

Kinetický popis plazmatu

Fázový prostor

Konfigurační prostor (polohové vektory částic):

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z$$

Rychlostní prostor:

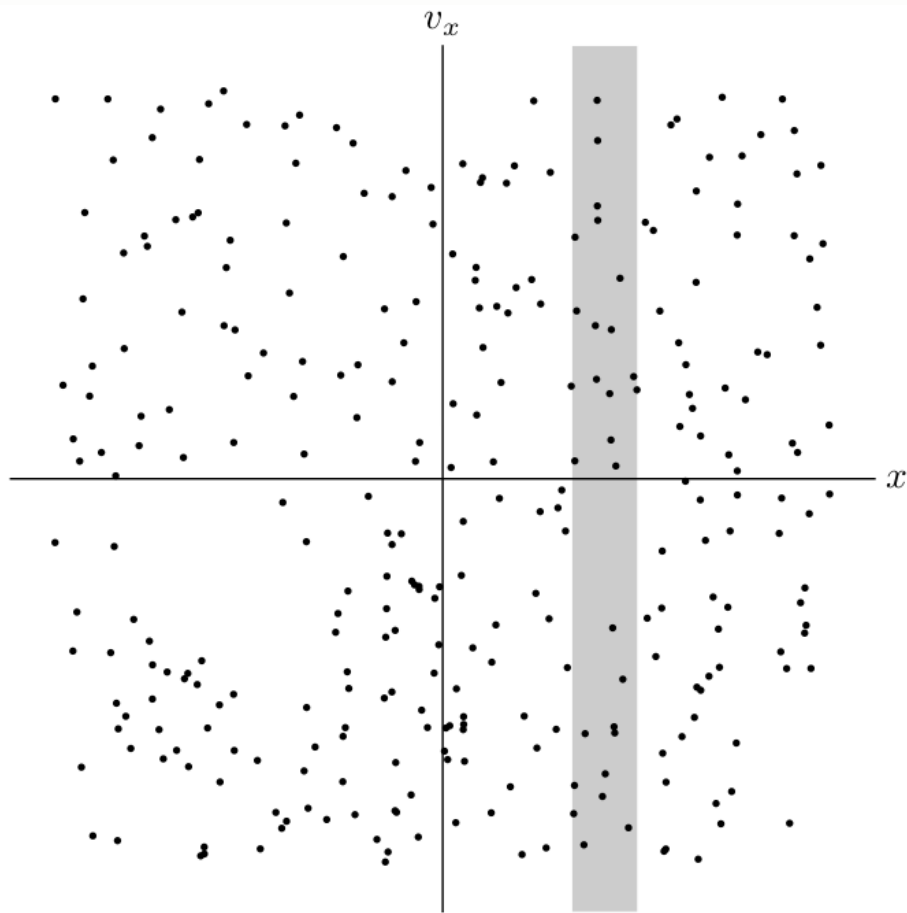
$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}v_x + \hat{\mathbf{y}}v_y + \hat{\mathbf{z}}v_z$$

- $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ jsou ve fázovém prostoru **nezávislé proměnné!**

- ve fázovém prostoru je tedy částice popsána 6 souřadnicemi:

$$\{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$$

- rozdělovací funkce $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ reprezentuje *hustotu pravděpodobnosti* ve fázovém prostoru.



Rozdělovací funkce $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

Pravděpodobný počet částic, který nalezneme v čase t v objemovém elementu $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r}$ s tím že tyto částice budou mít rychlost v rozmezí $d\mathbf{v}$ kolem $\mathbf{v}$ je

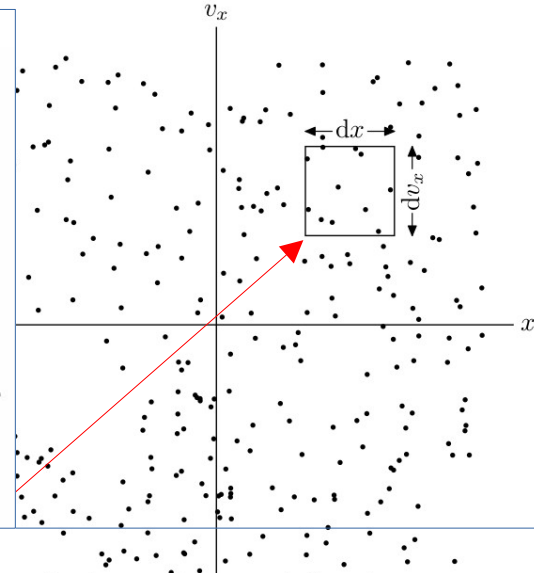
$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$$

- $d\mathbf{r}$ musí být malé ve srovnání s prostorovou škálou na které se mění f . Ale $d\mathbf{r}$ musí být dostatečně velké aby v něm bylo dostatečné množství částic (statistika).

$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ musí být:

- konečná
- kladná
- pro $v \rightarrow \infty$ se musí dostatečně rychle blížit k nule

- *Nehomogenní plazma*: fyzikální vlastnosti plazmatu závisí na poloze, $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ je explicitní funkcí $\mathbf{r}$.
- *Homogenní plazma*: $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ není explicitní funkcí $\mathbf{r}$
- *Isotropní plazma*: $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow f(\mathbf{r}, v, t)$, závisí jen na velikosti rychlosti v , ne na $\mathbf{v}$.
- *Neizotropní plazma*: $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ závisí na orientaci $\mathbf{v}$.



Zintegrujeme-li $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ přes všechny rychlosti, najdeme celkový počet částic v objemovém elementu $d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r} = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv_x dv_y dv_z d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Markoskopické parametry

Střední hodnota fyzikální veličiny:

$$g_{\text{av}}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

Hustota částic (koncentrace): $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 1$

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

- f je normovaná na koncentraci.

Střední rychlost: $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

- tři skalární rovnice pro tři komponenty, i -tá komponenta:

$$\langle v_i \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int v_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

Střední hybnost: $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$

$$\mathbf{p}_{\text{av}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int m\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

- tři skalární rovnice pro tři komponenty

Střední energie: $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2}mv^2$

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \frac{1}{2}mv^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

(N-tý) moment distribuční funkce:

$$M_{ij\dots k}^N(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{v}} v_i v_j \dots v_k f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

Pravidla:

$$\langle k \cdot a(\mathbf{v}) \rangle = k \cdot \langle a(\mathbf{v}) \rangle$$

$$\langle a(\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}) \rangle = \langle a(\mathbf{v}) \rangle + \langle b(\mathbf{v}) \rangle$$

$$\langle \langle a(\mathbf{v}) \rangle \rangle = \langle a(\mathbf{v}) \rangle$$

$$\langle \phi \varphi \rangle \neq \langle \phi \rangle \langle \varphi \rangle$$

Časový vývoj rozdělovací funkce (eulerovský přístup)

Za dobu dt :

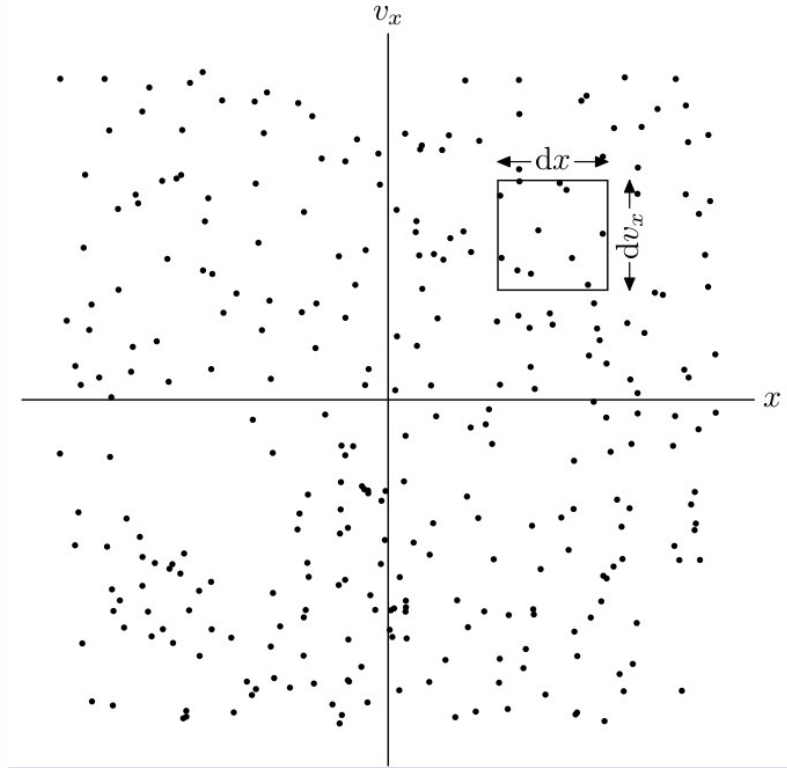
- $f(x, v_x, t) dx a_x(x, v_x, t) dt$ částic vteče do $dx dv_x$ ze spodu,
- $f(x, v_x + dv_x, t) dx a_x(x, v_x + dv_x, t) dt$ vyteče ven z $dx dv_x$ vrchem.
- $f(x, v_x, t) dv_x v_x dt$ vteče do $dx dv_x$ z leva,
- $f(x + dx, v_x, t) dv_x v_x dt$ vyteče z $dx dv_x$ přes pravou stranu,

změna počtu částiv v objemovém elementu:

$$f(x, v_x, t + dt) dx dv_x - f(x, v_x, t) dx dv_x = \\ [f(x, v_x, t) a_x(x, v_x, t) - f(x, v_x + dv_x, t) a_x(x, v_x + dv_x, t)] dx dt \\ + [f(x, v_x, t) v_x - f(x + dx, v_x, t) v_x] dv_x dt.$$

Podělením $dx dv_x dt$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(v_x f)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x f)}{\partial v_x}.$$



$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} f) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a} f) = 0.$$

Ve 3D

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}} \partial / \partial x + \hat{\mathbf{y}} \partial / \partial y + \hat{\mathbf{z}} \partial / \partial z$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} \equiv \hat{\mathbf{x}} \partial / \partial v_x + \hat{\mathbf{y}} \partial / \partial v_y + \hat{\mathbf{z}} \partial / \partial v_z.$$

Časový vývoj rozdělovací funkce....(Eulerovský přístup)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}f) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f) = 0.$$

Zrychlení částic o hmotnosti m je dáno Lorentzovou silou

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

protože $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = v_j B_k - v_k B_j$ nezávisí na v_i , členy

$$\frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i}{\partial v_i} \equiv 0$$

proto platí také

$$\mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f) = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f).$$

Protože $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ jsou ve fázovém prostoru nezávislé

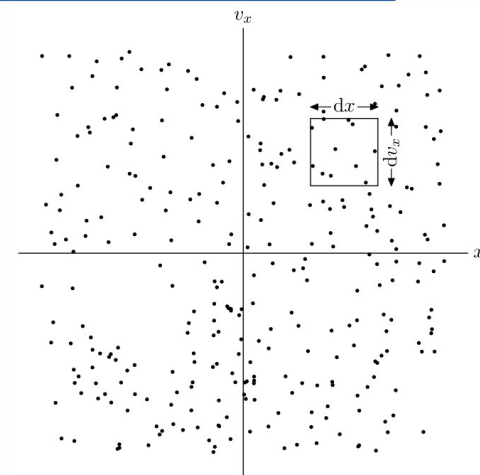
$$\mathbf{v} \cdot \nabla(f) = \nabla \cdot (\mathbf{v}f)$$

Boltzmannova kinetická rovnice:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0$$

Forma rovnice kontinuity ve fázovém prostoru.

I(interpretace jednotlivých členů....)



Lagrangeovský přístup o odvození BKR

Počet částic (typu α) v objemovém elementu fázového prostoru $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ je

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$$

Budeme uvažovat malou změnu za dt polohy a rychlosti částic

$$\mathbf{r}'(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) dt$$

$$\mathbf{v}'(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t) dt$$

Za předpokladu absence interakcí (srážek) je

$$\# \text{částic v } t = \# \text{částic v } t + dt$$

Sledujeme stejné částice, jejich počet se tedy zachová

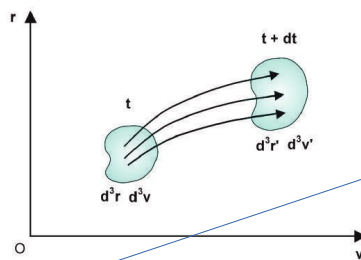
$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + dt) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'$$

ale element objemu se trochu změní

$$d\mathbf{r} d\mathbf{v} \longrightarrow d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'$$

Sledujeme trajektorie částic kdy se nečárkované $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ mění na čárkované

$$(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \longrightarrow (\mathbf{r}', \mathbf{v}')$$



Izochorická transformace (zachovává objem):

$$d\mathbf{r} d\mathbf{v} = |J| d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \quad \text{kde} \quad |J| = 1$$

$$|f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)| d\mathbf{r} d\mathbf{v} = 0$$

Taylorův rozvoj:

$$J = \begin{pmatrix} \partial x' / \partial x & \partial y' / \partial x & \cdots & \partial v'_z / \partial x \\ \partial x' / \partial y & \partial y' / \partial y & \cdots & \partial v'_z / \partial y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial x' / \partial v_z & \partial y' / \partial v_z & \cdots & \partial v'_z / \partial v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v} + \mathbf{a} dt, t + dt) &= f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + a_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + a_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + a_z \frac{\partial f}{\partial v_z} \right] dt + \text{h.o.t} \end{aligned}$$

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{v} \cdot \nabla f,$$

$$a_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + a_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + a_z \frac{\partial f}{\partial v_z} = \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0$$

Self-konzistentní popis

Dynamika mnohačasticového systému, ve kterém jsou kolektivní interakce (střední pole) vlivem dalekodosahových sil dominantní

(zanedbávají se binární srážky).

Vlasov-Maxwell

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{1}{m} [\mathbf{F}_{\text{ext}} + q(\mathbf{E}_i + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_i)] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B}_i = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t} \right)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

Vlasov-Poisson

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_{\alpha} \mathbf{E}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0.$$

α .. částice různého typu

Boltzmannův srážkový člen

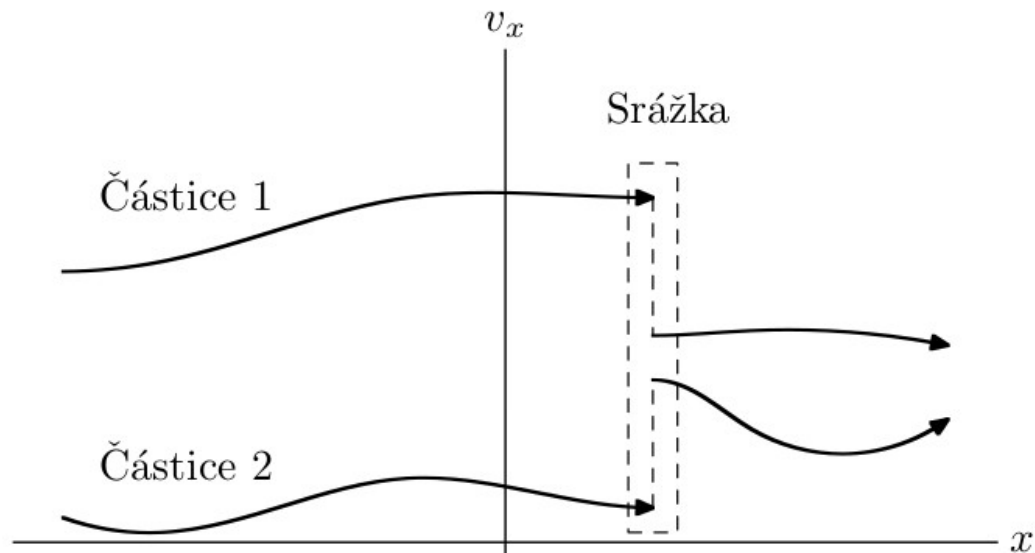
Částice může `náhle` změnit rychlost díky srážce s jinou částicí (binární srážka). O srážce se předpokládá, že se odehraje na velice krátkém časovém měřítku: doba vzájemné interakce částic je krátká ve srovnání s časem na kterém se mění f , srážky lze považovat za událost, která mění rychlost částic okamžitě.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left[\frac{\delta f}{\delta t} \right]_{\text{coll}}$$

Srážkový člen pro změnu rozdělovací funkce částic typu α v důsledku srážek s částicemi typu β má tvar:

$$\left[\frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} \right]_{\text{coll}} = \sum_{\beta} \int \int (f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) f_{\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1', t) - f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_{\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)) d\mathbf{v}_1 g \sigma(\Omega) d\Omega$$

kde g je vzájemná rychlost částic, σ je účinný srážkový průřez. Integrace probíhá přes rychlostní prostor částic typu β a rozptyly do všech možných úhlů.



Boltzmannova rovnice je **integro-diferenciální rovnicí**, ve které jsou integrály a parciální derivace hledané distribuční funkce.

Pro ionizovaný plyn s elektrony, ionty a jedním typem nutrálů máme tři Boltzmannovy rovnice které jsou vzájemně provázané přes srážkové členy.

Krookův srážkový operátor (Relaxační model srážkového členu)

Vliv srážek v BKR je možné uvážit pomocí *relaxačního modelu*. Model předpokládá, že srážky rozdělovací funkci (systém) vrací do rovnováhy. Rozdělovací funkce charakterizující rovnováhu nechť je $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, tato rozdělovací funkce se nemění v čase.

Rozdělovací funkce $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ se bude přibližovat funkci $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ s charakteristickým relaxačním časem $\tau = \nu^{-1}$, spjatým s relaxační srážkovou frekvencí ν .

$$\left[\frac{\delta f}{\delta t} \right]_{\text{coll}} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

- je-li $f = f_0$ pak $\left[\frac{\delta f}{\delta t} \right]_{\text{coll}} = 0$.

Srážky tedy nemění rozdělovací funkci která je v rovnováze.

Uvažme BKR bez prostorových gradientů a bez působení vnějších sil:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{f - f_0}{\tau} \implies \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{\tau} = \frac{f_0}{\tau}$$

$$f(\mathbf{v}, t) = f_0 + [f(\mathbf{v}, 0) - f_0] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- Rozdíl mezi $f(\mathbf{v}, t)$ a f_0 exponenciálně klesá s charakteristickým časem τ daným relaxační srážkovou frekvencí.
- Krookův srážkový člen je jednoduchý ale užitečný model srážkového členu v BKR. Je použitelný např. ve slabě ionizovaném plazmatu, kde jsou dominantní srážky mezi elektrony a neutrály.
- v Krookově srážkovém členu mají všechny procesy stejný relaxační čas. Ve skutečnosti tomu tak nebude, různé veličiny charakterizující částice (hybnost, energie, . . .) relaxují různě rychle, např. energie částice ϵ relaxuje mnohem pomaleji než její hybnost $\mathbf{p}$:

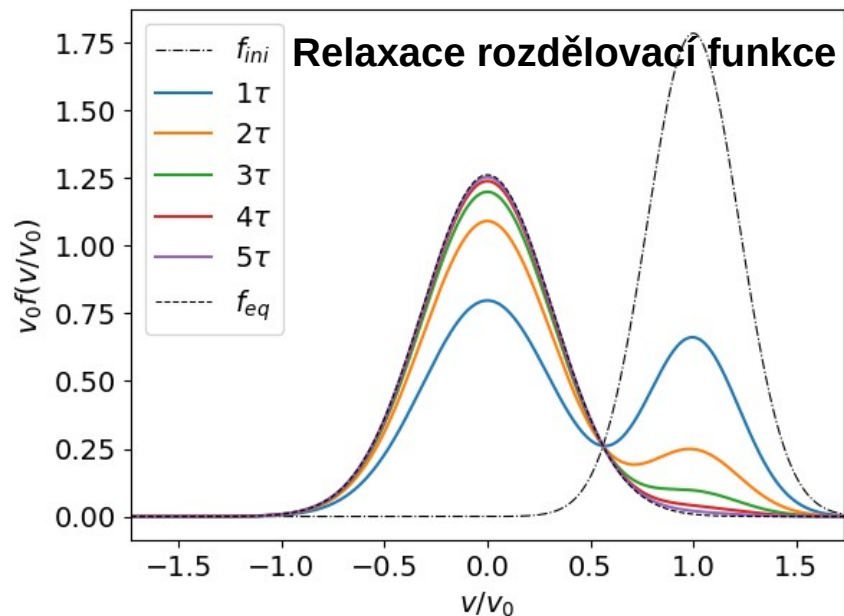
$$\tau_\epsilon > \tau_{\mathbf{p}}.$$

Krookův srážkový člen je tedy aproximací srážkových procesů v BKR. a 0

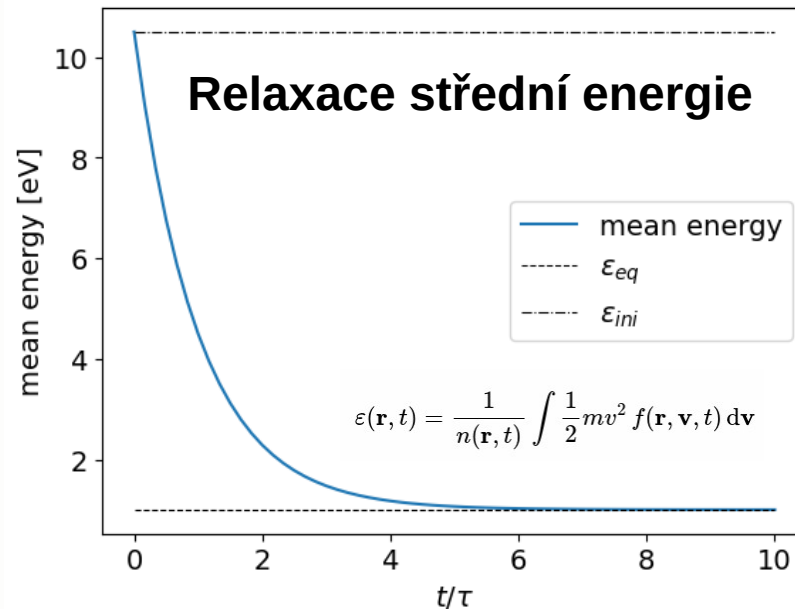
Příklad: Relaxace jednorozměrné rozdělovací funkce tvaru

$$v_0 f(v/v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma/v_0)} \exp\left(-\frac{(v/v_0 - w)^2}{2(\sigma/v_0)^2}\right)$$

- z počátečního stavu f_{ini} při $w = 1$ a $(v_0/\sigma)^2 = 20$.
- do rovnovážného stavu daného rozdělovací funkcí f_{eq} při $w = 0$ a $(v_0/\sigma)^2 = 10$.



Rozdělovací funkce vlivem Krookova srážkového členu zrelaxuje do rovnovážného rozdělení za dobu, která odpovídá několika násobku charakteristického relaxačního času τ .



Rovnovážné rozdělení

Každý plyn, i plazma, nechaný bez působení vnějších sil po dostatečně dlouhou dobu, získá homogenní a izotropní rozdělovací funkci. Funkční závislost rovnovážného rozdělení je:

$$f = C \exp(-a(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2),$$

kde C , $\mathbf{v}_0$ a a jsou konstanty.

Podmínky pro takového rozdělení jsou

- homogenní

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = 0$$

- nepůsobí vnější síly

$$\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0$$

- stacionární

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Boltzmannova rovnice je tedy ve tvaru:

$$0 + 0 + 0 = \left[\frac{\delta f}{\delta t} \right]_{\text{coll}}.$$

Vlivem srážek se tedy rozdělovací funkce nemění. To je vlastnost rovnovážného stavu. Ke srážkám dochází, díky srážkám se systém dostal do rovnováhy, ale v každém elementu fázového prostoru je počet částic, které daný element opustí přesně vykompenzovaný stejným počtem částic, které do něj zase vlivem srážek přijdou z jiné oblasti fázového prostoru.

Konstanty C , $\mathbf{v}$, a a je nutné stanovit na základě **normalizace**, znalosti **driftové rychlosti** a spojením s **termodynamikou**.

Koncentrace částic, substitucí $\xi_i = v_i - v_{0i}$:

$$n = \iiint_{-\infty}^{\infty} C \exp(-a(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)) d\xi_x d\xi_y d\xi_z$$

$$C = n \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2}$$

Driftová rychlost je

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0.$$

Rychlost částic je možné rozložit na náhodnou rychlost $\mathbf{c}$ a driftovou rychlost $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$$

$$\frac{3}{2}nkT = \left\langle \frac{1}{2}nmc^2 \right\rangle = \frac{1}{2}nm \langle c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 \rangle = \frac{1}{2}nm (\langle c_x^2 \rangle + \langle c_y^2 \rangle + \langle c_z^2 \rangle)$$

Protože $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ a $d\mathbf{v} = d\mathbf{c}$, pak

$$\langle c_x^2 \rangle = \frac{1}{n} \iiint_{-\infty}^{\infty} c_x^2 n \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-ac_x^2) d\mathbf{c}$$

$$\left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} c_x^2 \exp(-ac_x^2) dc_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ac_y^2) dc_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ac_z^2) dc_z.$$

Normalizované rovnovážné **Maxwell-Boltzmannovo** rozdělení pak je:

$$f_{\text{MB}}(c) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mc^2}{2kT} \right)$$

Jestliže systém nemá translační pohyb (můžeme se transformovat do inerciální soustavy ve které to tak je), tak je driftová rychlost nulová, pak

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}.$$

Rovnovážné rozdělení závisí jen na velikosti náhodné rychlosti $\mathbf{c}$, ne na jejím směru.

Proto, vnoříme-li do plynu dokonale odrazující plochu, tak se $f_{\text{MB}}(c)$ nezmění, protože odrazem od takové stěny se změní jen směr $\mathbf{c}$ ne jeho velikost.

V plazmatu, kde jsou elektrony, ionty a neutrály, které mají všechny stejnou teplotu, jsou jejich náhodné rychlosti popsány MB rozdělením pro každý druh částic zavlášť s odpovídající koncentrací.

Může se hodit:

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \text{ pro } a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} \exp(-ax^2) dx = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^{(2n+1)/2}}, \text{ pro } n = 1, 2, \dots, a > 0.$$

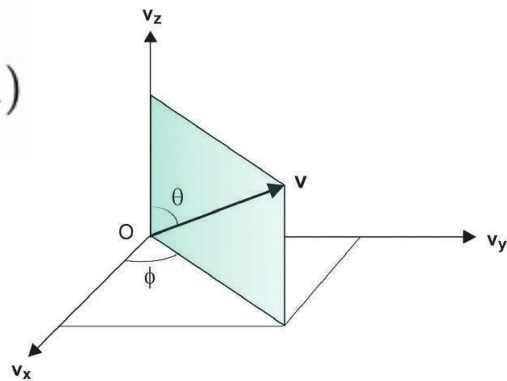
$$n!! = n(n-2)(n-4) \dots$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} \exp(-ax^2) dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}, \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots, a > 0.$$

$$f_{\text{MB}}(c) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mc^2}{2kT} \right) \quad (1)$$

Rovnovážné rozdělení pro velikost rychlosti

Integrujeme (1) přes všechny směry rychlostí a necháme velikost rychlosti v jako parameter. Abychom to mohli udělat, přejdeme v rychlostním prostoru do sférických souřadnic

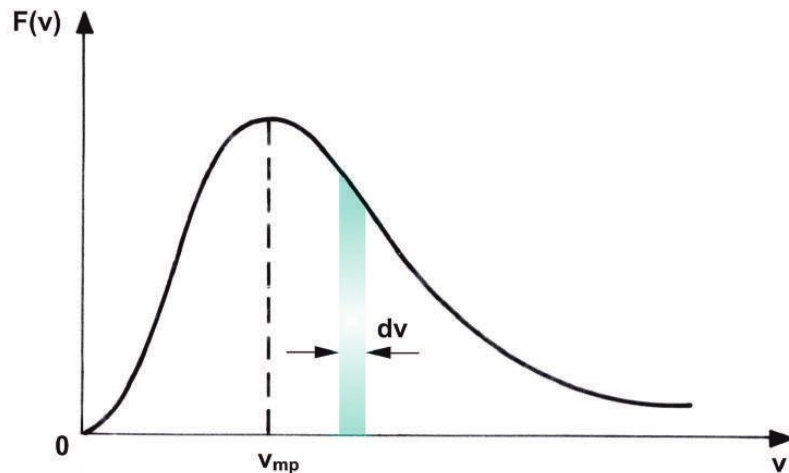


$$d\mathbf{v} = v^2 \sin \theta d\theta d\phi dv,$$

$$F(v) dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f_{\text{MB}}(v) v^2 \sin \theta d\theta d\phi dv$$

$$F(v) dv = 4\pi v^2 f_{\text{MB}} dv = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv$$

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = n.$$



Rovnovážné rozdělení jedné složky rychlosti

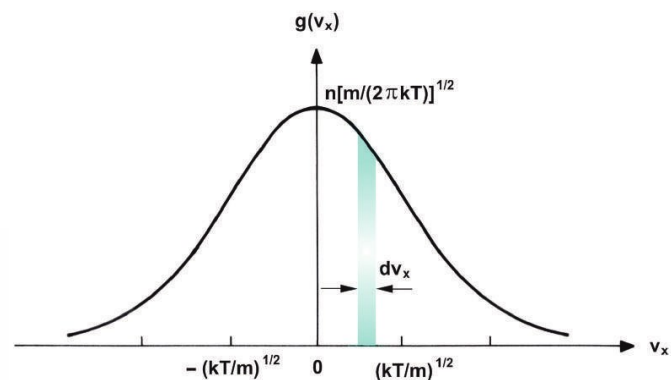
$$f_{\text{MB}}(c) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mc^2}{2kT} \right) \quad (1)$$

Gaussovské rozdělení:

$$g(v_x) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\text{MB}} dv_y dv_z =$$

$$= n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{mv_y^2}{2kT} \right) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{mv_z^2}{2kT} \right) dv_z$$

$$= n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right).$$



Složky rychlosti se chovají jako statisticky nezávislé veličiny. Protože platí $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, pravděpodobnost že částice bude mít rychlost v rozmezí $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ bude rovna součinu pravděpodobností, že jednotlivé komponenty leží v rozmezí v_i a $v_i + dv_i$, pro $i \in \{x, y, z\}$:

$$\frac{f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{n} = \frac{g(v_x) dv_x}{n} \cdot \frac{g(v_y) dv_y}{n} \cdot \frac{g(v_z) dv_z}{n}.$$

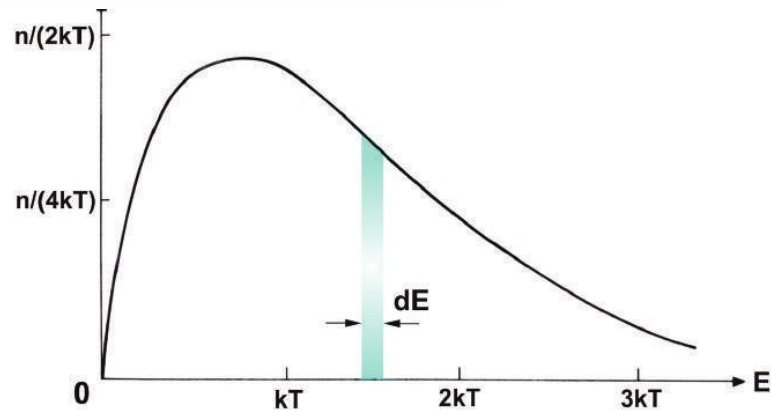
Rozdělení energií

Rozdělení $G(E)$ pro termální kinetickou energii $E = mv^2/2$ je definováno tak že $G(E) dE$ je počet částic v jednotce objemu, který má energii v rozmezí E a $E + dE$. Dostaneme to z rozdělení pro velikost rychlosti dosazením

$$v = (2E/m)^{1/2} \quad \text{a} \quad dv = dE/(2mE)^{1/2},$$

pak po úpravě

$$G(E) dE = \frac{2nE^{1/2}}{\pi^{1/2}(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE.$$



Střední hodnoty a charakteristiky Maxwell-Boltzmannova rozdělení

- Střední hodnota vektoru rychlosti:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{n}{n} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \iiint_{-\infty}^{\infty} (\hat{\mathbf{x}}v_x + \hat{\mathbf{y}}v_y + \hat{\mathbf{z}}v_z) \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv_x dv_y dv_z = 0$$

(integrujeme liché funkce).

- Střední hodnota kvadrátu složky rychlosti:

$$\langle v_i^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} v_i^2 g(v_i) dv_i = \frac{kT}{m}$$

- Střední hodnota velikosti rychlosti:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v F_{\text{sp}}(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}$$

- Střední kvadratická rychlost

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2}$$

Rozdělení pro velikost rychlosti a energii v různých dimenzích

Zima 2022

- Sférické souřadnice v n rozměrech
- Rozdělení pro složku rychlosti
- Rozdělení pro velikost rychlosti
- Rozdělení pro energii

[Zpět na obsah.](#)

Sférické souřadnice v n rozměrech

Pro n -dimenzionální rychlostní prostor uvažme úhly:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{n-2} \in [0, \pi]$$

$$\phi_{n-1} \in [0, 2\pi]$$

a složky rychlostí v_i :

$$\begin{aligned}
v_1 &= v \cos(\phi_1) \\
v_2 &= v \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \\
v_3 &= v \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos(\phi_3) \\
&\vdots \\
v_{n-1} &= v \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \cos(\phi_{n-1}) \\
v_n &= v \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \sin(\phi_{n-1}),
\end{aligned}$$

kde v je velikost rychlosti.

Element rychlostního prostoru v n -dimenzích je:

$$d^n v = v^{n-1} \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} dv d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_{n-1},$$

z toho dostaneme pro různá n :

$$d^1 v = v^0 dv$$

$$d^2 v = v^1 dv d\phi_1$$

$$d^3 v = v^2 \sin \phi_1 dv d\phi_1 d\phi_2$$

$$d^4 v = v^3 \sin^2 \phi_1 \sin \phi_2 dv d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3$$

...

Integrací přes všechny úhly dostaneme plochu jednotkové koule v n -rozměrném prostoru. Platí rekurentní formule:

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 2\pi, \quad S_n = \frac{2\pi}{n-2} S_{n-2}$$

pak

$$S_3 = 4\pi, \quad S_4 = 2\pi^2, \quad \dots$$

Rozdělení pro složku rychlosti

Nechť i -tá složka rychlosti má gaussovské rozdělení:

$$\frac{g(v_i)}{\tilde{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{v_i^2}{2\sigma^2}\right),$$

kde $\tilde{n}$ je koncentrace a

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Velikost rychlosti počítaná ze složek je:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Poznámka: V případě, že rozdělení pro složku rychlosti bude zahrnovat drift μ_i

$$\frac{g'(v_i)}{\tilde{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(v_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right)$$

je potřeba se nejdříve transformovat do souřadné soustavy pohybující se s driftem, tedy do rychlosti

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\mu},$$

ve které se rozdělení rychlostí stane izotropním, jedině pak bude smysluplné provést transformaci do velikosti rychlosti (a zintegrovat přes všechny směry rychlostí), nebo do energie.

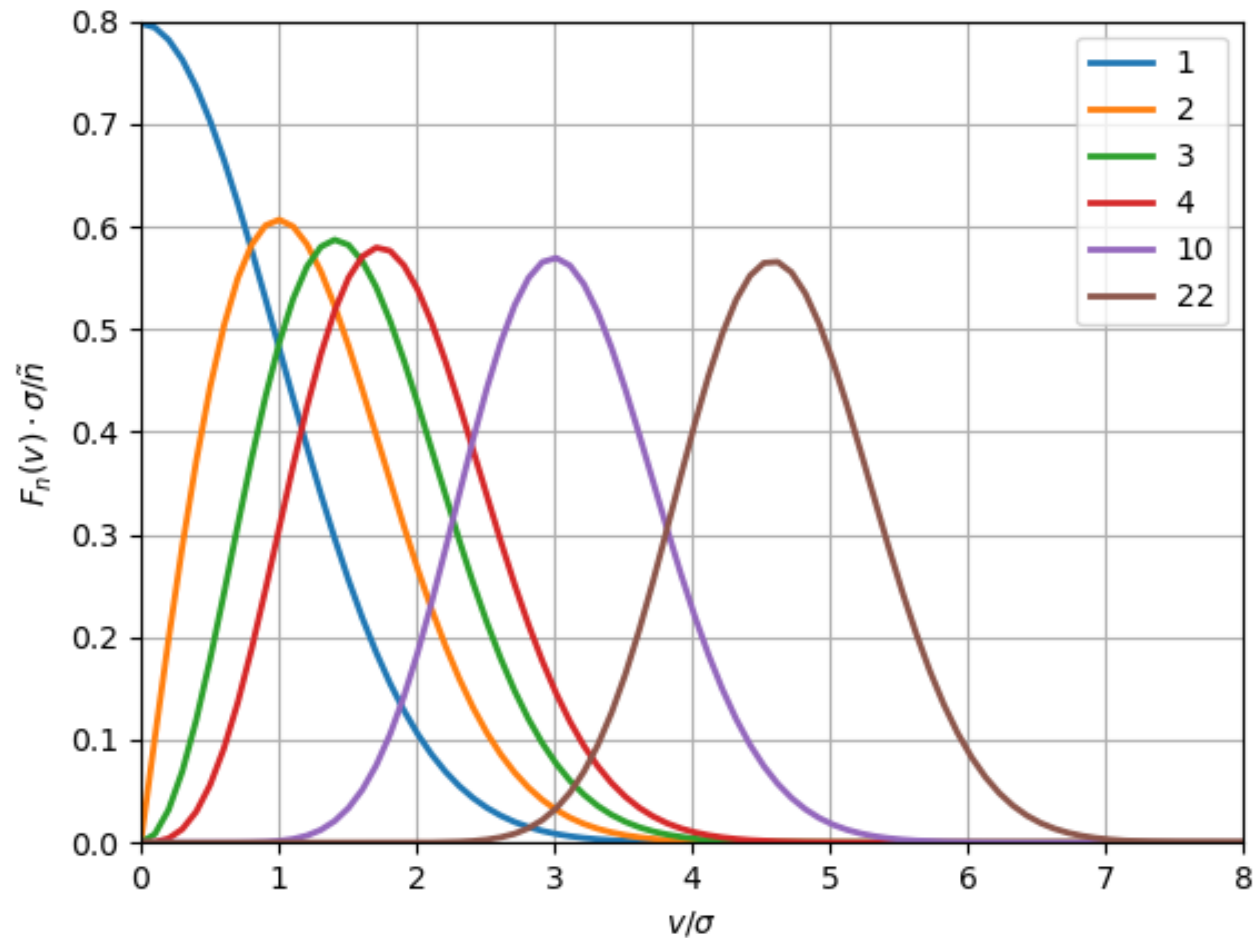
Rozdělení pro velikost rychlosti

Rozdělení $F_n(v)$ pro velikost rychlosti v n rozměrech bude poskládané z násobků rozdělení pro složky rychlosti

$$\frac{F_n(v)}{\tilde{n}} dv = \frac{S_n}{\tilde{n}^n} \left(\prod_{i=1}^n g(v_i) \right) v^{n-1} dv,$$

kde S_n je plocha jednotkové n -rozměrné koule, která je určena rekurentní formulí uvedenou výše. Explicitní funkční závislost takového rozdělení je

$$F_n(v) dv = S_n \tilde{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n v^{n-1} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) dv.$$



Rozdělovací funkce pro velikost rychlosti v prostoru s n dimenzemi.

Rozdělení pro energii

Rozdělení pro energii dostaneme transformací rozdělení $F(v)$ do energie:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Element rychlostního prostoru se transformuje do elementu energiového prostoru jako:

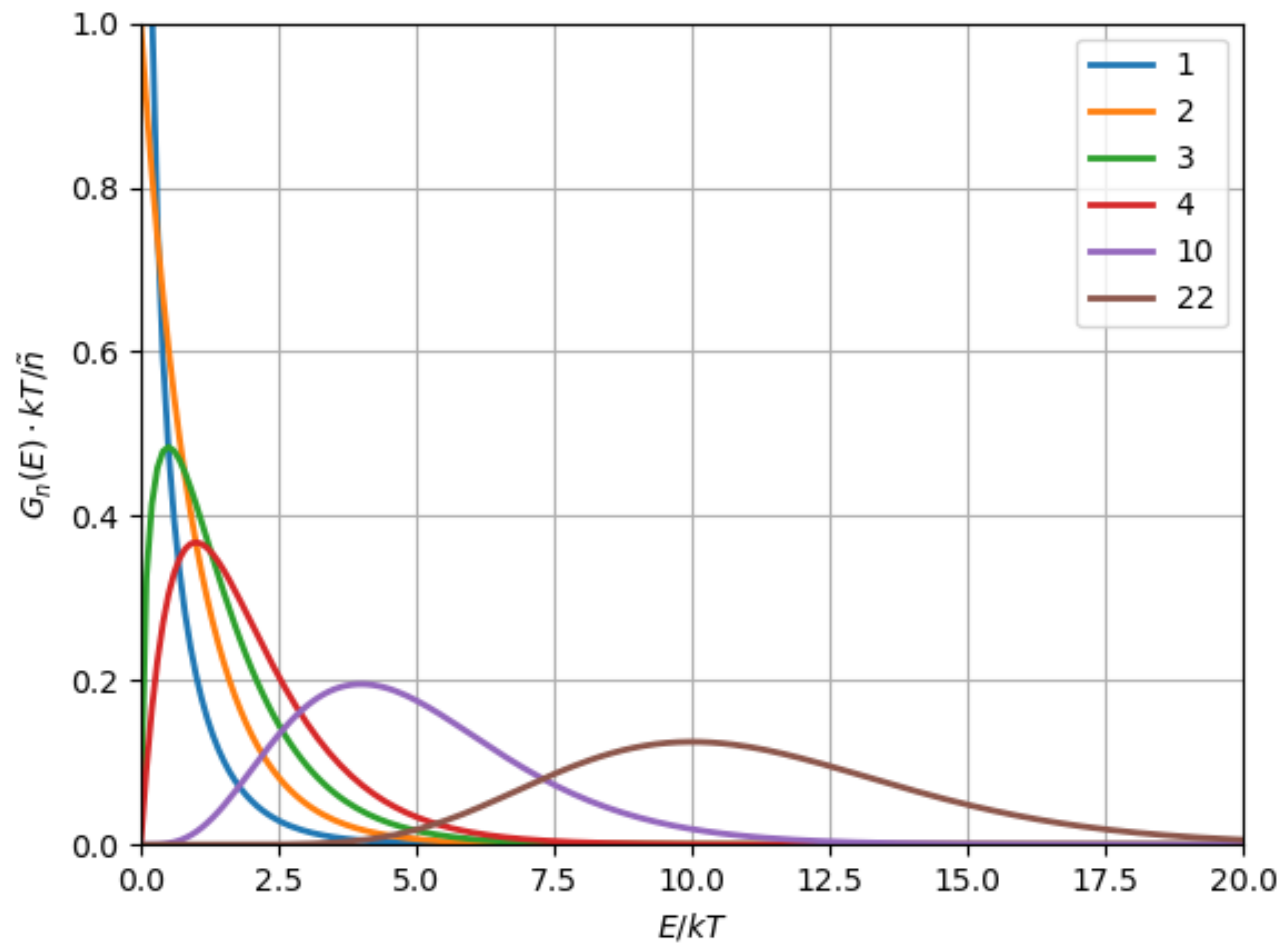
$$dv = \frac{dE}{(2mE)^{1/2}}$$

Použijeme-li

$$\sigma^2 m = kT$$

bude rozdělovací funkce pro energii částic v n -rozměrném prostoru

$$G_n(E) dE = S_n \tilde{n} \left(\frac{1}{2\pi kT} \right)^{n/2} \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) (2E)^{\frac{n-2}{2}} dE.$$



Rozdělovací funkce pro energii v prostoru s n dimenzemi.

[Zdrojový kód pro generování obrázků rozdělení.](#)