Příklad: Vlasov-Poisson system

$$v_c = \left\{ \frac{2e}{m_e} [\Phi(x) - \Phi_{min}] \right\}^{1/2}$$

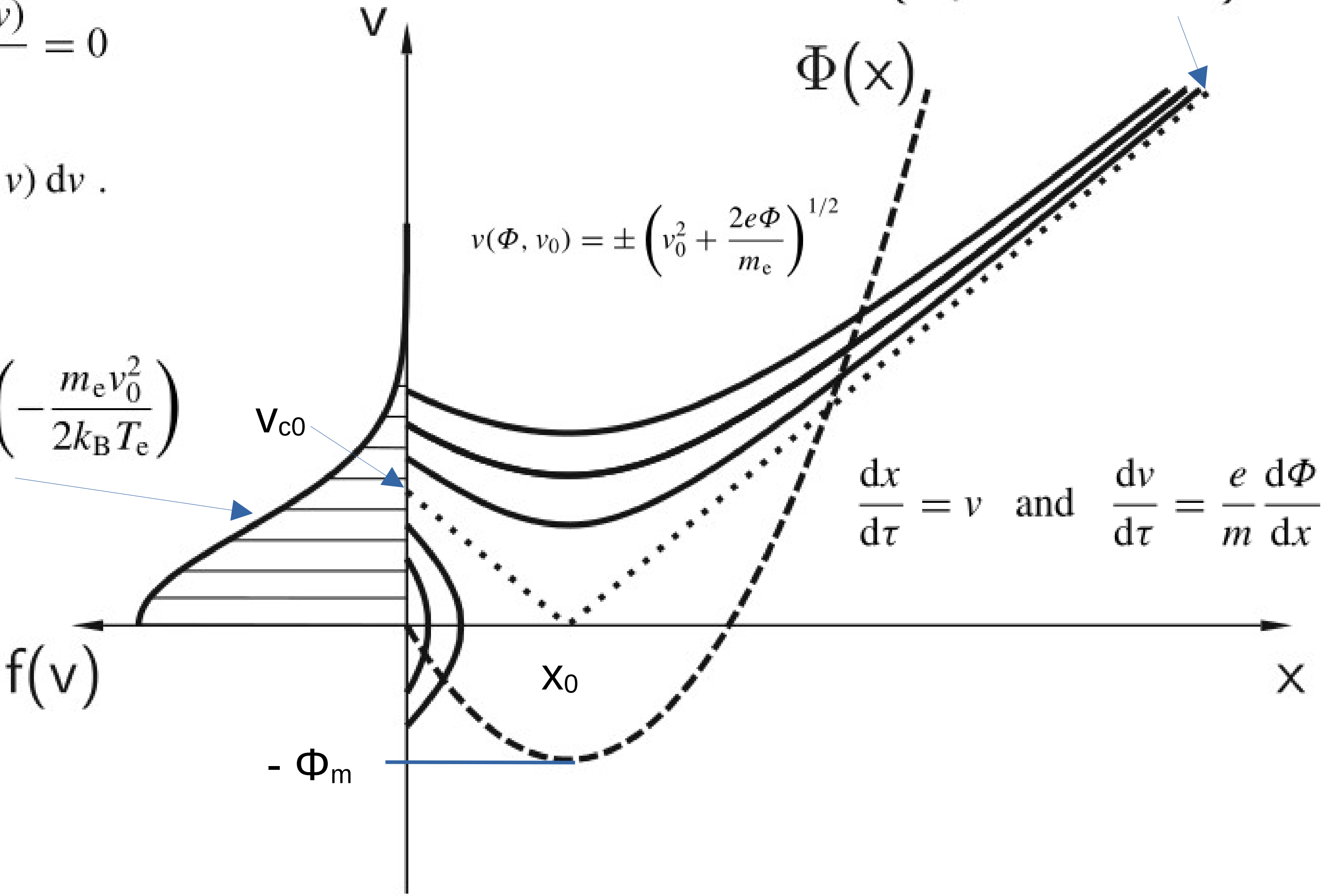
$$v \frac{\partial f(x,v)}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f(x,v)}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\, dv\ .$$

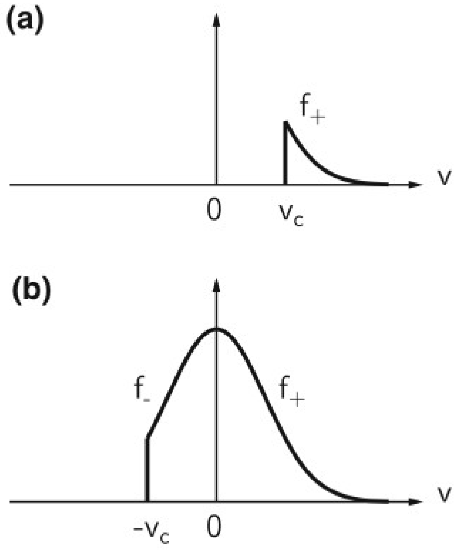
$$v(\Phi, v_0) = \pm \left(v_0^2 + \frac{2e\Phi}{m_e} \right)^{1/2}$$

$$f(0, v_0) = A \exp\left(-\frac{m_e v_0^2}{2 k_B T_e} \right)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = v \quad \text{and} \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{e}{m} \frac{d\Phi}{dx}$$



$$f_+(x,v) = A\exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right)\exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right)\begin{cases}\Theta(v-v_c) & ;\ x > x_{min}\\ \Theta(v) & ;\ 0 < x < x_{min}\end{cases}$$



$$\Theta(x) = \begin{cases}0 : x \le 0\\ 1 : x > 0\end{cases}$$

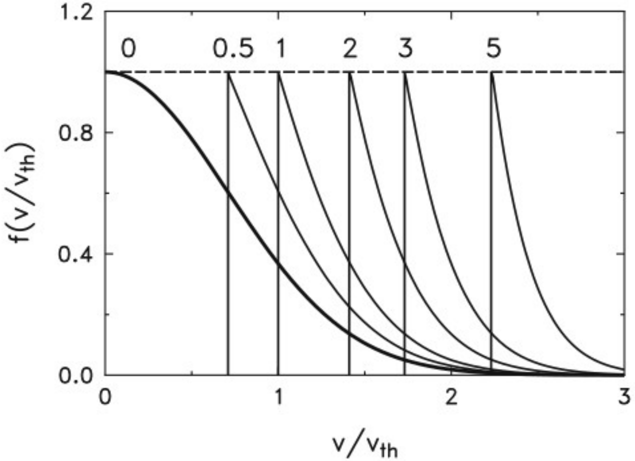
$$f_-(x,v) = A\exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right)\exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right)\Theta(v+v_c)[1-\Theta(v)]$$

Hustota proudu v místě potenciálového minima a za ním:

$$j = -e\int v f_+(v)\,\mathrm{d}v.$$

Self-konsistentní řešení:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\right|_I = \frac{e}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}(f_+ + f_-)\,\mathrm{d}v \quad ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\right|_{II} = \frac{e}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} f_+\,\mathrm{d}v$$



Transportní rovnice pro $\chi(\mathbf{v})$

$$\langle \chi \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \chi \, f_\alpha \, \mathrm{d}\mathbf{v}$$

Vezmeme Boltzmannovu rovnici pro typ částic α:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_\alpha + (\mathbf{a} \cdot \nabla_\mathbf{v}) f_\alpha = \left[\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right]_{\mathrm{coll}}$$

a zintegrujeme ji přes rychlostní prostor s váhou $\chi(\mathbf{v})$:

$$\int_v \chi(\mathbf{v}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \, \mathrm{d}\mathbf{v} + \int_v \chi(\mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_\alpha \, \mathrm{d}\mathbf{v} + \int_v \chi(\mathbf{v}) (\mathbf{a} \cdot \nabla_\mathbf{v}) f_\alpha \, \mathrm{d}\mathbf{v} = \int_v \chi(\mathbf{v}) \left[\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right]_{\mathrm{coll}} \mathrm{d}\mathbf{v}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} [n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha] + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_\mathbf{v} \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{\mathrm{coll}}}$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial}{\partial t}[n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha] + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_\mathbf{v} \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{\text{coll}}$$

$$\boxed{\chi = 1}$$

$$\langle \chi \rangle_\alpha = 1, \quad \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha = \mathbf{u}_\alpha, \quad \nabla_\mathbf{v} \chi = 0.$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \Sigma_\alpha,}$$

Hustota toku částic:

$$\Gamma_\alpha = n_\alpha \mathbf{u}_\alpha$$

zdrojový člen (ztráta nebo zisk částic vlivem srážek).

Zdrojové členy

Ionizace

$$\mathrm{e} + \mathrm{M} \xrightarrow{k_i} \mathrm{e} + \mathrm{e} + \mathrm{M}^+,$$

kdy z molekuly M vzniká nárazem elektronu iont M^+ a uvolní se z ní jeden elektron. k_i je reakční konstanta ionizace. Koncentraci budeme značit $[\cdot]$. Ionizace představuje příspěvek do zdrojového členu v rovnici kontinuity pro elektrony ve tvaru

$$\frac{\partial[\mathrm{e}]}{\partial t} = +k_i\,[\mathrm{e}][\mathrm{M}],$$

Kolik elektronů vznikne ionizací je úměrné součinu koncentrací reaktantů $[\mathrm{e}]$ a $[\mathrm{M}]$ a rychlostní konstanty k_i. Stejný proces představuje úbytek v koncentraci M:

$$\frac{\partial[\mathrm{M}]}{\partial t} = -k_i\,[\mathrm{e}][\mathrm{M}]$$

a přírustek v koncentraci iontu M^+:

$$\frac{\partial[\mathrm{M}^+]}{\partial t} = +k_i\,[\mathrm{e}][\mathrm{M}].$$

jednotka k_i je m^3/s.

Rekombinace (tříčásticová)

$$\mathrm{e} + \mathrm{M}^+ + \mathrm{A} \xrightarrow{k_r} \mathrm{M} + \mathrm{A}$$

zdrojové členy:

$$\frac{\partial[\mathrm{e}]}{\partial t} = -k_r\,[\mathrm{e}][\mathrm{M}^+][\mathrm{A}], \quad \frac{\partial[\mathrm{M}^+]}{\partial t} = -k_r\,[\mathrm{e}][\mathrm{M}^+][\mathrm{A}]$$

$$\frac{\partial[\mathrm{M}]}{\partial t} = k_r\,[\mathrm{e}][\mathrm{M}^+][\mathrm{A}], \quad \frac{\partial[\mathrm{A}]}{\partial t} = 0$$

jednotka k_r je m^6/s.

Záchyt elektronu

$$\mathrm{e} + \mathrm{A} + \mathrm{B} \xrightarrow{k_c} \mathrm{A}^- + \mathrm{B}$$

zdrojové členy:

$$\frac{\partial[\mathrm{e}]}{\partial t} = -k_c\,[\mathrm{e}][\mathrm{A}][\mathrm{B}], \quad \frac{\partial[\mathrm{A}^-]}{\partial t} = k_c\,[\mathrm{e}][\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

$$\frac{\partial[\mathrm{B}]}{\partial t} = 0$$

jednotka k_c je m^6/s.

Zdrojové členy

Přenos náboje

$$A^+ + B \xrightarrow{k_t} A + B^+$$

zdrojové členy:

$$\frac{\partial[A^+]}{\partial t} = -k_t\,[A^+][B], \quad \frac{\partial[B]}{\partial t} = -k_t\,[A^+][B]$$

$$\frac{\partial[A]}{\partial t} = +k_t\,[A^+][B], \frac{\partial[B^+]}{\partial t} = +k_t\,[A^+][B]$$

jednotka k_t je m^3/s.

Kontrolní otázka: Jaký bude zdrojový člen pro změnu koncentrace dusíkového atomu N díky procesu:

$$\mathrm{e} + \mathrm{N}_2 \xrightarrow{k} \mathrm{e} + \mathrm{N} + \mathrm{N}?$$

Disociace

$$AB + C \xrightarrow{k_d} A + B + C$$

zdrojové členy:

$$\frac{\partial[AB]}{\partial t} = -k_d\,[AB][C], \quad \frac{\partial[C]}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial[A]}{\partial t} = +k_d\,[AB][C], \quad \frac{\partial[B]}{\partial t} = +k_d\,[AB][C]$$

jednotka k_d je m^3/s.

Zářivá deexcitace:

$$A^* \xrightarrow{\nu} A + \gamma$$

zdrojové členy:

$$\frac{\partial[A^*]}{\partial t} = -\nu\,[A^*], \quad \frac{\partial[A]}{\partial t} = \nu\,[A^*]$$

jednotka ν je s^{-1}.

Rovnice pro přenos hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t}[n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha] + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_\mathbf{v} \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{\mathrm{coll}}$$

$$\boxed{\chi(\mathbf{v}) = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha}$$

časová variace pozorovaná v souřadné soustavě spojené s pohybující se kapalinou (**konvektivní derivace**)

Zdrojový člen z RK

$$\boxed{m_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha \right] + \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha - n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \rangle = \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha}$$

Změna hybnosti kapaliny vlivem srážek

$$\mathbf{A}_\alpha = \rho_{m\alpha} \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)$$

Ze zákona zachování hybnosti:

$$\rho_{m_\alpha} \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) + \rho_{m_\alpha} \nu_{\beta\alpha}(\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) = 0$$

srážková frekvence pro přenos hybnosti

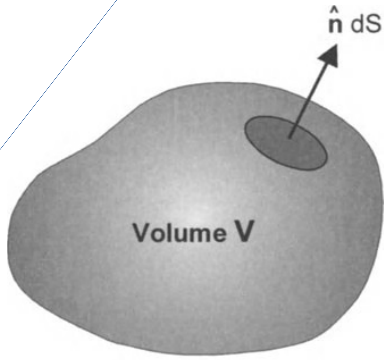
hustota síly vyvinutá v plazmatu díky náhodnému pohybu částic:

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha = \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \, \mathbf{c}_\alpha \rangle)$$

Skalární tlak: $p_\alpha = \frac{1}{3}(P_{\alpha xx} + P_{\alpha yy} + P_{\alpha zz})$.

$$\frac{\mathbf{F}}{S} = -P \cdot \hat{\mathbf{n}} = -mn\langle \mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \rangle$$

$$\mathbf{F} = -\oint_{\partial V} P \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_V \nabla \cdot P \mathrm{d}^3 r$$



Síla na jednotku objemu: $\mathbf{f} = -\nabla \cdot P$

Rovnice pro energii

$$\chi(\mathbf{v}) = m_\alpha v_\alpha^2/2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha] + \nabla\cdot(n_\alpha\langle\chi\mathbf{v}\rangle_\alpha) - n_\alpha\langle\mathbf{a}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\chi\rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t}(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha)\right]_{\rm coll}$$

Vyjádřené pro skalární tlak p_α:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{3p_\alpha}{2} + (\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\frac{3p_\alpha}{2} + \frac{3p_\alpha}{2}\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha + (\mathbb{P}_\alpha\cdot\nabla)\mathbf{u}_\alpha + \nabla\cdot\mathbf{q}_\alpha = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 m_\alpha\Sigma_\alpha$$

1. člen: totální rychlost změny hustoty tepelné energie částic v objemovém elementu který se pohybuje rychlostí odpovídající rychlosti pohybu kapaliny $\mathbf{u}_\alpha$. Hustota tepelné energie je $3p_\alpha/2 = \rho_{m\alpha}\langle c_\alpha^2\rangle/2.$

2. člen: odpovídá změně hustoty tepelné energie kvůli částicím, které vstupují do objemového elementu s rychlostí $\mathbf{u}_\alpha$.

3. člen: práce vykonaná na objemovém elementu díky působení tenzoru tlaku na jeho povrch

4. člen: změna hustoty tepelné energie kvůli toku tepla.

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2}n_\alpha m_\alpha\langle c_\alpha^2\mathbf{c}_\alpha\rangle$$

$$M_\alpha = \tfrac{1}{2}m_\alpha\int_v v^2\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{coll} d^3v = \left[\frac{\delta(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < v^2 >_\alpha)}{\delta t}\right]_{coll}$$

RH

RK

Model studeného plazmatu

Model studeného plazmatu představuje nejjednodužší uzavřený systém popsaný dvěma proměnnými: $\rho_{m\alpha}$ a $\mathbf{u}_\alpha$. Termální pohyb částic je zanedbán:

$$\mathbb{P}_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha$$

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha \right] = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha} \mathbf{g} + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha$$

Tento model se používá např. na studium šíření elektromagnetických vln plazmatem, v případě že jejich fázová rychlost je mnohem větší než tepelná rychlost částic.

Příklad: plazmové oscilace

Model teplého plazmatu

Proměnné: $\rho_{m\alpha}$ a $\mathbf{u}_\alpha$, p_α.

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha$$

$$\rho_{m\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha\right] = n_\alpha q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha}\mathbf{g} - \nabla p_\alpha + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\frac{3p_\alpha}{2} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\frac{3p_\alpha}{2} + \frac{5p_\alpha}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha}$$

$$p_\alpha \rho_{m\alpha}^{-\gamma} = \mathrm{const}$$

Adiabatická aproximace

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha, \quad T_\alpha = const.$$

Izotermická aproximace

Horké plazma

V případě, že plazma není ve stavu lokální termodynamické rovnováhy, když není možné zanedbat tok tepla a je třeba uvážit nenulovou viskozitu, může být jediný způsob popisu plazmatu pomocí rozdělovací funkce f_α ve fázovém prostoru. Makroskopické parametry plazmatu se pak spočítají jako momenty f_α.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll}$$