkovému zářivému zrychlení těchto dvou efektů není podstatný a tudíž si můžeme dovolit jejich zanedbání. Detailnější rozbor lze nalézt v knize Lamers & Cassineli (1999).

Castor, Abbott, & Klein (1976) provedli detailní výpočty výsledné zářivé síly g^C_{rad} pro velké množství různých hodnot teplot a rychlostí hvězdného větru. Tyto tabulkové hodnoty potom parametrizovali a jako vhodný parametr zvolili bezrozměrný parametr

$$t = \frac{\kappa_e^{\mathrm{ref}} v_{th,p} \rho}{(\mathrm{d}r/\mathrm{d}v_r)}, \tag{3.50}$$

kde $\left(\kappa_e^{\text{ref}}\right)$ je referenční hodnota opacity pro rozptyl na volných elektronech[2] s hodnotou Abbott (1982b)

$$\kappa_e^{\text{ref}} = 0.325\text{cm}^2\text{g}^{-1},$$

a $v_{th,p}$ je termální rychlost protonů ve větru s teplotou rovnou teplotě hvězdy. Vztah pro výpočet $v_{th,p}$ je dán

$$v_{th,p} = \sqrt{\frac{2k_B T_{\text{eff}}}{m_H}},$$

kde k_B je Boltzmannova konstanta, T_{eff} je efektivní teplota hvězdy a m_H je hmotnost protonů. Tvar parametru není zcela bezdůvodný, zářivou sílu v důsledku interakce s jednou spektrální čárou lze pomyslně rozdělit na dvě části, část obsahující mikroskopický popis čáry $\sim \kappa_m$ a část obsahující informace o dynamické struktuře větru $\sim \rho(\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r)$ viz (3.50). Tato část je pro všechny čáry stejná. Je tedy rozumné vyjádřit optické hloubky pro jednotlivé čáry pomocí referenční optické hloubky, jež závisí pouze na struktuře větru.

Zářivé zrychlení potom vyjádřili s pomocí g_e^{ref}, tedy zářivého zrychlení v důsledku rozptylu na volných elektronech

$$g_{\text{rad}}^C = g_e^{\text{ref}} M(t) = \frac{\kappa_e^{\text{ref}} F(r)}{c} M(t) = \frac{\kappa_e^{\text{ref}} L_*}{4\pi r^2 c} M(t) \tag{3.51}$$

s referenční hodnotou κ_e^{ref}. Z numericky vypočítaných hodnot pro různé hodnoty T_{eff},$\log g$ a elektronové hustoty n_e (Abbott, 1982a) vyplývá, že mohou být velmi dobře aproximovány jednoduchou mocninnou funkcí

$$M(t) = kt^{-\alpha}. \tag{3.52}$$

Dosazením mocninné funkce (3.52) do výrazu pro celkovou zářivou sílu (3.51) a s použitím definice bezrozměrného parametru (3.50) obdržíme výsledný vztah pro zářivou sílu v CAK teorii

$$g_{\text{rad}}^C(r) = \frac{{\kappa_e^{\text{ref}}}^{1-\alpha}}{4\pi c v_{th}^{\alpha}} \frac{L_*}{r^2} k \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{\alpha}, \tag{3.53}$$

ve kterém veličiny k, α tvoří základní parametry CAK teorie. V tabulce 3.1 převzaté z Abbott (1982b) jsou uvedeny jejich hodnoty pro různé hodnoty efektivní teploty hvězdy T_{eff} a gravitačního zrychlení $\log g$.

[2]Je třeba upozornit, že se často v literatuře můžeme setkat se značením referenční opacity pro rozptyl symbolem σ_e. Vzhledem k ustálenosti symbolů v teorii přenosu záření se přidržíme klasického značení opacity κ_e

T_{eff} [K]	$\log g$	ne/W [cm^{-3}]	k	α	δ	$Q/10^3$	reference
6000	0.5	$6.8\,.10^{6}$	0.018	0.502	0.055		A
...	...	$6.8\,.10^{8}$	0.029	0.465	0.037		A
...	...	$6.8\,.10^{11}$	0.272	0.444	0.123		A
8000	1.0	$1.7\,.10^{6}$	0.110	0.521	0.079		A
...	...	$1.7\,.10^{9}$	0.105	0.542	0.079		A
...	...	$1.7\,.10^{12}$	0.108	0.555	0.024		A
10000	1.5	$3.2\,.10^{6}$	0.288	0.499	0.113	1.4	A
...	...	$3.2\,.10^{9}$	0.362	0.538	0.099	1.1	A
...	...	$3.2\,.10^{12}$	0.370	0.540	0.102	2.1	A
15000	2.0	$1.3\,.10^{7}$	0.189	0.505	0.013	1.4	A
...	...	$1.3\,.10^{10}$	0.253	0.511	0.020	1.1	A
...	...	$1.3\,.10^{13}$	0.945	0.517	0.092	2.1	A
20000	2.5	$3.7\,.10^{7}$	0.140	0.559	0.068	1.4	A
...	...	$3.7\,.10^{10}$	0.477	0.506	0.035	1.1	A
...	...	$3.7\,.10^{13}$	0.617	0.523	0.031	2.1	A
30000	3.5	$1.0\,.10^{8}$	0.093	0.576	0.022	2.2	A
...	...	$1.0\,.10^{11}$	0.156	0.609	0.057	0.8	A
...	...	$1.0\,.10^{14}$	0.571	0.545	0.018	1.4	A
40000	4.0	$1.8\,.10^{8}$	0.051	0.684	0.041	1.7	A
...	...	$1.8\,.10^{11}$	0.174	0.606	0.034	1.0	A
...	...	$1.8\,.10^{14}$	0.533	0.571	0.046	15.5	A
50000	4.5	$3.1\,.10^{8}$	0.089	0.640	0.071	1.4	A
...	...	$3.1\,.10^{11}$	0.178	0.606	0.062	1.4	A
...	...	$3.1\,.10^{14}$	0.472	0.582	0.056	4.4	A
20000			0.320	0.565	0.020		P
30000			0.170	0.590	0.090		P
45000			0.124	0.640	0.070	2.8	K
50000			0.124	0.640	0.070		P

Tabulka 3.1: Hodnoty CAK konstant a parametru Q v závislosti na různé teplotě T_{eff} a gravitačním zrychlení, pro referenční hodnotu $\kappa_e^{\mathrm{ref}} = 0.325\ \mathrm{cm^2 g^{-1}}$. Pro sestavení tabulky byly použity práce: A =Abbott (1982b) modifikované o korekční faktor $(n_e/W)^{\delta}$, P = Pauldrach et al. (1986), K=Kudritzki et al. (1989). Hodnoty parametru Q byly převzaty z práce Gayley & Owocki (1994). V některých případech jsou vidět rozdílné hodnoty pro stejné teploty.

Distribuční funkce

Ekvivalentní přístup, jak zahrnout soubor spektrálních čar do výpočtu celkové zářivé síly g_{rad}^{C}, je volba vhodné distribuční funkce, popisující závislost opacity na frekvenci. Matematicky lze vyjádřit distribuční funkci vztahem

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}\kappa} = \int_0^N \left(\frac{L_\nu \nu}{L_*}\right) \tilde{n}(\kappa, \nu)\mathrm{d}\nu, \tag{3.54}$$

který udává počet čar v intervalu opacit $(\kappa, \kappa + \mathrm{d}\kappa)$ na základě distribuční funkce $\tilde{n}$, stanovující počet spektrálních čar ležících ve frekvenčním intervalu $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$ s absorpčním koeficientem v intervalu $(\kappa, \kappa + \mathrm{d}\kappa)$ a statistickou váhou $(L_\nu \nu / L_*)$, odpovídající intenzitě čáry a počtu spektrálních čar N. S pomocí detailních výpočtů provedených na velkém počtu čar lze ukázat, že distribuční funkci je možné aproximovat lineární funkcí (viz Abbott, 1982a ; Puls et al., 2000) mající tvar

$$\mathrm{d}\mathcal{N} = \frac{1}{\kappa_0}\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^{\alpha-2} \mathrm{d}\kappa. \tag{3.55}$$

Vidíme, že všechny spektrální čáry jsou popsány pomocí dvou parametrů, CAK parametru α a nového parametru κ_0, jehož význam bude vysvětlen později. Pro stanovení celkové zářivé síly vyjdeme ze vzorce (3.45) pro zářivou sílu spektrální čáry m v Sobolevově aproximaci. Celková zářivá síla bude dána součtem přes všechny čáry m

$$g_{\mathrm{rad}}^{C}(r) = \sum_m g_{\mathrm{rad}} = \frac{L_* v_{th}}{4\pi r^2 c^2} \sum_m \kappa_m \left(\frac{\nu_m L_\nu}{L_*}\right) \frac{1 - \exp(-\tau_0)}{\tau_0}. \tag{3.56}$$

Vztah pro zářivou sílu (3.45) jsme upravili rozšířením výrazem L_*/L_*. Celkovou zářivou sílu potom dostaneme nahrazením sumace integrací přes opacitu z výrazu pro celkovou zářivou sílu (3.56) v Sobolevově aproximaci vynásobeného distribuční funkcí

$$g_{\mathrm{rad}}^{C} = \frac{L_* v_{th}}{4\pi r^2 c^2} \int_0^\infty \kappa \left(\frac{1 - \exp(-\tau_0)}{\tau_0}\right) {\kappa_0}^{-1} \left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^{2-\alpha} \mathrm{d}\kappa. \tag{3.57}$$

Pro integraci přes elementární opacitu nejprve dosadíme Sobolevovu optickou hloubku τ_0 podle definice (3.37)

$$\tau_0 = \kappa \rho L_{\mathrm{Sob}},$$

následně všechny konstanty umístíme před integrál a výraz upravíme

$$g_{\mathrm{rad}}^{C} = \frac{L_* v_{th}}{4\pi r^2 c^2} {\kappa_0}^{(1-\alpha)} \int_0^\infty \kappa^{\alpha-1} \left(\frac{1 - \exp(-\kappa \rho L_{\mathrm{Sob}})}{\kappa \rho L_{\mathrm{Sob}}}\right) \mathrm{d}\kappa.$$

Pro další úpravu usměrníme integrand výrazem $(\rho L_{\mathrm{Sob}})^{\alpha} / (\rho L_{\mathrm{Sob}})^{\alpha}$ a vhodným uspořádáním přepíšeme integrand pomocí Sobolevovy optické hloubky τ_0 (značenou v další části textu jako proměnná $t = \tau_0$ s diferenciálním elementem $\mathrm{d}t = \rho L_{sob} \mathrm{d}\kappa$),

$$g_{\mathrm{rad}}^{C} = \frac{L_* v_{th}}{4\pi r^2 c^2} \kappa_0^{(1-\alpha)} (\rho L_{\mathrm{Sob}})^{-\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha-2} (1 - \exp(-t)) \mathrm{d}t.$$

Integraci přes proměnnou t lze provést analyticky a to metodou *per partes*

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-2} (1 - \exp(-t)) \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1-\alpha} \frac{1 - \exp(-t)}{t^{1-\alpha}} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) \mathrm{d}t. \tag{3.58}$$

Z prvního výrazu je patrné, že je roven nule, zatímco druhý vede ke Gamma funkci, definované

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{x-1} \mathrm{d}t. \tag{3.59}$$

V našem případě můžeme druhý člen s upravit s využitím (3.59) na

$$\frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha}. \tag{3.60}$$

Výraz pro zářivou sílu zahrnující v sobě celý soubor spektrálních čar má po těchto výpočtech tvar

$$g_{\mathrm{rad}}^{C} = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)} \frac{L_* v_{th}}{4\pi r^2 c^2} \kappa_0^{(1-\alpha)} (\rho L_{\mathrm{Sob}})^{-\alpha}. \tag{3.61}$$

Tento tvar lze ještě upravit, uvážíme-li, že κ_0 má rozměr absorpčního koeficientu. Potom výraz $\kappa_0 \rho L_{sob}$ můžeme považovat za Sobolevovu optickou hloubku $\tilde{\tau_0}$ pro hypotetickou čáru s absorpčním koeficientem rovným κ_0 a vzorec pro zářivou sílu můžeme přepsat

$$g_{\mathrm{rad}}^{C}(r) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)} \frac{\kappa_0 v_{th} L_*}{4\pi c^2 r^2} \tilde{\tau_0}^{-\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)} \frac{(\kappa_0 v_{th})^{1-\alpha}}{4\pi c^2} \frac{L_*}{r^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} \right)^{\alpha}. \tag{3.62}$$

Vztah mezi CAK parametry k, α a parametrem κ_0 je

$$\kappa_0 = \kappa_e^{\mathrm{ref}} \left(k \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{c}{v_{th}} \right)^{1/(1-\alpha)}, \tag{3.63}$$

nebo v parametrech modelu častěji používaný tvar

$$\frac{\kappa_0 v_{th}}{c} = \left(k \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{c}{v_{th}} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \kappa_e^{\mathrm{ref}}. \tag{3.64}$$

Je třeba dodat, že v novější literatuře a článcích se často setkáme místo obvyklých CAK parametrů $\{\alpha, k\}$ s parametry $\{Q, \alpha\}$. Bezrozměrný parametr Q, který je úměrný metalicitě hvězdného větru, zavedl Gayley (1995) a jeho velikost je uvedena také v tabulce 3.1. Vztah mezi klasickým CAK parametrem k a parametrem Q je

$$k = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{v_{th}}{c}\right)^{\alpha} Q^{1-\alpha}. \tag{3.65}$$

Korekční faktory CAK teorie

Přes nesporné úspěchy CAK teorie ve schopnostech vysvětlit základní pozorované charakteristiky hvězdného větru se záhy objevily některé rozpory vzhledem k pozorovaným faktům, zejména pozorované konečné rychlosti větru v_∞ a z pozorování nepřímo odvozené rychlosti ztráty hmoty $\dot{M}_{\rm obs}$. Prvním diskutabilním bodem CAK teorie jsou některé příliš zjednodušující předpoklady, například bodová aproximace hvězdy či zanedbání závislosti zářivého zrychlení na stupni ionizace ve hvězdném větru. Vliv těchto efektů byl zahrnut do korekčních faktorů CAK teorie. První korekční faktor zavedl Abbott (1982a), ve kterém charakterizoval závislost zářivého zrychlení na stupni ionizace a excitace ve hvězdném větru vztahem

$$f_{\rm ion}\left(W(r), n_e\right) \sim \left(\frac{n_e}{W(r)}\right), \tag{3.66}$$

který obecně závisí na hustotě elektronů n_e a geometrickém dilutačním faktoru

$$W(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2}\right). \tag{3.67}$$

Zmíněná závislost má jednoduchou interpretaci, efektivita procesu fotoionizace v dané vzdálenosti r závisí na toku záření z hvězdy v daném místě, tedy proporcionálně na $W(r)$, kdežto proces rekombinace je úměrný elektronové hustotě n_e. I tento faktor lze aproximovat mocninnou funkcí, podobně jako v případě klasické CAK teorie (3.52). Výsledný výraz pro $M(t)$ tak má tvar (viz Lamers & Cassineli, 1999)

$$M(t) = kt^{-\alpha}\left(\frac{10^{-11} n_e}{W(r)}\right)^{\delta}, \tag{3.68}$$

kde δ doplňuje sestavu fundamentálních konstant CAK teorie a faktor 10^{-11} má rozměr [cm^3]. Pro hvězdný vítr O a B hvězd se hodnota konstanty pohybuje v intervalu $(0.02 - 0.2)$. Výsledný korekční člen $f_{\rm ion}$ je dán vztahem

$$f_{\rm ion} = \left(\frac{10^{-11} n_e}{W(r)}\right)^{\delta}. \tag{3.69}$$

Typický průběh závislosti korekčního faktoru f_{ion} na vzdálenosti od středu hvězdy r je znázorněn v grafu (3.2). Výraz pro zářivé zrychlení v CAK aproximaci (3.53) tak rozšíříme o korekční faktor (3.69).

$$g_{\text{rad}}^{C}(r) = \frac{{\kappa_e^{\text{ref}}}^{1-\alpha}}{4\pi c v_{th}^{\alpha}} \frac{L_*}{r^2} k \left(\frac{10^{-11} n_e}{W(r)}\right)^{\delta} \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{\alpha}. \tag{3.70}$$

Dalším významným zpřesněním CAK teorie bylo zahrnutí efektu konečného disku hvězdy. V klasické CAK teorii předpokládáme, že záření vychází z bodové hvězdy, což v blízkých vzdálenostech od hvězdy zjevně neplatí. Místo této aproximace budeme předpokládat pouze radiální rychlostní pole a připustíme existenci neradiálních paprsků. Výraz pro (3.35) lze za tohoto předpokladu upravit dosazením podle (B.14) na

$$\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = \mu^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + (1-\mu^2)\frac{v_r}{r}. \tag{3.71}$$

Výraz (3.71) dosadíme do vztahu pro zářivou sílu v Sobolevově aproximaci, zahrnující v sobě celý soubor spektrálních čar pomocí distribuční funkce, a to pro sférickou geometrii problému (3.62). Za předpokladu rovnoměrně jasného disku lze odvodit analytický výraz pro korekční faktor (detailní postup výpočtu je uveden v (C.11))

$$f_{\text{fin}} = \frac{(1+\sigma)^{\alpha+1} - (1+\sigma{\mu_*}^2)^{\alpha+1}}{\sigma(\sigma+1)^{\alpha}(1-{\mu_*}^2)(\alpha+1)}. \tag{3.72}$$

Předpoklad rovnoměrně jasného disku je nerealistickým mezním případem, ve skutečnosti je třeba při výpočtu uvážit okrajové ztemnění disku. Na základě této úvahy lze říci, že korekce f_{fin} je trochu nadhodnocena.

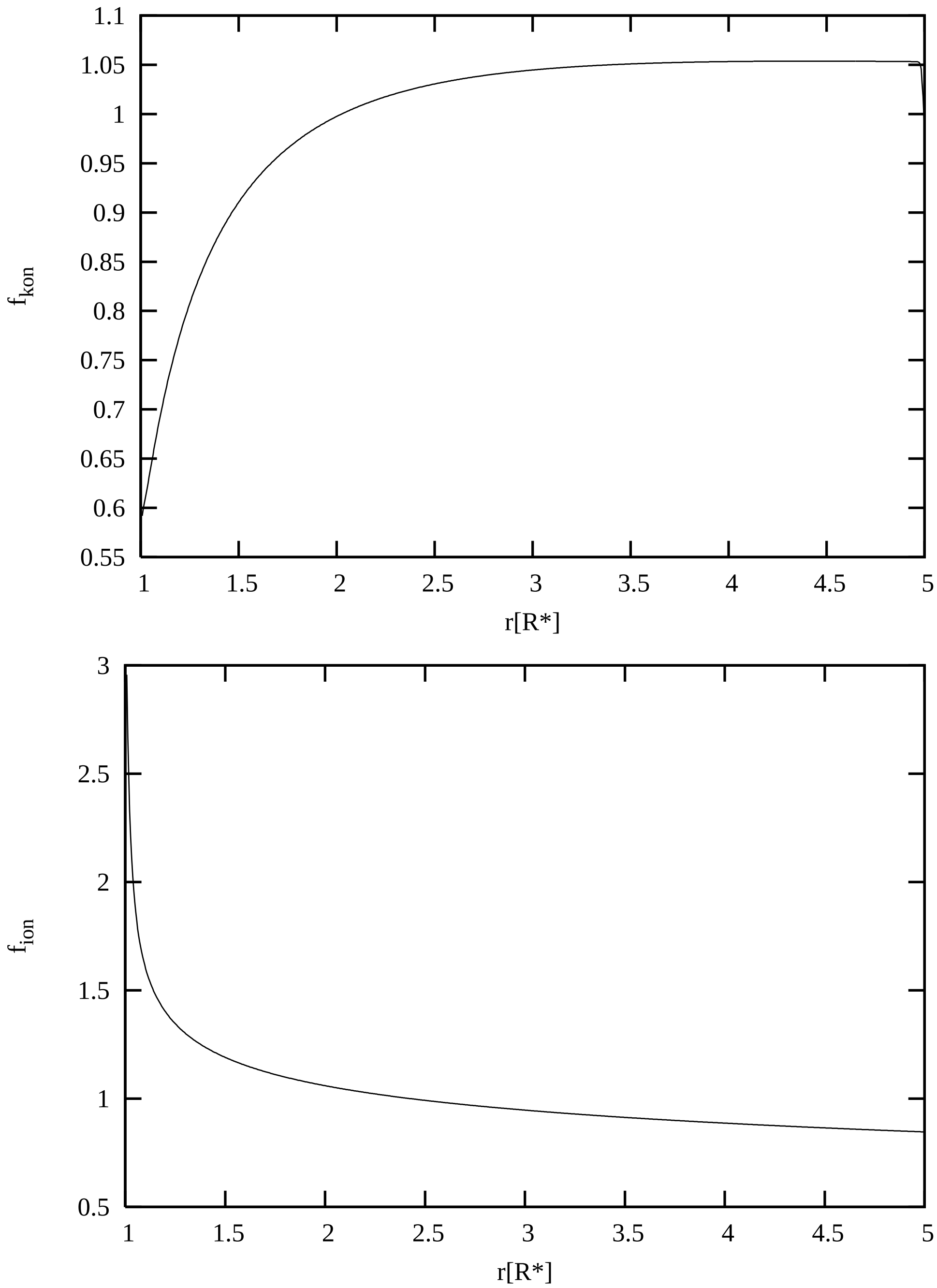
Zářivé zrychlení zahrnující obě výše uvedené opravy (3.69), (3.72) je dáno vztahem

$$g_{\text{rad}}^{C}(r) = f_{\text{fin}} f_{\text{ion}} \frac{{\kappa_e^{\text{ref}}}^{1-\alpha}}{4\pi c v_{th}^{\alpha}} \frac{L_*}{r^2} k \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{\alpha} \tag{3.73}$$

s využitím tradičního CAK tvaru (3.53), nebo vztahem

$$g_{\text{rad}}^{C}(r) = f_{\text{fin}} f_{\text{ion}} \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \frac{(\kappa_0 v_{th})^{1-\alpha}}{4\pi c^2} \frac{L_*}{r^2} \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{\alpha}, \tag{3.74}$$

s využitím ekvivalentního tvaru zářivé síly stanoveného z distribuční funkce pro bodovou hvězdu (3.62).



Obrázek 3.2: Průběh korekčního faktoru f_{kon} CAK teorie zahrnujícího efekt konečného disku hvězdy a korekčního faktoru f_{ion} zahrnujícího efekt ionizace a excitace ve hvězdném větru v závislosti na vzdálenosti od hvězdy $r[R_*]$. Byl použit model hvězdy $M_* = 42\,M_\odot$ $R* = 19\,R_\odot$ $T_{\mathrm{eff}} = 42000$ K a s hodnotou CAK konstant $\alpha = 0.72$, $k = 0.107$ a $\delta = 0.089$.

Kapitola 4

Hvězdný vítr

4.1 CAK řešení stacionárního větru

Známe již tvar zářivé síly a její závislost na hydrodynamických proměnných. Budeme zkoumat dynamické důsledky tohoto nového členu, naším cílem bude nalézt jednoduché analytické řešení. Uvažujme proto stacionární řešení Eulerových rovnic zářivé hydrodynamiky a pro jednoduchost předpokládejme sféricky symetrický vítr, ve kterém probíhají pouze izotermické procesy. Shrneme výchozí předpoklady

- Stacionární - na čase nezávislé řešení
- Sférická symetrie problému
- Platnost Sobolevovy aproximace
- Izotermické procesy

Do výpočtu nezahrnujeme korekční faktory (3.69), (3.72). Vyjdeme z Eulerovy rovnice pro tento případ (2.21), s tvarem zářivé síly (3.53), ve které za gravitační zrychlení g_* dosadíme efektivní gravitační zrychlení (3.12) zahrnující v sobě efekt rozptylu na volných elektronech

$$v_r {v_r}' = -\frac{a^2}{\rho}\rho' - \frac{GM_*(1-\Gamma_e)}{r^2} + \frac{C}{r^2}\left(\frac{{v_r}'}{\rho}\right)^{\alpha}, \tag{4.1}$$

kde konstantou C jsme označili všechny nehydrodynamické veličiny

$$C = k\frac{\left(\kappa_e^{\mathrm{ref}}\right)^{1-\alpha}}{4\pi c {v_{\mathrm{th}}}^{\alpha}} L_*. \tag{4.2}$$

Rovnice můžeme dále upravit s využitím zákona zachování hmoty pro sféricky symetrický případ

$$\dot{M} = 4\pi\rho(r) v_r r^2 = const, \tag{4.3}$$

ze kterého dostáváme zderivováním obou stran rovnic podle radiální souřadnice r vztah

$$\rho' = -\rho\left(\frac{v_r'}{v_r} + \frac{2}{r}\right). \tag{4.4}$$

S využitím vztahu (4.4) dosazením za ρ' upravíme rovnici (4.1) na tvar

$$v_r v_r'\left(1 - \frac{a^2}{{v_r}^2}\right) = \frac{a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2}(1-\Gamma_e) + \frac{C}{r}\left(\frac{v_r'}{\rho}\right)^\alpha. \tag{4.5}$$

V dalším postupu zanedbáme člen a^2/r a člen $a^2/{v_r}^2$, které odpovídají zvukovým vlnám

$$v_r v_r' = -\frac{GM_*(1-\Gamma_e)}{r^2} + \frac{C}{r^2}\left(\frac{v_r'}{\rho}\right)^\alpha \tag{4.6}$$

a které jsou podstatné pouze v subsonické oblasti hvězdného větru. Vzhledem k faktu, že sonický bod se nalézá velmi blízko povrchu hvězdy, je tato oblast velmi malá (Lamers & Cassineli, 1999).

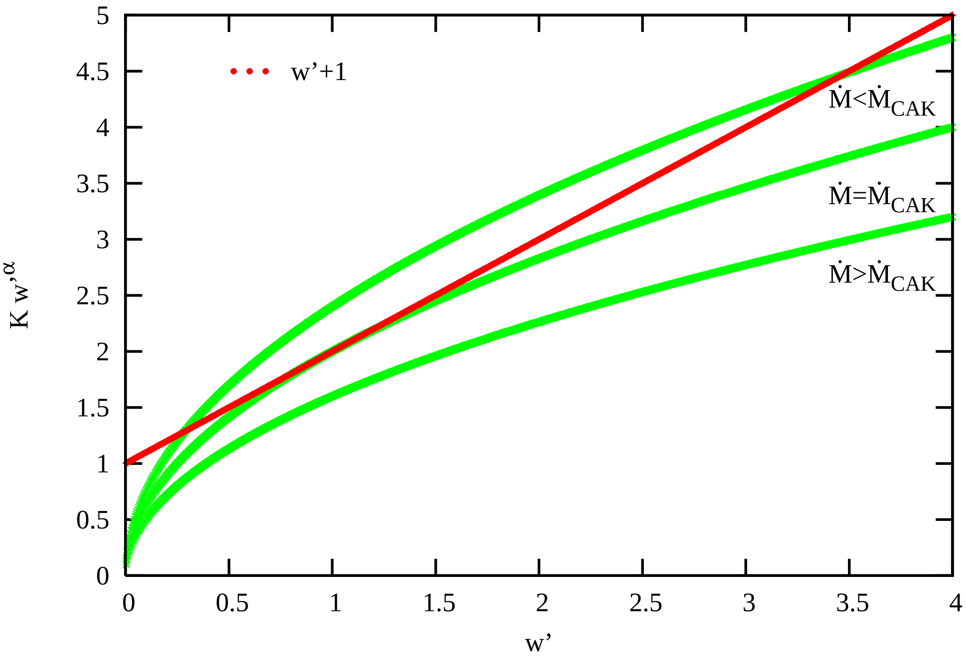
V již zmiňovaném článku CAK teorie Castor et al. (1975) autoři ukázali, že tato diferenciální rovnice má nekonečně mnoho řešení, které můžeme rozdělit na dvě charakteristické třídy řešení s malou a vysokou akcelerací označované v dalším textu jako “pomalé” a “strmé”. Autoři článku dále argumentují , že hvězdný vítr se adaptuje na kritické řešení, které spojitě přechází z pomalého řešení do strmého. Přesněji řečeno, začíná ve fotosféře jako nejrychlejší možné řešení z množiny pomalých řešení, které začínají ve fotosféře a končí v nekonečnu. Kritické řešení dále protíná určitý kritický bod r_c (4.12) a hladce přechází do nejpomalejšího řešení z množiny strmých řešení, které začínají v nekonečnu a končí v sonickém bodě. Z celé množiny řešení má právě kritické řešení maximální ztrátu hmoty. Jejich argumentace pro stacionární vítr je založena čistě na matematických vlastnostech řešení, především spojitosti řešení (včetně prvních derivací) v každém bodě. Otázkou zůstává, jak se k tomuto řešení hvězdný vítr propracuje dynamicky. Jinými slovy řečeno, proč je náš časově závislý hydrodynamický kód schopen modelovat CAK řešení. Předpokládaná hypotéza spočívá na existenci dynamického atraktoru, kterým je kritické CAK řešení.

Upravenou rovnici (4.6) vynásobíme r^2, upravíme zlomek ve výrazu pro zářivou sílu rozšířením $4\pi r^2$ a nakonec upravíme na konečný tvar

$$r^2 v_r v_r' = -GM_*(1-\Gamma_e) + C\left(\frac{4\pi}{\dot{M}}\right)^\alpha (r^2 v_r v_r')^\alpha. \tag{4.7}$$

V poslední úpravě jsme využili vztahu pro rychlost ztráty hmoty ve sféricky symetrickém případě (4.3). Provedením substice $u' = r^2 v_r v_r'$ dostáváme algebraickou rovnici pro u'

$$u' - C\left(\frac{4\pi}{\dot{M}}\right)^\alpha u'^\alpha + GM_*(1-\Gamma_e) = 0. \tag{4.8}$$



Obrázek 4.1: Graficky znázorněné řešení algebraické rovnice (4.10), která reprezentuje CAK hvězdný vítr s předpokladem zanedbatelné rychlosti zvuku. Vidíme, že pro volbu rychlosti ztráty hmoty $\dot{M}$ větší než je hodnota $\dot{M}_{\mathrm{CAK}}$ odpovídající kritickému řešení, řešení neexistuje, zatímco pro hodnoty menší než je tato hodnota, existují řešení dvě. CAK řešení tak reprezentuje kritický případ s jedním řešením a maximální ztrátou hmoty.

Grafické řešení této rovnice je znázorněno na obrázku (4.1). Je třeba upozornit, že pro zjednodušení grafické analýzy byla rovnice nejprve podělena výrazem $GM_*(1-\Gamma_e)$

$$\frac{u'}{GM_*(1-\Gamma_e)} - \frac{C}{GM_*(1-\Gamma_e)}\left(\frac{4\pi}{\dot{M}}\right)^{\alpha} u'^{\alpha} + 1 = 0 \tag{4.9}$$

a následně přeznačením $w' \rightarrow u'/(GM_*(1-\Gamma_e))$ upravena na tvar

$$w' - Kw'^{\alpha} + 1 = 0, \tag{4.10}$$

s novou konstantou K danou vztahem

$$K = \frac{C}{GM_*(1-\Gamma_e)}\left(\frac{4\pi GM_*}{\dot{M}}\right)^{\alpha}. \tag{4.11}$$

Z nekonečně mnoha řešení rovnice (4.8) vybereme kritické řešení, jediné řešení, které spojitě přechází z subsonické části do supersonické. Z matematického hlediska kritické

CAK řešení prochází kritickým bodem r_c. Kritickým bodem funkce nazýváme bod, pro který platí podmínka

$$\frac{\partial E}{\partial w'} = 0, \tag{4.12}$$

kde funkční závislost $E(w')$ je dána pravou stranou rovnice (4.10)

$$E(w') = w' - Kw'^{\alpha} + 1. \tag{4.13}$$

Provedením derivace s použitím (4.13) podmínku (4.12) upravíme

$$1 = \alpha w'^{\alpha-1} K. \tag{4.14}$$

Rovnice (4.14) spolu s rovnicí (4.10) tvoří soustavou dvou rovnic, jejichž řešením a postupnou úpravou získáme kritické řešení w'_{c}. S pomocí rovnice (4.14) vyjádříme z rovnice (4.10) konstantu K

$$K = \frac{w' + 1}{w'^{\alpha}}. \tag{4.15}$$

Zpětně dosazením do rovnice (4.14) a její úpravou

$$w'_{\mathrm{c}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{4.16}$$

dostáváme vztah pro kritické řešení (indexem c jsme označili kritické řešení). Dále dosazením kritického řešení (4.16) zjistíme hodnotu kostanty K pro kritické řešení

$$w'_{\mathrm{c}} + 1 = K w'^{\alpha}_{\mathrm{c}}, \tag{4.17}$$

což po úpravě vede k hodnotě

$$K = \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}}. \tag{4.18}$$

Z velikosti konstanty K určíme také rychlost ztráty hmoty pro kritické řešení použitím rovnice (4.11)

$$\frac{k\left(\kappa_e^{\mathrm{ref}}\right)^{(1-\alpha)}}{4\pi c v_{\mathrm{th}}^{\alpha}} \frac{L_*}{GM_*(1-\Gamma_e)} \frac{(4\pi GM_*(1-\Gamma_e))^{\alpha}}{\dot{M}^{\alpha}} = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} \tag{4.19}$$

a postupnou úpravou rovnice (4.19) obdržíme

$$\dot{M} = \frac{\left(k\kappa_e^{\mathrm{ref}} L_*\right)^{1/\alpha}}{\kappa_e^{\mathrm{ref}}(4\pi c)^{1/\alpha}} \frac{4\pi\left(GM_*(1-\Gamma_e)\right)^{(\alpha-1)/\alpha}}{v_{\mathrm{th}}} \frac{\alpha(1-\alpha)^{1/\alpha}}{(1-\alpha)}. \tag{4.20}$$

Výsledný výraz můžeme ještě usměrnit zlomkem $\left(\alpha^{1/\alpha}\right) / \left(\alpha^{1/\alpha}\right)$ a upravit tak (4.20) na tvar kompatibilní s knihou (Lamers & Cassineli, 1999, rovnice 8.108)

$$\dot{M} = \frac{4\pi}{\kappa_e^{\mathrm{ref}} v_{\mathrm{th}}} \left(\frac{\kappa_e}{4\pi}\right)^{1/\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1/\alpha} (k\alpha)^{1/\alpha} \left(\frac{L_*}{c}\right)^{1/\alpha} GM_*(1-\Gamma_e)^{(\alpha-1)/\alpha}. \tag{4.21}$$

Je třeba dodat, že v našem výrazu není ionizační korekční člen (3.69), který nebyl při odvozování zahrnut. Důvod je prostý. Na samotném odvození (4.21) tento člen nic nemění a lze tedy tuto opravu zahrnout dodatečně. Vrátíme se teď zpátky k rovnici (4.16). Rovnice

$$r^2 v_r v_r' = \frac{GM_*(1-\Gamma_e)\alpha}{1-\alpha} \tag{4.22}$$

nebo přepsána pomocí diferenciálu

$$v_r \mathrm{d}v_r = \frac{GM_*(1-\Gamma_e)\alpha}{1-\alpha} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}, \tag{4.23}$$

má jednoduché analytické řešení, popisující závislost rychlosti hvězdného větru na vzdálenosti od povrchu hvězdy $v(r)$. Nejprve diferenciální rovnici (4.23) zintegrujeme od hvězdného poloměru R_* do vzdálenosti r od povrchu

$$v_r^2(r) - v_r^2(R_*) = 2\frac{GM_*(1-\Gamma_e)\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1}{R_*} - \frac{1}{r}\right). \tag{4.24}$$

Využijeme-li faktu, že již pro malé vzdálenosti od hvězdy je rychlost větru $v_r(r)$ mnohem větší než rychlost větru ve fotosféře $v_r(R_*)$, dostáváme jednoduchou úpravou vztah

$$v_r = \sqrt{2\frac{GM_*(1-\Gamma_e)\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1}{R_*} - \frac{1}{r}\right)} \quad \text{pro} \quad v_r(r) \gg v_r(R_*). \tag{4.25}$$

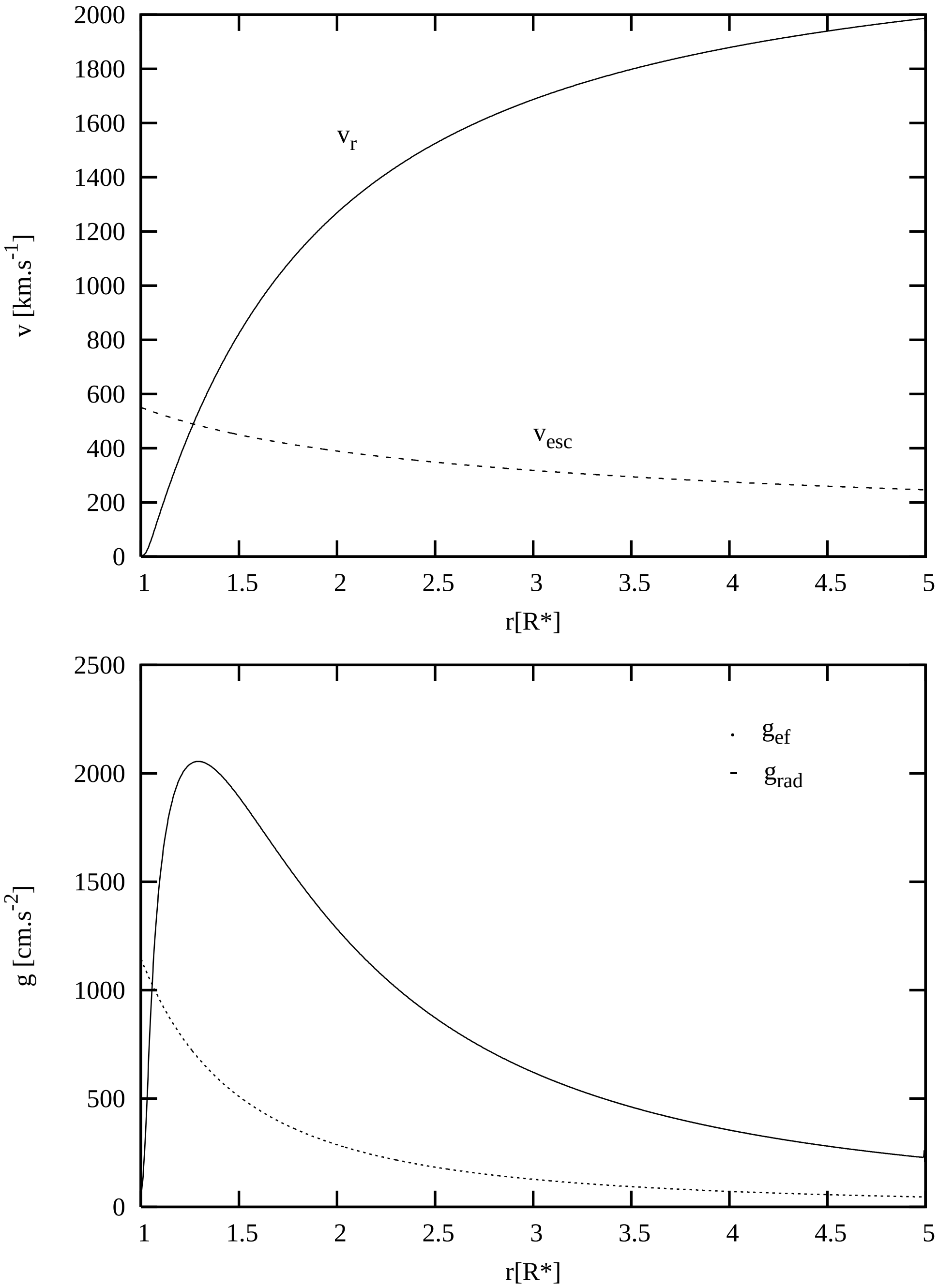
V literatuře se často vztah (4.25) vyskytuje v zobecněné formě

$$v_r = v_\infty \left(\frac{1}{R_*} - \frac{1}{r}\right)^\beta \tag{4.26}$$

kde konečná rychlost větru v_∞ je dána vztahem

$$v_\infty = \left(2\frac{GM_*(1-\Gamma_e)\alpha}{1-\alpha}\right)^\beta. \tag{4.27}$$

Vztah (4.26) je označován jako β-zákon. Je třeba poznamenat, že kritickými body v případě CAK řešení jsou všechny body CAK řešení. Toto tvrzení plyne z rovnice (4.22), která explicitně nezávisí na r a tudíž je splněna pro všechny body r CAK



Obrázek 4.2: CAK řešení hvězdného větru. Průběh rychlosti v_r a zářivého zrychlení $g_{\rm rad}$ v závislosti na vzdálenosti od hvězdy R/R_*. Pro srovnání je v grafu rychlosti vykreslen tečkovanou průběh únikové rychlosti $v_{\rm esc}$ a v grafu zářivého zrychlení průběh efektivní gravitace $g_{\rm ef}$. Model hvězdy s parametry $M_* = 42\,M_\odot$, $R* = 19\,R_\odot$, $T_{\rm eff} = 42000$ K a s hodnotou CAK konstant $\alpha = 0.72$, $k = 0.107$ a $\delta = 0.089$.

řešení. Degenerace CAK řešení je důsledkem zanedbání zvukových členů a^2/r a $a^2/{v_r}^2$ v rovnici (4.5). Při jejich započtení se jediný kritický bod nalézá zhruba ve vzdálenosti dané výrazem (Lamers & Cassineli, 1999)

$$r_c = \frac{3}{2} R_* \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{R_* a^2}{2GM_*(1-\Gamma_e)} \right\}^{-1} . \tag{4.28}$$

4.2 Stabilita CAK řešení

V předcházejících odstavcích jsme analytickým řešením hydrodynamických rovnic obdrželi závislost rychlosti na vzdálenosti od hvězdy $v_r(r)$. V tomto odstavci budeme analyzovat stabilitu tohoto řešení, jinými slovy odezvu systému na malou poruchu charakteristických veličin. Silná nelineární závislost zářivé síly g_{rad} na rychlosti v_r může stacionární řešení činit dynamicky nestabilním. Z tohoto pohledu časový vývoj nestabilit může být zodpovědný za pozorovanou proměnnost a strukturovanost hvězdného větru, jak bude detailněji zmíněno v následujích odstavcích. První práce zabývající se lineární analýzou stability (Carlberg, 1980 ; MacGregor et al., 1979 ; Nelson & Hearn, 1978) předpovídaly vysoce nestabilní hvězdný vítr, zatímco pozdější významná práce Abbott (1980) předpovídala stabilní poruchy – zářivě-hydrodynamické vlny – a odhalila tak fundamentální zdroj vln v teorii zářivé hydrodynamiky podobný akustickým vlnám v klasické hydrodynamice.

Tyto na první pohled rozdílné výsledky jsou dány různým aproximativním přístupem, zejména ve vztahu k vyjadření perturbace zářivé síly. V prvním případě bylo použito předpokladu opticky tenkých poruch. V takovém případě můžeme zanedbat změny v optické hloubce a zaměřit se pouze na změny v důsledku dopplerovského posuvu. V druhém případě předpokládal Abbott pro pertubovanou sílu platnost Sobolevovy aproximace. Konečnou odpověd za jakých předpokladů vede porucha k nestabilnímu chování či naopak ke stabilním vlnám pak přinesla práce Owocki & Rybicki (1984), ve které autoři sjednotili oba přístupy a rozšířili platnost závěrů i mimo klasickou lineární analýzu.

Lineární analýza stability

Výchozí bodem pro naši analýzu bude soustava rovnic (2.12). Lineární analýzou stability hydrodynamických rovnic pro různé konfigurace problému, se zabývala celá řada prací, namátkou lze uvést již zmiňovanou knihu Chandrasekhar (1981). Vzhledem k faktu, že budeme zkoumat stabilitu systému vůči poruchám a tedy i případné šíření vln, budeme předpokládat dvojrozměrnou konfiguraci problému s válcovou symetrií. Dále předpokládejme, že dynamické proměnné $\boldsymbol{v}, \rho, p, g$ lze rozdělit na část odpovídající ustálenému řešení (nultý řád) a malou poruchu (1. řád)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_0(r) + \delta\boldsymbol{v}(r,\phi,t),\\
\rho &= \rho_0(r) + \delta\rho(r,\phi,t),\\
p &= p_0(r) + \delta p(r,\phi,t),\\
\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}} &= \boldsymbol{g}_{\mathrm{rad},0}(r,v_r) + \delta\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}},
\end{aligned}\tag{4.29}$$

kde vektor poruchy rychlosti $\delta\boldsymbol{v}$ má v našem případě složky $(\delta v_r, 0, \delta v_\theta)$. Jelikož uvažujeme izotermické procesy, můžeme pro perturbaci tlaku ze stavové rovnice psát

$$\delta p = a^2\delta\rho.\tag{4.30}$$

V případě gravitačního zrychlení uvažujeme pouze nultý řád. Dosazením (4.29) do (2.12) obdržíme obecnou soustavu rovnic pro perturbované i neperturbované veličiny. Nejprve upravíme rovnici kontinuity

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho_0+\delta\rho)}{\partial t} + \frac{2(\rho_0+\delta\rho)(v_{r,0}+\delta v_r)}{r} + (v_{r,0}+\delta v_r)\frac{\partial(\rho_0+\delta\rho)}{\partial r} + (\rho_0+\delta\rho)\times\\
&\times\frac{\partial(v_{r,0}+\delta v_r)}{\partial r} + \frac{(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{r}\frac{\partial(\rho_0+\delta\rho)}{\partial\phi} + \frac{(\rho_0+\delta\rho)}{r}\frac{\partial(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{\partial\phi} = 0.
\end{aligned}\tag{4.31}$$

Obdobně upravíme rovnice pro hybnost

$$\begin{aligned}
&(\rho_0+\delta\rho)\frac{\partial(v_{r,0}+\delta v_r)}{\partial t} + (\rho_0+\delta\rho)(v_{r,0}+\delta v_r)\frac{\partial(v_{r,0}+\delta v_r)}{\partial r} +\\
&+\frac{(\rho_0+\delta\rho)(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{r}\frac{\partial(v_{r,0}+\delta v_r)}{\partial r} - \frac{(\rho_0+\delta\rho)(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)^2}{r} + a^2\frac{\partial(\rho_0+\delta\rho)}{\partial r} =\\
&= -(\rho_0+\delta\rho)g + (\rho_0+\delta\rho)(g_{\mathrm{rad}}+\delta g_{\mathrm{rad}}),
\end{aligned}\tag{4.32a}$$

$$\begin{aligned}
&(\rho_0+\delta\rho)\frac{\partial(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{\partial t} + (\rho_0+\delta\rho)(v_r+\delta v_r)\frac{\partial(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{\partial r} + \frac{(\rho_0+\delta\rho)(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{r}\times\\
&\times\frac{\partial(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{\partial\phi} + \frac{(\rho_0+\delta\rho)(v_{r,0}+\delta v_r)(v_{\theta,0}+\delta v_\theta)}{r} + \frac{a^2}{r}\frac{\partial(\rho_0+\delta\rho)}{\partial r} = 0.
\end{aligned}\tag{4.32b}$$

Abychom soustavu rovnic popisujících vývoj perturbovaných veličin co nejvíce zjednodušili, budeme uvažovat několik aproximativních přístupů. V první řadě budeme uvažovat perturbace pouze do prvního řádu, vyšší členy jsou zanedbatelně malé. Dále přepíšeme rovnice do vztažné soustavy, která se pohybuje se zkoumanou oblastí hvězdného větru. V této vztažné soustavě je rychlost $v_{\theta,0} = 0, v_{r,0} = 0$. Dále využijeme WKB aproximace, tedy předpokládáme, že změny neperturbovaných veličin jsou zanedbatelně malé ve srovnání se změnami perturbovaných veličin. Kromě jiného nám toto umožní zanedbat efekt setrvačných sil, které bychom museli započíst při naší volbě neinerciální vztažné soustavy. Aplikováním těchto aproximací obdržíme z (4.31),(4.32) výslednou soustavu

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v_r}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r}\frac{\partial \delta v_\theta}{\partial \phi} = 0, \tag{4.33a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v_r}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} = \rho_0 \delta g_{\mathrm{rad}}, \tag{4.33b}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v_\theta}{\partial t} + \frac{a^2}{r}\frac{\partial \delta\rho}{\partial \phi} = 0. \tag{4.33c}$$

Řešení soustavy těchto rovnic pro neznámé $\delta v_r, \delta v_\theta, \delta\rho$ předpokládáme ve standardním tvaru normálních módů

$$\delta v_r \exp\left(\mathrm{i}(k_r r + m\phi - \omega t)\right), \tag{4.34a}$$

$$\delta v_\theta \exp\left(\mathrm{i}(k_r r + m\phi - \omega t)\right), \tag{4.34b}$$

$$\delta \rho \exp\left(\mathrm{i}(k_r r + m\phi - \omega t)\right). \tag{4.34c}$$

V následujících analytických výpočtech se však omezíme na případ, kdy můžeme považovat lokální médium za přibližně planparalelní a použijeme kartézské souřadnice. Předpokládaný tvar perturbovaných veličin přepíšeme na tvar

$$\delta v_r \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right), \tag{4.35a}$$

$$\delta v_\theta \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right), \tag{4.35b}$$

$$\delta \rho \exp\left(\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right) \tag{4.35c}$$

a rovnice pro perturbované veličiny (4.33) s využitím transformačních vztahů $\mathrm{d}x = \mathrm{d}r$ a $\mathrm{d}y = r\mathrm{d}\phi$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v_r}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \delta v_\theta}{\partial y} = 0, \tag{4.36a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v_r}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} = \rho_0 \delta g_{\mathrm{rad}}, \tag{4.36b}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v_\theta}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial y} = 0. \tag{4.36c}$$

Jak bylo již zmíněno výše, zcela zásadním krokem pro celou analýzu je určení velikosti perturbace zářivé síly. Vzhledem k obecně komplikovanému výrazu pro zářivou sílu, vycházejícímu z řešení rovnice přenosu záření, omezíme se na aproximativní přístup, vedoucí k analytickým výrazům. Konkrétně uvažujme, že záření vychází z bodové hvězdy a jsou splněny podmínky pro Sobolevovu aproximaci pro neperturbované veličiny.

4.2.1 Abbottovy vlny

Následující pasáž byla zpracována podle práce (Cranmer, 1996). Abbott (1980) ve své práci dále předpokládal, že vlnová délka poruch je mnohem větší než Sobolevova délka $\delta x \gg L_{\text{sob}}$, tedy platnost Sobolevovy aproximace také pro poruchový člen. Zářivá síla v této aproximaci závisí na radiální vzdálenosti r a na gradientu rychlosti $\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}x$. Provedeme-li Taylorův rozvoj g_{rad} jako funkce $\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}x$ do prvního řádu, dostáváme

$$g_{\text{rad}}\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}x}\right) = g_{\text{rad},0} + \delta g_{\text{rad}} \approx g_{\text{rad},0} + \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \underbrace{(v_r - v_{r,0})}_{\delta v_r} \left.\frac{\partial \mathrm{g}_{\text{rad}}}{\partial(\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}x)}\right|_0 \right\}. \tag{4.37}$$

Z předchozího vztahu (4.37) je patrné, že pro poruchový člen v tomto přiblížení můžeme psát

$$\delta g_{\text{rad}} = \frac{\mathrm{d}\delta v_r}{\mathrm{d}x} \left.\frac{\partial g_{\text{rad}}}{\partial(\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}x)}\right|_0. \tag{4.38}$$

Dosazením za poruchový člen rychlosti δv_r z předpokládaného řešení ve tvaru normálních módů (4.35) dostáváme pro poruchový člen zářivé síly

$$\delta g_{\text{rad}} = \mathrm{i}k_x g'_{\text{rad}} \delta v_r, \tag{4.39}$$

kde symbolem g'_{rad} jsme označili derivaci zářivé síly podle gradientu v bodě $v_{r,0}$. Nyní máme vyjádřeny všechny potřebné veličiny i jejich perturbace. Můžeme tedy dosadit do soustavy rovnic (4.36) výraz (4.39) a dále dosadit za perturbované veličiny předpokládané řešení (4.35)

$$\rho_0 \mathrm{i}k_x \delta v_r + \rho_0 \mathrm{i}k_y \delta v_\theta - \mathrm{i}\omega\delta\rho = 0, \tag{4.40a}$$
$$\rho_0 \mathrm{i}(\omega + k_x g'_{\text{rad}})\delta v_r - a^2 \mathrm{i}k_x \delta\rho = 0, \tag{4.40b}$$
$$\rho_0 \mathrm{i}\omega\delta v_\theta - a^2 \mathrm{i}k_y \delta\rho = 0. \tag{4.40c}$$

Abychom určili disperzní relaci, vyjádříme si determinant této soustavy

$$D = \begin{vmatrix} \rho_0 \mathrm{i}k_x & \rho_0 \mathrm{i}k_y & -\mathrm{i}\omega \\ \rho_0 \mathrm{i}(\omega + k_x g'_{\text{rad}}) & 0 & -a^2 \mathrm{i}k_x \\ 0 & \rho_0 \mathrm{i}\omega & -a^2 \mathrm{i}k_y \end{vmatrix} \tag{4.41}$$

a standartními metodami určíme jeho velikost, kterou položíme rovnu nule

$$D = \omega^3 - \omega a^2 ({k_x}^2 + {k_y}^2) + g'_{\text{rad}} k_x (\omega^2 - a^2 {k_y}^2) = 0. \tag{4.42}$$

Toto je hledaná disperzní relace (Abbott, 1980) mající obecně tři kořeny, které mohou být reprezentovány relativně komplikovanými výrazy. V rámci dalších úvah proto rozdělíme poruchy na horizontální (šířící se ve směru y) a vertikální (šířící se ve směru x) a budeme sledovat vývoj poruch pouze v těchto privilegovaných směrech. Pro první případ budeme uvažovat perturbace pouze v horizontálním směru, tedy $k_x = 0$. Dosazením do (4.42) dostaneme vztah pro kořeny

$$\omega^3 - \omega a^2 {k_y}^2 = \omega(\omega^2 - a^2 {k_y}^2) = 0, \tag{4.43}$$

$$\omega_\pm = \pm a^2 {k_y}^2 , \quad \omega_3 = 0 \tag{4.44}$$

a tedy pro fázovou rychlost tohoto módu můžeme psát

$$v_{\phi\pm} = \frac{\omega_\pm}{k_y} = \pm a. \tag{4.45}$$

Vidíme, že fázová rychlost je rovna rychlosti zvuku, což odpovídá normálnímu čistě akustickému módu. V druhém případě budeme uvažovat perturbace pouze ve vertikálním směru, tedy $k_y = 0$. Opětovně dosazením dostaneme

$$\omega^3 + g'_{\mathrm{rad}} k_x \omega^2 - a^2 {k_x}^2 \omega = 0, \tag{4.46}$$

$$\omega_\pm = k_x \left(\frac{1}{2} g'_{\mathrm{rad}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{{g'_{\mathrm{rad}}}^2}{2} \right) + a^2} \right) , \quad \omega_3 = 0. \tag{4.47}$$

Obdobně pro fázovou rychlost dostaneme

$$v_{\phi\pm} = \frac{\omega\pm}{k_x} = \left(\frac{1}{2} g'_{\mathrm{rad}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{{g'_{\mathrm{rad}}}^2}{2} \right) + a^2} \right) . \tag{4.48}$$

Tyto dva módy ω_+ a ω_- popisují nový nadzvukový $v_{\phi+}$ resp. podzvukový $v_{\phi-}$ typ vln, které se šíří ve směru záření, resp. proti směru záření. Na rozdíl od předcházející situace pro čistě akustický mód, popisují tyto módy jiný typ vln - zářivě akustické vlny (Abbott, 1980). Pro obecnou situaci, tedy poruchy šířící se v neprivilegovaném směru $k_x, k_y \neq 0$, leží výsledná rychlost šíření v intervalu daném rychlostí pro čistě akustický mód a zářivě akustický podzvukový resp nadzvukový mód.

4.2.2 Nestabilita v čarami řízeném hvězdném větru

Jiný přístup k vyjádření perturbace zářivé síly použili Nelson & Hearn (1978), Carlberg (1980) a také MacGregor et al. (1979) . V něm již nepředpokládali platnost Sobolevovy aproximace pro perturbaci zářivé síly. Pro jednoduchost analýzy nejdříve přepíšeme výraz pro zářivou sílu (3.26) pro sféricky symetrický případ radiálního toku a striktně radiálního směru šíření záření a pouze pro jednu spektrální čáru m, přičemž využijeme vztah pro zářivou sílu v opticky tenké limitě (3.46)

$$g_{\mathrm{rad}}^{C} = g_{\mathrm{tk}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(x - \frac{v_r}{v_{th}}\right) \mathrm{d}x \exp\left(-\int_{r_0}^{r} \rho(r')\kappa_m(r')\phi\left(x - \frac{v_r}{v_{th}}\right) \mathrm{d}r'\right), \qquad (4.49)$$

kde L_ν je monochromatická luminosita. Autoři výše zmiňovaných prací MacGregor et al. (1979) a Carlberg (1980) považovali perturbace za opticky tenké, tedy předpokládali, že změny v optické hloubce od střední hodnoty t_0

$$t_0 = \int_{r_0}^{r} \rho(r')\kappa_m(r')\phi\left(x - \frac{v_r}{v_{th}}\right) \mathrm{d}r' \qquad (4.50)$$

jsou zanedbatelné. Perturbace zářivé síly δg je v tom případě výsledek dopplerovských změn v lokálním absorpčním profilu (Owocki & Rybicki, 1984). Výraz (4.49) ještě transformujeme do souřadné soustavy spjaté se zkoumanou oblastí hvězdného větru a pohybující se radiální rychlostí $v_{r,0}(r)$

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{rad}} = g_{\mathrm{tk}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(x - (v_r(r) - v_{r,0}(r)/v_{\mathrm{th}}\right) \mathrm{d}x \times \\ \times \exp\left[-\kappa_m\rho(r) \int_{0}^{r} \rho(r')\kappa_m(r')\phi\left(x - (v_r(r') - v_{r,0}(r))/v_{\mathrm{th}}\right) \mathrm{d}r'\right]. \end{aligned} \qquad (4.51)$$

Nyní aplikujeme poruchový počet

$$v_r(r) = v_{r,0}(r) + \delta v_r, \qquad (4.52)$$

na výraz (4.51) s využitím předpokladů stanovených na začátku odstavce, konkrétně zanedbáme změny v optické hloubce a soustředíme se pouze na dopplerovské změny v profilu čáry.

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{rad},0} + \delta g &= g_{\mathrm{tk}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \phi\left[x - (v_{r,0} + \delta v_r - v_{r,0})/v_{\mathrm{th}}\right] \times \exp\left(-t_0(x,r)\right) = \\ &= g_{\mathrm{tk}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \phi\left[x - \delta v_r/v_{\mathrm{th}}\right] \times \exp\left(-t_0(x,r)\right), \end{aligned} \qquad (4.53)$$

kde t_0 označuje výraz pro optickou hloubku bez aplikace poruchy (4.50). Abychom určili velikost poruchy zářivé síly, provedeme Taylorův rozvoj funkce profilu $\phi(x)$ v okolí bodu x do prvního řádu. Pro hodnotu funkce profilu pak dostáváme

$$\phi\left(x - \frac{\delta v_r(r)}{v_{\mathrm{th}}}\right) \sim \phi(x) - \phi'(x)\frac{\delta v_r}{v_{\mathrm{th}}}. \qquad (4.54)$$

Dosazením rozvoje do (4.53) obdržíme

$$g_{\mathrm{rad},0} + \delta g = g_{\mathrm{tk}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \times \exp\left(-t_0(x,r)\right)\mathrm{d}x - \delta v_r g_{\mathrm{tk}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'(x)}{v_{\mathrm{th}}} \times \exp\left(-t_0(x,r)\right)\mathrm{d}x. \tag{4.55}$$

Pro poruchový člen zářivé síly δg_{rad} pak ze vzorce (4.55) plyne

$$\delta g = -\delta v_r g_{\mathrm{tk}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'(x)}{v_{\mathrm{th}}} \times \exp\left(-t_0(x,r)\right)\mathrm{d}x. \tag{4.56}$$

Výraz dále upravíme na konečný tvar

$$\delta g = -\delta v_r \frac{g_{\mathrm{tk}}}{v_{th}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \times \exp\left(-t_0(x,r)\right)\mathrm{d}x = \mathrm{A}\omega_0 \delta v_r, \tag{4.57}$$

kde symbolem A jsme označili reálnou konstantu

$$\mathrm{A} = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \times \exp\left(-t_0(x,r)\right)\mathrm{d}x \tag{4.58}$$

a $\omega_0 = g_{\mathrm{tk}}/v_{th}$. Podobně jako pro předchozí případ dosadíme tvar pro perturbaci zářivé síly do rovnic (4.36) a použijeme předpokládaný tvar řešení ve tvaru normálních modů (4.35)

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathrm{i} k_x \delta v_r + \rho_0 \mathrm{i} k_y \delta v_\theta - \mathrm{i}\omega \delta\rho &= 0, \\ \rho_0 (i\omega + A)\delta v_r - a^2 \mathrm{i} k_x \delta\rho &= 0, \\ \rho_0 \mathrm{i}\omega \delta v_\theta - a^2 \mathrm{i} k_y \delta\rho &= 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Zcela analogicky vyjádříme determinant této soustavy

$$D = \begin{vmatrix} \rho_0 \mathrm{i} k_x & \rho_0 \mathrm{i} k_y & -\mathrm{i}\omega \\ \rho_0(\mathrm{i}\omega + A) & 0 & -a^2 \mathrm{i} k_x \\ 0 & \rho_0 \mathrm{i}\omega & -a^2 \mathrm{i} k_y \end{vmatrix} \tag{4.60}$$

a taktéž určíme disperní relaci z velikosti determinantu, kterou položíme rovnu nule

$$\mathrm{i}\omega^3 + A\omega^2 - \mathrm{i}a^2\omega({k_x}^2 + {k_y}^2) - A{k_y}^2 a^2 = 0. \tag{4.61}$$

Tato rovnice má tři kořeny, dva reálné a jeden imaginární (Nelson & Hearn, 1978). Reálné kořeny popisují zvukové vlny mírně tlumené zářením, zatímco imaginární kořen popisuje exponenciální nárůst poruchy, tedy nestabilní chování. Aproximativně můžeme tento kořen ilustrovat, pokud budeme uvažovat, že rychlost zvuku se blíží limitně nekonečnu, tedy $a \to \infty$. Potom lze zanedbat členy druhého řádu $1/a^2$ a vztah tak velmi zjednodušit (Nelson & Hearn, 1978)

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega^3}{a^2} - \frac{A\mathrm{i}\omega^3}{a^2} - \omega({k_x}^2 + {k_y}^2) + A\mathrm{i}{k_y}^2 &= 0 \\
\omega &= \mathrm{i}\frac{A{k_y}^2}{k_x^2 + k_y^2} \\
\omega &= \mathrm{i}\frac{A}{1 + {k_x}^2/{k_y}^2}.
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

Z tohoto aproximativního výrazu vidíme, že pro malé horizontální perturbace, pro které platí relace $k_y \gg k_x$, se výraz (4.62) blíží hodnotě A. Na druhou stranu pro velké horizontální perturbace $k_y \ll 1$ se výraz (4.62) blíží nule. Rychlost exponenciálního růstu nestability, která závisí na konstantě A, určíme numerickým řešením příslušné integrace. Detailnější analýzu lze nalézt v pracech (Nelson & Hearn, 1978,Carlberg, 1980 a MacGregor et al., 1979).

4.2.3 Sjednocení přístupů obou analýz

Z předcházejících dvou analýz plyne, že hvězdný vítr může vůči poruchám buď vykazovat stabilní chování v podobě Abbottových vln, nebo naopak vysoce nestabilní chování. Tyto vzájemně rozporné výsledky sjednotili Owocki & Rybicki (1984), kteří zobecnili vyjádření perturbace zářivé síly vztahem

$$
\delta g_{\mathrm{rad}} = \Omega_b \frac{\mathrm{i}k\chi_b}{\chi_b + \mathrm{i}k}\delta v_r \tag{4.63}
$$

Veličina χ_b má rozměr převrácené délky a velikost $\chi_b^{-1} \approx L_{sob}/2$ (Owocki, 2004). Z výrazu (4.63) je patrné, že pro poruchy s vlnovou délkou větší než Sobolevova délka $k \ll \chi_b$ je vztah mezi poruchou zářivé síly a poruchou rychlosti přibližně $\delta g_{\mathrm{rad}} \propto \mathrm{i}k\delta v_r$, což odpovídá vztahu (4.38) použitému v analýze (Abbott, 1980). Naopak pro poruchy s vlnovou délkou menší v srovnání se Sobolevovou délkou $k \gg \chi_b$ můžeme pro poruchu zářivé síly psát $\delta g_{\mathrm{rad}} \propto \mathrm{i}k\delta v_r$, což odpovídá vztahu (4.57), který použili Nelson & Hearn (1978), Carlberg (1980) a také MacGregor et al. (1979). Veličina Ω_b odpovídá rychlosti nárůstu nestability a je dána přibližně $\Omega_b \approx g_{\mathrm{rad}}/v_{\mathrm{th}}$ (Owocki, 2004). Vzhledem ke komplikovanosti výrazů pro Ω_b, χ_b neuvádím přesné vzorce, pouze aproximativní výrazy. Celý postup odvození je uveden v již citované práci (Owocki & Rybicki, 1984). Výsledek lze tedy slovně shrnout do závěru, že pro poruchy menší než je Sobolevova délka je porucha nestabilní, zatímco v opačném případě generuje Abbottovy vlny.

Kapitola 5

Numerické simulace jednosložkového hvězdného větru

5.1 Popis řešení

Jak bylo popsáno v předcházejících kapitolách, je chování hvězdného větru za předpokladu sférické symetrie toku i směru šíření záření popsáno rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 \rho v_r)}{\partial r} = 0 \tag{5.1}$$

a rovnicí pro hybnost

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} - \rho \frac{G M_* (1 - \Gamma_e)}{r^2} + \rho \frac{C}{r^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d} v_r}{\mathrm{d} r}\right)^{\alpha}. \tag{5.2}$$

Rovnice jsou pouze aplikací obecnějšího vyjádření (2.13) a (2.14) pro zářivou sílu danou vzorcem (3.12) a předpokládanou stavovou rovnicí (2.4). Pro zkrácení zápisu jsme využili také (4.2).

K numerickému řešení rovnic (5.1) a (5.2) je třeba zvolit vhodnou numerickou metodu. Obecně existuje pro řešení parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu množství různých metod. Tyto metody se navzájem liší přesností výpočtu, schopností modelovat různé typy diskontinuit, ke kterým může při simulaci dojít (typickým příkladem jsou například rázové vlny) a které jsou numericky velmi obtížně simulovatelné. Odlišují se také nároky na výpočetní kapacitu počítače a stabilitou. Každá z těchto metod je více či méně vhodná pro různé kategorie úloh.

Před vlastní tvorbou vícesložkového kódu jsem se zabýval simulací časově závislých jednosložkových modelů hvězdného větru. Jednosložkovými simulacemi jsem se zabýval ze dvou důvodů. Prvním důvodem je, že mohu jednosložkové simulace použít jako vhodný srovnávací test pro vícesložkové simulace a dále, že lze na jednosložkových simulacích lépe pochopit a objasnit některá úskalí a problémy, kterým je třeba se ve vícesložkových hvězdných větrech vyhnout. K těmto simulacím jsem použil kód **flu.f**, veřejně dostupný na adrese (Feldmeier, 2003). Jedná se o hydrodynamický kód používající k řešení 1-D hydrodynamických rovnic jednosložkového ideálního plynu Eulerovo schéma s Van Leerovou metodou pro spojování toku. Detailní popis tohoto numerického schématu je v obecné rovině shodný s popisem pro vícesložkové simulace, a lze jej nalézt v následující kapitole.

Časově závislými simulacemi nestabilit jednosložkového hvězdného větru se zabývali velmi detailně Owocki et al. (1988) a Feldmeier (1995). Jejich simulace potvrdily existenci silně nestabilního hvězdného větru generujícího rázové vlny. Interakce těchto rázových vln s okolním materiálem a mezi sebou vede ke strukturovanému hvězdnému větru. Pro simulace nestabilit je však třeba použít jiný tvar zářivé síly, než jednoduchý vztah (3.12) odvozený za předpokladu platnosti Sobolevovy aproximace. Jednosložkové simulace nestabilit v čarami řízeném hvězdném větru nicméně přesahují rámec disertační práce, lze pouze odkázat na již citované práce Owocki et al. (1988) a Feldmeier (1995).

5.2 Numerická rázová vlna

Jednosložkové modely založené na jednoduchém tvaru zářivé síly (3.12) vedou ve většině případů O a B hvězd k CAK typu řešení. Samotná konvergence k CAK řešení, reprezentujícího určitý typ atraktoru, je znázorněna na obrázku (5.1). Pro výpočet jsem použil parametry odpovídající hvězdě κ Cas (viz tabulka 7.2). Zářivá síla byla vypočítána podle vzorce (3.73), ve kterém je zahrnut ionizační korekční faktor a korekce na konečný disk hvězdy. Pro simulaci jsem použil 900 prostorových bodů rovnoměrně pokrývajících oblast $5R_*$ (hvězdných poloměrů) se zvoleným Courantovým číslem $c_{\mathrm{cfl}} = 0.4$.

Za povšimnutí stojí vznik rázové vlny, častý jev v případě simulace stacionárního řešení pomocí časově závislého kódu, pokud zvolíme počáteční podmínky, které příliš neodpovídají stacionárnímu řešení (srovnej obr. 5.1 a obr. 5.2). Při přechodu z počátečních podmínek do stacionárního řešení vzniká rázová vlna, po jejím odeznění hvězdný vítr pokračuje v přechodu na CAK řešení spojitě. Po skončení simulace modelované řešení věrně koresponduje s CAK řešením (viz obr. 5.1). V rámci srovnávacího testu jsem zvolil jiné počateční podmínky, které lépe odpovídaly stacionárnímu CAK řešení. Konkrétně jako počáteční podmínku pro rychlost jsem zvolil β-zákon s volbou $\beta = 1/2$. Následně jsem stanovil počáteční podmínku pro hustotu ze spočítané CAK rychlosti ztráty hmoty (4.20) a rychlosti. Z obrázku (5.2) je patrné, že již ke generaci rázové vlny nedochází a řešení rychle a spojitě konverguje do CAK řešení. Rázová vlna tedy nepopisuje realný fyzikální děj, ale spíše ukazuje, jak moc se zvolené počáteční podmínky odlišují od reálného průběhu. Vstupní charakteristiky modelu jsou shrnuty v tabulce (7.2). Zajímavé je, že při simulacích vícesložkového hvězdného větru již k tomuto artefaktu nedochází, zjevně důsledkem tlumícího efektu třecí síly.

5.3 Pulsující obálky

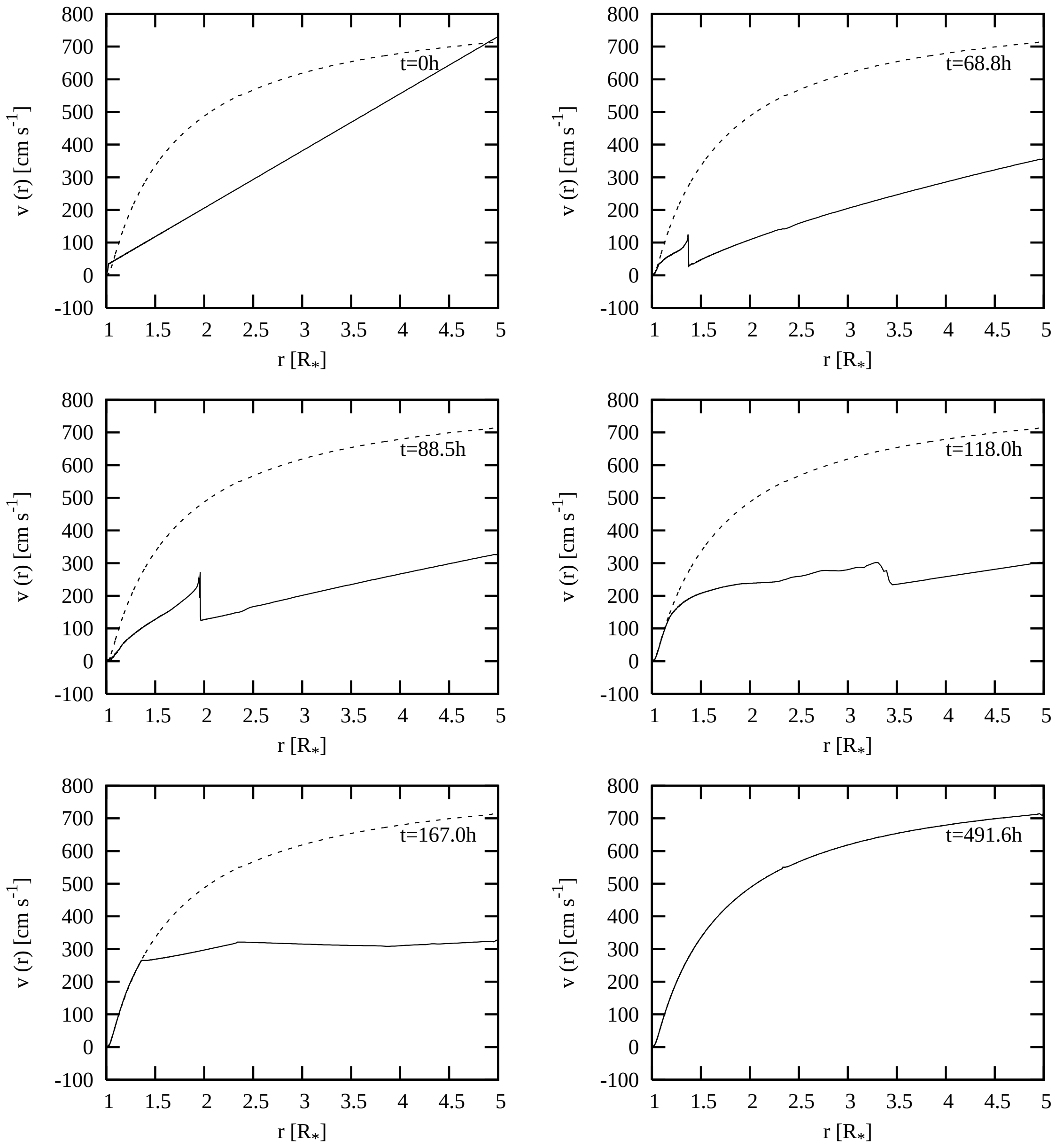
Zajímavým jevem, který předesílá možnosti a složitosti vícesložkových simulací, je vznik pulsujících obálek okolo hvězd spektrálního typu B. Základní myšlenkou tvorby pulsujících obálek je model, ve kterém zářivá síla přestává působit na hvězdný vítr v určité vzdálenosti od hvězdy, přičemž pro tuto vzdálenost platí, že je zde materiál stále gravitačně vázaný ke hvězdě. Přesněji řečeno, lokální rychlost větru je menší než úniková rychlost větru $v_r < v_{\mathrm{esc}}$, přičemž úniková rychlost od hvězdy je definována vztahem

$$v_{\mathrm{esc}}(r) = \sqrt{\frac{2(1-\Gamma_e)GM_*}{r}}. \tag{5.3}$$

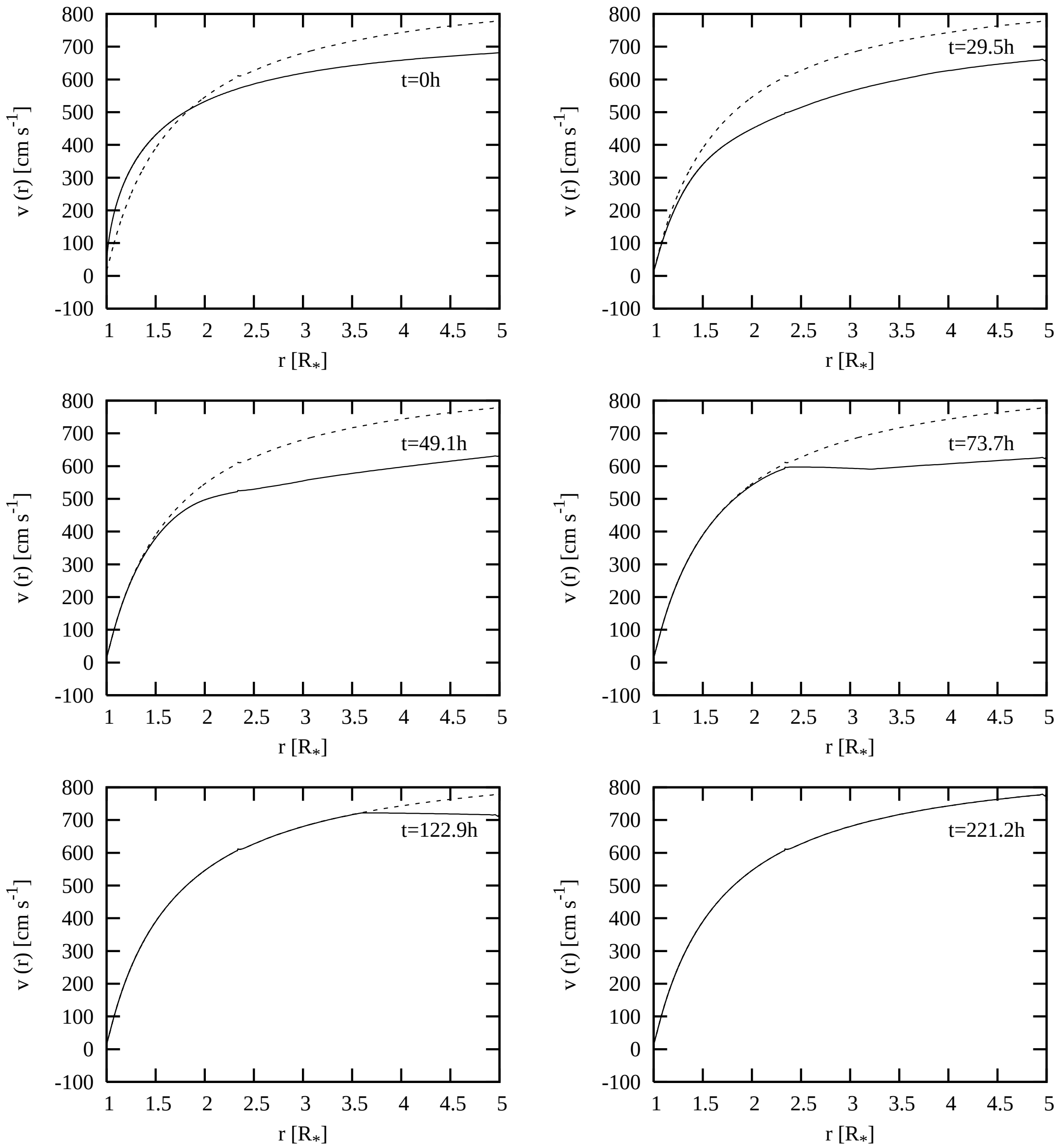
Tento jednosložkový model zjednodušeně popisuje proces oddělování složek ve dvousložkovém hvězdném větru. Ve dvousložkovém hvězdném větru je urychlována zářením pouze jedna složka plazmatu (aktivní složka), která skrze coulombické srážky předává část hybnosti zbylé části plazmatu hvězdného větru (pasivní složka). Za určitých podmínek přestává být mechanismus zajišťující přenos hybnosti mezi aktivní složkou a pasivní složkou efektivní a dochází k oddělení obou složek. Pokud je zbylá hmota stále gravitačně vázaná, padá po jisté době zpět směrem k povrchu hvězdy a interaguje s hvězdným větrem. Celý proces je na obrázku (5.3).

V rámci modelu jsem zvolil parametry hvězdy odpovídající hvězdě ϵ Ori (viz tabulka 7.2). Opět jsem použil 900 prostorových bodů pokrývajících rovnoměrně oblast $5R_*$ hvězdných poloměrů. Ve vzdálenosti $r > 1.2\,R_*$ (hvězdných poloměrů) jsem uměle vynuloval zářivou sílu. Vzdálenost byla zvolena tak, aby hmota v této vzdálenosti byla stále gravitačně vázaná ke hvězdě. Okrajové podmínky korespondovaly s konfigurací charakteristik, tedy na vnitřním okraji jsem zafixoval hustotu ρ a extrapoloval tok ρv_r, na vnějším okraji jsem obě veličiny extrapoloval. Tyto okrajové podmínky však neplatí vždy. Je třeba uvážit, že v okamžiku, kdy hmota padá zpátky ke hvězdě, má zápornou rychlost. Po určitém čase se struktura se zápornou rychlostí dostane až na hranice výpočetní oblasti (viz 5.4) k okrajovým podmínkám. Pokud bychom ponechali stejné okrajové podmínky, tedy extrapolovali bychom hustotu a tok, dostávala by se nám hmota zpoza okrajové oblasti zpět do výpočetní oblasti. Tím by se zvedla hustota nejprve v okrajových částech a posléze kolem celé hvězdy. Takto vytvořená hustá obálka by svým tlakem kompletně přerušila mechanismus hvězdného větru. Abych tomuto artefaktu plynoucímu z počátečních podmínek předešel, použil jsem v souladu článkem Porter & Skouza (1999) upravené okrajové podmínky, kdy jsem pro záporné rychlosti na vnějším okraji položil rychlost rovnu nule a hustotu nastavil na malou hodnotu 10^{-30}[g.cm^{-3}]. Jako počáteční podmínku jsem si zvolil CAK řešení pro danou hvězdu, které jsem si předtím vygeneroval. Hodnotu Courantova čísla, které určuje velikost časového kroku pro zvolený prostorový krok tak, aby byla splněna podmínka stability, jsem zvolil $c_{\mathrm{cfl}} = 0.4$.

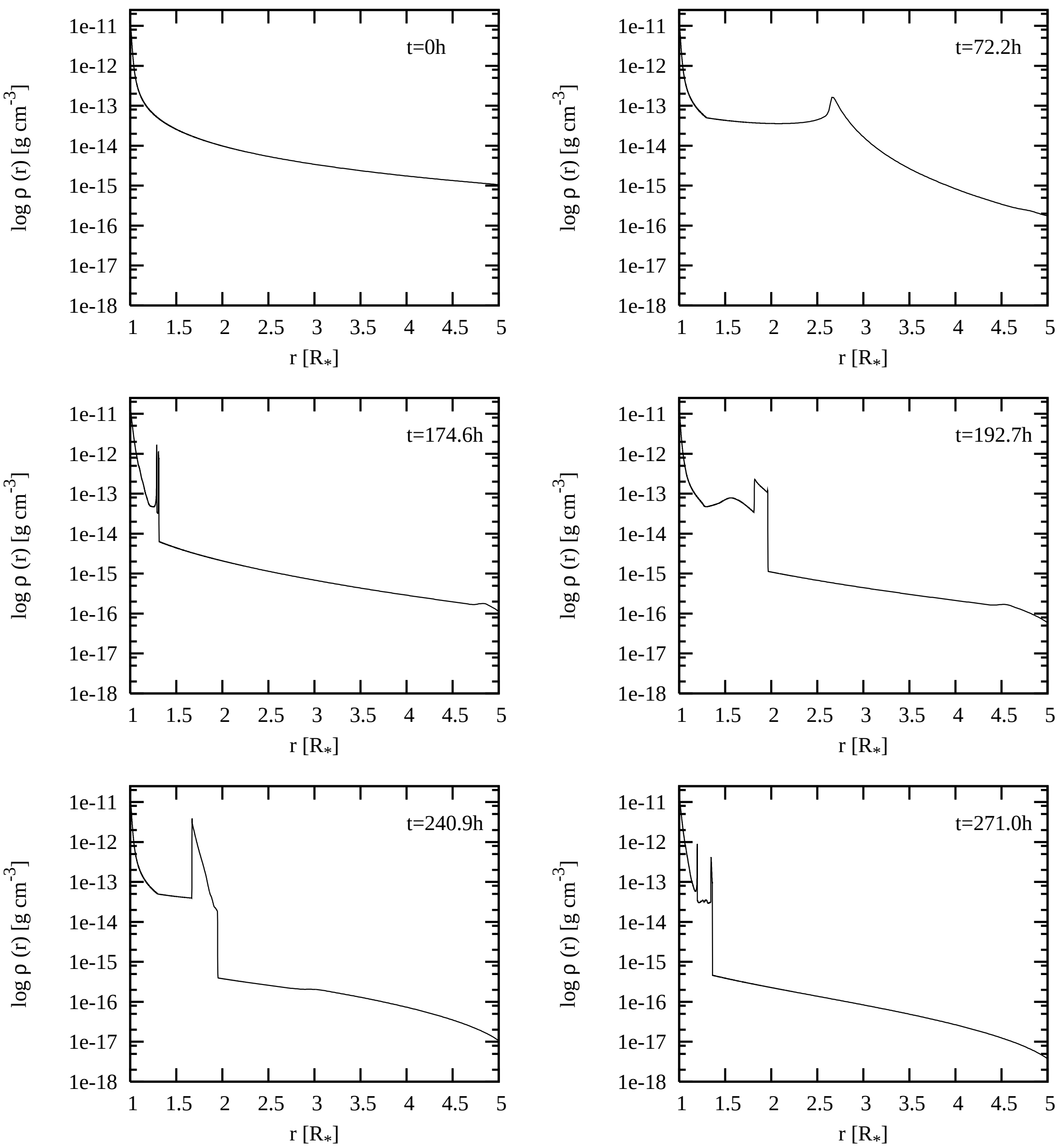
Vidíme, že se nejdříve vytvořila na určitém místě hustší obálka, která padá postupně směrem ke hvězdě, a to stále rychleji. Cestou obálka interaguje s hvězdným větrem, získává více a více hmoty a padá stále rychleji ke hvězdě. Po kontaktu obálky s hvězdou může hvězdný vítr opět volně expandovat, přičemž s sebou posbírává část materiálu z předchozího cyklu, který nedopadl na hvězdu. Začína se tak tvořit další obálka. V okamžiku, kdy hmota padá zase zpět ke hvězdě se celý cyklus opakuje. Vytváří se tak pravidelně pulsující obálka s periodou zhruba $P \sim 59$ hodin, podobně jako v článku Porter & Skouza (1999).



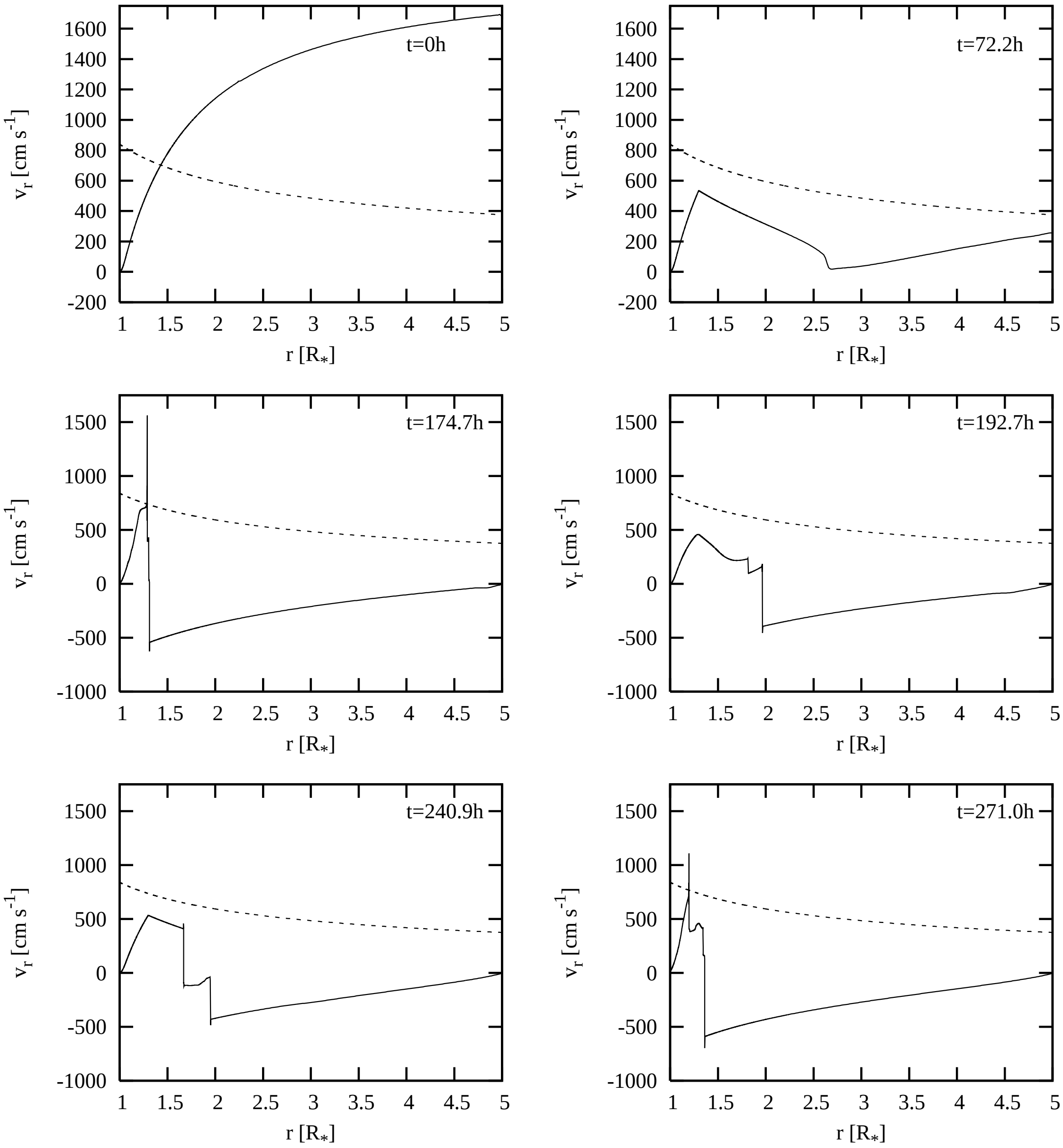
Obrázek 5.1: Vznik rázových vln při simulaci stacionárního CAK řešení (znázorněno přerušovanou čarou) pro parametry hvězdy κ Cas. Jednotlivé grafy ukazují závislost rychlosti $v_r(r)$ na vzdálenosti od hvězdy různých časových okamžicích. V grafech je rychlost značena jako $v(r)$. Na obrázcích je dobře patrná rázová vlna, nápadná svým ostrým poklesem rychlosti na svém čele. Rázová vlna zajištuje přechod řešení na CAK stacionární řešení. Parametry hvězdy κ Cas byly převzaty z tabulky 7.2.



Obrázek 5.2: Simulace stacionárního CAK řešení pro stejné parametry hvězdy κ Cas, jako v případě obrázku 5.1, ale pro jiné počáteční podmínky. Zvolené počáteční podmínky, které jsou znázorněny na prvním obrázku, lépe odpovídají CAK řešení (znázorněno přerušovanou čarou). Jednotlivé grafy ukazují závislost rychlosti $v_r(r)$ na vzdálenosti od hvězdy různých časových okamžicích. V grafech je rychlost značena jako $v(r)$. Parametry hvězdy κ Cas byly převzaty z tabulky 7.2.



Obrázek 5.3: Simulace pulsujících obálek pro hvězdu s parametry ϵ Ori. Z jednotlivých grafů, ukazujících závislost hustoty $\log \rho(r)$ na vzdálenosti do hvězdy, je patrný vznik obálky s peridou zhruba $P \approx 59$ hodin. Zářivá síla byla uměle vypnuta ve vzdálenosti $r > 1.2\,R_*$. Parametry hvězdy ϵ Ori byly převzaty z tabulky (7.2).



Obrázek 5.4: Simulace pulsujících obálek pro stejnou hvězdu s parametry ϵ Ori. Na grafech je znázorněn průběh rychlosti v_r na vzdálenosti do hvězdy. Pro lepší názornost je v grafech také přerušovanou čarou vykreslena závislost únikové rychlosti $v_{\rm esc}$ na vzdálenosti r. Parametry hvězdy ϵ Ori byly převzaty z tabulky 7.2.

Kapitola 6

Vícesložkový hvězdný vítr

6.1 Úvod do problematiky

V modelech hvězdného větru horkých hvězd hnaného zářením obvykle používáme aproximaci jednosložkového větru, v rámci které ignorujeme fakt, že se plasma skládá z pasivní složky (tvořena zejména protony), která neinteraguje se zářením a aktivní složky, která se zářením interaguje. V našem případě to jsou absorbující ionty a elektrony. Plasmu bereme jako celek, kde daný element objemu je urychlován zářivou silou. Ukazuje se však, že tato jednosložková aproximace neplatí pro některé hvězdy s dostatečně řídkým hvězdným větrem. Dobrým příkladem takovýchto objektů mohou být B hvězdy hlavní posloupnosti, centrální hvězdy planetárních mlhovin a některé trpasličí hvězdy spektrálního typu O.

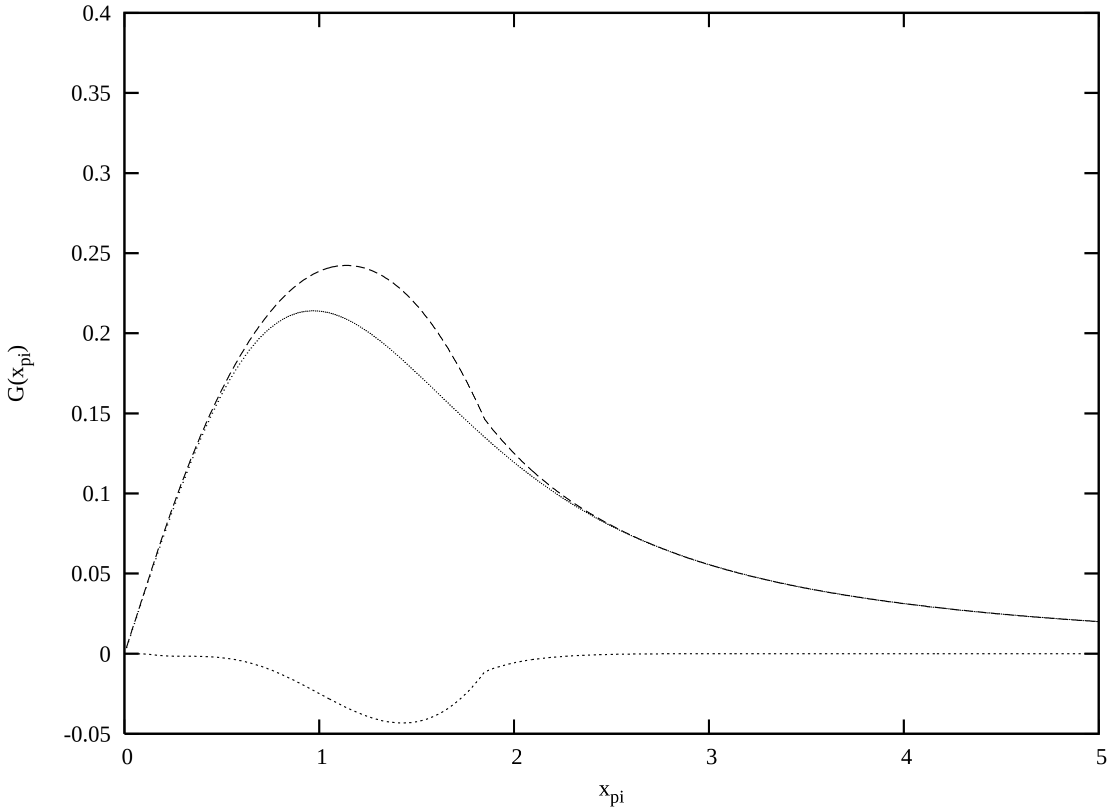
V případě hvězdného větru s nízkou hustotou je zapotřebí detailní popis přenosu hybnosti mezi jednotlivými složkami, vícesložkový popis. Zářením jsou urychlovány pouze absorbující ionty a elektrony, zatímco pasivní složka je urychlována v důsledku coulombických srážek s absorbujícími ionty. Při malých hustotách hvězdného větru může dojít k situaci, kdy díky nízkému počtu “terčů” klesne intenzita srážek natolik, že dojde k oddělení obou složek. Po tomto oddělení je pasivní složka pouze zpomalována gravitační silou hvězdy, zatímco absorbující ionty jsou prudce urychlovány zářením. Driftová rychlost mezi ionty se tak překotně zvětšuje, v literatuře je tento dynamický proces označován jako “ion runaway”.

Jedna z prvních prací diskutující možnosti vícesložkového popisu hvězdného větru byla práce (Castor et al., 1976). Další práce zabývající se vícesložkovým hvězdným větrem se omezovaly buď pouze na stacionární modely (viz práce Springmann & Pauldrach (1992); Porter & Drew (1995); Krtička & Kubát, 2000, 2001a,b, 2002) nebo použily nekonzistentní 1-složkový časově závislý model (viz Porter & Skouza, 1999). Za první práci, která poprvé detailněji popsala vícesložkový hvězdný vítr horkých hvězd, lze považovat článek Springmann & Pauldrach (1992). Autoři zde na základě základní analýzy hydrodynamických rovnic pro sférický symetrický jednodimenziální, vícesložkový hvězdný vítr předpověděli možné oddělovaní složek pro případ hvězd s malou hustotou hvězdného větru. Také aproximativně odvodili jednoduchý analytický výraz, určující vzdálenost od hvězdy, za kterou k tomuto oddělování dochází. V další práci (viz Porter & Drew, 1995) autoři použili vícesložkový popis při modelování equatoriálního disku kolem Be hvězd s použítím Bjorkmannova-Cassineliho modelu (Bjorkman & Cassinelli, 1993) a zkoumali, jaký vliv bude mít vzájemné oddělování jednotlivých složek na charakteristické vlastnosti disku. Ukázalo se, že vícesložkové efekty umožnily formování disku při relativně nižších rotačních rychlostech hvězdy v porovnání s klasickým jednosložkovým modelem. Velmi zajímavý jev nastává, pokud k oddělení složek dojde před dosažením únikové rychlosti, pasivní složka je pak stále gravitačně vázaná ke hvězdě a padá zpět k jejímu povrchu. Numerické modely provedené v (5.3) na základě práce Porter & Skouza (1999) ukazují formování prstence plynu okolo hvězdy, který je nestabilní a pulsuje na škále hodin až dnů. Je třeba ale poznamenat, že byl použit pouze 1-složkový časově závislý model s redukovanou hustotou a zářivou silou, která byla v určité vzdálenosti od hvězdy položena rovna nule.

Překvapivý výsledek obdrželi v práci Krtička & Kubát (2000). V jejich modelech nedocházelo pro některé B hvězdy s nízkohustotním hvězdným větrem k předpokládanému oddělení, ale vítr se v určitém bodě adaptoval na nové řešení. Toto řešení má v porovnání s CAK řešením mnohem menší akceleraci a díky tomu také menší rychlost v nekonečnu. V termínech klasického CAK větru, tento typ řešení odpovídá řešení s malou akcelerací. Platnost řešení je ale značně omezena předpokladem stacionárnosti řešení. Lineární analýza stability vícesložkového větru ukázala, že vítr nebude schopen se adaptovat na řešení s malou akcelerací (Owocki & Puls, 2002). Dále analýza ukázala, že klasické Abbottovy vlny jsou díky škálovacímu faktoru zhruba 100krát rychlejší než v klasickém jednosložkovém případě (Krtička & Kubát, 2002; Owocki & Puls, 2002). Na základě těchto faktů je zřetelné, že konzistentní vícesložkový časově závislý model může přispět k lepšímu pochopení dynamiky vícesložkového větru, zejména s ohledem na možnost a průběh oddělování jednotlivých složek. Velmi podstatný je fakt, že samotný jednosložkový vítr je značně nestabilní a vliv této nestability může být ve vícesložkových modelech také velmi podstatný.

6.2 Hydrodynamické rovnice

Pro vícesložkový popis budeme uvažovat podobně jako pro jednosložkový popis jednodimenzionální sféricky symetrický hvězdný vítr s pouze dvěma složkami, absorbujícími ionty a pasivní plasmou. Dále zanedbáme efekty makroskopického elektrického a magnetického pole. Na absorbující ionty působí gravitace, gradient tlaku, dynamické tření a zářivá síla, zatímco na pasivní složku působí pouze gravitace, gradient tlaku a dynamické tření. Vyjdeme z hydrodynamických rovnic (2.13), (2.14) pro obě složky,



Obrázek 6.1: Chandrasekharova funkce $G(x_{\rm pi})$ podle vzorce (6.9) je znázorněna v grafu plnou čárou, aproximace Chandrasekharovy funkce $G_A(x_{\rm pi})$ využitím výrazu (7.14) je znázorněna v grafu přerušovanou čarou a rozdíl obou funkcí $G(x_{\rm pi}) - G_A(x_{\rm pi})$ je vyznačen tečkovanou čarou.

které upravíme pro náš případ. Rovnice kontinuity má tvar

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \rho_p v_p)}{\partial r} = 0\,, \tag{6.1a}$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \rho_i v_i)}{\partial r} = 0\,, \tag{6.1b}$$

kde index p značí veličiny příslušné pasivní složce a index i absorbujícím iontům. Obdobně pro pohybové rovnice

$$\frac{\partial v_{r,p}}{\partial t} + v_{r,p}\frac{\partial v_{r,p}}{\partial r} + \frac{1}{\rho_p}\frac{\partial p_p}{\partial r} = \frac{R_{pi}}{\rho_p} - g_{\rm ef}\,, \tag{6.2a}$$

$$\frac{\partial v_{r,i}}{\partial t} + v_{r,i}\frac{\partial v_{r,i}}{\partial r} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial r} = g_{\rm rad} - g_{\rm ef} - \frac{R_{pi}}{\rho_i}\,. \tag{6.2b}$$

V našem značení $v_{r,i}$, ρ_i, p_i značí rychlost, hustotu a tlak absorbujících iontů a obdobně $v_{r,p}$, ρ_p, p_p značí rychlost, hustotu a tlak pasivní plazmy. Dále g_{ef} je efektivní gravitační zrychlení (3.12) a R_{pi} je třecí síla, která je detailnější popsána níže (viz 6.6). V rámci dalšího zjednodušení výpočtů budeme předpokládat pouze izotermální hvězdný vítr. K pohybovým rovnicím (6.2) a rovnicím kontinutiy (6.1) připojíme ještě stavové rovnice obou složek

$$p_p = a_p^2 \rho_p, \tag{6.3a}$$
$$p_i = a_i^2 \rho_i. \tag{6.3b}$$

Zářivé zrychlení pro vícesložkový hvězdný vítr má tvar

$$g_{\text{rad}}(r) = \frac{\eta^{\alpha-1}\left(\kappa_e^{\text{ref}}\right)^{1-\alpha}}{4\pi c {v_{th}}^{\alpha}} \frac{L_*}{r^2} k \left(\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial v_{r,i}}{\partial r}\right)^{\alpha} f_{\text{ion}} f_{\text{fin}}, \tag{6.4}$$

analogický (3.53) s mCAK multiplikátory k, α, δ, kde multiplikátor δ je obsažen v korekčním faktoru f_{fion} (3.69). Korekční faktor f_{fin} je spočítán podle vzorce (3.72). Definice a význam použitých veličin je stejný jako v případě (3.53). Vzhledem k tomu, že v případě vícesložkového hvězdného větru působí zářivé zrychlení pouze na absorbující ionty, musíme použít škálovací faktor η, jehož hodnotu stanovíme ze známého hmotnostního podílu těžších prvků ve hvězdném větru (2.7)

$$\eta = \frac{Z}{2} = 0.0127 \tag{6.5}$$

s hodnotou Z odpovídající solární abundanci. Interakce mezi pasivní plasmou a absorbujícími ionty je zprostředkována coulombickými srážkami. Tyto srážky jsou popsány Chandrasekharovým vzorcem pro dynamické tření (Chandrasekhar, 1943 ; Spitzer, 1956)

$$R_{pi} = n_p n_i k_{pi} G(x_{pi}). \tag{6.6}$$

Třecí koeficient k_{pi} je definován vztahem

$$k_{\text{pi}} = \frac{4\pi \ln \Lambda {Z_p}^2 {Z_i}^2 e^4}{k_B T} \frac{v_{r,i} - v_{r,p}}{|v_{r,i} - v_{r,p}|}, \tag{6.7}$$

n_i ,$Z_i\, e$ je číselná hustota a náboj absorbujících iontů, obdobně n_p , $Z_p\, e$ číselná hustota a náboj pasivní plazmy. Coulombův logaritmus spočítáme podle vzorce

$$\ln \Lambda = \ln \left[\frac{24\pi}{\sqrt{n}} \left(\frac{kT}{4\pi e^2}\right)^{1.5}\right] \tag{6.8}$$

s teplotou větru T, Boltzmannovou konstantou k_B a celkovou číselnou hustotou hvězdného větru n. Chandrasekharova funkce $G(x)$ je definována pomocí Error funkce $\Phi(x)$ (Spitzer, 1956)

$$G(x_{\mathrm{pi}}) = \frac{\Phi(x_{\mathrm{pi}})}{2x_{\mathrm{pi}}^2} - \frac{\exp\left(-x_{\mathrm{pi}}^2\right)}{2\sqrt{\pi}} \tag{6.9}$$

a její graf je na obrázku (6.1). Chandrasekharova funkce závisí na relativní driftové rychlosti iontu vzhledem k pasivní složce (viz Owocki & Puls, 2002)

$$x_{\mathrm{pi}} = \frac{|v_{r,i} - v_{r,p}|}{v_{th}\sqrt{1 + A_i/A_p}}, \tag{6.10}$$

kde A_i a A_p značí střední atomovou váhu iontů a pasivní složky v atomových jednotkách.

6.3 Stabilita vícesložkového hvězdného větru

Analýzou stability vícesložkového hvězdného větru se zabývali Krtička & Kubát (2002) a Owocki & Puls (2002). Následující postup byl zpracován na základě práce Owocki & Puls (2002), ve které je podrobně analyzován problém oddělování složek. Tento proces je při časově závislých simulacích vícesložkového hvězdného větru velmi podstatný.

V rámci analýzy se budeme zabývat stabilitou dvousložkového hvězdného větru (absorbující ionty a pasivní plazma) v ustáleném stavu, ve kterém jsou obě složky vázané. To znamená, že obě složky mají zhruba stejné rychlosti $v_{r,i} \approx v_{r,p}$ a zrychlení $v_{r,i}\mathrm{d}v_{r,i}/\mathrm{d}r \approx v_{r,p}\mathrm{d}v_{r,p}/\mathrm{d}r$. Analýzu budeme provádět v souřadné soustavě spojené s větrem a pohybující se rychlostí neporušeného toku iontů a plazmy, to znamená, že v rámci této soustavy budeme pokládat neporušené rychlosti za nulové

$$v_{r,i} \approx v_{r,p} \approx 0. \tag{6.11}$$

Dále budeme předpokládat platnost WKB aproximace, ve které se změny neporušených veličin odehrávají na škále mnohem větší než je vlnová délka poruch. V takovém případě můžeme zanedbat gradienty neporušených veličin, konkrétně $\mathrm{d}v_{r,i}/\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}v_{r,p}/\mathrm{d}r$. V rámci jednoduchosti se soustředíme pouze na poruchy rychlosti, zanedbáme tedy vliv poruch hustoty obou složek $\delta\rho_p$, $\delta\rho_i$. Pro poruchu zářivého zrychlení budeme uvažovat platnost vztahu (4.39)

$$\delta g_i = \mathrm{ik}\ \mathrm{g}'_{\mathrm{rad,i}}\delta \mathrm{v}_{\mathrm{r,i}}. \tag{6.12}$$

Tento vztah platí pouze za předpokladu, že vlnová délka poruch je mnohem delší než Sobolevova délka $kL \ll 1$. Tohoto předpokladu ještě využijeme při zjednodušování některých výrazů. Vzhledem k faktu, že ve vlastních modelech je zářivá síla počítána pouze v této aproximaci, nebudu se zde zabývat případem, kdy tato aproximace splněna není. Čtenáře lze odkázat na již výše zmiňovaný článek, který publikovali Owocki & Puls (2002).

Nejprve aplikujeme poruchový počet na rovnice (6.2). S využitím našich předpokladů se rovnice pro neporušené veličiny zjednodušily na tvar

$$v_{r,p}\frac{\partial v_{r,p}}{\partial r} = \frac{R_{pi}}{\rho_p} - g_{\mathrm{ef}}\,, \tag{6.13a}$$

$$v_{r,i}\frac{\partial v_{r,i}}{\partial r} = g_{\mathrm{rad}} - g_{\mathrm{ef}} - \frac{R_{pi}}{\rho_i} \tag{6.13b}$$

a rovnice pro perturbované veličiny na tvar

$$\frac{\partial \delta v_{r,p}}{\partial t} = \frac{R'_{pi}}{\rho_p v_{th}}\frac{(\delta v_{r,i}-\delta v_{r,p})}{\sqrt{1+A_i/A_p}} \tag{6.14a}$$

$$\frac{\partial \delta v_{r,i}}{\partial t} = -\frac{R'_{pi}}{\rho_i v_{th}}\frac{(\delta v_{r,i}-\delta v_{r,p})}{\sqrt{1+A_i/A_p}} + \mathrm{ik}\ \mathrm{g}'_{\mathrm{rad,i}}\delta \mathrm{v}_{\mathrm{r,i}}\,, \tag{6.14b}$$

kde R'_{pi} značí derivaci třecí síly podle driftové rychlosti x_{pi} (srovnej se vztahy (26) a (27) v článku Owocki & Puls (2002)). Dosazením předpokládaného řešení $\delta v_{r,p}$, $\delta v_{r,i}$ ve tvaru normálních módů

$$\delta v_{r,p} \propto \delta v_{r,p} \exp\left(\mathrm{i}(kr-\omega t)\right), \tag{6.15a}$$

$$\delta v_{r,i} \propto \delta v_{r,i} \exp\left(\mathrm{i}(kr-\omega t)\right) \tag{6.15b}$$

do rovnic (6.14) dostáváme soustavu

$$-i\omega\delta v_{r,p} = \frac{R'_{pi}}{\rho_p v_{th}}\frac{(\delta v_{r,i}-\delta v_{r,p})}{\sqrt{1+A_i/A_p}} \tag{6.16a}$$

$$-i\omega\delta v_{r,i} = -\frac{R'_{pi}}{\rho_i v_{th}}\frac{(\delta v_{r,i}-\delta v_{r,p})}{\sqrt{1+A_i/A_p}} + \mathrm{ik}\ \mathrm{g}'_{\mathrm{rad,i}}\delta \mathrm{v}_{\mathrm{r,i}}. \tag{6.16b}$$

Pro další analýzu by bylo vhodné dát do souvislosti třecí sílu a zářivou sílu. Hnací silou iontů je zářivá síla, naopak třecí síla, setrvačnost a gravitační síla, iontům v pohybu brání. Pokud se zabýváme vázaným hvězdným větrem, tedy stavem kdy se složky neoddělily, můžeme v pohybové rovnici iontů zanedbat gravitační člen, zvukový a setrvačný člen, které jsou v porovnání s třecí silou zanedbatelně malé. Pro zvukový člen stačí uvážit, že je podstatný pouze v podzvukové oblasti hvězdného větru. K zanedbání zbývajících členů, tedy gravitačního a setrvačného, vede následující úvaha. Hlavní hnací sílou hvězdného větru je zářivá síla udělující iontům zářivé zrychlení $g_{\mathrm{rad,i}}$. Absorbující ionty jsou bržděny třecí sílou, udělující jim zpomalení R_{pi}/ρ_i řádově stejné velikosti jako je zářivé zrychlení $g_{\mathrm{rad,i}}$. Jak je patrné z obrázku (4.2), velikost CAK zářivého zrychlení g_{rad} převyšuje velikost gravitačního zrychlení. Uvážíme-li, že zářivé zrychlení pro absorbující ionty je škálované faktorem $1/\eta \approx 100$ oproti klasickému CAK zářivému zrychlení g_{rad}, je oprávnění naší aproximace pochopitelné. Můžeme tak pro pohybovou rovnici (6.13b) psát přibližně

$$R_{pi} \approx \rho_i g_{\mathrm{rad},i}, \tag{6.17}$$

kterou ještě dále upravíme, uvážíme-li, že zářivé zrychlení působící na ionty $g_{\mathrm{rad},i}$ a CAK zářivé zrychlení g_{rad} je přibližně ve vztahu

$$g_{\mathrm{rad}} \approx \frac{\rho_i}{\rho_p} g_{\mathrm{rad},i}. \tag{6.18}$$

S pomocí přibližného vztahu (6.17) a použitím (6.18) upravíme výraz obsahující třecí člen

$$\begin{aligned} \frac{R'_{pi}}{v_{th}\sqrt{1+A_i/A_p}} &= \frac{R'_{pi}}{R_{pi}} \frac{R_{pi}}{v_{th}\sqrt{1+A_i/A_p}} = \frac{R'_{pi}}{R_{pi} v_{th}} \frac{g_{rad}\rho_p}{\sqrt{1+A_i/A_p}} = \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{1+A_i/A_p}} \frac{G'(x_{pi})}{G(x_{pi})} \left(\frac{\alpha g_{rad}}{v_{th}}\right) \rho_p = q(x_{pi})\Omega\rho_p, \end{aligned} \tag{6.19}$$

kde parametr $q(x_{pi})$ popisuje sílu vazby mezi ionty a pasivní plasmou a je dán vztahem

$$q(x_{pi}) = \frac{1}{\sqrt{1+A_i/A_p}} \frac{G'(x_{pi})}{G(x_{pi})}. \tag{6.20}$$

Dále Ω označuje veličinu

$$\Omega = \alpha \frac{g_{rad}}{v_{th}} \tag{6.21}$$

a Ω_i tutéž veličinu, ale škálovanou vzhledem k iontům

$$\Omega_i = \alpha \frac{g_{rad}}{v_{th}} \frac{\rho_p}{\rho_i}. \tag{6.22}$$

Ještě využijeme výraz pro Abbottovu rychlost (Abbott, 1980; Owocki & Puls, 2002)

$$v_{\mathrm{AB}} = \frac{\partial g_{rad}}{\partial v'} = L\Omega, \tag{6.23}$$

kde L je Sobolevova délka dána vzorcem (3.36). Rovnice (6.16) upravíme s použitím (6.19), (6.21) a (6.22)

$$-i\omega\delta v_{r,p} = q(x_{pi})\Omega(\delta v_{r,i} - \delta v_{r,p}), \tag{6.24a}$$
$$-i\omega\delta v_{r,i} = -q(x_{pi})\Omega_i(\delta v_{r,i} - \delta v_{r,p}) + ikL\Omega_i\delta v_{r,i}. \tag{6.24b}$$

Řešení soustavy rovnic (6.24) zapíšeme pomocí matice

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\omega + q\Omega & -q\Omega \\ -q\Omega_i & -\mathrm{i}\omega + q\Omega_i - \mathrm{i}kL\Omega_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{r,p} \\ \delta v_{r,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

Dále určíme hodnotu determinantu matice soustavy

$$\mathcal{D} = (-\mathrm{i}\omega + q\Omega)(-\mathrm{i}\omega + q\Omega_i - \mathrm{i}kL\Omega_i) - q^2\Omega\Omega_i = \tag{6.26}$$

$$\omega^2 + \omega\left((\mathrm{i}q + kL)\Omega_i + \mathrm{i}q\Omega\right) + \mathrm{i}kqL\Omega_i\Omega = 0. \tag{6.27}$$

Disperzní relaci stanovíme řešením této kvadratické rovnice pro ω. Nejdříve si pro přehlednost označíme

$$B = (kL + iq)\Omega_i + \mathrm{i}q\Omega \tag{6.28}$$

a dále

$$C = \mathrm{i}kLq\Omega\Omega_i = \mathrm{i}qk\, v_{\mathrm{AB}}\Omega_i. \tag{6.29}$$

Ve hvězdném větru je poměr mezi hustotou pasivní plazmy a absorbujících iontů zhruba $\rho_p/\rho_i \approx 100$. Můžeme tedy ve vztahu (6.28) zanedbat malý člen s Ω

$$B \approx kL\Omega_i + \mathrm{i}q\Omega_i. \tag{6.30}$$

S použitím limity $kL \ll 1$ můžeme zanedbat i další člen a ponechat pouze

$$B \approx \mathrm{i}q\Omega_i. \tag{6.31}$$

Kvadratická rovnice (6.27) má dva kořeny

$$\omega_\pm = \frac{-B \pm B\sqrt{D}}{2}, \tag{6.32}$$

kde D označuje diskriminant kvadratické rovnice (6.27). Uvážíme-li, že

$$\frac{4C}{B^2} \approx \frac{\mathrm{i}kLq\Omega\Omega_i}{\mathrm{i}q{\Omega_i}^2} \sim \frac{\Omega}{\Omega_i} \sim \frac{\rho_i}{\rho_p} \ll 1, \tag{6.33}$$

můžeme pro výpočet odmocniny diskriminantu použít Tayolorův rozvoj do I. řádu funkce $\sqrt{1-x}$ v okolí bodu 1, který vede k aproximativnímu výrazu

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}. \tag{6.34}$$

S použitím přibližného výrazu (6.34) můžeme psát pro diskriminant kvadratické rovnice (6.27)

$$D = 1 - \frac{4C}{B^2} \approx 1 - \frac{2C}{B^2}. \tag{6.35}$$

a dosazením (6.35) do (6.32) dostáváme pro první kořen výsledný vztah

$$\omega_+ \approx -\frac{C}{B} \tag{6.36}$$

a pro druhý kořen

$$\omega_- \approx -B - \frac{C}{B}. \tag{6.37}$$

Oba kořeny ještě můžeme dále zjednodušit použitím limity $kL \ll 1$. Nejprve první kořen (6.36)

$$\omega_+ \approx -\frac{C}{B} \approx -\frac{\text{ik Lq}\Omega\Omega_\text{i}}{kL\Omega_i + \text{iq}\Omega_\text{i}} \approx -\frac{kL\Omega}{1 - \frac{\text{i}kL}{q}} \approx k\, v_{AB}\,, \tag{6.38}$$

obdobně pro druhý kořen můžeme zanedbat člen C/B, který je malý v porovnání s členem B a s použitím (6.31) dostáváme

$$\omega_- \approx -B \approx \text{i}q\Omega_i. \tag{6.39}$$

Výsledná disperzní relace popisuje oba módy (6.36), (6.39).

Abychom analyzovali vliv obou módů na jednotlivé složky, dosadíme disperzní vztah do rovnice (6.24a)

$$\delta v_{r,i} = \left(1 - \frac{\text{i}\omega}{q\Omega}\right)\delta v_{r,p}. \tag{6.40}$$

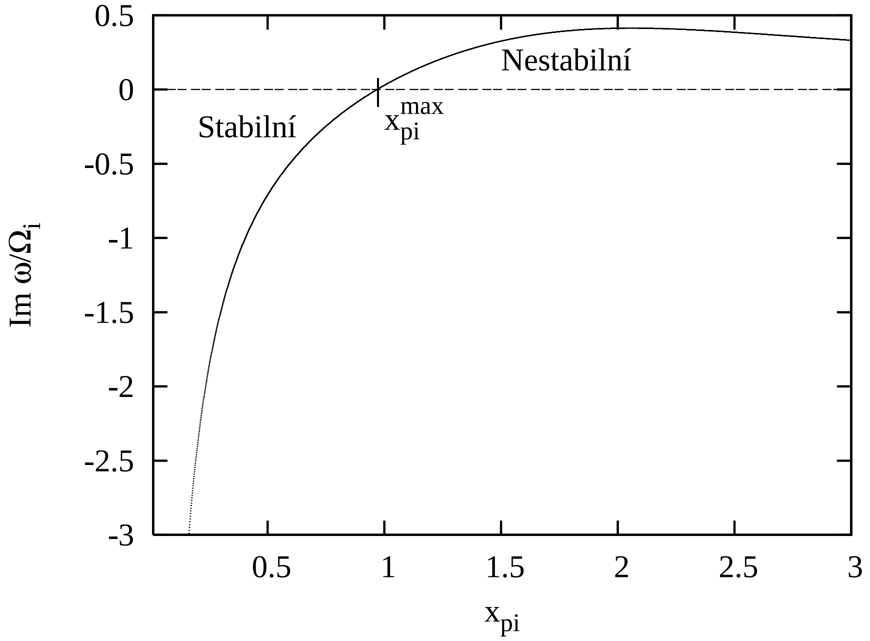
Pro kladný mód tak obdržíme

$$\delta v_{r,i}{}^+ \approx \left(1 - \frac{\text{i}kv_\text{AB}}{q\Omega}\right)\delta v_{r,p}^+ \approx \left(1 - \frac{\text{i}kL}{q}\right)\delta v_{r,p}^+ \approx \delta v_{r,p}^+. \tag{6.41}$$

Toto plusové řešení popisuje vázaný mód, kdy je rychlost iontů téměř identická s rychlostí pasivní plazmy. Dále je patrné z disperzní relace pro tento mód (6.36), že se jedná o stabilní řešení v podobě Abbottových vln, jako v případě jednosložkového hvězdného větru. Naproti tomu, druhý mód

$$\delta v_{r,p}^- \approx \left(1 - \frac{\Omega_i}{\Omega}\right)\delta v_{r,p}^- \approx -\frac{\rho_p}{\rho_i}\delta v_{r,p}^-, \tag{6.42}$$

popisuje oddělování iontů, obě poruchy rychlosti jsou vůči sobě v opačné fázi, přičemž porucha rychlosti iontů má mnohem větší amplitudu. Z disperzní relace plyne, že v případě dobře vázaného hvězdného větru $q(x_{pi}) > 0$ dochází k útlumu, kdežto pro slabě vázaný hvězdný vítr $q(x_{pi}) < 0$ k zesílení a tudíž nestabilitě. Reálná část disperzního vztahu nám ukazuje, že porucha se šíří směrem ke hvězdě Abbottovou rychlostí $v_{\text{AB},i}$ škálovanou pro ionty. Celý mechanismus vzniku nestability lze popsat tak, že v okamžiku, kdy se driftová rychlost obou dobře vázaných složek nachází poblíž



Obrázek 6.2: Závislost imaginární části frekvence pro mód popisující oddělování obou složek (6.37) v závislosti na driftové rychlosti x_{pi}. Frekvence módu ω_{-}je škálovaná faktorem Ω_i. Záporné hodnoty odpovídají stabilnímu chování, zatímco kladné hodnoty odpovídají nestabilnímu chování. Obrázek byl převzat z práce (Owocki & Puls, 2002).

maxima daného Chandrasekharovou funkcí, může malá porucha rychlosti iontů změnit driftovou rychlost na větší hodnotu. Driftová rychlost se tak dostane za hodnotu odpovídající maximu Chandrasekharovy funkce. V takovém případě již dynamické tření mezi absorbující ionty a pasivní složkou není tak intenzivní. Na absorbující ionty tak působí menší třecí síla, takže mohou snadněji akcelerovat, zatímco pasivní složka zpomaluje. Zvětšuje se driftová rychlost, což znamená, že na absorbující ionty působí ještě menší třecí síla a celý proces se opakuje. Nestabilní chování při oddělování složek způsobuje značné numerické problémy při simulaci slabě vázaného hvězdného větru. Numerické řešení v okamžiku oddělování velmi rychle diverguje.

Kapitola 7

Numerické simulace vícesložkového hvězdného větru

7.1 Metoda řešení

V rámci této kapitoly bude stručně nastíněn numerický postup řešení hydrodynamických rovnic popisujících vícesložkové kontinuum včetně detailního popisu kódu. Při tvorbě hydrodynamického kódu **mflu.f** pro simulaci časově závislého vícesložkového hvězdného větru jsem použil jako základ hydrodynamický kód **flu.f**, jehož autorem je Achim Feldmeier (Feldmeier, 1995) a je veřejně dostupný (viz Feldmeier, 2003).

Program **mflu.f** řeší soustavu rovnic (6.1), (6.2) a (6.3) pro pasivní plasmu (značenou indexem p) a absorbující složku (značenou indexem i). Rovnice (6.1), (6.2) můžeme přepsat do vektorového tvaru

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_\mathrm{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\boldsymbol{F}_\mathrm{p}) = \boldsymbol{Q}_\mathrm{p}, \tag{7.1a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_\mathrm{i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\boldsymbol{F}_\mathrm{i}) = \boldsymbol{Q}_\mathrm{i}. \tag{7.1b}$$

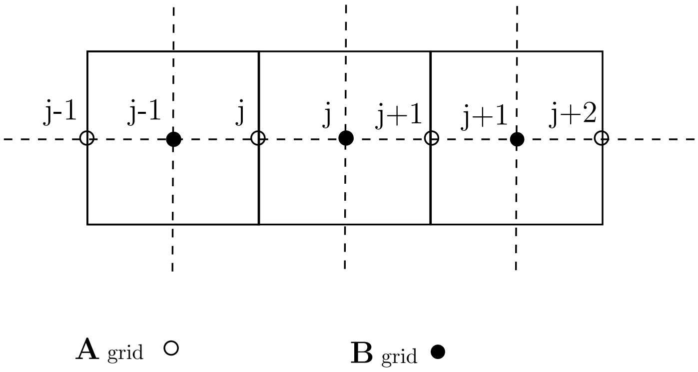
Význam jednotlivých veličin je pro absorbující složku dán

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{i} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho_\mathrm{i} v_{r,i} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}_\mathrm{i} = \begin{pmatrix} r^2 \rho_\mathrm{i} v_{r,i} \\ p_\mathrm{i} + r^2 (\rho_\mathrm{i} v_{r,i})^2 / \rho_\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{Q}_\mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_i g_\mathrm{ef} + \rho_i g_\mathrm{rad} - R_\mathrm{pi} \end{pmatrix}, \tag{7.2a}$$

a pro pasivní složku

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{p} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho_\mathrm{p} v_{r,p} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}_\mathrm{p} = \begin{pmatrix} r^2 \rho_\mathrm{p} v_{r,p} \\ p_\mathrm{p} + r^2 (\rho_\mathrm{p} v_{r,p})^2 / \rho_\mathrm{p} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{Q}_\mathrm{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_p g_\mathrm{ef} + R_\mathrm{pi} \end{pmatrix}. \tag{7.2b}$$

Veličinou $\boldsymbol{F}$ nazýváme zobecněný hydrodynamický tok, indexem je značena příslušnost k pasivním iontům (p) a absorbující plazmě (i). Vektorová veličina $\boldsymbol{Q}$ charakterizuje zdroje hmoty a externích sil. Zvolenou metodou řešící hydrodynamické rovnice



Obrázek 7.1: Schématický obraz zvolené střídavě uspořádané sítě. Skalární veličiny jsou centrovány na střed výpočetní molekuly, (**B** typ sítě), zatímco vektorové veličiny na krajích výpočetní molekuly (**A** typ sítě).

(7.1) a (6.3) je klasické Eulerovo upwind schéma (Hirsch, 2002, str. 415) s Van Leerovou metodou (Van Leer, 1982), používající techniku oddělených toků (detalnější rozbor metody viz 7.3).

V programu **mflu.f** je použita střídavě uspořádaná síť (viz obrázek 7.1). Skalární veličiny ρ_i, ρ_p jsou umístěny na **B** síti, což jsou středy výpočetních molekul, zatímco vektorový tok $\rho_i \boldsymbol{v_i}$, $\rho_p \boldsymbol{v_p}$ je umístěn na **A** síti, tedy na krajích výpočetních molekul. Detailní rozbor výhod tohoto typu sítě je uveden v knize (Hirsch, 2002, str. 666).

7.2 Numerické schéma

Upwind schéma je jednostranné diferenční schéma, které je konzistentní s rychlostí a směrem, kterým se šíří vlny (informace) v daném médiu. Nejprve řeším vektorové rovnice bez pravé strany, které rozepíšu ve zvoleném diskretizačním schématu

$$\boldsymbol{u}_{\rm j}^{\rm n+1/2} = \boldsymbol{u}_{\rm j}^{\rm n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\boldsymbol{F}_{\rm j+1/2}^{\rm n} - \boldsymbol{F}_{\rm j-1/2}^{\rm n}\right), \tag{7.3a}$$

$$\boldsymbol{u}_{\rm (j\pm 1/2)\mp}^{\rm n+1/2} = \boldsymbol{u}_{\rm j}^{\rm n+1/2} \frac{\Delta \rm x}{2} \boldsymbol{u}'^{\rm n}_{\rm j}, \tag{7.3b}$$

$$\boldsymbol{F}_{\rm j+1/2}^{\rm n+1/2} = \boldsymbol{F}^{+}\left(\boldsymbol{u}_{\rm (j+1/2)-}^{\rm n+1/2}\right) + \boldsymbol{F}^{-}\left(\boldsymbol{u}_{\rm (j-1/2)+}^{\rm n+1/2}\right), \tag{7.3c}$$

$$\boldsymbol{u}_{\rm j}^{\rm n+1} = \boldsymbol{u}_{\rm j}^{\rm n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{F}_{\rm j+1/2}^{\rm n+1/2} - \boldsymbol{F}_{\rm j-1/2}^{\rm n+1/2}\right), \tag{7.3d}$$

kde Δt je časový krok a Δx je prostorový krok. Volba velikosti časového kroku je rozebrána detailněji v popisu procedury *clock*. Toto diskretizační schéma je rozepsáno pro obecnou rychlost $\boldsymbol{v}$ a je aplikováno na obě rychlosti, tedy jak na pasivní plazmu tak na absorbující ionty. Horním indexem n značíme diskrétní časový vývoj, přičemž hodnoty s 1/2 označují prediktorový krok a celočíselné hodnoty označují korektorový krok. U prostorového indexu j poloviční hodnota značí hodnotu veličiny definované na krajích výpočetní molekuly (síť **A**), zatímco celočíselná hodnota veličinu definovanou na středu výpočetní molekuly (síť **B**). Více informací o této metodě lze nalézt v knize (Hirsch, 2002, stránka 408).

7.3 Technika oddělených toků

Tato metoda, známá spíše pod svým anglickým názvem *flux splitting* technika (Hirsch, 2002, stránka 415), umožňuje rozdělit řešení parciální diferenciální rovnice na části, kde každá část reprezentuje jeden samostatný člen z uvažované rovnice. Schématicky zapsáno, pro dynamický systém daný rovnicí

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t} = \mathcal{L}(\boldsymbol{y}) \tag{7.4}$$

je y reprezentováno sloupcovými vektory $\boldsymbol{u}_{\mathrm{i}}$ (7.2a) a $\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}$ (7.2b). Operátor $\mathcal{L}(\boldsymbol{y})$ můžeme rozdělit na části $\mathcal{L}(\boldsymbol{y}) = \mathcal{L}_1(\boldsymbol{y}) + \mathcal{L}_2(\boldsymbol{y}) + \ldots$ a numerické řešení rovnice (7.4) obdržíme postupnou aplikací jednotlivých operátorů

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{y}^0)/(\Delta t) &= \mathcal{L}_1(\boldsymbol{y}^0), \\ (\boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{y}^1)/(\Delta t) &= \mathcal{L}_2(\boldsymbol{y}^1), \\ (\boldsymbol{y}^3 - \boldsymbol{y}^2)/(\Delta t) &= \mathcal{L}_3(\boldsymbol{y}^2), \\ \vdots &= \vdots\end{aligned} \tag{7.5}$$

Operátor $\mathcal{L}$ v sobě zahrnuje jednotlivé dynamické členy jako dynamické tření, zářivou sílu apod. Celý postup můžeme shrnout tak, že nejdříve v daném časovém kroku aktualizujeme hodnoty ρ a ρv_r obou složek podle schématu (7.3). Následně v témže časovém kroku vypočítáme změny obou veličin ρ_i, $\rho_i v_{r,i}$ a ρ_p, $\rho_p v_{r,p}$ díky působení externích zdrojů sil (zářivá síla, tlak apod.) charakterizovaných vektorem $\boldsymbol{Q}$ a to postupnou aplikací vzorce

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}+1} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}+1} + \Delta t\, \boldsymbol{Q}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}+1}. \tag{7.6}$$

Po skončení toho postupu, aplikaci okrajových podmínek a případné numerické viskozity, pokračuje výpočet dalším časovým krokem (viz schéma na obrázku 7.2). Tento postup tvoří základ vícesložkového kódu, výjimku v tomto schématu tvoří dynamické tření.

7.4 Dynamické tření

Zahrnutí dynamického tření do modelu přineslo zásadní problém, který bylo třeba vyřešit. Aplikací postupu (7.6) pro dynamické tření se staly simulace numericky velmi nestabilní, dynamické tření totiž funguje jako silné tlumení. Přesněji řečeno, hydrodynamické procesy simulujeme na časové škále $t_{\rm hyd}$. Zahrnutí třecích procesů, které v systému ustanovují rovnovážný stav a jejichž časová škála $t_{\rm tr}$ je mnohem menší než časová škála hydrodynamických procesů, $t_{\rm tr} \ll t_{\rm hyd}$, způsobuje numerické potíže. Systém se snaží přejít do rovnovážného stavu, nicméně velikost časového kroku, který odpovídá hydrodynamickým procesům nedovoluje rovnováhu ustavit, systém začně silně oscilovat a dochází k numerické havárii. Bohužel nemůžeme jednoduše použít menší časový krok, odpovídající časové škále třecích procesů. Doba výpočtu, která při normálním výpočtu trvá řádově dny, by se při použití menšího časového kroku dostala řádově na desítky roků, což je nepřípustná hodnota doby výpočtu. Z tohoto důvodu jsem zvolil jiný přístup, aby hodnota časového kroku byla v rozumných mezích. Rovnice reprezentující třecí člen v kódu **mflu.f** můžeme zapsat (v souladu s postupem 7.4).

$$\frac{\partial v_{r,i}}{\partial t} = -\frac{\mathcal{C}G(x_{\rm pi})}{\rho_p}, \tag{7.7a}$$

$$\frac{\partial v_{r,p}}{\partial t} = \frac{\mathcal{C}G(x_{\rm pi})}{\rho_i}, \tag{7.7b}$$

kde $G(x)$ reprezentuje Chandrasekharovu funkci. Konstanta $\mathcal{C}$ je dána podle (6.6)

$$\mathcal{C} = -\frac{k_{\rm pi}}{A_i A_p m_p^2}. \tag{7.8}$$

Pokud bychom postupovali stejně, jako v případě zářivé síly, stačilo by rovnice (7.7) numericky integrovat s použitím kroku Δt. Tento přístup k výpočtu však vedl k silným oscilacím poblíž fotosféry, které nakonec vyústily v havárii kódu. Proto jsem zvolil jiný přístup.

Jelikož argumentem třecí síly je driftová rychlost $x_{\rm pi}$, obě dvě rovnice (7.7) od sebe odečteme a podělíme faktorem $v_{th}\sqrt{1 + A_i/A_p}$ (viz definice driftové rychlosti 6.10). Tak dostaneme diferenciální rovnici popisující časový vývoj driftové rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}x_{\rm pi}}{\mathrm{d}t} = -\frac{(\rho_i + \rho_p)\mathcal{C}}{v_{th}\sqrt{1 + A_i/A_p}} G(x_{\rm pi}). \tag{7.9}$$

V dalším textu budeme opět z důvodu čitelnosti indexem 0 značit hodnotu v čase t a indexem 1 hodnotu příslušné veličiny v čase $t + \Delta t$. Abychom mohli rovnici (7.7) řešit analyticky separací proměnných

$$\int_{x_{\mathrm{pi},0}}^{x_{\mathrm{pi},1}} \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{pi}}}{G(x_{\mathrm{pi}})} = -\int_0^{\Delta t} \mathcal{C}\frac{(\rho_i + \rho_p)}{v_{th}\sqrt{1+A}}\mathrm{d}t, \tag{7.10}$$

je třeba Chandrasekharovu funkci vhodně aproximovat. Integrál na levé straně výrazu (7.10) pro Chandrasekharovu funkci (6.9) není analyticky integrovatelný. Pokud však vhodně Chandrasekharovu funkci aproximujeme tak, aby byl výraz (7.10) analyticky integrovatelný, budeme schopni řešit rovnici popisující vývoj driftové rychlosti (7.9) analyticky v elementárním časovém kroku Δt. Tento způsob výpočtu se ukázal mnohem stabilnější a odstranil potíže s oscilacemi poblíž fotosféry.

Proto jsem aproximoval Chandrasekharovu funkci výrazem $G_A(x) \approx G(x)$, díky kterému bylo možné rovnici charakterizující třecí člen (7.7) analyticky integrovat a tak určit změny $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_p$ analytickým výrazem v rámci elementárního intervalu Δt. Použil jsem tři různé aproximace, aplikovatelné na tři odlišné části intervalu driftové rychlosti. Pro malé hodnoty driftové rychlosti byla použita aproximace (Owocki & Puls, 2002)

$$G_1(x_{\mathrm{pi}}) = \frac{2x_{\mathrm{pi}}}{3\sqrt{\pi}} \quad \mathrm{pro}\, x_{\mathrm{pi}} < x_{12}, \tag{7.11}$$

pro velké driftové rychlosti aproximace (Owocki & Puls, 2002)

$$G_3(x_{\mathrm{pi}}) = \frac{1}{2{x_{\mathrm{pi}}}^2} \quad \mathrm{pro}\, x_{\mathrm{pi}} > x_{23}, \tag{7.12}$$

a konečně pro hodnoty nacházející se mimo tyto intervaly jsem použil interpolaci pomocí polynomu druhého stupně

$$G_2(x_{\mathrm{pi}}) = a_1{x_{\mathrm{pi}}}^2 + b_1x_{\mathrm{pi}} + c_1. \tag{7.13}$$

Parametry a_1, b_1, c_1 jsou voleny tak, aby interpolační polynom co nejlépe odpovídal průběhu funkce. Pro aproximaci $G_A(x_{\mathrm{pi}})$ Chandrasekharovy funkce $G(x_{\mathrm{pi}})$ pro celý interval platí

$$G_A(x_{\mathrm{pi}}) = \begin{cases} G_1(x_{\mathrm{pi}}) & x_{\mathrm{pi}} < x_{12} \\ G_2(x_{\mathrm{pi}}) & x_{12} \le x_{\mathrm{pi}} \le x_{23} \\ G_3(x_{\mathrm{pi}}) & x_{\mathrm{pi}} > x_{23} \end{cases} \tag{7.14}$$

Graf funkce $G_A(x_{\mathrm{pi}})$, funkce $G(x_{\mathrm{pi}})$ a rozdílu obou funkcí $G_A(x_{\mathrm{pi}}) - G(x_{\mathrm{pi}})$ je na obrázku (6.1). Maximum funkce $G(x_{\mathrm{pi}}^{\max}) = 0.214$ se nachází v bodě $x_{\mathrm{pi}}^{\max} = 0.968$. Dynamicky nejdůležitější část intervalu se nachází v oblasti $x_{\mathrm{pi}} \le x_{\mathrm{pi}}^{\max}$ driftových rychlostí, za touto oblastí velikost dynamického tření zase klesá. Jako výchozí hodnoty a_1, b_1, c_1 jsem zvolil hodnoty z prvního řádku tabulky (7.1) ($a_1 = -0.1760$, $b_1 = 0.404$, $c_1 = -0.0011$) s hraničními hodnotami jednotlivých intervalů $x_{12} = 0.15$ a $x_{23} = 1.85$.

Tabulka 7.1: Koeficienty interpolačního polynomu pro daný interval

a_1	b_1	c_1	x_{12}	x_{23}
-0.1760	0.404	-0.0011	0.15	1.85
-0.2180	0.485	-0.0136	0.20	1.65
-0.0014	0.377	-0.0003	0.10	1.10

Další řádky hodnot v tabulce byly použity pro testování vlivu zvolené aproximace na simulace hvězdného větru. Z grafu (6.1) Chandrasekharovy funkce a její aproximace je patrné, že pro zvolené výchozí hodnoty rozdíl mezi aproximací a reálnou funkcí není příliš velký.

Pro zvolený polynom druhého stupně s koeficienty a_1, b_1, c_1 (viz 7.13) dostáváme dosazením a integrací z (7.10)

$$\ln \frac{2a_1 x_{\mathrm{pi}} + b_1 - \Xi}{2a_1 x_{\mathrm{pi}} + b_1 + \Xi}\bigg|_{x_{\mathrm{pi},0}}^{x_{\mathrm{pi},1}} = -\mathcal{C}\Delta t\,\Xi, \tag{7.15}$$

kde $\Xi = \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}$. Při integraci (7.10) jsme použili tabulkový integrál (Bartsch, 1963)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx^2 + c}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|, \tag{7.16}$$

který platí za předpokladu $4ac - b^2 < 0$, což je splněno u všech zvolených hodnot a_1, b_1, c_1. Převedením logaritmu na exponenciální závislost přepíšeme rovnici (7.15) na

$$\frac{2a_1 x_{\mathrm{pi},1} + b_1 - \Xi}{2a_1 x_{\mathrm{pi},1} + b_1 + \Xi} = \frac{2a_1 x_{\mathrm{pi},0} + b_1 - \Xi}{2a_1 x_{\mathrm{pi},0} + b_1 + \Xi} \exp\left(-\mathcal{C}\Delta t\,\Xi\right). \tag{7.17}$$

Postupnou úpravou a využitím substitucí

$$q_- = 2a_1 x_{\mathrm{pi},0} + b_1 - \Xi, \tag{7.18a}$$

$$q_+ = 2a_1 x_{\mathrm{pi},0} + b_1 + \Xi, \tag{7.18b}$$

dostáváme výsledný vztah pro driftovou rychlost v časovém kroku $t + \Delta t$

$$x_{\mathrm{pi},1} = \frac{1}{2a_1} \left[\frac{1 + \frac{q_-}{q_+} \exp\left(-\mathcal{C}\Delta t \Xi\right)}{1 - \frac{q_-}{q_+} \exp\left(-\mathcal{C}\Delta t \Xi\right)} \Xi - b_1 \right]. \tag{7.19}$$

Podobný postup použijeme i pro aproximativní asymptotický výraz (7.11), který po dosazení do (7.10) dává výsledný vztah pro malé driftové rychlosti

$$x_{\mathrm{pi},1} = x_{\mathrm{pi},0} \exp\left(-\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \mathcal{C}\Delta t\right). \tag{7.20}$$

Zcela analogickým postupem dostaneme vztah pro velké driftové rychlosti. Asymptotický výraz (7.12) dosazením do (7.10) vede ke konečnému vztahu

$$x_{\mathrm{pi},1} = \sqrt[3]{x_{\mathrm{pi},0}^3 - \frac{3}{2}\mathcal{C}\Delta t}. \tag{7.21}$$

Vztahy (7.20), (7.19) a (7.21) tvoří výsledné vztahy pro výpočet rychlostí jednotlivých složek v kódu **mflu.f**.

7.5 Program mflu.f

V této části popíšu detailněji jednotlivé procedury a části kódu **mflu.f**. Popis procedur je uspořádán ve stejném pořadí, v jakém jsou volány v programu. Schéma výpočtu programu je uvedeno na obrázku (7.2).

Vstupní parametry a specifikace problému

Normalizace – subroutine *norm*

V této proceduře se zadávají fyzikální parametry modelovaného systému, efektivní teplota hvězdy T_{eff}, hmotnost hvězdy M_* a hvězdný poloměr R_*. Dále se zde zadávají tabelované hodnoty CAK konstant α, k, δ. Na základě těchto údajů je provedena normalizace, kdy všechny použité veličiny jsou vyjádřeny v bezrozměrných jednotkách. Základem naší soustavy je normalizační podmínka $G.M_* = 1$, $R_* = 1$ a $\dot{M}_{CAK}/4\pi = 1$, která vede na normalizační jednotky pro délku R_N, hmotnost M_N a čas S_N

$$R_N = R_*, \tag{7.22a}$$

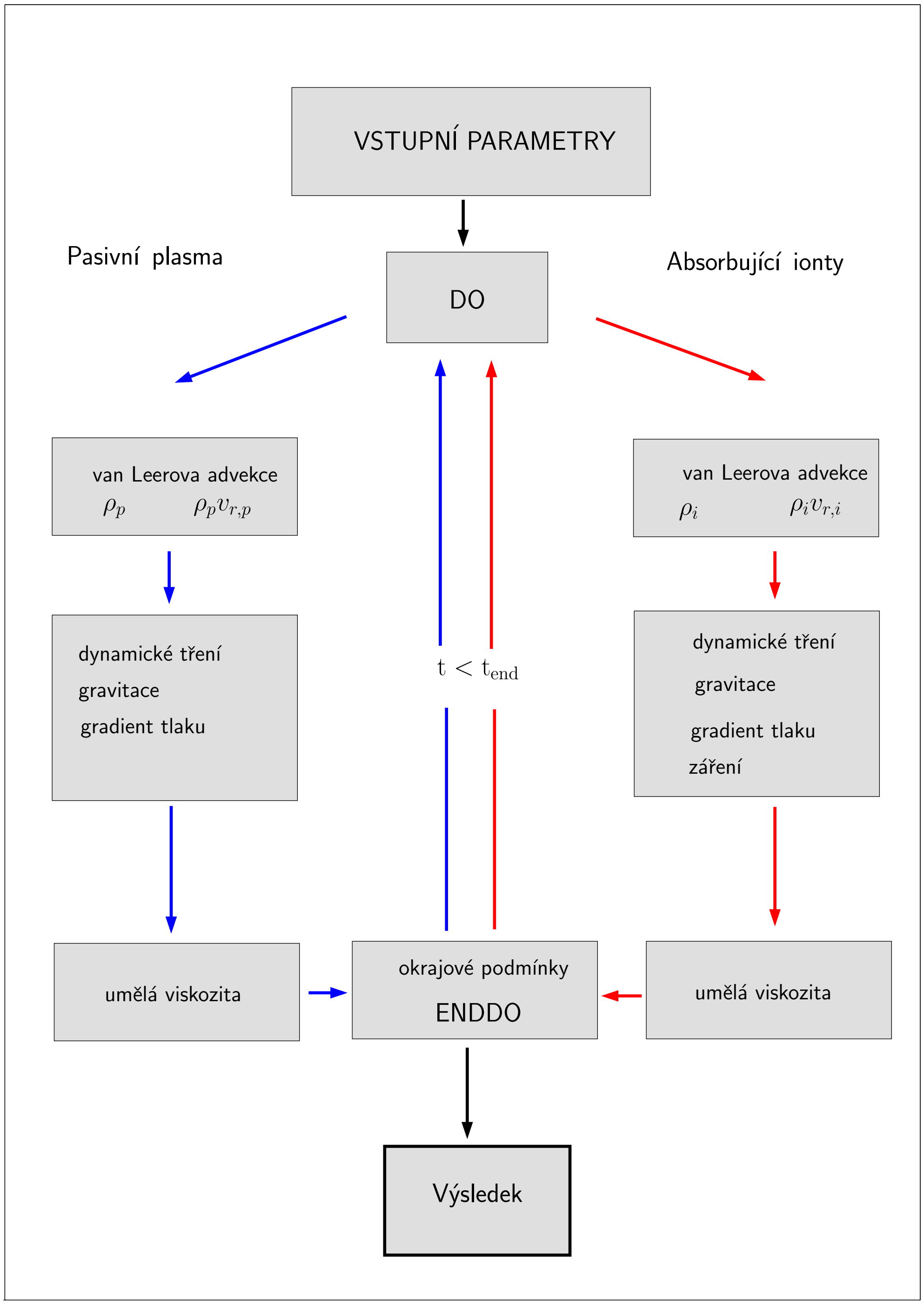
$$S_N = \sqrt{\frac{{R_N}^3}{GM_*}}, \tag{7.22b}$$

$$M_N = \frac{\dot{M}_{CAK}}{4\pi} S_N. \tag{7.22c}$$

CAK rychlost ztráty hmoty $\dot{M}_{CAK}$ je spočtena pomocí vzorce (4.20). Poté jsou určeny další veličiny ze zadaných údajů, které jsou nezbytné pro výpočet: hvězdná luminosita L_*, rychlost zvuku plasmy jako celku a, tepelná rychlost vodíkových atomů v_{th}, Eddingtonův faktor Γ_e a konstanta pro zářivou sílu *radc*. Konstantou *radc* jsme v kódu označili výraz složený z konstant

$$radc = L_* \frac{\kappa_e^{\mathrm{ref}}}{4\pi c} k \left(\frac{v_{th}}{\sigma_e}\right)^{\alpha}. \tag{7.23}$$

Vstupní údaje a zároveň normalizační faktory jsou shrnuty v souboru 'header.dat'.



Obrázek 7.2: Výpočetní schéma programu **mflu.f**

Nastavení řídících hodnot programu – subroutine *set1*

V rámci této procedury nastavujeme základní specifikaci problému, konkrétně velikost počítané oblasti $\langle x_{\min}, x_{\max}\rangle$ a dobu výpočtu t_{end}. Dále se zde nastavuje typ sítě přepínačem *grd*, typ okrajové podmínky obou složek pro vnitřní okraj *ble*, *blep* a obdobně pro vnější okraje *bri*, *brip*. Volbou hodnoty *vi*2 nastavujeme rychlost ztráty hmoty $\dot{M}$ v jednotkách $\dot{M}_{CAK}$ pro nastavení počátečních podmínek. V rámci rutiny se také inicializují některé vnitřní proměnné.

Diskretizační síť – subroutine *grid*

Stejně jako v případě kódu **flu.f** je použito dvouvrstvého typu prostorové sítě. Síť **B** centrovaná na střed výpočetní buňky a síť **A**, centrovaná na krajích buňky. Skalární veličiny přísluší síti **B**, zatímco **A** síť slouží pro vektorové veličiny (viz 7.1). Prostorová síť je stejná pro oba typy kontinua, pasivní plasmu i absorbující ionty.

Počáteční podmínky – subroutine *init*

Počáteční podmínky pro obě složky jsou nastaveny tak, aby umožnily vývoj systému do CAK řešení. Konkrétně pro podzvukovou oblast profil rychlosti odpovídá isotermální statické atmosféře

$$v_{r,p} = \frac{a_p}{10}\exp(Hr), \tag{7.24a}$$

$$v_{r,i} = \frac{a_i}{10}\exp(Hr), \tag{7.24b}$$

kde H je tlaková škála a $a_{p,i}$ rychlost zvuku pro příslušnou komponentu. Pro nadzvukovou část jsme zvolili počáteční podmínky ve tvaru

$$v_{r,p} = a_{\mathrm{p}} + 2a_{\mathrm{p}}r, \tag{7.25}$$

$$v_{r,p} = a_{\mathrm{i}} + 2a_{\mathrm{i}}r, \tag{7.26}$$

odpovídající lineárnímu profilu. Hustota obou složek potom byla přepočítaná z předpokládané CAK rychlosti ztráty hmoty, určené vzorcem (4.21). Tyto počáteční podmínky se ukázaly z numerického hlediska nejvhodnější, přestože nekopírují přesně CAK řešení. Nicméně podobně jako v jednosložkovém případě konvergovaly k CAK řešení velmi rychle.

Hlavní výpočetní cyklus

Hlavní výpočetní cyklus tvoří samotné jádro programu, volání těchto procedur se opakuje až do dosažení času t_{end} (viz obrázek 7.2). Abych zamezil přílišnému přeindexování v textu, dovolím si v rámci této sekce vynechat pro procedury volané pro obě složky nezávisle indexy i, p pro příslušnou složku a index r značící radiální komponentu.

Interpolace rychlosti – subroutine *speed*

V rámci této rutiny je prováděn jednak výpočet rychlosti u_A definované na A typu sítě z vypočítaného toku ρu. Potom je z těchto hodnot určena lineární interpolací hodnota rychlosti u_B definované na B typu sítě (viz obrázek 7.5 a popis v **subroutine** *leer1,leer2*)

$$v^A = \frac{(2\rho v)_j}{(\rho_{j-1} + \rho_j)}, \tag{7.27}$$

$$v^B = \frac{(v^A_{j-1} + v^A_j)}{2}. \tag{7.28}$$

Tato procedura se volá pro obě složky plazmy, tedy jak absorbující ionty tak pasivní plazmu.

Van Leerova interpolace pro hustotu – subroutine *leer1*

Procedura *leer1* tvoří spolu s procedurou *leer2* jádro hydrodynamického kódu. Pomocí Van Leerova schématu se v této rutině počítá v každém časovém kroku hustota ρ pro obě složky. V programu se procedury *leer1* i *leer2* volají pro obě složky. Hustota jako skalární veličina je definována na B typu sítě. V první fázi výpočtu se stanoví pomocné proměnné

$$\Delta\rho_- = \frac{\rho_\mathrm{j} - \rho_\mathrm{j-1}}{x_\mathrm{j} - x_\mathrm{j-1}}, \tag{7.29a}$$

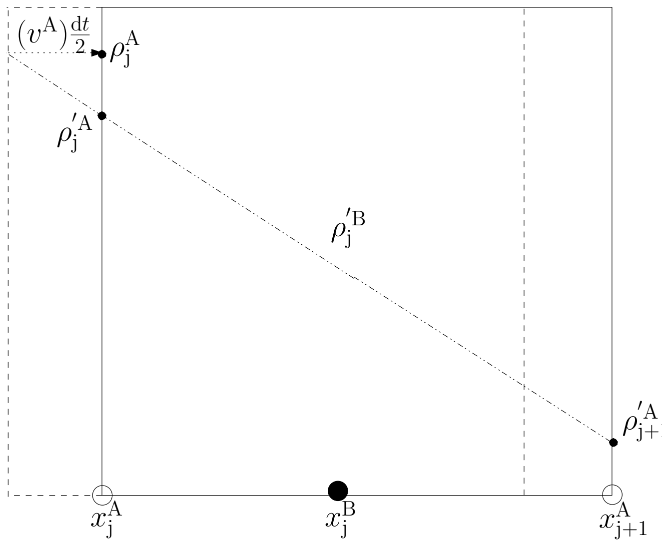
$$\Delta\rho_+ = \frac{\rho_\mathrm{j+1} - \rho_\mathrm{j}}{x_\mathrm{j+1} - x_\mathrm{j}}, \tag{7.29b}$$

ze kterých se určí Van Leerova derivace

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^{\text{Van Leer}} = \frac{2\Delta\rho_-\Delta\rho_+}{\Delta\rho_+ + \Delta\rho_-}. \tag{7.29c}$$

S pomocí Van Leerovy derivace extrapolujeme hodnoty hustoty na levých okrajích elementární buňky (prostorová síť A) v čase dt/2 (prediktorový krok)

$$\rho'^A = \rho^B + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^{\text{Van Leer}} \left(x^A - \left(x^B + v^A\frac{dt}{2}\right)\right) \tag{7.29d}$$



Obrázek 7.3: Schématické znázornění Van Leerovy metody aplikované na hustotu. V prvním prediktorovém kroku je extrapolována hodnota hustoty na okrajích elementární buňky pomocí Van Leerovy derivace v čase $t + \mathrm{d}t/2$. V následujícím korekčním kroku je pomocí toků $\rho_{\mathrm{j}}v_{\mathrm{j}}, \rho_{\mathrm{j+1}}v_{\mathrm{j+1}}$ na okrajích buňky určena hustota v čase $t + dt$.

a na základě znalosti hodnot toku ρv na okrajích elementární buňky provedeme výpočet hustoty v čase $t + dt$ (korekční krok)

$$\rho^{n+1} = \rho^{n} - \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\left(\rho_{j+1}^{\prime A}v_{j+1}^{A} - \rho_{j}^{\prime A}v_{j}^{A}\right). \tag{7.29e}$$

Van Leerova interpolace pro tok – subroutine *leer2*

Obdobně je prováděn výpočet pro tok ρv, který jakožto vektorová veličina je definován na A typu sítě. Opět nejdříve určíme

$$\Delta(\rho v)_{-} = \frac{(\rho j)_{\mathrm{j}} - (\rho v)_{\mathrm{j-1}}}{x_{\mathrm{j}}^{A} - x_{\mathrm{j-1}}^{A}}, \tag{7.30a}$$

$$\Delta(\rho v)_{+} = \frac{(\rho v)_{\mathrm{j+1}} - (\rho v)_{\mathrm{j}}}{x_{\mathrm{j+1}}^{A} - x_{\mathrm{j}}^{A}}, \tag{7.30b}$$

následně vypočítáme Van Leerovu derivaci

$$\left(\frac{\partial\rho v}{\partial x}\right)^{\text{Van Leer}} = \frac{2\Delta(\rho v)_{-}\Delta(\rho v)_{+}}{\Delta(\rho v)_{+} + \Delta(\rho v)_{-}}. \tag{7.30c}$$

S pomocí Van Leerovy derivace extrapolujeme hodnoty toku na středech elementární buňky (prostorová síť B) v čase dt/2 (prediktorový krok)

$$(\rho v)'^{B} = (\rho v)^{A} + \left(\frac{\partial \rho v}{\partial x}\right)^{\text{Van Leer}} \left(x^{B} - \left(x^{A} + v^{B}\frac{dt}{2}\right)\right) \tag{7.30d}$$

a na základě znalosti hodnot $\rho v v$ na středech elementární buňky provedeme výpočet hustoty v čase $t + dt$ (korekční krok)

$$(\rho v)^{n+1} = \rho^{n} - \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\left((\rho v)'^{B}_{j+1} v^{B}_{j+1} - (\rho v)'^{B}_{j} v^{B}_{j}\right). \tag{7.30e}$$

Kontrola stability – subroutine *clock*

Procedura zajištuje splnění Courantovy podmínky (viz Courant & Hilbert, 1967)

$$\Delta t = c_{\mathrm{cfl}} \frac{\Delta x}{(|v| + a)}, \tag{7.31}$$

nutné k zajištění stability hydrodynamického kódu. Časový krok Δt pro zvolený element a příslušnou složku kontinua je určen ze zadaného Courantova čísla c_{cfl}, velikosti prostorového kroku Δx, rychlosti v a rychlosti zvuku a. Takto určené časové kroky jsou tedy obecně závislé na typu složky (pasivní nebo absorbující) prostorové souřadnici x, ve které určujeme velikost rychlosti v a velikost prostorového kroku Δx. Abych splnil Courantovu podmínku stability (viz Courant & Hilbert, 1967) pro obě složky, určil jsem z této podmínky časový krok pro absorbující ionty Δt_i a časový krok pro pasivní složku Δt_p a jako skutečný časový krok Δt jsem použil krok s menší hodnotou,

$$\Delta t = \min(\Delta t_i, \Delta t_p). \tag{7.32}$$

Hodnota časového kroku se stanovuje pokaždé znovu. Pro provedené vícesložkové výpočty jsem volil hodnotu $c_{\mathrm{cfl}} = 0.01$.

Výpočet třecí síly – subroutine *friction*

Výpočet třecí složky síly je nejproblematičtější částí výpočtu, detailní popis výpočtu je v umístěn v kapitole (7.4).

Výpočet tlakových sil – subroutine *pressure*

Procedura určuje tlakovou sílu působící na danou složku za předpokladu isotermálních procesů.

Výpočet efektivní gravitace – subroutine *grav*

Procedura počítá gravitační sílu působící na element kontinua redukovanou zářivou sílu v důsledku rozptylu na volných elektronech. Vzhledem k faktu, že neuvažujeme zatím třísložkový model, jsou elektrony zahrnuty jak v absorbujících iontech tak v pasivní plasmě. Proto je redukovaná gravitace započítaná pro obě složky.

Výpočet zářivé síly – subroutine *radia*

Zářivá síla v důsledku absorpce v čarách v našem modelu působí pouze na absorbující ionty. Procedura počítá zářivou sílu v Sobolevově aproximaci ze vzorce (3.53). K výpočtu zářivého zrychlení (3.53) jsme použili tabelované hodnoty CAK konstant z tabulky (3.1). Zároveň jsou ve výpočtu zahrnuty také korekce CAK teorie – konkrétně korekční ionizační faktor f_{ion} a korekce na konečný disk hvězdy f_{kon}.

Numerická viskozita – subroutine *visco*

Koncept numerické viskozity, pomáhající automaticky numericky rozlišit a přibližně spočítat diskontinuity v simulacích, poprvé rozpracoval (von Neumann & Richtmyer, 1950). Tento přídavný člen, který se zahrnuje do rovnic, zajišťuje hladký a spojitý přechod z jedné oblasti diskontinuity do druhé na škále $\approx \Delta x$. Velikost viskozního členu je stanovena ze vztahu

$$q_i^B = \rho^B Q_{\text{vis}} (u_{i+1}^A - u_i^A)^2, \tag{7.33a}$$

$$(\rho u)^A = (\rho u)^A - \mathrm{d}t \frac{(q_i^B - q_{i-1}^B)}{(x_i^B - x_{i-1}^B)}, \tag{7.33b}$$

kde Q_{vis} je koeficient umělé viskozity (ve kódu je označen jako *vis*).

Okrajové podmínky – subroutine *bound*

V souladu s teorii smíšeného problému počatečních-okrajových podmínek jsou okrajové podmínky určovány podle počtu charakteristik, které vstupují, popřípadě vystupují z výpočetní oblasti. Počet vstupujících charakteristik do výpočetní oblasti na jejím okraji odpovídá počtu zafixovaných hydrodynamických veličin na témže okraji, podobně pak počet vystupujících charakteristik z oblasti odpovídá počtu extrapolovaných hydrodynamických veličin.

Okrajové podmínky byly nastaveny v souladu s charakteristikami systému. Pro absorbující ionty jsem zafixoval hustotu ρ_i a extrapoloval tok $\rho_i v_i$ na vnitřním okraji

$$\rho_{i,2} = \rho_{i,2}, \tag{7.34}$$

$$(\rho v)_{i,3} = (\rho v)_{i,4}, \tag{7.35}$$

zatímco pro pasivní plazmu jsem na vnitřním okraji zafixoval obě věličiny

$$\rho_{p,2} = \rho_{p,2}, \tag{7.36}$$
$$(\rho v)_{p,3} = (\rho v)_{p,3}. \tag{7.37}$$

Obdobně pro vnější okrajové podmínky absorbujících iontů jsem obě veličiny extrapoloval

$$\rho_{i,\mathrm{np}+3} = \rho_{i,\mathrm{np}+2}, \tag{7.38}$$
$$(\rho v)_{i,\mathrm{np}+3} = (\rho v)_{i,\mathrm{np}+2}, \tag{7.39}$$

a stejným způsobem také pro pasivní plazmu

$$\rho_{i,\mathrm{np}+3} = \rho_{i,\mathrm{np}+2}, \tag{7.40}$$
$$(\rho v)_{i,\mathrm{np}+3} = (\rho v)_{i,\mathrm{np}+2}, \tag{7.41}$$

kde np je počet použitých bodů pro výpočet. Index u okrajových podmínek, konkrétně 2, $n+3$ pro hustotu ρ a 3, $n+3$ pro tok ρv, u obou složek odpovídá skutečným okrajům výpočetní oblasti. Veličiny s indexem 1, $n+3$ pro hustotu a 1, 2, $np+3$ pro tok jsou takzvané *ghost zones*, které jsou zde z důvodů symetrie (Hirsch, 2002). Jak bude diskutováno později, problém nastává, pokud dojde k oddělení složek, jelikož se změní konfigurace charakteristik.

Výstup z programu – subroutine *out*

Výstup z programu je přesměrován do dvou souborů: 'flua.dat' určený pro hydrodynamické veličiny popisující absorbující ionty a 'flub.dat' určený pro hydrodynamické veličiny popisující pasivní plazmu. Výstup se provádí v pravidelných intervalech, daných celkovou dobou výpočtu t_{end} a počtem výstupů *iout*. Formát výstupu platný pro oba soubory má následující strukturu

x	ρ	u
0.999830794	1.01751379	2.76150591
1.00050852	1.00785514	2.78797043
1.00084784	0.982010551	2.86134434
1.00118741	0.952455058	2.97838832
1.00152712	0.926301376	3.05727337
⋮	…	…

Uvedené veličiny jsou v bezrozměrném formátu. K převodu na CGS soustavu jsou uvedeny škálovací faktory v hlavičkovém souboru 'header.dat'.

Tabulka 7.2: Parametry modelu

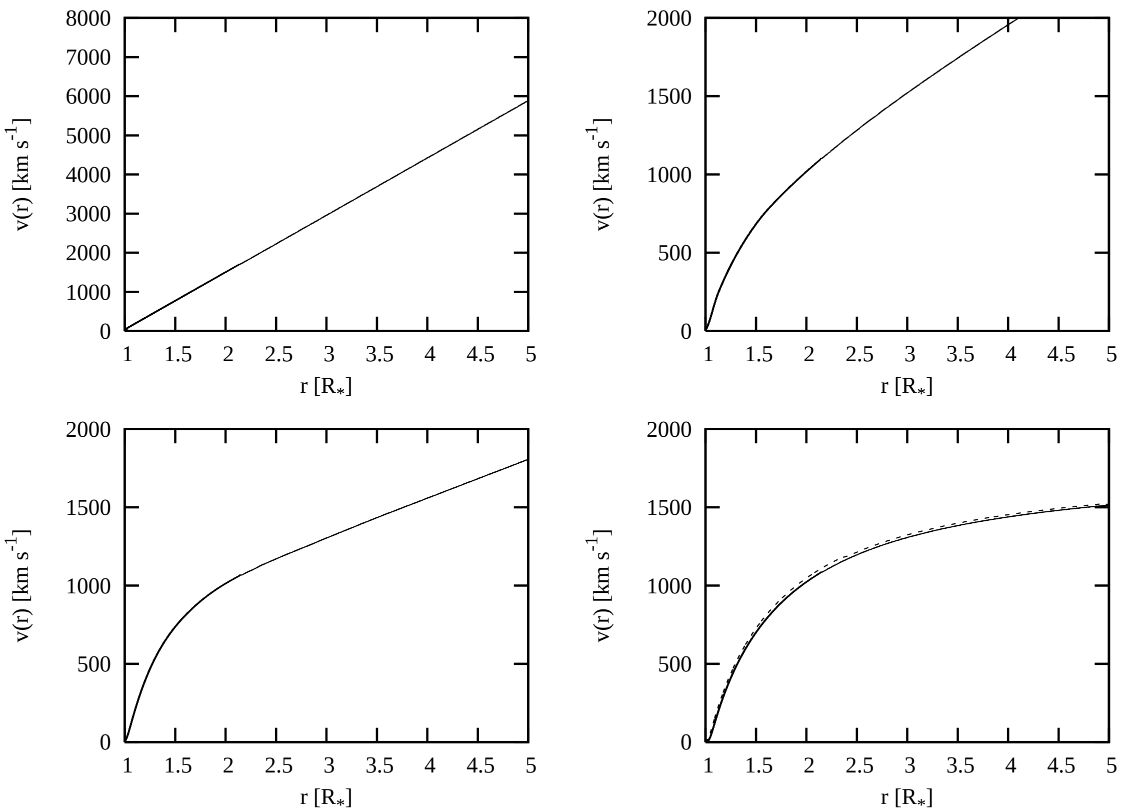
Star	M $[M_\odot]$	T_{eff} [K]	R $[R_\odot]$	α	k	δ	Z_i/Z_p
ϵ Ori	90.0	28 500	37.0	0.590	0.170	0.09	3.0
κ Cas	29.0	21600	35.4	0.5	0.287	0.09	3.0
τ Sco	20.0	32000	6.7	0.609	0.156	0.057	3.0
ϵ Per	20.0	27 500	11.9	0.545	0.571	0.018	3.0

7.6 Vícesložkové modely hvězdného větru

Vícesložkový kód jsem aplikoval na hvězdy s dobře vázaným hvězdným větrem. Konkrétně jsem se zabýval hvězdami s parametry ϵ Ori, κ Cas, τ Sco, ε Per. Parametry modelů jsou shrnuty v tabulce (7.2), přičemž parametry hvězdy κ Cas, τ Sco a ε Per jsem převzal z Wilson & Dopita (1985) a parametry pro hvězdu ϵ Ori jsem převzal z článku Krtička & Kubát (2000), abychom mohl porovnat modely. Výsledky jednotlivých simulací jsou shrnuty taktéž v tabulce (7.2). U všech těchto hvězd se předpokládá dostatečně hustý hvězdný vítr, který je dobře vázaný. U dobře vázaného hvězdného větru vícesložkové simulace vykazují dobrou shodu v porovnání s jednosložkovými modely. Abych analyzoval vliv přesnosti aproximace Chandrasekharovy funkce $G_A(x)$ na simulace, použil jsem různé hodnoty parametru a_1, b_1, c_1 interpolačního polynomu. Hodnoty byly voleny záměrně tak, abych analyzoval i případ nevhodné aproximace, jak je patrné z obrázku (7.6). Jednotlivé hodnoty použitých parametrů a_1, b_1, c_1 jsou shrnuty v tabulce 7.1. Graf znazorňující průběh jednotlivých aproximací $G_1(x_{\text{pi}})$,$G_2(x_{\text{pi}})$ a $G_3(x_{\text{pi}})$ spolu s průběhem skutečné funkce $G(x)$ je znázorněn na grafu (7.6). Je třeba poznamenat, že v případě simulací slabě vázaného

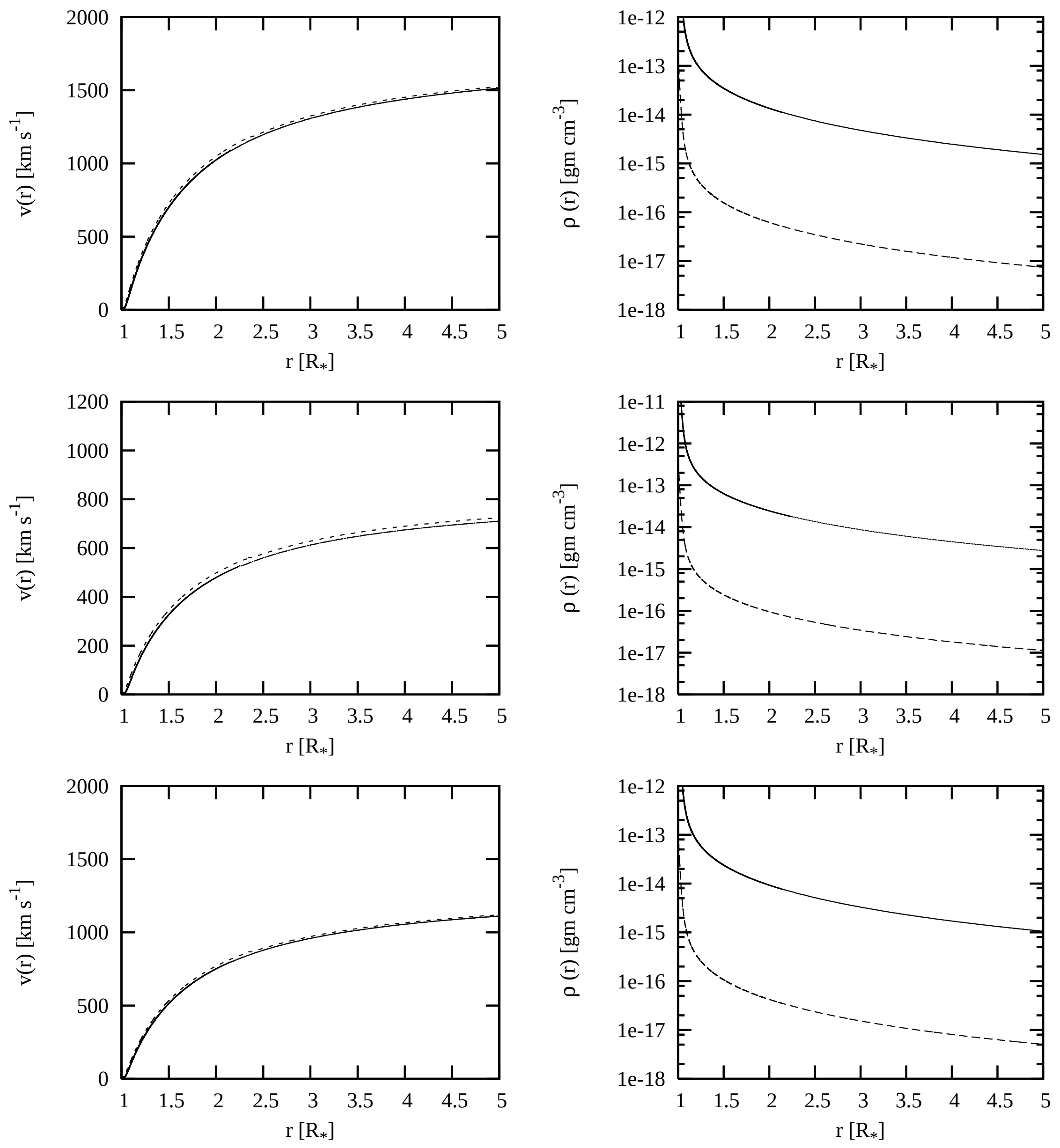
Star	v_∞ $[\text{kms}^{-1}]$	v_{obs} $[\text{kms}^{-1}]$	v_{oth} $[\text{kms}^{-1}]$
ε Ori	1600	2010	1950
κ Cas	800	1600	-
τ Sco	1600	2000	-
ε Per	1200	1500	-

Tabulka 7.3: Srovnání empirických hodnot rychlostí v_∞ s hodnotami stanovenými z programu **mflu.f**. Hodnoty v_∞ určené z programu **mflu.f** jsou v prvním sloupci, empirické hodnoty, které byly převzaty z článku Wilson & Dopita (1985), jsou ve sloupci v_{obs}. Poslední sloupec v_{obs} obsahuje hodnotu stanovenou jiným programem (Pauldrach et al., 1986)

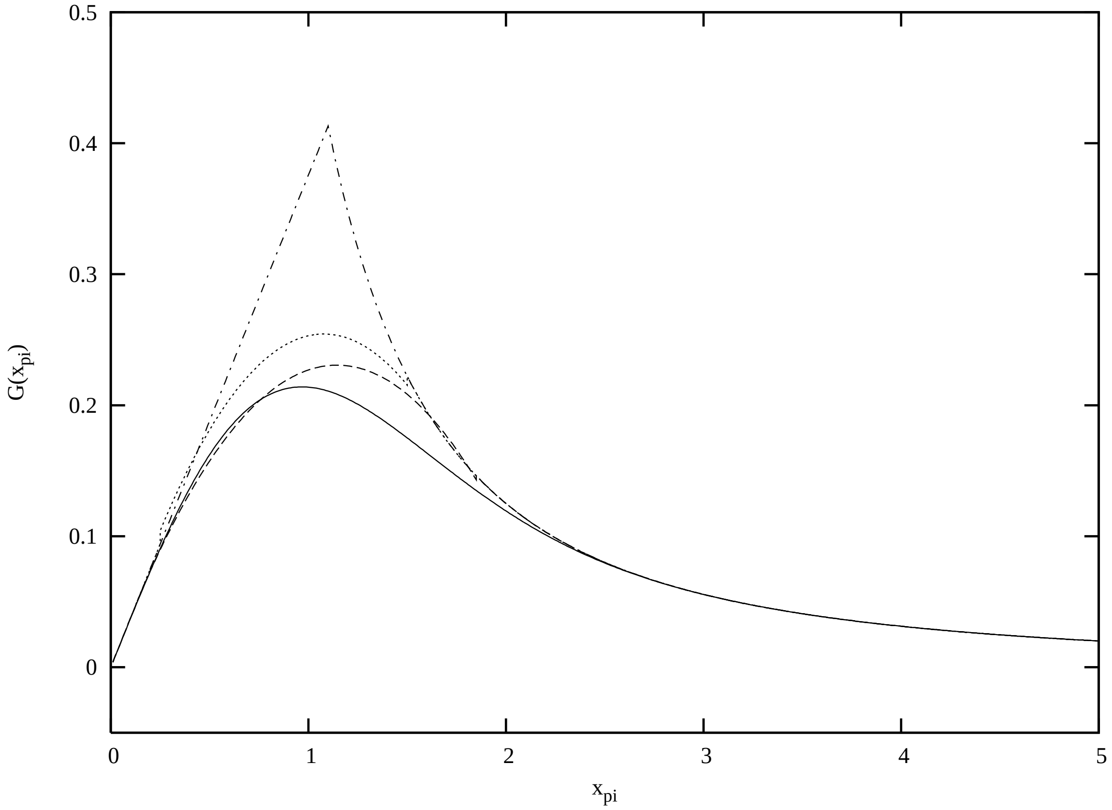


Obrázek 7.4: *Horní levý panel:* Počáteční podmínky pro rychlost časově závislého modelu hvězdy τ Sco z tabulky 7.2. Hvězda byla vybrána díky předpokladu dobře vázáného hvězdného větru. *Horní pravý panel:* Numerický mezivýsledek po uplynutí zhruba 1/10 celkové výpočetní doby. Vidíme, jak numerické řešení konverguje k předpokládanému CAK řešení. *Dolní levý panel:* Podobná situace po uplynutí 1/20 celkové výpočetní doby, numerické řešení je mnohem blíže k CAK řešení. *Dolní pravý panel:* Konečně, numerické řešení dokonvergovalo k CAK řešení. Porovnáním našeho dvousložkového modelu s jednosložkovým modelem vidíme, že dvousložkové řešení (čárkovaná čára) koresponduje s jednosložkovým modelem (plná čára).

větru, ve kterém může dojít k oddělení složek, je dobré zvolit co nejlepší fit interpolačním polynomem pro oblast $0 \leq x \leq x_{\max} = 0.24$. Tento závěr je patrný z analýzy Chandrasekharovy funkce, kde oblast pokrývající rozsah driftové rychlostí od nuly až po hodnotu korespondující s maximem Chandrasekharovy funkce má velký vliv na případný proces oddělení složek. Na druhou stranu, jak je patrné z výsledné tabulky (7.6), neměla v případě dobře vázaného větru hrubost aproximace velký vliv na výsledek, což odpovídá předpokládánému chování. Simulace hvězdného větru hvězd s řídkým větrem prozatím nebyly úspešné, díky závažným numerickým obtížnostem. Hlavní problém spočívá v generaci nestability (6.42). Tato nestabilita vznikající při oddělování aktivní a pasivní složky je extrémně silná a velmi rychle vede k numerické havárii kódu. Dosud provedeným numerickými experimenty s použitím většího koeficientu umělé viskozity se nepodařilo dokonvergovat k řešení. Zkusil jsem také experimentovat s různou hodnotou škálovacího faktoru η a tím ovlivnit nárust této nestability. Zatím se však nepodařilo simulovat oddělování složek ve hvězdném větru. Díky tomuto faktu také simulace pulsujících obálek s pomocí přesnějšího vícesložkové modelu není možná. V obou případech kód po určité době havaruje. Oba tyto procesy jsou velmi zajímavé a v současné době pracujeme na změnách kódu tak, abychom mohli studovat i tyto procesy.



Obrázek 7.5: *Horní panel:* (nalevo) Vypočítaný rychlostní profil z vícesložkového modelu pro hvězdu κ Cas, rozložení hustoty pro absorbující složku (přerušovaná čára) a pasivní složku (plná čára) pro tutéž hvězdu. *Střední panel:*obdobně rychlostní profil z vícesložkového modelu pro hvězdu τ Sco (nalevo) a rozložení hustoty pro absorbující složku (přerušovaná čára) a pasivní složku (plná čára) (napravo). *Spodní panel:* (nalevo) Vypočítaný rychlostní profil z vícesložkového modelu pro hvězdu ϵ Per, (napravo) rozložení hustoty pro absorbující složku (přerušovanou čárou) a pasivní složku (plnou čarou) pro stejný model.



Obrázek 7.6: Chandrasekharova funkce a její aproximace. Chandrasekharova funkce je znázorněna v grafu plnou čarou, aproximace $G_1(x_{\rm pi})$,$G_2(x_{\rm pi})$ a $G_3(x_{\rm pi})$ určené podle vzorce (6.9) jsou znázorněny v grafu tečkovanou, čárkovanou a tečkovaně čárkovou čarou odpovídající sadě parametrů z tabulky (7.1)

Kapitola 8

Závěr

V práci jsem se zabýval numerickými simulacemi hvězdného větru a to jak jednosložkového tak vícesložkového. Také jsem numericky modeloval hydrodynamické nestability, které souvisí s problematikou hvězdného větru. K simulaci jednosložkového hvězdného větru jsem použil kód **flu.f** a pro simulaci klasických hydrodynamických nestabilit kód **VH-1**. V rámci jednosložkových simulací jsem se zabýval analýzou konvergence výpočtu k CAK řešení. Ukázalo se, že v průběhu konvergence dochází často ke vzniku rázové vlny. Dále jsem se zabýval analýzou vzniku pulsujících obálek, poprvé popsaných v článku (Porter & Skouza, 1999). Výsledné závěry, popsaný průběh i předpověď časové škály tohoto procesu je plně v souladu s prací (Porter & Skouza, 1999). Detailní popis těchto zajímavých hydrodynamických procesů, jejich simulace i s výslednou animací jsou jako součást této disertační práce na přiloženém CD.

Vyvinul jsem vícesložkový kód **mflu.f**, kterým lze studovat časově závislé procesy ve vícesložkovém hvězdném větru. V rámci této práce jsem vymyslel metodu k potlačení numerických oscilací, objevujících se při simulaci díky dynamickému tření. Dynamické tření svým charakterem, značně numericky komplikuje výpočet. V případě zahrnutí dynamického tření do výpočtu se problémem stává silné tlumení, které způsobuje silné oscilace, zejména poblíž fotosféry hvězdy. Vyvinutá metoda tento problém úspěšně řeší a to bez významného nárustu výpočetní času. Metodu jsem úspěšně aplikoval na hvězdný vítr vybraných B hvězd. Také jsem zjistil, že pro simulace dobře vázaného hvězdného větu horkých hvězd, nemá hrubost aproximace významný vliv na konečný výsledek simulace. Potvrdil jsem také numericky předpověď existenci silné nestability, která vzniká při oddělování složek plazmatu v případě slabě vázaného hvězdného větru horkých hvězd.

Jednou z klíčových aproximací je předpoklad izotermality hvězdného větru. Díky tomuto předpokladu jsem ušetřil výpočetní nároky zhruba o třetinu, nemusel jsem totiž řešit detailní rovnice pro přenos energie (2.3). Na druhou stranu má tento předpoklad velmi omezenou platnost. Jednak první časově závislé simulace (Feldmeier, 1995) ukázaly, že hvězdný vítr u hvězd spektrálního typu O lze pokládat za izotermální až ve vzdálenosti od 5 R_*. Až do této vzdálenosti může rázový ohřev a ochlazování mít podstatný vliv na dynamiku systému. Podobný závěr lze očekávat i pro některé hvězdy spektrálního typu $B0$.

Dalším významným procesem narušujícím isotermalitu ve vícesložkovém hvězdném větru B hvězd je ohřev v důsledku dynamického tření mezi jednotlivými složkami větru. Krtička & Kubát (2001a) ukázali, že třecí ohřev se u hvězd spektrálního typu B uplatní hlavně ve vzdálenějších oblastech a vede k výrazné teplotní stratifikaci větru. Dynamickým důsledkem třecího ohřevu je pokles hodnoty rychlosti v nekonečnu v_∞. Dále Krtička & Kubát (2001b) ukázali, že u hvězd spektrálního typu B2 a pozdějšího, kde se předpokládá větší význam vícesložkového popisu větru, mohou mít absorbující ionty větší teplotu než pasivní složka v důsledku Galeyho-Owockého ohřevu (Gayley & Owocki, 1994) a to řádově až o 10^3 K. Všechny tyto argumenty vedou k jednoznačnému závěru, že v dalším kroku je nutné místo předpokladu isotermálních procesů spočítat detailně přenos energie v rovnici pro energii (2.3).

Dále ve vícesložkovém modelu zatím uvažuji pouze zářivou sílu v Sobolevově aproximaci, přesnější popis například pomocí SSF metody (Owocki & Rybicki, 1985) není možný díky větším výpočetním nárokům. Nejsem tedy schopen zatím simulovat zářivou nestabilitu, touto nestabilitou generované rázové vlny a tedy ani rázový ohřev ve vícesložkovém hvězdném větru, ale je to náplň dalšího výzkumu. Je třeba také upozornit na fakt, že jsem použil tabelované hodnoty CAK konstant. Velikost CAK konstant určuje efektivnost přenosu hybnosti záření, proto jejich přesnost je při simulacích velmi důležitá. V rámci zpřesnění výpočtu by bylo dobré spočítat hodnoty CAK konstant pro naše vstupní parametry hvězdy a elektronovou hustotu hvězdného větru namísto použití tabelovaných hodnot.

Asi největším problémem, se kterým je nutno se vypořádat je simulace dynamického oddělovaní složek ve hvězdném větru. Je třeba dalšího výzkumu k vyřešení problému s oddělováním složek plazmatu. Během testování a simulace hvězdného větru horkých hvězd se slabě vázaným hvězdným větrem, tedy u hvězd s předpokládaným oddělováním složek plazmatu, jsem narazil na další numerické potíže. Ukázalo se, že nestabilita generovaná oddělováním složek velmi rychle vede k numerické havárii kódu. Potlačení této nestability a simulace oddělování složek je náplní další práce.

Velmi zajímavým problémem se ukázala simulace dynamického oddělování složek ve hvězdném větru. V průběhu testování a simulace hvězdného větru horkých hvězd se slabě vázaným hvězdným větrem, tedy u hvězd s předpokládaným oddělováním složek plazmatu se ukázalo, že výpočet nedokonverguje k řešení. Je to pravděpodobně důsledek silné nestability generované při oddělovaní obou složek. Hledání způsobu, jak simulovat tento proces a potlačit nárůst této nestability může být velmi přínosné.

K oddělení složek dochází pokud coulombické interakce nejsou příliš efektivní, což může být případ hvězdného větru některých B hvězd zejména pozdějšího typů (B3 a více). Ukazuje, že proces oddělovaní je z numerického hlediska velmi složitý, a to zejména ze dvou důvodů. Vícesložkový hvězdný vítr je velmi nestabilní, kromě již zmiňované nestability v důsledku interakce záření se spektrálními čarami (zkráceně čárové nestability), se zde významně uplatňuje nestabilní mód při oddělovaní absorbujících iontů od pasivní složky (6.42). Rychlost nárůstu separačního módu převyšuje již tak velkou rychlost čárové nestability o řádově 10^3 a to pro všechny vlnové délky perturbace, na rozdíl od čárové nestability, která se uplatňuje pouze pro male poruchy vlnové délky. Numericky simulovat tuto nestabilitu je velmi obtížné, vyžaduje to velké nároky na výpočetní kapacitu, efektivnost a stabilitu algorithmu. Druhým důvodem, který je ale úzce spjat s prvním, je fakt, že po oddělění obou složek jsou iontové Abbottovy vlny, jenž umožňují šíření signálu, zhruba 100-krát rychlejší než klasické Abbottovy vlny z jednosložkového modelu. Z tohoto pohledu je stacionární řešení podkritické a informace se může šířit díky těmto super Abbottovým vlnám skrze hvězdný vítr na povrch hvězdy z celé výpočetní oblasti. Mění se tak konfigurace charakteristik, tedy i okrajové podmínky problému. V současné době probíhá intenzivní výzkum, jakým způsobem vyřešit či obejít tyto numerické těžkosti při zachovaní realistické doby výpočtu v řádu dní. Pak bude možné konzistentně určit, zda a jakým způsobem dochází k oddělování složek u B hvězd s řídkým větrem a také studovat případné dynamické jevy související s oddělením, například generaci pulsujících obálek.

Dodatek A

Sférické souřadnice, diferenciální operátory ve sférických souřadnicích

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi a sférickými souřadnicemi

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \tag{A.1}$$
$$y = r\sin\phi\cos\theta, \tag{A.2}$$
$$z = r\cos\theta. \tag{A.3}$$

Jednotlivé vektory ve směru souřadných os

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \hat{\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Operátor nabla

$$\nabla_{r,\theta,\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \tag{A.5}$$

Operátor rotace

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\tan\theta}v + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\phi}, \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi} - \frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right). \tag{A.6}$$

Operátor divergence

$$\mathrm{div}_{\mathrm{r},\varphi,\theta}\,(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta w). \tag{A.7}$$

Dodatek B

Odvození vztahu $\boldsymbol{s}.\nabla(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v})$

Následující postup odvození je zpracován podle Koninx (1992). V zavedeném značení podle Koninx (1992) můžeme pro rychlost psát

$$\boldsymbol{v} = v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi} + v_\theta \hat{\theta}$$

a podle obrázku 7.6 můžeme psát pro jednotkový vektor ve směru záření $\boldsymbol{s}$

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} \cos\Psi \sin\Lambda \\ \sin\Psi \sin\Lambda \\ \cos\Lambda \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Projekce rychlosti ve směru záření je dána skalárním součinem

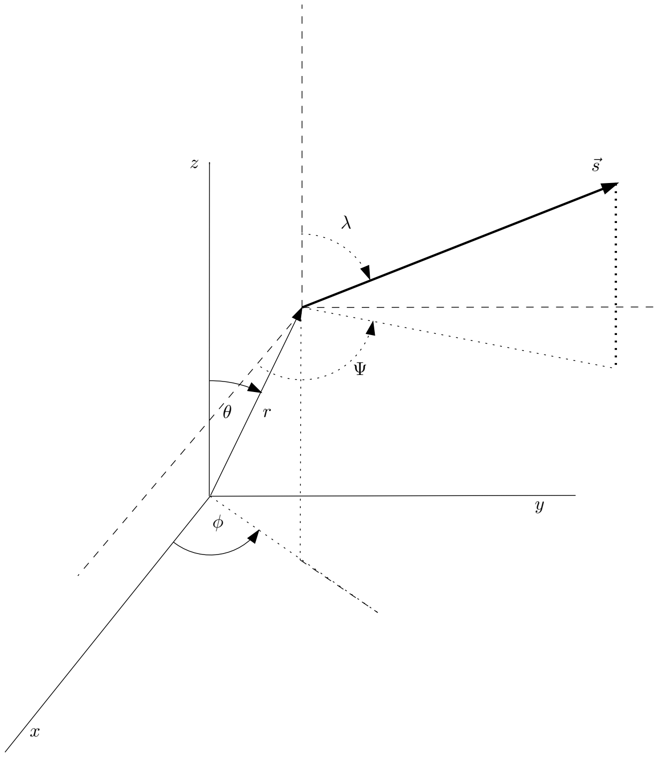
$$\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = v_r(\boldsymbol{s}.\hat{r}) + v_\phi(\boldsymbol{s}.\hat{\phi}) + v_\theta(\boldsymbol{s}.\hat{\theta}),$$

kde pro jednotlivé skálarní součiny platí

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{s}.\hat{r}) &= \cos\Psi \sin\Lambda \cos\phi \sin\theta + \sin\Psi \sin\Lambda \sin\phi \sin\theta + \cos\theta \cos\Lambda = \qquad \text{(B.2a)}\\
&= \sin\Lambda \sin\theta \cos(\Psi - \phi),\\
(\boldsymbol{s}.\hat{\phi}) &= -\cos\Psi \sin\Lambda \sin\phi + \sin\Psi \sin\Lambda \cos\phi = \qquad \text{(B.2b)}\\
&\sin\Lambda \sin\Lambda \sin(\Psi - \phi),\\
(\boldsymbol{s}.\hat{\theta}) &= \cos\Psi \sin\Lambda \cos\phi \cos\theta + \sin\Psi \sin\Lambda \sin\phi \cos\theta - \sin\theta \cos\lambda = \qquad \text{(B.2c)}\\
&\sin\Lambda \cos\theta \cos(\Psi - \phi) - \sin\theta \cos\Lambda
\end{aligned}$$

a při úpravě jsme použily součtové vzorce

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta,\\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta.
\end{aligned}$$



Obrázek B.1: Vztažný systém použitý při odvození vztahu $\boldsymbol{s}.\nabla(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v})$. Souřadnice r, θ, ϕ jsou běžné sférické souřadnice, udávající polohu bodu v prostoru. Jednotkový vektor $\boldsymbol{s}$ určuje směr k pozorovateli a je dán úhly λ, Ψ. Souřadná soustava byla převzata z práce Koninx (1992)

S použitím (B.2) rozepíšeme projekci rychlosti

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = v_r \sin\Lambda \sin\theta \cos(\Psi - \phi) + v_r \cos\Lambda \cos\theta + v_\phi \sin\Lambda \sin(\Psi - \phi) + \\ + v_\theta \sin\Lambda \cos\theta \cos(\Psi - \phi) - v_\theta \sin\theta \cos\Lambda, \end{aligned} \tag{B.3}$$

pro gradient projekce rychlosti obecně platí (viz (A.5))

$$\nabla_{r,\theta,\phi}(\boldsymbol{sv}).$$

Rozepsáno do jednotlivých složek

$$\frac{\partial(\boldsymbol{sv})}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r}\sin\Lambda\sin\theta\cos(\Psi-\phi) + \frac{\partial v_r}{\partial r}\cos\Lambda\cos\theta +$$
$$+\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\sin\Lambda\sin(\Psi-\phi) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin\Lambda\cos\theta\cos(\Psi-\phi) -$$
$$-\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin\theta\cos\Lambda \tag{B.4a}$$
$$\frac{\partial(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v})}{\partial\phi} = \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\sin\Lambda\sin\theta\cos(\Psi-\phi) +$$
$$+v_r\sin\Lambda\sin\theta\sin(\Psi-\phi) + \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\sin\Lambda\sin(\Psi-\phi) - v_\phi\sin\Lambda\cos(\Psi-\phi) +$$
$$+\frac{\partial v}{\partial\phi}\sin\Lambda\cos\theta\cos(\Psi-\phi) + v_\theta\sin\Lambda\cos\theta\sin(\Psi-\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\sin\theta\cos\Lambda +$$
$$+\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\cos\Lambda\cos\theta \tag{B.4b}$$
$$\frac{\partial(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v})}{\partial\theta)} = \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\sin\Lambda\sin\theta\cos(\Psi-\phi) +$$
$$+v_r\sin\Lambda\cos\theta\cos(\Psi-\phi) + \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\cos\Lambda\cos\theta - v_r\cos\Lambda\sin\theta +$$
$$\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\sin\Lambda\sin(\Psi-\phi) + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\sin\theta\cos\Lambda - v_\theta\cos\theta\cos\Lambda \tag{B.4c}$$

Použijeme stejné značení jako v Koninx (1992),Kubát (2005)

$$a_1 = \sin\Lambda\sin\theta\cos(\Psi-\phi) + \cos\Lambda\cos\theta \tag{B.5a}$$
$$a_2 = \sin\Lambda\cos\theta\cos(\Psi-\phi) - \cos\Lambda\sin\theta \tag{B.5b}$$
$$a_3 = \sin\Lambda\sin(\Psi-\phi) \tag{B.5c}$$
$$a_4 = -\sin\Lambda\cos(\Psi-\phi) \tag{B.5d}$$

a přepíšeme výrazy (B.4) do vektorového výrazu

$$\nabla_{r,\phi,\theta}(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v}) = \tag{B.6a}$$
$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}a_1 + \frac{\partial v_\phi}{\partial r}a_3 + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}a_2\,,\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_r}{\partial\theta}a_1 + \frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}a_3 + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}a_2 + v_r a_2 - v_\theta a_1\right],\right.$$
$$\left.\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial v_r}{\partial\phi}a_1 + \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}a_2 + \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}a_2 + v_r\sin\theta a_3 + v_\phi a_4 + v_\theta\cos\theta a_3\right]\right)$$

Nyní už zbývá jenom provést projekci vektoru (B.7a) ve směru záření, tedy $\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v}$, kterou provedem analogicky s předchozím postupem

$$\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = \left[\frac{\partial v_r}{\partial r}a_1 + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}a_2\right](\sin\Lambda\sin\theta\cos(\Psi-\phi) + \cos\Lambda\cos\theta) \tag{B.7a}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_r}{\partial\theta}a_1 + \frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}a_3 + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}a_2 + v_r a_2 - v_\theta a_1\right]. \tag{B.7b}$$

$$.\sin\Lambda\sin(\Psi-\phi) + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial v_r}{\partial\phi}a_1 + \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}a_3 + \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}a_2 + v_r a_3\sin\theta + \right. \tag{B.7c}$$

$$\left. v_\phi a_4 + v_\theta a_3\cos\theta\right].(\sin\Lambda\cos\theta\cos(\Psi-\phi) - \sin\theta\cos\Lambda) \tag{B.7d}$$

seskupením jednotlivých členů lze výraz (B.7) zjednodušit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r}{a_1}^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right){a_2}^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\phi} + \right.\\ \left. . + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r}\cot\theta\right){a_3}^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r}\right)a_1a_2 + \\ + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)a_1a_3 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)a_2a_3 + \\ + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}a_3a_4\end{aligned} \tag{B.8}$$

což je výsledný obecný výraz pro projekci gradientu projekce rychlosti toku hmoty ve směru záření.

Speciální případy odvozené z výrazu $\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v}$

Radiální rychlostní pole a radiální paprsky záření

V případě aproximace bodové hvězdy uvažujeme pouze radiální paprsky záření. Pro sféricky symetrický vítr tak pro jednotlivé úhly z obrázku platí

$$\Psi = \phi \quad \theta = \Lambda$$

a následně také pro koeficienty (B.5)

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = -\sin\theta \tag{B.9}$$

dosazením (B.9) do (B.8) dostáváme tak výsledný vztah

$$\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{B.10}$$

Radiální rychlostní pole a neradiální paprsky záření

V této aproximaci plyne pro jednotlivé úhly Ψ, ϕ a λ

$$\Psi = \phi \quad \lambda = \frac{\pi}{2}$$

opětovně pro koeficienty (B.5)

$$a_1 = \sin\theta \quad a_2 = \cos\theta \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 0 \tag{B.11}$$

a analogicky dosazením (B.11) do (B.8)

$$\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = \sin\theta^2\frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos\theta^2\frac{v_r}{r}. \tag{B.12}$$

Definujeme proměnnou μ

$$\mu = \cos\frac{\pi}{2} - \theta. \tag{B.13}$$

S pomocí proměnné (B.13) můžeme přepsat výraz (B.12) pro radiální tok a neradiální paprsky na konečný tvar

$$\boldsymbol{s}.\nabla\boldsymbol{s}.\boldsymbol{v} = \mu^2\frac{\partial v_r}{\partial r} + (1-\mu^2)\frac{v_r}{r}. \tag{B.14}$$

Dodatek C

Odvození výpočtu korekčního faktoru pro konečný disk hvězdy

Následující pasáž byla zpracována podle práce (Cranmer, 1996) pro volbu rovnoměrně jasného disku. Nejprve intenzitu kontinua od povrchu hvězdy v bodě r, θ, ϕ vyjádříme pomocí funkce okrajového ztemnění $D(\nu, r)$

$$\frac{L_*}{4\pi R_*} D(\mu, r), \tag{C.1}$$

pro vyjádření funkce okrajového ztěmnění využijeme aproximace rovnoměrně jasného disku. Na kolik tato volba poznamená výsledný výpočet je uvedeno v diskuzi na konci této kapitoly. Pro rovnoměrně jasný disk má funkce okrajového ztemnění tvar

$$D(\nu, r) \begin{cases} 0, & -1 \le \mu < \mu_* \\ \frac{1}{\pi} & \mu_* < \mu < 1, \end{cases} \tag{C.2}$$

kde konstanta $\frac{1}{\pi}$ byla vybrána tak, abychom dostali po úhlové integraci stejný tok jako v případě bodové aproximace

$$\frac{L_*}{4\pi r^2} = \frac{L_*}{4\Pi R_*^2} 2\pi \int_{\mu_*}^{1} D\mu \mathrm{d}\mu \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{\pi}.$$

Zářivá síla pro celý soubor spektrálních čar má tvar

$$g^c_{\mathrm{rad}} = \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\kappa_0 v_{th}}{c} \frac{1}{c} 2\pi \frac{L_*}{4\pi R_*^2} \frac{1}{(\rho v_{th})^\alpha} \int_{-1}^{1} D(\nu, r) \left[\mu^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + (1-\mu^2)\frac{v_r}{r}\right]^\alpha \mu \mathrm{d}\mu. \tag{C.3}$$

Poměr mezi touto zobecněnou zářivou silou pro neradiální paprsek a zářivou silou v aproximaci bodové hvězdy je dán

$$K = \frac{g^{\mathrm{KD}}_{\mathrm{rad}}}{g^{\mathrm{BA}}_{\mathrm{rad}}} = \frac{2\pi r^2}{R_*^2} \frac{\partial v_r}{\partial r}^\alpha \int_{-1}^{1} D(\mu, r) \left[\mu^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + (1-\mu^2)\frac{v_r}{r}\right]^\alpha \nu \mathrm{d}\nu, \tag{C.4}$$

pro další postup (C.4) použijeme výraz pro logaritmickou derivaci jako proměnnou

$$\sigma = \frac{\partial \ln v_r}{\partial \ln r} - 1 = \frac{r}{v_r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - 1. \tag{C.5}$$

Pomocí ní snadno upravíme výraz

$$\left[\mu^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + (1-\mu^2)\frac{v_r}{r}\right] = \frac{v_r}{r}\left[\mu^2 (\frac{r}{v_r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - 1) + 1\right] = \tag{C.6}$$

$$= \frac{v_r}{r}\frac{\partial v_r \partial r}{\partial v_r \partial r}\left[\mu^2 (\frac{r}{v_r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - 1) + 1\right] = \frac{(1+\sigma\mu^2)}{\sigma+1}\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{C.7}$$

takže pro (C.4)

$$K = \frac{2\pi}{1-{\mu_*}^2}\frac{1}{(\partial v_r \partial r)}^{\alpha} \int_{-1}^{1} D \left[\frac{(1+\sigma\mu^2)}{\sigma+1}\frac{\partial v_r}{\partial r}\right]^{\alpha} \mu \mathrm{d}\mu = \tag{C.8}$$

$$= \frac{1}{(\sigma+1)^{\alpha}}\frac{2\pi}{(1-{\mu_*}^2)}\frac{1}{\pi}\int_{\mu_*}^{1} (1+\sigma\mu^2)^{\alpha}\mu \mathrm{d}\mu. \tag{C.9}$$

Integrál ve výrazu (C.9) lze jednoduše spočítat pomocí substituce

$$\int_{\mu_*}^{1} (1+\sigma\mu^2)^{\alpha}\mu \mathrm{d}\mu = \left| \begin{array}{ll} t = (\mu^2\sigma + 1) & t_+ = 1+\sigma \\ \mathrm{d}t = 2\mu\sigma \mathrm{d}\mu & t_- = {\mu_*}^2\sigma + 1 \end{array} \right. \tag{C.10}$$

a následnou integrací dostáváme výsledný výraz pro korekční faktor zahrnující v sobě vliv konečného disku hvězdy

$$\frac{\pi}{(\sigma+1)^{\alpha}(1-{\mu_*}^2)}\frac{1}{\pi\sigma}\int_{t_-}^{t_+} t^{\alpha}\mathrm{d}t = \frac{(1+\sigma)^{\alpha+1} - (1+\sigma{\mu_*}^2)^{\alpha+1}}{\sigma(\sigma+1)^{\alpha}(1-{\mu_*}^2)(\alpha+1)}. \tag{C.11}$$

Dodatek D

VH-1

Kód VH-1 (Virginia Hydrodynamics) byl vyvinut na univerzitě ve Virginii skupinou astrofyziků v rámci práce (Blondin & Lufkin, 1993). Program je plně zdarma k dispozici ke stažení na adrese http://wonka.physics.ncsu.edu/pub/VH-1/. Je určen pro řešení Eulerových rovnic pro ideální plyn. Základní metodou pro řešení hydrodynamických rovnic je metoda PPM (Piecewise Parabolic Method), kterou vyvinuli Collela & Woodward (1984). Kód je psán v jazyce FORTRAN-77 a je tvořen několika procedurami v samostatných souborech, které jsou volány v hlavním těle programu. Je obecně vícedimenzionální, konkrétně je k dispozici verze pro 1D a 2D výpočty. Výstup programu je ukládán do formátu HDF - Hiearchical Data Format. Více podrobností o tomto formátu lze nalézt na adrese http://hdf.ncsa.uiuc.edu/.

V porovnání s metodou použitou v program **mflu.f**, je metoda PPM metodou druhého řádu. To znamená, že v porovnání s Van Leer metodou prvního řádu, je přesnější, což má určité výhody při simulaci (například rázových vln). Na stranu druhou, modifikace tohoto programu pro vícesložkové výpočty by byla mnohem složitější, než modifikace programu **flu.f**. Proto jsem zvolil jako výchozí kód pro tvorbu vícesložkového programu kód **flu.f**. Nicméně program jsem použil pro 2D simulaci Rayleighovy-Taylorovy nestability a Kelvinovy-Helmholtzovy nestability. Barevnou škálu, kterou jsem použil při simulacích, mi laskavě poskytnul Dr. J. Porter. Kód je v rámci astrofyzikální komunity často používán a spolu s programem ZEUS patří k nejčastěji používaným programům pro řešení hydrodynamických problémů v astrofyzice. Jako příklad použití kódu VH-1 pro simulaci hvězdného větru mohu uvést práci (Dessart & Owocki, 2003) popřípadě (Dessart & Owocki, 2005), kde byl program VH-1 použit pro modelování 2D zářivé nestability.

Já jsem program VH-1 použil pro simulaci Rayleighovy-Taylorovy nestability a Kelvinovy-Helmholtzovy nestability. Pro obě simulace jsem použil prostorovou síť 600x600 bodů s hodnotou Courantova čísla $c_{\mathrm{cfl}} = 0.5$. Doba výpočtu se u obou nestabilit pohybovala řádově kolem 6 hodin (pracovní stanice AMD XP 1800, 512 MB

DRAM, OS Linux, kernel 2.6.8). Veškeré výpočty jsou provedeny v bezrozměrných veličinách.

Pro simulaci Rayleighovy-Taylorovy nestability jsem použil model kontinua rozděleného na dvě vrstvy. Konkrétně jsem kontinuum rozdělil na horní vrstvu s bezrozměrnou hustotou $\rho_1 = 1.1$ a na spodní vrstvu s hustotou $\rho_2 = 0.8$. Polytropický index pro stavovou rovnici jsem zvolil $\gamma = 5/6$. Rychlost byla na počátku v celé výpočetní oblasti nulová. Gravitační zrychlení mělo konstatní velikostí $g = 0.5$ s vertikální orientaci, přičemž mířilo se shora dolů (viz obrázek 2.2). Na začátku jsem na hranici obou vrstev inicializoval drobnou sinusovou poruchu. Výsledek výpočtu je uveden na obrázku (2.5), animace je součástípřiloženého CD.

Pro simulaci Kelvinovy-Helmholtzovy nestability jsem opět použil model kontinua rozděleného na dvě vrstvy. Horní vrstva měla hustotu $\rho_1 = 0.9$ a vůči spodní vrstvě se pohybovala rychlostí -0.1. Spodní vrstva měla hustotu $\rho_2 = 1.1$ a byla v klidu (viz obrázek 2.3). Polytropický index pro stavovou rovnici jsem zvolil $\gamma = 5/6$ a nepůsobily zde žádné externí síly. Opět jsem na začátku inicializoval drobnou sinusovou poruchu. Výsledek výpočtu je uveden na obrázku (2.6), animace je součástí přiloženého CD.

Dodatek E

Seznam použitých veličin

A_i	$\cdots$	střední atomová váha iontů
A_p	$\cdots$	střední atomová váha plazmy
a	$\cdots$	rychlost zvuku v plynu
a_i	$\cdots$	rychlost zvuku absorbujících iontů
a_p	$\cdots$	rychlost zvuku pasivní plazmy
a_1, b_1, c_1	$\cdots$	parametry polynomu druhého řádu
c	$\cdots$	rychlost světla
e	$\cdots$	náboj elektronu
f_{ion}	$\cdots$	korekční faktor na konečný disk
f_{fin}	$\cdots$	korekční faktor pro ionizaci
$G(x)$	$\cdots$	Chandrasekharova funkce
G	$\cdots$	gravitační konstanta
$\boldsymbol{g}_*$	$\cdots$	vektor gravitačního zrychlení
g_{ef}	$\cdots$	efektivní gravitace
$\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}$	$\cdots$	vektor zářivého zrychlení
g_{rad}^K	$\cdots$	radiální složka zářivého zrychlení pro procesy v kontinuu
g_{rad}^C	$\cdots$	radiální složka zářivého zrychlení pro procesy v čarách
H	$\cdots$	entalpie plynu
I_ν	$\cdots$	monochromatická intenzita
k_{pi}	$\cdots$	koeficient dynamického tření
k_B	$\cdots$	Boltzmannova konstanta
L_*	$\cdots$	svítivost hvězdy
$L_\odot$	$\cdots$	svítivost Slunce
$\dot{M}$	$\cdots$	rychlost ztráty hmoty pro CAK řešení
$\dot{M}_{CAK}$	$\cdots$	rychlost ztráty hmoty
M_*	$\cdots$	hmotnost hvězdy
$M_\odot$	$\cdots$	hmotnost Slunce
m_H	$\cdots$	hmotnost atomu vodíku

N	$\cdots$	počet spektrálních čar
$\boldsymbol{n}$	$\cdots$	jednotkový vektor ve směru šíření záření
n	$\cdots$	číselná hustota částic v plynu
n_i	$\cdots$	číselná hustota absorbujících iontů
n_p	$\cdots$	číselná hustota pasivní plazmy
n_e	$\cdots$	číselná hustota elektronů v plynu
p	$\cdots$	tlak plynu
R_*	$\cdots$	poloměr hvězdy
$R_\odot$	$\cdots$	poloměr Slunce
r	$\cdots$	vzdálenost od hvězdy
r_c	$\cdots$	vzdálenost kritického bodu od hvězdy
T_{eff}	$\cdots$	efektivní teplota
U	$\cdots$	vnitřní energie plynu
$\boldsymbol{v}$	$\cdots$	vektor rychlosti
v_{th}	$\cdots$	tepelná rychlost iontů
$v_{\text{th,p}}$	$\cdots$	tepelná rychlost protonů
v_x	$\cdots$	x-ová složka rychlosti
v_y	$\cdots$	y-ová složka rychlosti
v_z	$\cdots$	z-ová složka rychlosti
v_r	$\cdots$	radiální složka rychlosti
$v_{r,0}$	$\cdots$	radiální neporušená složka rychlosti
$v_{r,p}$	$\cdots$	radiální složka rychlosti pro pasivní plazmy
$v_{r,i}$	$\cdots$	radiální složka rychlosti pro ionty
v_θ	$\cdots$	úhlová složka rychlosti pro souřadnici θ
$v_{\theta,i}$	$\cdots$	úhlová složka rychlosti absorbujících iontů pro souřadnici θ
$v_{\theta,p}$	$\cdots$	úhlová složka rychlosti pasivní plazmy pro souřadnici θ
v_ϕ	$\cdots$	úhlová složka rychlosti pro souřadnici ϕ
Z_i	$\cdots$	náboj absorbujících iontů v jednotkách elektronu
Z_p	$\cdots$	náboj pasivní plazmy v jednotkách elektronu
Z	$\cdots$	hmotnostní zastoupení těžkých prvků
X	$\cdots$	hmotnostní zastoupení vodíku
x_{pi}	$\cdots$	relativní driftová rychlost iontů (6.10)
Y	$\cdots$	hmotnostní zastoupení hélia
W	$\cdots$	geometrický dilutační faktor
α, k, δ	$\cdots$	CAK konstanty
$\Gamma(x)$	$\cdots$	Gamma funkce
Γ_e	$\cdots$	Eddingtonův faktor
$\Delta\nu$	$\cdots$	dopplerovská šířka
$\delta(x)$	$\cdots$	Diracova delta funkce
δv_x	$\cdots$	perturbace x-ové složky rychlosti
δv_y	$\cdots$	perturbace y-ové složky rychlosti

δv_z	$\cdots$	perturbace z-ové složky rychlosti
δv_r	$\cdots$	perturbace rychlosti
$\delta\rho$	$\cdots$	perturbace hustoty
η	$\cdots$	škálovací faktor
κ_e^{ref}	$\cdots$	referenční hodnota opacity pro Thomsonův rozptyl
κ_ν	$\cdots$	monochromatický hmotnostní extinkční koeficient
κ_e	$\cdots$	opacita pro Thomsonův rozptyl
$\ln\Lambda$	$\cdots$	Coulombův logaritmus
μ	$\cdots$	směrový kosinůs
μ_m	$\cdots$	střední molekulová hmotnost v plynu
ν	$\cdots$	frekvence záření
ν_0	$\cdots$	frekvence středu spektrální čáry
$\Phi(x)$	$\cdots$	Error funkce
$\phi(x)$	$\cdots$	funkce profilu čáry
ρ	$\cdots$	hustota plynu
σ_ν	$\cdots$	učinný průřez
σ_e	$\cdots$	učinný průřez pro Thomsonův rozptyl
χ_ν	$\cdots$	monochromatický extinkční koeficient

Literatura

Abbott, D. The theory of radiatively driven stellar winds. I. A physical interpretation. *The Astrophysical Journal 242* (1980), p. 1183.

Abbott, D. C. The theory of radiatively driven stellar winds. II. The line acceleration. *The Astrophysical Journal 259* (1982a), p. 282.

Abbott, D. C. The return fo mass and energy to the interstellar medium by winds from early-type stars. *The Astrophysical Journal 263* (1982b), p. 723.

Arav, N. & Li, Z. The role of radiative acceleration in outflows from broad absorption line QSOs. I. Comparison with O star winds. *The Astrophysical Journal 427* (1994), p. 700.

Arav, N., Li, Z. & Begelman, M. Radiative acceleration in outflows from broad absorption line quasi-stellar objects. II. Wind models. *The Astrophysical Journal 432* (1994), p. 62.

Bartsch, H.-J. *Matematické vzorce.* SNTL Praha, 1963.

Birk, G. & Otto, A. A three-dimensional plasma-neutral gas-fluid code. *Journal of Computational Physics 125* (1996), p. 513.

Birkinshaw, M. The Kelvin-Helmholtz instability for relativistic particle beams. II. - Flow bounded by a simple shear layer. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 252* (1991), p. 505.

Bjorkman, J. & Cassinelli, J. Equatorial disk formation around rotating stars due to ram pressure confinement by the stellar wind. *The Astrophysical Journal 409* (1993), p. 429.

Blondin, J. & Lufkin, E. The piecewise-parabolic method in curvilinear coordinates. *Astrophysical Journal Supplement Series 88* (1993), p. 589.

Carlberg, R. The instability of radiation-driven stellar winds. *The Astrophysical Journal 241* (1980), p. 1131.

CASTOR, J. I. On the force associated with absorption of spectral line radiation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 169* (1974), p. 279.

CASTOR, J. I., ABBOTT, D. C. & KLEIN, R. I. Radiation-driven winds in Of stars. *The Astrophysical Journal 195* (1975), p. 157.

CASTOR, J. I., ABBOTT, D. C. & KLEIN, R. I. Radiation-driven stellar winds. In *Physique des Mouvements dans les Atmosphéres Stellaires*, R. Cayrel & M. Steinberg, Eds., vol. 250. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, 1976.

CHANDRASEKHAR, S. *Principles of Stellar Dynamics.* University of Chicago Press, 1943.

CHANDRASEKHAR, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.* Dover Publications, 1981.

COLLELA, P. & WOODWARD, P. The piecewise parabolic method (ppm) for gas-dynamical simulations. *Journal of Computational Physics 54* (1984), p. 174.

COURANT, R. & HILBERT, D. *Mathematical Methods for Physics*, vol. 2. Springer-Verlag, 1967.

CRANMER, S. *Dynamical Models of Winds from Rotating Hot Stars.* PhD thesis, University of Delaware, August 1996.

DESSART, L. & OWOCKI, S. Two-dimensional simulations of the line-driven instability in hot-star winds. *Astronomy & Astrophysics 406* (2003), p. L1.

DESSART, L. & OWOCKI, S. 2d simulations of the line-driven instability in hot-star winds. II. Approximations for the 2d radiation force. *Astronomy & Astrophysics 437* (2005), p. 657.

DWARKADAS, V., BALL, L., CASWELL, J., GREEN, A., JOHNSTON, S., SCHMIDT, B. & WARDLE, M. Supernova remnants, pulsars and the interstellar medium. *Publication Astronomical Society Australia 17* (2000), p. 83.

FELDMEIER, A. Time-dependent structure and energy transfer in hot star winds. *Astronomy & Astrophysics 299* (1995), p. 523.

FELDMEIER, A. http://auriga.astro.physik.uni-potsdam.de/ afeld/lectures.html, 2003.

Feldmeier, A. & Shlosman, I. Dynamics of line-driven winds from disks in cataclysmic variables. I. Solution topology and wind geometry. *The Astrophysical Journal 526* (1999), p. 344.

Feldmeier, A. & Shlosman, I. Runaway of line-driven winds toward critical and overloaded solutions. *The Astrophysical Journal 532* (2000), p. L125.

Feldmeier, A. & Shlosman, I. Abbott wave-triggered runaway in line-driven winds from stars and accretion disks. *The Astrophysical Journal 564* (2002), p. 385.

Feldmeier, A., Shlosman, I. & Vitello, P. Dynamics of line-driven winds from disks in cataclysmic variables. II. Mass-loss rates and velocity laws. *The Astrophysical Journal 526* (1999), p. 357.

Friend, D. B. & Castor, J. I. Stellar winds driven by multiline scattering. *The Astrophysical Journal 272* (1983), p. 259.

Friend, D. B. & MacGregor, K. Winds from rotating, magnetic, hot stars. I. - General model results. *The Astrophysical Journal 282* (1984), p. 591.

Gayley, G. An improved line-strength parametrization in hot-star winds. *The Astrophysical Journal 454* (1995), p. 410.

Gayley, G. & Owocki, S. P. Acceleration efficiency in a line-driven wind. *The Astrophysical Journal 434* (1994), p. 684.

Hirsch, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows.* John Wiley and Sons, 2002.

Koninx, J.-P. *Aspects of Stellar Wind Theory.* PhD thesis, University Utrecht, 1992.

Krtička, J. & Kubát, J. Isothermal two-component stellar winds of hot stars. *Astronomy & Astrophysics 359* (2000), p. 983.

Krtička, J. & Kubát, J. Multicomponent radiatively driven stellar winds. I. Nonisothermal three-component stellar winds of hot stars. *Astronomy & Astrophysics 369* (2001a), p. 222.

Krtička, J. & Kubát, J. Multicomponent radiatively driven stellar winds. II. Gayley-Owocki heating in multitemperature winds of OB stars. *Astronomy & Astrophysics 377* (2001b), p. 175.

KRTIČKA, J. & KUBÁT, J. Multicomponent radiatively driven stellar winds: III. Radiative-acoustic waves in a two-component wind. *Astronomy & Astrophysics 388* (2002), p. 531.

KUBÁT, J., 2005. Osobní konzultace.

KUDRITZKI, R., PAULDRACH, A., PULS, J. & ABBOTT, D. Radiation-driven winds of hot stars. VI. - Analytical solutions for wind models including the finite cone angle effect. *Astronomy & Astrophysics 219* (1989), p. 205.

LAMERS, H. & CASSINELI, J. P. *Introduction to stellar winds.* Cambridge University Press, UK, 1999.

LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. *Course of Theoretical Physics: Fluid Mechanics.* Pergamon Press, UK, 1987.

LUCY, L. Wave amplification in line-driven winds. *The Astrophysical Journal 284* (1984), p. 351.

LUCY, L. & SOLOMON, P. Mass loss by hot stars. *The Astrophysical Journal 150* (1970), p. 879.

MACGREGOR, K. B., HARTMANN, L. & RAYMOND, J. Radiative amplification of sound waves in the winds of O and B stars. *The Astrophysical Journal 231* (1979), p. 514.

MIHALAS, D. *Stellar atmospheres, 2nd ed.* W. H. Freeman and Co,San Francisco, 1978.

MILNE, E. On the possibility of the emission of high-speed atoms from the sun and stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 86* (1926), p. 459.

NELSON, G. D. & HEARN, A. A line driven Rayleigh-Taylor-type instability in hot stars. *Astronomy & Astrophysics 65* (1978), p. 223.

OWOCKI, S. P. Stellar wind mechanisms and instabilities. In *Evolution of Massive Stars, Mass Loss and Winds* (2004), M. Heydari-Malayeri, P. Stee, & J.-P. Zahn, Eds., vol. 13, p. 163.

OWOCKI, S. P. & PULS, J. Nonlocal escape-integral approximations for the line force in structured line-driven stellar winds. *The Astrophysical Journal 462* (1996), p. 894.

OWOCKI, S. P. & PULS, J. Ion runaway instability in low-density, line-driven stellar winds. *The Astrophysical Journal 568* (2002), p. 965.

Owocki, S. P. & Rybicki, G. B. Instabilities in line-driven stellar winds. I. Dependence on perturbation wavelength. *The Astrophysical Journal 284* (1984), p. 337.

Owocki, S. P. & Rybicki, G. B. Instabilities in line-driven stellar winds. II. Effect of scattering. *The Astrophysical Journal 299* (1985), p. 265.

Owocki, S. P., Castor, J. I. & Rybicki, G. B. Time-dependent models of radiatively driven stellar winds. I. Nonlinear evolution of instabilities for a pure absorption model. *The Astrophysical Journal 335* (1988), p. 914.

Pauldrach, A., Puls, J. & Kudritzki, R.-P. Radiation-driven winds of hot luminous stars. improvements of the theory and first results. *Astronomy & Astrophysics 164* (1986), p. 86.

Poe, C. & Friend, D. A rotating, magnetic, radiation-driven wind model applied to Be stars. *The Astrophysical Journal 311* (1986), p. 317.

Porter, J. M. & Drew, J. Decoupled line driven outflow around B and Be stars. *Astronomy & Astrophysics 296* (1995), p. 761.

Porter, J. M. & Skouza, B. On the decoupling and reaccretion of low density, line-driven winds. *Astronomy & Astrophysics 344* (1999), p. 205.

Prinja, R. & Howarth, I. Narrow absorption components and variability in ultraviolet P Cygni profiles of early-type stars. *The Astrophysical Journal Supplement Series 61* (1986), p. 357.

Puls, J., Springmann, U. & Lennon, M. Radiation driven winds of hot luminous stars. XIV. Line statistics and radiative driving. *Astronomy & Astrophysics Supplement 141* (2000), p. 23.

Rayleigh, L. Investigations of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variale density. *Proceedings of London Mathematical Society 14* (1883), p. 170.

Sobolev, V. The diffusion of l-radiation in nebular and stellar envelopes. *Soviet Astronomy 1* (1957), p. 678.

Spitzer, L. *Physics of fully ionized gases.* New York Interscience, 1956.

Springmann, U. & Pauldrach, A. Radiation-driven winds of hot luminous stars: XI. Frictional heating in a multicomponent stellar wind plasma and decoupling of radiatively accelerated ions. *Astronomy & Astrophysics 262* (1992), p. 515.

Taylor, G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proceedings of Royal Astronomical Society 201* (1950), p. 192.

Van Leer, B. Flux vector splitting for the euler equations. In *Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics* (1982), E. Krause, Ed., Springer Verlag Berlin, p. 507.

von Neumann, J. & Richtmyer, R. A method for numerical calculations of hydrodynamics shock. *Journal of Applied Physics 21* (1950), p. 232.

Wilson, I. & Dopita, M. An empirical investiagtion of mass-loss in OB stars. *Astronomy & Astrophysics 149* (1985), p. 295.