

Pohyb nabitých částic v elektromagnetických polích

Lorentzova síla

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (|\mathbf{v}| \ll c)$$

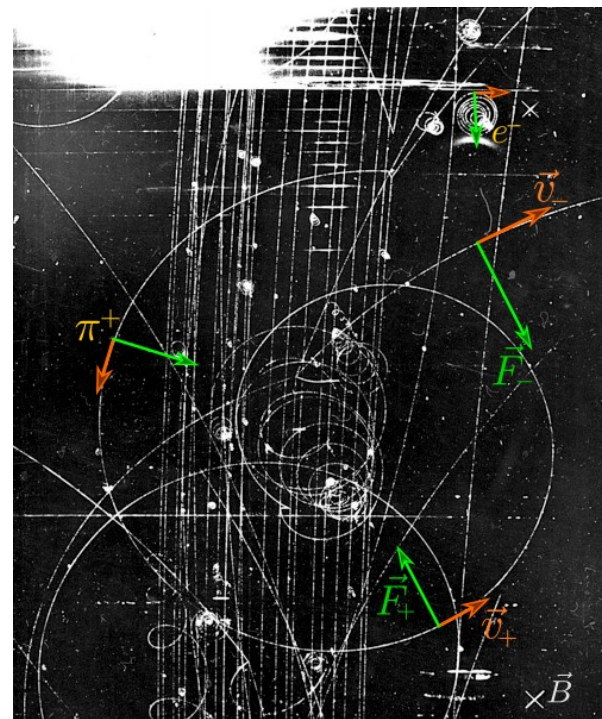
$\mathbf{B} = \text{const.}, \mathbf{E} = 0$

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \equiv 0$$

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = 0$$

→ kinetická energie částice
se zachovává

Pozor, při $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ se kinetická energie nezachovává!



Gyrace

Podélná a kolmá rychlost:

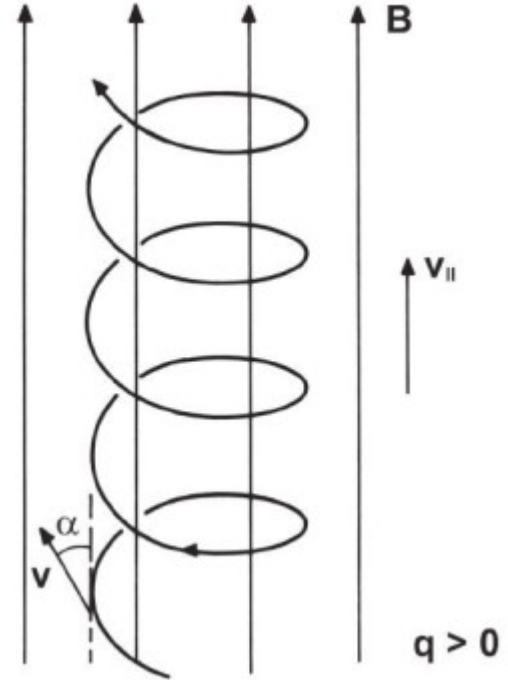
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) + 0$$

Uvažme $\mathbf{B} = (0, 0, B) = \hat{\mathbf{z}}B$.

$$\mathbf{v}_{\perp} = (v_x, v_y, 0), \mathbf{v}_{\parallel} = (0, 0, v_z), \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} = (v_y B, -v_x B, 0)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \det \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = B(v_y \hat{\mathbf{x}} - v_x \hat{\mathbf{y}})$$



$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x &= 0, \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y &= 0, \end{aligned}$$



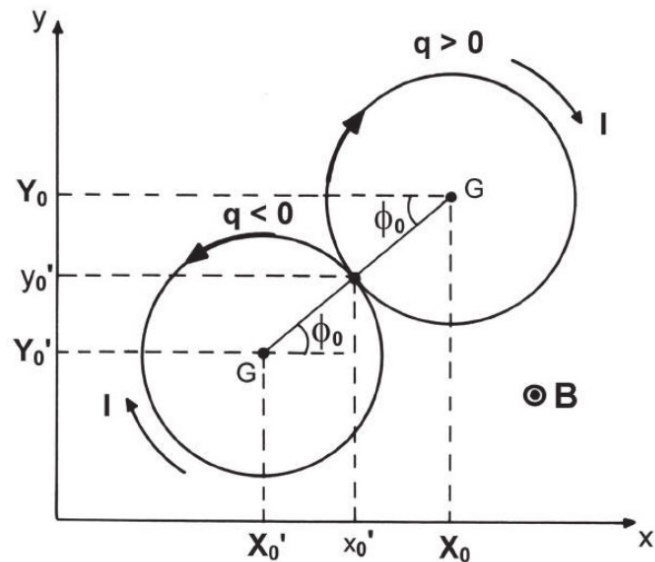
$$\begin{aligned} v_x &= \pm v_{\perp} \cos(\mp \omega_c t + \psi) \\ v_y &= \mp v_{\perp} \sin(\mp \omega_c t + \psi) \\ v_z &= v_{\parallel} \end{aligned}$$

Cyklotronová frekvence:

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

$$v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Gyrace



$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{v}_{\perp}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_c = -\frac{q\mathbf{B}}{m} = \frac{|q|B}{m}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_c = \omega_c\hat{\boldsymbol{\Omega}}_c$$

Larmorův poloměr:

$$\mathbf{r}_c = -\frac{\boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{v}_{\perp}}{\Omega_c^2}$$

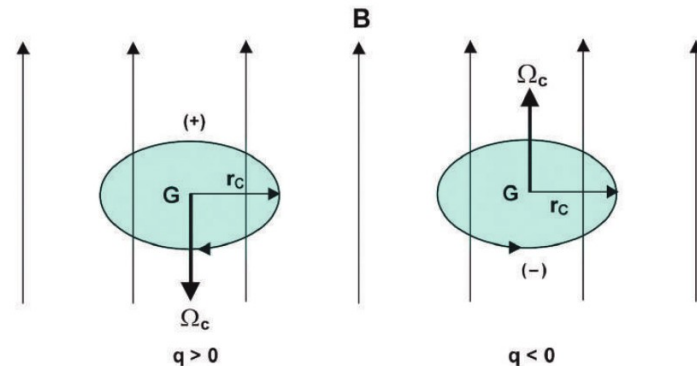
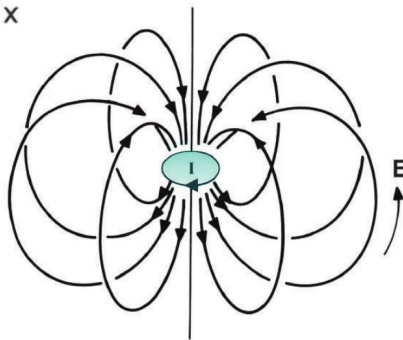
$$r_c = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$$

Jednotkový vektor $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_c$ směřuje:

- ve směru $\mathbf{B}$ pro negativně nabitou částici ($q < 0$)
- proti směru $\mathbf{B}$ pro kladně nabitou částici ($q > 0$).

Vlastnosti gyrace:

- ω_c : nezávisí na rychlosti částice, rychlá i pomalá částice oblétné gyrální kružnici za stejnou dobu.
- r_c : částice s vyšší rychlostí obíhají po kružnici s větším poloměrem
- m : těžší částice gyruje větším r_c a má delší čas na jeden oběh.

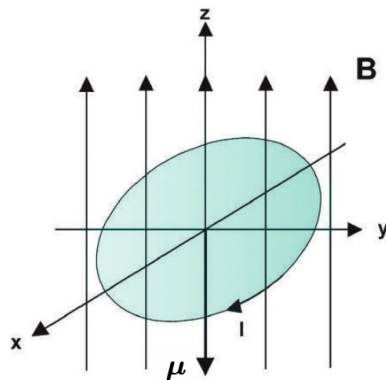
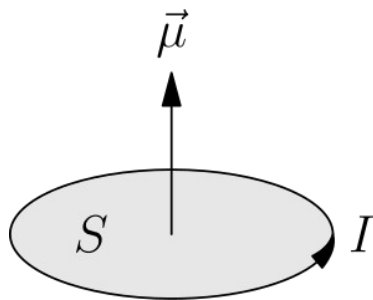


=> Plazma je diamagnetické!

Magnetický moment gyrující částice

$$\mu = \left(\left| \frac{q\omega_c}{2\pi} \right| \right) (\pi r_c^2) = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

$$\mu = -\frac{W_{\perp}}{B^2} \mathbf{B}$$

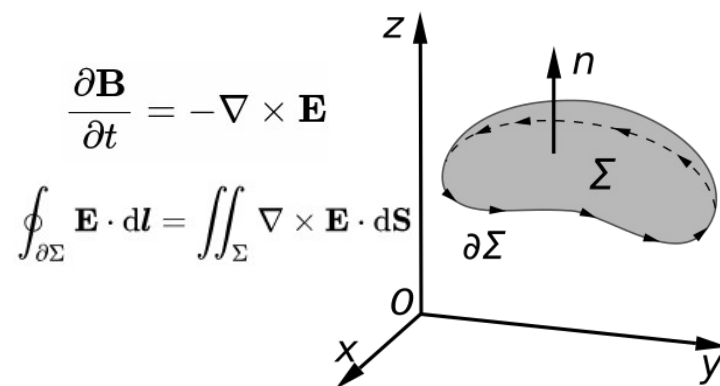


Magnetizace plazmatu je rovna koncentraci gyrujících částic a magnetickému momentu gyrujících částic, (který je úměrný $1/B$):

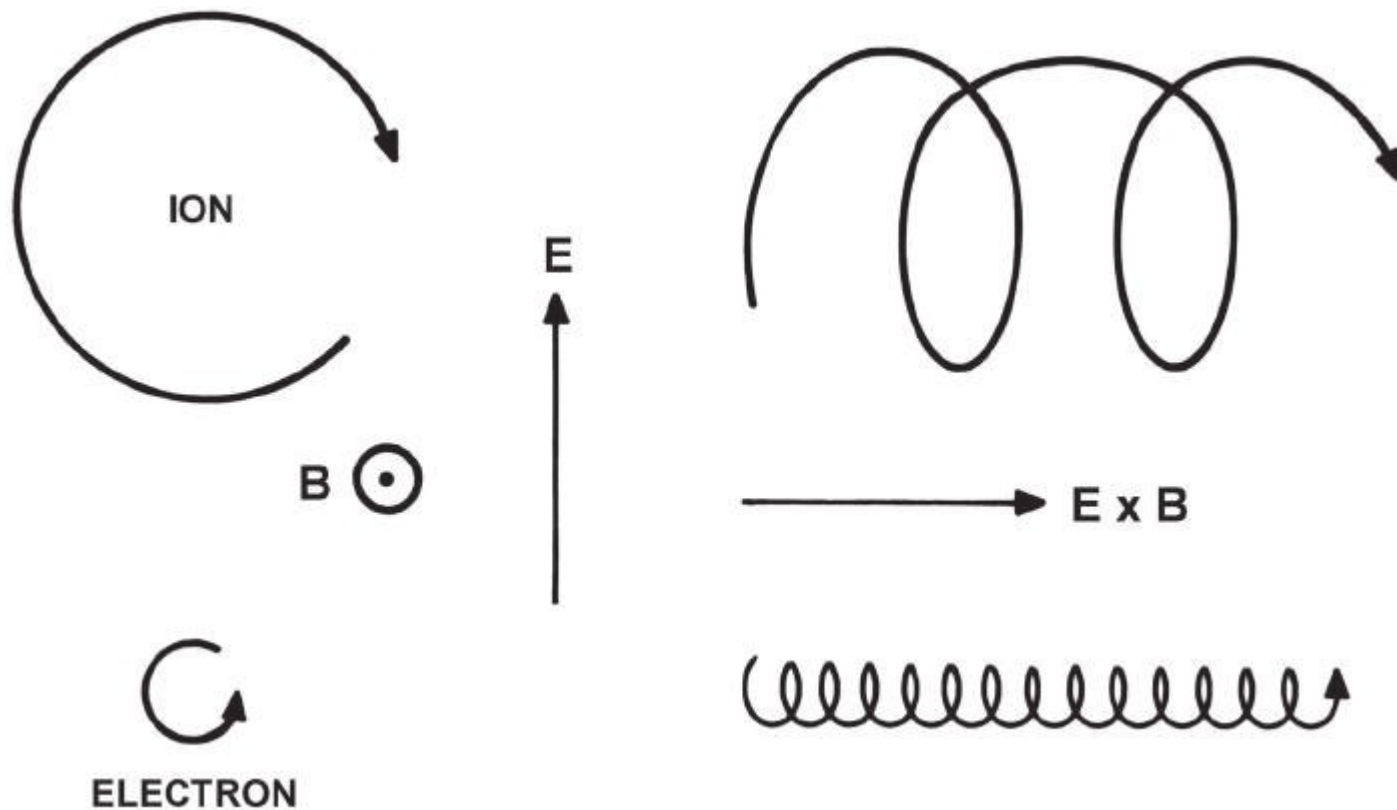
$$\mathbf{M} = n\mu$$

Díky této nelineární závislosti ($\sim 1/B$) magnetizace na magnetickém poli se však plazma jako magnetický materiál většinou nepopisuje.

Pozor na **orientaci rychlosti částice** při použití Stokesova teorému:



$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift



→ v důsledku změn velikosti rychlosti gyrující částice se deformuje gyrační kružnice a v důsledku této deformace dochází k drifu nabitě částice

Drift probíhá v jedné rovině s gyrací, obrázky nejsou projekce šroubovice!

Matematika $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu

Uvažujme homogenní magnetické pole $\mathbf{B}$ a homogenní elektrické pole $\mathbf{E}$, takové že $\mathbf{B} \nparallel \mathbf{E}$.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

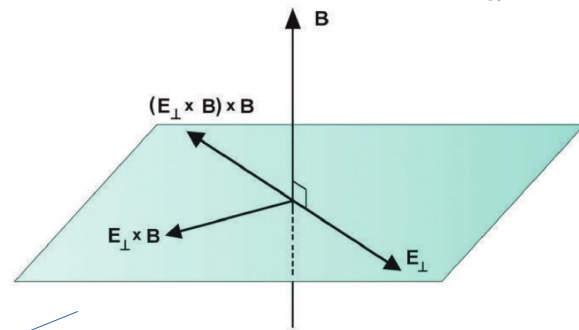
$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q\mathbf{E}_{\parallel}$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}'_{\perp}(t)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt} = q \left(-\frac{(\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{B^2} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B} + \mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{B} \right)$$

gyrace



$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Protože $\mathbf{E}_{\parallel} \times \mathbf{B} \equiv 0$:

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Drift způsobený silou $\mathbf{F}$

Místo síly elektrického pole $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ můžeme uvážit libovolnou externí sílové pole. Analogicky k $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu dostaneme drift způsobený silou $\mathbf{F}$

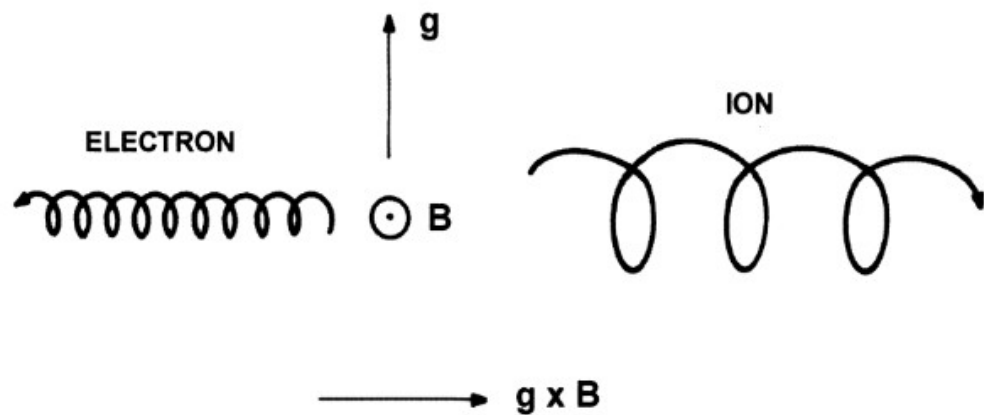
$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

Tento drift na rozdíl od $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu explicitně závisí na náboji q .

Gravitační drift

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

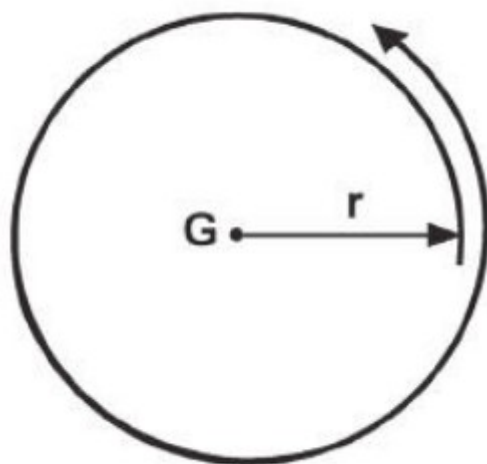
- gravitační drift závisí na náboji částice
- gravitační drift závisí na hmotnosti částice (ionty budou driftovat mnohem rychleji).



Drifty v nehomogenním $\mathbf{B}$ poli

Nehomogenita pole:

Budeme předpokládat že poloměr gyrace r_c je malý ve srovnání s charakteristickou vzdáleností na které se mění $\mathbf{B}$ pole. Oddělíme gyraci a driftový pohyb, nehomogenita pole bude *malá* porucha vnějšího homogenního $\mathbf{B}$ pole.



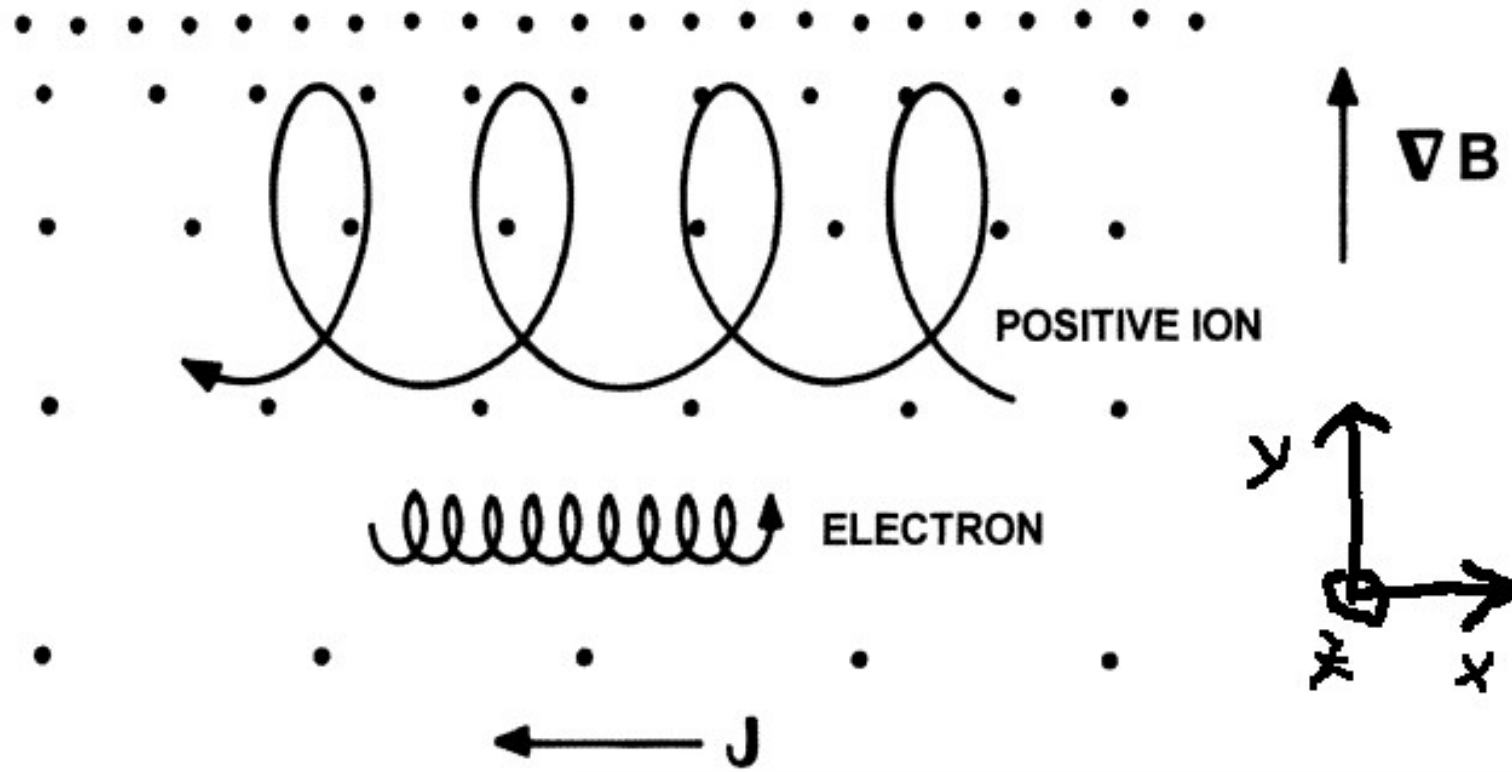
$$\delta B = r_c |\nabla B|$$

$$\delta B \ll B$$

Trajektorie nabitých částic jsou téměř uzavřené gyrační kružnice.

∇B drift

B OUT OF PAGE



Driftová rychlost ∇B driftu by měla záviset na náboji!

Matematika 'grad-B' driftu

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z(y))$$

Malá nehomogenita:

$$B_z(y) = B_0 + y \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} \right] + \text{h.o.t.}$$

$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}qv_y B_z - \hat{\mathbf{y}}qv_x B_z \simeq \hat{\mathbf{x}}qv_y \left(B_0 + y \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} \right] \right) - \hat{\mathbf{y}}qv_x \left(B_0 + y \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} \right] \right)$$

$$\begin{aligned} x_c &= r_c \cos(\mp \omega_c t + \psi) \\ y_c &= r_c \sin(\mp \omega_c t + \psi) \\ v_x &= \pm v_\perp \sin(\mp \omega_c t + \psi) \\ v_y &= \mp v_\perp \cos(\mp \omega_c t + \psi) \end{aligned}$$

$$\langle F_x \rangle = 0,$$

$$\langle F_y \rangle = \frac{\mp qv_\perp r_c}{2} \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} \right] = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

- Rychlejší částice driftují rychleji protože mají větší r_c a jejich orbity tak očichávají větší oblast nehomogenity.

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \frac{1}{q} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\mu}{q} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2}$$

- ∇B -drift závisí na q a způsobuje tedy makroskopický proud.

kde $\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}$ je *magnetický moment* gyrující částice

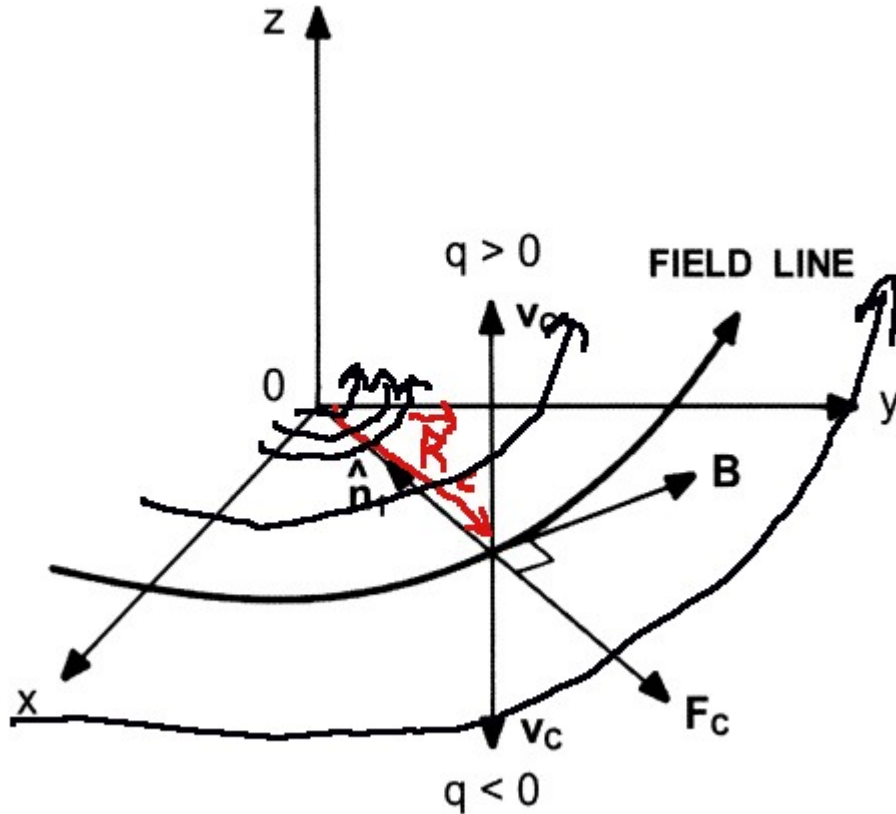
Střední hodnota:

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} (\cdot) dt$$

Drift zakřivení

Odstředivá síla:

$$\mathbf{F}_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \frac{\mathbf{R}_c}{R_c}$$



$$\mathbf{v}_{R_c} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qR_c^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Vakuové B pole

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0$$

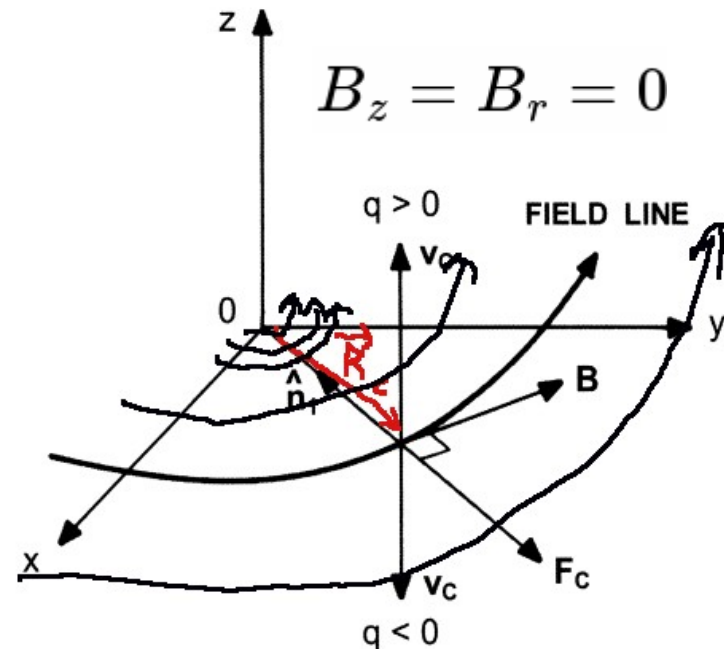
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = 0 \quad \text{tedy} \quad B_\varphi = \frac{A}{r}$$

V místě gyračního středu $r = R_c$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} B_\varphi \right|_{r=R_c} = - \left. \frac{A}{r^2} \right|_{r=R_c} = - \frac{A}{R_c^2} = - \frac{B_\varphi R_c}{R_c^2} = - \frac{B_\varphi}{R_c}$$

Protože $\mathbf{B}$ má pouze komponentu B_φ $\longrightarrow$ $\nabla B = - \frac{B}{R_c^2} \mathbf{R}_c$



$$\mathbf{v}_{R_c} = \frac{m v_{\parallel}^2}{q B} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

Kombinace driftu zakřivení a grad-B driftu:

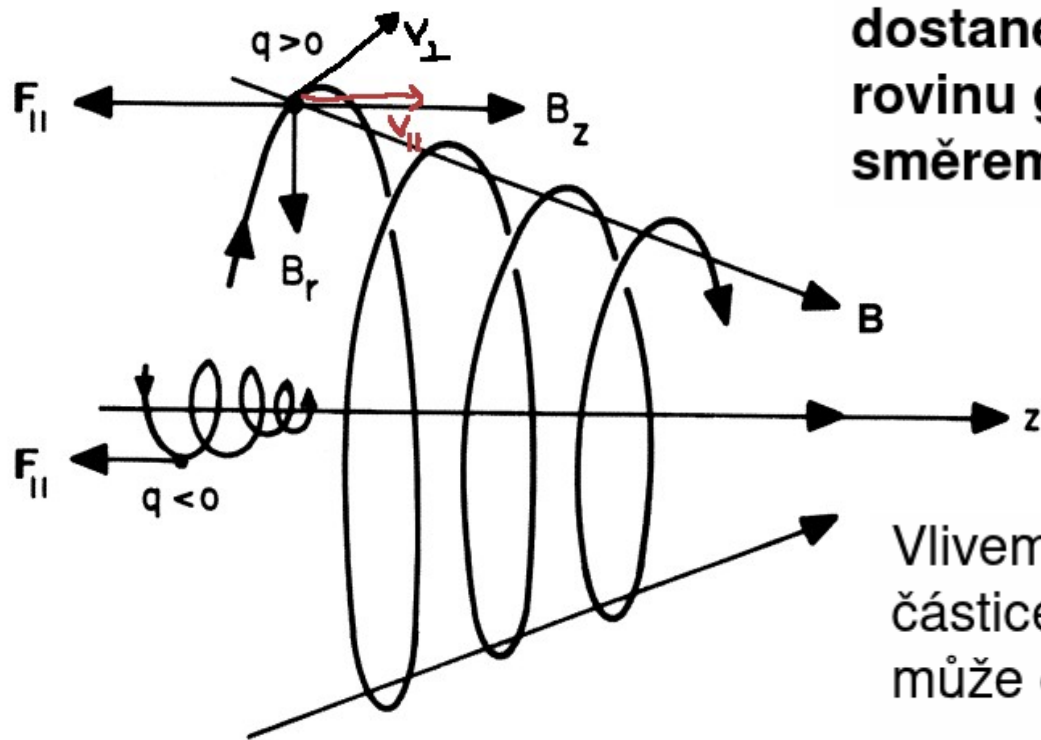
$$\mathbf{v}_{vf} = \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{m}{q B} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

- $\mathbf{v}_{vf}$ závisí na hmotnosti částic: proud je dán převážně driftem iontů

Silové působení v konvergentním B poli

Uvažujme konvergentní magnetické pole ($B_\varphi = 0$), částice v něm gyruje kolmou rychlostí $\mathbf{v}_\perp$ a pohybuje se podél $\mathbf{B}$ rychlostí $\mathbf{v}_\parallel$.

Díky existenci nenulové radiální složky B_r , dostaneme sílu která působí kolmo na rovinu gyrace a vytlačuje gyrující částici směrem ze silícího magnetického pole.



Vlivem působení existující nenulové F_z se částice od houstnajícího magnetického pole může odrazit. Na tomto efektu je založené *magnetické zrcadlo*.

Silové působení v konvergentním B poli

Tím že je $\mathbf{B}$ pole konvergentní, existuje nenulová radiální složka B_r . Použitím Maxwellovy rovnice $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ve válcových souřadnicích

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

zjistíme vztah mezi radiální složkou B_r a podélnou složkou B_z magnetického pole. Máme $B_\varphi = 0$, proto

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

pomalou konvergentní pole

$$B_r(r) = \cancel{B_r|_{r=0}} + r \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \text{h.o.t}$$

z $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ dostaneme

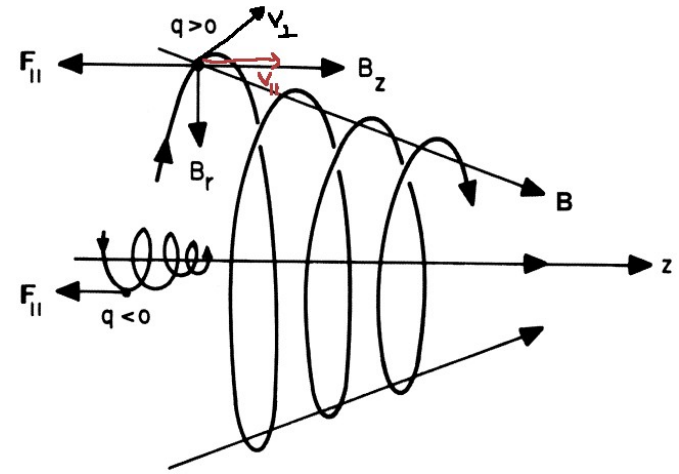
$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq -\frac{2B_r}{r}$$

$$B_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Pro částici gyrující na poloměru $r = r_c$, pak na kladnou i zápornou částici působí síla: |

$$F_z = -|q|v_\perp \frac{r_c}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \boxed{-\frac{mv_\perp^2}{2B_z}} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \boxed{-\mu} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Úkol: uvažte kladnou/zápornou částici a sílící/slábnuocí pole. Rozmyslete si silové působení v těchto případech!



Míra sílení/slábnutí pole při pohybu podél osy z.

Adiabatická invariance

Jak se chovají **integrály pohybu**, tj. zachovávající se veličiny vyplývající ze symetrie prostoru a času, jsou-li **uvažované symetrie dobré, ne však perfektní**?

Zákony zachování související s **pomalou/pozvolnou změnou** nějakého vnějšího parametru se nazývá **adiabatická invariance**.

Příklad: Adiabatický invariant matematického kyvadla (matematické kyvadlo s měnící se frekvencí oscilací)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega(t)^2 x = 0$$

Je-li ω dostatečně pomalou funkcí času, zkusme hledat řešení ve zobecněném tvaru:

Amplituda je funkcí času!

$$x(t) = \text{Re} \left\{ A(t) \exp \left(i \int^t \omega(t') dt' \right) \right\}$$

dostaneme rovnici pro A a ω

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + 2i\omega \frac{dA}{dt} + i \frac{d\omega}{dt} A = 0$$

Chceme zanebat

předpoklad pomalé změny A :
druhou derivaci můžeme zanedbat

$$\left| \frac{d^2 A}{dt^2} \right| \ll \left| 2i\omega \frac{dA}{dt} \right|$$

$$\text{Pro } \omega = \text{const.} \rightarrow x(t) = \text{Re} \{ A \exp(i\omega t) \}$$

$$A(t) = \frac{B}{\sqrt{\omega(t)}}$$

Je-li $\omega(t)$ pomalá funkce času, je i $A(t)$ pomalá funkce času.

Udělejme teď předpoklad o časové změně ω .

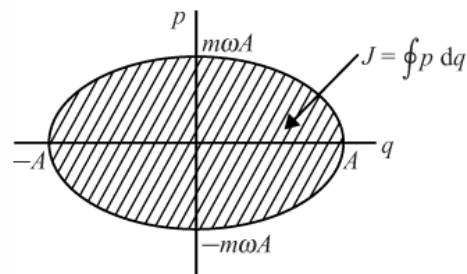
Nechť má $\omega(t)$ exponenciální časovou závislost, s charakteristickým časem změny

$1/\alpha$: ← Charakteristický čas změny

$$\omega(t) = \omega_0 \exp(\alpha t), \quad \text{tedy} \quad \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = \alpha.$$

$$4\omega \gg \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt}$$

Relativní změna periody kyvadla za jednu periodu musí být malá.



S měnícím se ω se bude měnit amplituda výchylky kyvadla a s ní i jeho energie. Ukazuje se, že veličina, která se při pomalé změně ω zachovává je **integrál akce**:

$$S = \oint v dx,$$

Adiabatická invariance....

Příklad: Adiabatický invariant matematického kyvadla (pokračování)

Řešení je ve tvaru: $x(t) = x(t_0) \sqrt{\frac{\omega(t_0)}{\omega(t)}} \cos\left(\int_{t_0}^t \omega(t') dt'\right)$

$$S = \oint v dx = [x(t_0)]^2 \omega(t_0) \int_0^{2\pi} \cos^2(\xi) d\xi = \pi [x(t_0)]^2 \omega(t_0) = \text{const.}$$

$$\xi = \int_{t_0}^{t'} \omega(t^*) dt^* \text{ a } d\xi = \omega(t') dt'$$

S je plocha ve fázovém prostoru ohraničená trajektorií $\{x(t), v(t)\}$. Tato plocha je **konstatnou pohybu při pomalé změně frekvence kyvadla**, je **adiabatickým invariantem**.

Periodický pohyb a pomalá změna vnějšího parametru vede na **adiabatickou invarianci** nějaké charakteristické veličiny pro daný systém.

Numerický příklad $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega(t)^2 x = 0$
(Numerické řešení ODE)

Sledujme fázový prostor matematického kyvadla s měnícím se $\omega(t)$ podle rovnice

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0 \exp(\alpha t), & \text{pro } t < t_f \\ \omega_0 \exp(\alpha t_f), & \text{pro } t \geq t_f \end{cases}$$

kde t_f je určené tak, aby finální hodnota $\omega(t_f) = \omega_f$ byla násobek ω_0 . Pro t_f platí:

$$t_f = \alpha^{-1} \ln(\omega_f/\omega_0).$$

Řešení budeme hledat pro

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{4\omega_0} \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 1000\},$$

Pomalá změna

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = 10.0,$$

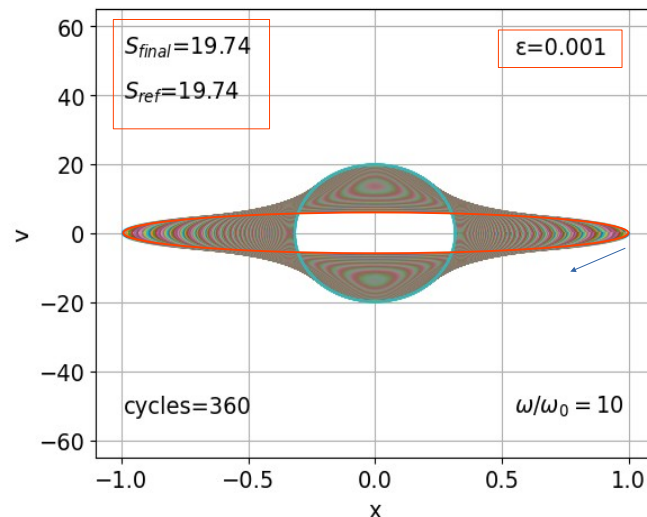
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1.0.$$

A počáteční podmínku $x_0 = 1.0, v_0 = 0.0$.

Finální frekvence

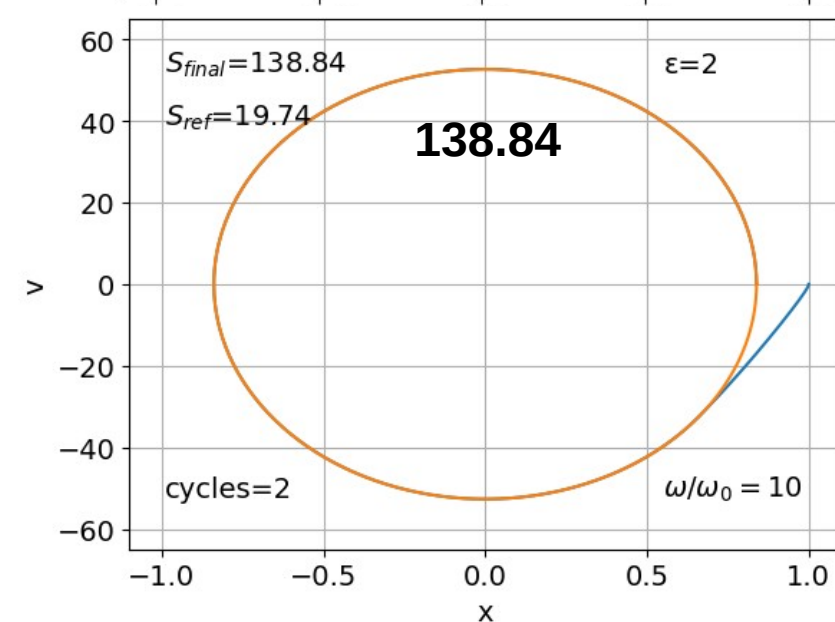
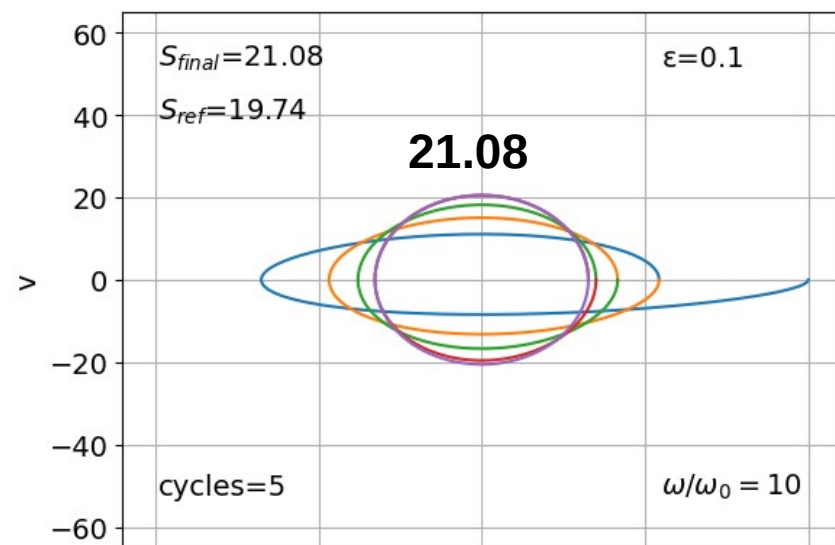
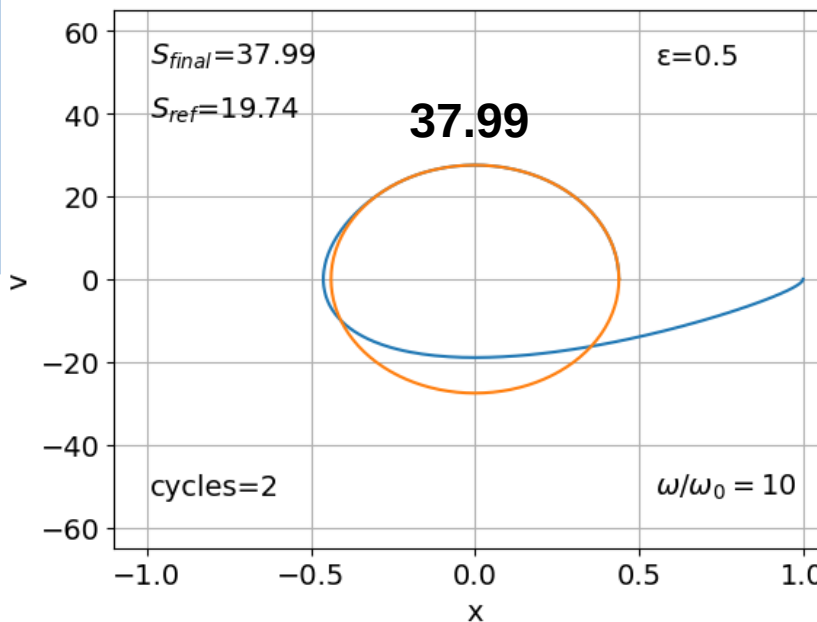
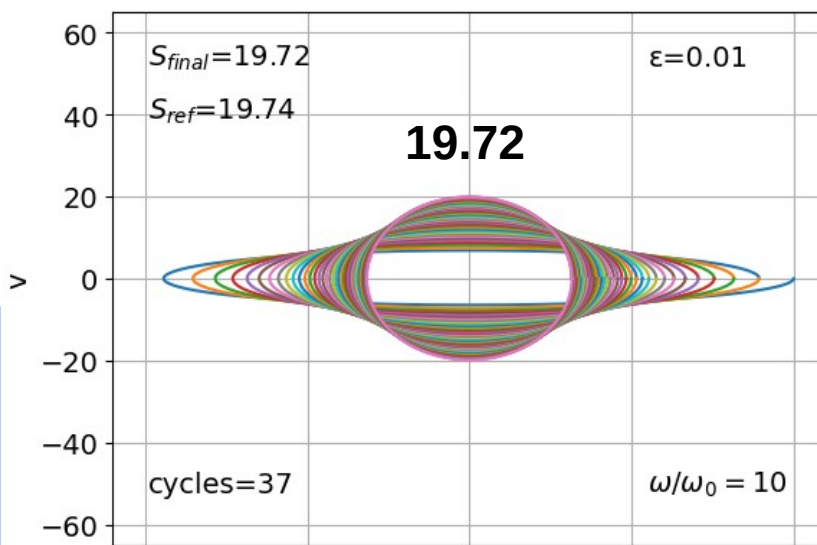
Počáteční frekvence

Rychlá změna



$S_{ref}=19.74$

Pro pomalou změnu ($\epsilon=0.001$) zůstane zachované, pro rychlou změnu ($\epsilon=1000$) je hodnota rovná teoretické hodnotě pro případ kdy začínáme pohyb prakticky už s desetinásobnou frekvencí.



První adiabatický invariant

Dipólový moment μ gyrující částice, je a diabatickým invariantem!

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \qquad W_{\perp} = \mu B$$

Kinetickou energii částice rozdělíme na složku kolmou a rovnoběžnou

$$\rightarrow W = W_{\perp} + W_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$$

$$\rightarrow \frac{dW_{\perp}}{dt} = \mu \frac{dB}{dt} + B \frac{d\mu}{dt} = \mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz} + B \frac{d\mu}{dt}$$

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = F_z = -\mu \frac{dB}{dz} \quad \Bigg| \cdot v_{\parallel}$$

$$\rightarrow \frac{dW_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \right) = -\mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz}$$

$$\frac{dW}{dt} = 0 = \frac{dW_{\perp}}{dt} + \frac{dW_{\parallel}}{dt} = \mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz} + B \frac{d\mu}{dt} - \mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz} = 0$$

Magnetický moment se při pohybu částice v pomalu konvergentním magnetickém poli nemění!!!

Pozorujeme přelévání kinetické energie mezi rovnoběžnou a kolmou složkou kinetické energie.

$$\frac{d\mu}{dt} = 0$$

První adiabatický invariant

Dipólový moment gyrující částice, je a diabatickým invariantem!

Podívejme se na zachování kinetické energie částice gyrující ve slabě konvergentním **B** poli.

Zákon zachování KE: $W = W_{\perp} + W_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$

- Pro kolmou složku $W_{\perp} = \mu B$, časová změna ($dz = v_{\parallel} dt$)

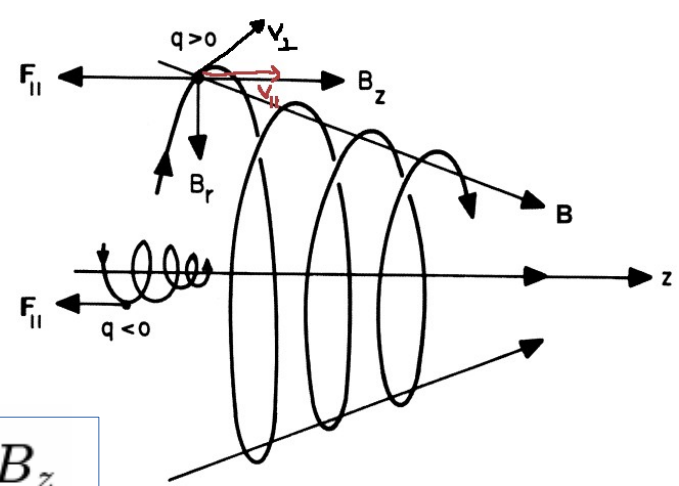
$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \mu \frac{dB}{dt} + B \frac{d\mu}{dt} = \mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz} + B \frac{d\mu}{dt}$$

- Pro časovou změnu rovnoběžné složky $W_{\parallel}$ započítáme působení síly F_z podle rovnice (3):

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = F_z = -\mu \frac{dB}{dz} \quad \cdot v_{\parallel}$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz}$$

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$



$$F_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3)$$

Magnetické pole bez elektrického nezmění kinetickou energii částice:

$$\frac{dW}{dt} = 0 = \frac{dW_{\perp}}{dt} + \frac{dW_{\parallel}}{dt} = \mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz} + B \frac{d\mu}{dt} - \mu v_{\parallel} \frac{dB}{dz} = 0$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0$$

Adiabatické zachování μ v časově proměnném $\mathbf{B}$ poli.

Bude se μ zachovávat i v homogenním magnetickém poli, které v čase sílí, nebo slábne?

Časově proměnné magnetické pole povede na vznik vířivého $\mathbf{E}$. Uvažme změnu $W_{\perp}$ v důsledku tohoto elektrického pole

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}) = q (\mathbf{E} + (\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}) \times \mathbf{B}) \quad \left| \cdot \mathbf{v}_{\perp} \right.$$

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp})$$

Změna $W_{\perp}$ za periodu gyrace

$$\begin{aligned} \Delta W_{\perp} &= q \int_0^{T_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp} dt \simeq q \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \\ &= q \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -q \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Protože $\mathbf{B} \updownarrow \mathbf{S}$ můžeme psát (ověřte si, že to platí jak pro kladně tak pro záporně nabitou částici!!!)

$$\Delta W_{\perp} = -q \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = q \int_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) dS = q \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) S$$

Označíme-li ΔB změnu B za jednu gyroperiodu, pak

$$\frac{\partial B}{\partial t} \simeq \omega_c \frac{\Delta B}{2\pi} \implies \Delta W_{\perp} = \frac{1}{2} q \omega_c r_c^2 \Delta B = \mu \Delta B$$

Protože $W_{\perp} = \mu B$, proto změna $\Delta W_{\perp}$ může být buď změnou ΔB nebo změnou $\Delta \mu$:

$$\Delta W_{\perp} = B \Delta \mu + \mu \Delta B.$$

Zároveň platí

$$\Delta W_{\perp} = \mu \Delta B$$

proto

$$\Delta \mu = 0$$

Magnetický moment μ je invariantní i v případě, že částice je urychlována polem indukovaným pomalou změnou $\frac{\partial B}{\partial t}$.

Magnetický ohřev plazmatu

Magnetický moment μ je invariantní při pomalé změně magnetického pole. Zkusme najít další veličiny spojené s μ , které budou díky tomu také adiabaticky invariantní.

- Sílicí B povede na **kompresi** plazmatu.
- Slábnoucí B povede na **dekompresi** plazmatu.

koncentrace částic n

$N = n\pi r_c^2 L$

Podstava délky L

Počet částic

$$\Phi_m = B\pi r_c^2 = \frac{B}{n} \frac{N}{L} = const. \implies B \sim n$$

protože N ani L se houstnutím magnetického pole nemění, bude koncentrace částic růst lineárně s B .

$$r_c = \frac{mv_{\perp}}{qB} \implies q^2 B^2 \pi r_c^2 = \pi m^2 v_{\perp}^2$$

Konstanta

$$\Phi_m = B(\pi r_c^2) = \frac{\pi m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B} = \left(\frac{m\pi}{q^2} \right) \frac{2mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu$$

Kompresie a dekomprese mají vliv jen na $W_{\perp}$ částic a neovlivňuje $W_{\parallel}$. Pro ohřev plazmatu je nutné mezi kompresí a dekompresí nechat systém chvíli relaxovat srážkami. Ty převedou část energie uložené po kompresi v $W_{\perp}$ do $W_{\parallel}$.

Cyklus:

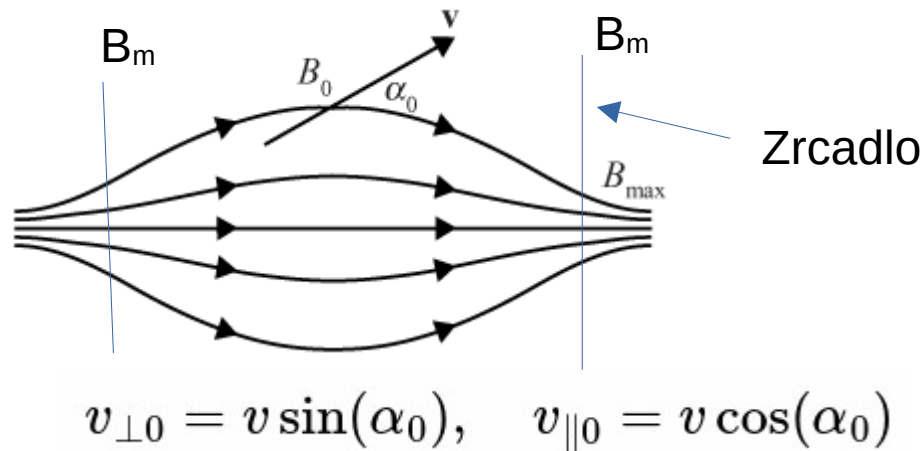
[: $\longrightarrow$ Kompresie $\longrightarrow$ Relaxace $\longrightarrow$ Dekompresie $\longrightarrow$:]

vede na *magnetický ohřev plazmatu*.

Časová škála gyrace T_c musí být mnohem kratší než časová škála komprese T_k a ta musí být mnohem kratší než časová škála relaxace plazmatu do tepelné rovnováhy T_r :

$$T_c \ll T_k \ll T_r.$$

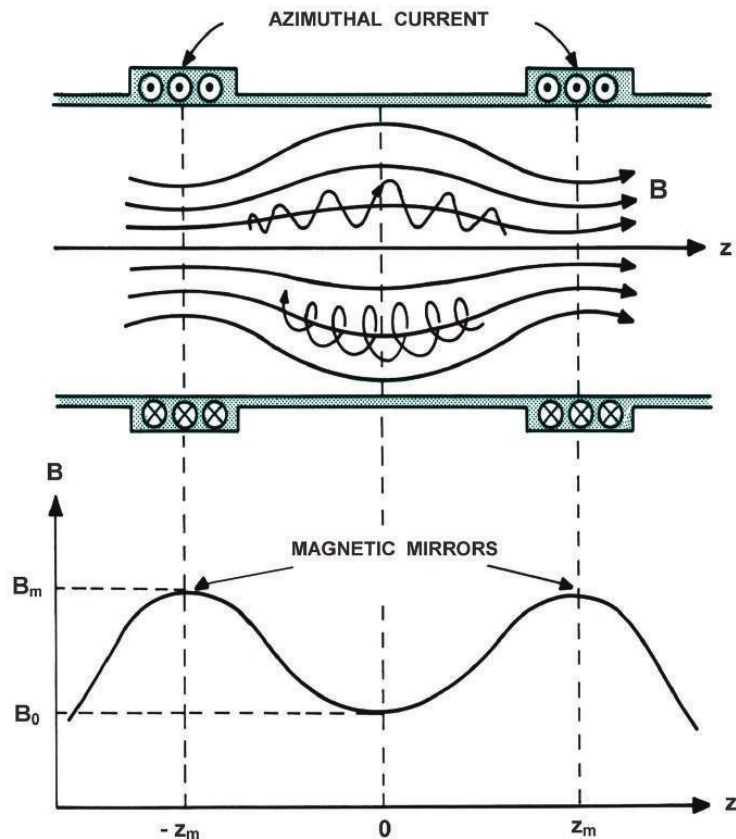
Magnetické zrcadlo



Při $\alpha_0 = \pi/2$ nemá částice žádnou podélnou složku rychlosti a bude sedět (gyrovat) uprostřed magnetické nádoby. Vypustíme-li ji mimo střed nádoby, bude vytlačována ze silícího magnetického pole.

Při $\alpha_0 = 0$ posíláme částici podél siločáry a magnetické pole na ní nemá vliv. Taková částice projde zrcadlem skrz.

Magnetická nádoba



Zrcadlová rovnice

Analyzujme případ kdy $\alpha_0 \in (0, \pi/2)$, kdy částice se vydá vstříc zrcadlu!

Celková kinetická energie částice musí být zachována

$$\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel 0}^2 = \frac{1}{2}mv_{\perp m}^2 + 0 \quad v_{\parallel m} = 0$$

Magnetický moment se také zachovává:

$$\mu_0 = \mu_m$$

$$\frac{\sin^2(\alpha_0)}{B_0} = \frac{\sin^2(\alpha_m)}{B_m}$$

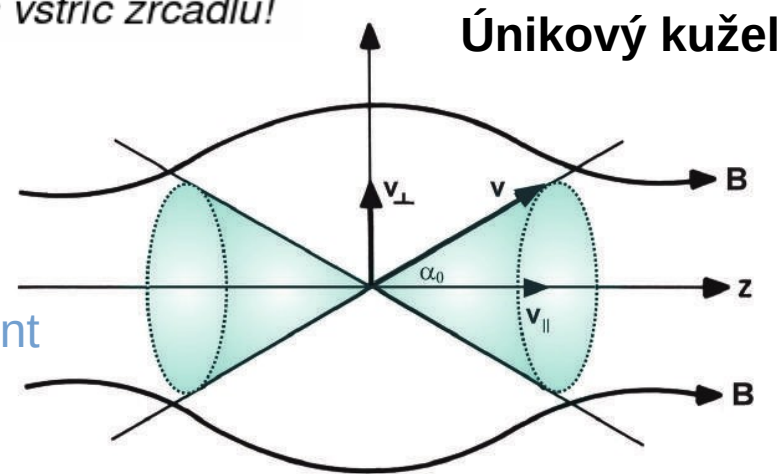
kde při odrazu je $\sin^2(\alpha_m) = 1$

$$\frac{\sin^2(\alpha_0)}{B_0} = \frac{1}{B_m}$$

$$B_m/B_0$$

Zrcadlový poměr

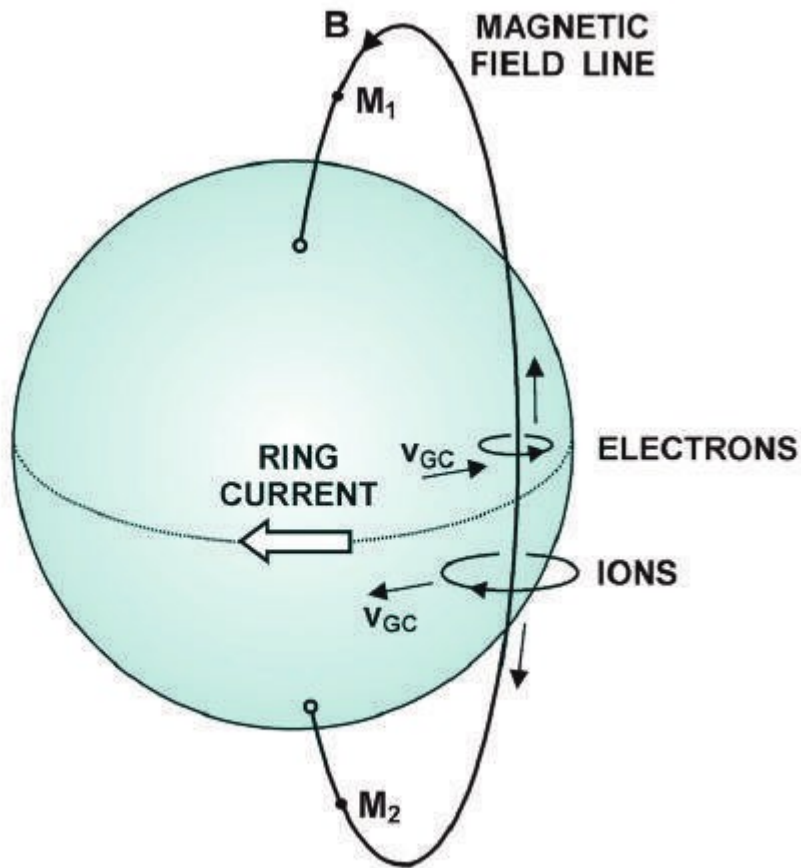
@ Mirror point



částice vstříknuté do magnetické nádoby pod úhlem α_0 do magnetického pole B_0 se odrazí, vzroste-li magnetické pole alespoň na hodnotu B_m , jinak magnetickým zrcadlem projde skrz.

je-li zadané B_0 a B_m , pak částice s $\alpha < \alpha_0$ zrcadlem projdou (únikový kužel).

Pohyb nabitých částic v okolí Země



Tři periodické pohyby nabitých částic zachycených v magnetickém poli Země:

- Gyration —————> I. Adiabatic inv.
- Bouncing mezi zrcadly —> II. Adiabatic inv.
- Drift ve vakuovém **B** poli —> III. Adiabatic inv.

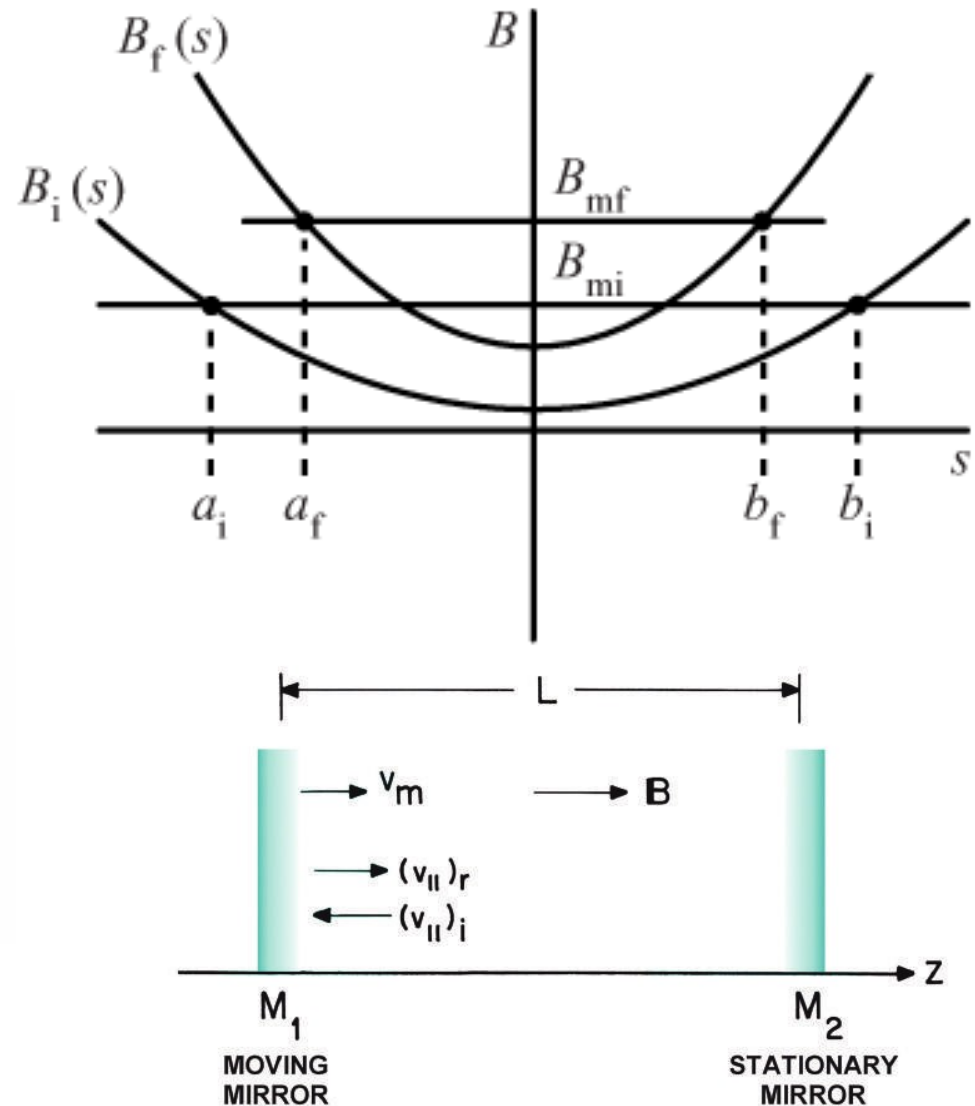
Magnetická bouře je důsledkem interakce zemské magnetosféry s rázovou vlnou slunečního větru. Při MB hustota částic zachycených v magnetickém poli země výrazně roste, roste prstencový proud, který dále zeslabuje magnetické pole země. Nabité částice pak mohou pronikat blíže k povrchu Země, vznik polární záře.

Druhý adiabatický invariant

$$J = \oint v_{\parallel} dl \simeq 2Lv_{\parallel} = \text{const.}$$

kde L je vzdálenost mezi zrcadly. Bude-li vzdálenost mezi zrcadly pomalu klesat, bude se zvyšovat $v_{\parallel}$. Do částic držených v magnetické nádobě je tak možné pumpovat energii (**Fermiho urychlování 1. druhu**). Maximální energie, které lze dosáhnout je dána parametry zrcadla. Se zvyšováním $v_{\parallel}$ se urychlovaná částice po čase ocitne v únikovém kuželu a z magnetické nádoby uteče.

$$W_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \frac{mJ^2}{8L^2}$$



Třetí adiabatický invariant

Třetí adiabatický invariant je spojený s periodou driftjících částic prstencového proudu. Magnetický tok proudovou smyčnou kterou prstencový proud vytváří je konstantní:

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

- Střední doba oběhu částic v prstencovém proudu je přibližně hodina.
- Kladně nabitě částice driftují západním směrem a záporně nabitě driftují východním.
- Magnetické pole Země není vždy tak klidné aby se měnilo adiabaticky vzhledem k periodě částic v prstencovém proudu.

